

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ROGER CUPPENS

**Décomposition des fonctions caractéristiques
indéfiniment divisibles de plusieurs variables
à spectre de Poisson continu**

Annales de l'I. H. P., section B, tome 5, n° 2 (1969), p. 123-133

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1969__5_2_123_0

© Gauthier-Villars, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Décomposition des fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles de plusieurs variables à spectre de Poisson continu

par

Roger CUPPENS

RÉSUMÉ. — Soit f une fonction caractéristique indéfiniment divisible définie sur \mathbb{R}^n , sans facteur normal et telle que la mesure apparaissant dans sa représentation de Lévy-Khintchine admette une dérivée ϕ continue presque partout. Alors f n'a pas de facteur indécomposable si et seulement si il existe un ouvert convexe A vérifiant $A \cap (2)A = \phi$ et tel que $\phi(x) = 0$ pour presque tout x n'appartenant pas à A .

SUMMARY. — Let f be an infinitely divisible characteristic function defined on \mathbb{R}^n , without normal factor and such that the measure appearing in its Lévy-Khintchine representation has an almost everywhere continuous derivative ϕ . Then f has no indecomposable factor if and only if there exists an open convex set A satisfying $A \cap (2)A = \phi$ and such that $\phi(x) = 0$ for almost every x which does not belong to A .

I. — INTRODUCTION

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^n par

$$(1.1) \quad \log f(t) = \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} [\exp(i(t, x)) - 1 - i(t, x)(1 + |x|^2)^{-1}] \phi(x) dx$$

où $(t, x) = t_1 x_1 + \dots + t_n x_n$ désigne le produit scalaire des vecteurs $t = (t_1, \dots, t_n)$ et $x = (x_1, \dots, x_n)$, $|x|^2 = (x, x)$ et où ϕ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$, positive ou nulle et continue presque partout et vérifiant :

$$\int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} |x|^2 (1 + |x|^2)^{-1} \phi(x) dx < +\infty.$$

Si on définit la mesure μ par

$$\mu(B) = \int_{B - \{0\}} \phi(x) dx$$

pour tous les ensembles boréliens B de \mathbb{R}^n , on voit que les conditions du théorème de représentation de Lévy-Khintchine ([5], p. 214-221) sont vérifiées et f est donc une fonction caractéristique indéfiniment divisible. Dans le cas $n = 1$, nous avons dans [3] donné une condition nécessaire et suffisante pour que f appartienne à la classe I_0 des fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles sans facteurs indécomposables. Nous nous proposons d'étendre ce résultat au cas $n > 1$.

Pour énoncer notre résultat, nous définissons $(m)A$ et $(\infty)A$ par $(1)A = A$; $(m)A = (m-1)A (+)A$; $(\infty)A = \bigcup_{m=1}^{\infty} (m)A$, où $(+)$ désigne la somme vectorielle de deux ensembles. Nous avons alors le

THÉORÈME 1. — La fonction caractéristique f définie par (1.1) appartient à I_0 si et seulement si

$$\phi(x) = 0 \quad \text{p. p.}$$

en dehors d'un ensemble convexe A vérifiant

$$A \cap (2)A = \emptyset.$$

II. — SUFFISANCE DE LA CONDITION

La suffisance de la condition du théorème 1 se déduit immédiatement du théorème suivant qui est une extension d'un résultat de I. V. Ostrovskiy ([6], Théorème 1).

THÉORÈME 2. — Soit f la fonction caractéristique indéfiniment divisible définie par

$$\log f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} [\exp(i(t, x)) - 1] d\mu(x).$$

Si la mesure μ est concentrée ⁽¹⁾ dans un ensemble ouvert convexe A vérifiant

$$A \cap (2)A = \phi,$$

alors f appartient à I_0 .

Nous déduisons ce résultat du théorème suivant qui généralise un résultat obtenu indépendamment par I. V. Ostrovskiy ([6], Théorème 3) et l'auteur ([1], Théorème 8.1) et étendu récemment par E. Lukacs et l'auteur [4].

THÉORÈME 3. — Soient f, f_1, f_2 des fonctions caractéristiques définies sur \mathbb{R}^n telles que

$$f(t) = f_1(t)f_2(t) \quad (t \in \mathbb{R}^n).$$

Si

$$(2.1) \quad \log f(t) = \int_D [\exp(i(t, x)) - 1] d\mu(x)$$

où $D = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_1 \geq 0, x \neq (0, \dots, 0)\}$ et μ est une mesure à variation bornée sur D , alors

$$(2.2) \quad \log f_j(t) = iP_j(t) + \int_D [\exp(i(t, x)) - 1] d\mu_j(x) \quad (j = 1, 2)$$

où P_j est une forme linéaire réelle et μ_j une mesure à variation bornée sur D .

Si, de plus, μ est concentré dans un ensemble A , μ_j est concentré dans $T \cap (\infty)A$ où T est la fermeture convexe de A .

Démonstration du théorème 3. — On déduit de (2.1) que

$$f(t) = C \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_D \exp(i(t, x)) d\mu^{*m}(x) \right\}$$

où $C = \exp \left\{ - \int_D d\mu(x) \right\}$ et où μ^{*m} désigne la m -ième convolution de μ avec lui-même. La probabilité p associée à f est donc

$$p = C \left\{ \varepsilon + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \mu^{*m} \right\}$$

⁽¹⁾ Une mesure μ est concentrée dans un ensemble A si $\mu(B) = \mu(A \cap B)$ pour tout ensemble borélien B de \mathbb{R}^n .

où ε est la probabilité dégénérée à l'origine. p est donc concentré dans l'ensemble $\{0\} \cup (\infty)A$ qui est contenu dans D et

$$p(\{0\}) > 0.$$

Soient p_1 et p_2 les probabilités associées à f_1 et f_2 . On peut trouver des vecteurs $\alpha_j = (\alpha_{j,1}, \dots, \alpha_{j,n})$ ($j = 1, 2$) tels que

$$\begin{aligned} p_j(\{x : x_1 \geq \alpha_{j,1}\}) &= 1 & (j = 1, 2), \\ p_j(\{\alpha_j\}) &> 0 & (j = 1, 2), \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

et tels que pour tous les ensembles boréliens B de \mathbb{R}^n

$$p_j(B) = C_j \varepsilon(B - \alpha_j) + q_j(B - \alpha_j) \quad (j = 1, 2)$$

où q_j est une mesure concentrée dans $(\infty)A$. On peut supposer que $\alpha_j = 0$, ce qui revient à multiplier $f_j(t)$ par $\exp[i(\alpha_j, t)]$.

On déduit des théorèmes 3.1 et 3.3 de [I] que f_j appartient à M_Γ ⁽¹⁾ où $\Gamma = \{t = (t_1, \dots, t_n) : t_1 \geq 0, t_2 = \dots = t_n = 0\}$ et donc que

$$f_j(t) = C_j + \int_D \exp(i(t, x)) dq_j(x) \quad (\text{Im } t_1 \geq 0; t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R})$$

($j = 1, 2$). De plus, on peut trouver $k_j > 0$ tel que

$$(2.3) \quad \int_D \exp(-k_j x_1) dq_j(x) < C_j \quad (j = 1, 2).$$

En introduisant la mesure r_j définie pour tous les ensembles boréliens B de \mathbb{R}^n par

$$r_j(B) = \int_B \exp(-k_j x_1) dq_j(x),$$

nous voyons que r_j est concentré dans $(\infty)A$ et que

$$f_j(t + ik_j \theta_1) = C_j + \int_D \exp(i(t, x)) dr_j(x) \quad (\text{Im } t_1 \geq -k_j; t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R})$$

⁽¹⁾ On dit que la fonction caractéristique f de la probabilité p appartient à M_Γ si

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-(y, x)) dp(x)$$

converge pour $y \in \Gamma$.

($j = 1, 2$) où θ_1 est le vecteur unitaire de l'axe des t_1 et par conséquent

$$\log f_j(t + ik_j\theta_1) = \log C_j + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{mC_j^m} \left[\int_{\mathbb{D}} \exp(i(t, x)) dr_j(x) \right]^m$$

où (2.3) assure la convergence de la série. En posant

$$v_j = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{mC_j^m} r_j^{*m},$$

on obtient une mesure v_j concentrée dans $(\infty)A$ et telle que

$$\log f_j(t + ik_j\theta_1) = \log C_j + \int_{\mathbb{D}} \exp(i(t, x)) dv_j(x) \quad (\text{Im } t_1 \geq -k_j; t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}).$$

Si nous posons

$$\mu_j(\mathbb{B}) = \int_{\mathbb{B}} \exp(k_j x_1) dv_j(x)$$

pour tous les ensembles boréliens \mathbb{B} de \mathbb{R}^n , nous voyons que

$$\log f_j(t) = \log C_j + \int_{\mathbb{D}} \exp(i(t, x)) d\mu_j(x) \quad (t \in \mathbb{R}^n)$$

où μ_j est une mesure concentrée dans $(\infty)A$. Ceci est la représentation (2.2) où C_j est déterminé par la condition $\log f_j(0) = 0$.

Si maintenant la fermeture convexe T de A n'est pas tout le demi-espace $\{x; x_1 \geq 0\}$, nous utilisons le lemme suivant :

LEMME. — Soient f, f_1, f_2 des fonctions caractéristiques telles que

$$f(t) = \exp [g(t)] = f_1(t)f_2(t) \quad (t \in \mathbb{R}^n)$$

et Γ un cône convexe issu de l'origine. Si f est une fonction caractéristique appartenant à M_{Γ} et sans zéros dans $\mathbb{R}^n + i\Gamma$ et si

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} r^{-1} \log [|g(ir\theta)|] \leq h(\theta)$$

où h est une fonction positivement homogène de $\theta \in \Gamma$, alors f_j a la forme

$$f_j(t) = \exp [g_j(t)] \quad (t \in \mathbb{R}^n + i\Gamma)$$

et

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} r^{-1} \log [|g_j(ir\theta)|] \leq h(\theta).$$

La démonstration est semblable à celle du théorème 2.5 de [J] et sera

donc omise. La deuxième assertion du théorème se déduit alors d'une extension du théorème classique de Plancherel et Pólya (voir Ramachandran [7], théorème A II a).

Démonstration du théorème 2. — Si pour un ensemble convexe A , $A \cap (2)A = \phi$, il est évident que l'origine n'appartient pas à A . On peut donc trouver un système d'axes tel que A soit tout entier dans le demi-espace $D = \{x : x_1 \geq 0\}$. On obtient alors du théorème précédent la représentation (2.2) pour tout facteur f_j de f où μ_j est une mesure concentrée dans $T \cap (\infty)A = A$. Donc la probabilité p_j de f_j est donnée pour tous les ensembles boréliens B de \mathbb{R}^n par

$$p_f(B) = C_j \varepsilon(B - \alpha_j) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \mu_j^{*m}(B - \alpha_j)$$

où $\alpha_j \in \mathbb{R}^n$. Mais des hypothèses du théorème, on déduit que pour $B \subset A$

$$\mu_j(B) = p_f(B + \alpha_j) \geq 0,$$

ce qui entraîne que f_j est indéfiniment divisible puisque μ_j est concentré dans A et démontre le théorème.

III. — NÉCESSITÉ DE LA CONDITION

La nécessité de la condition du théorème 1 se déduit immédiatement des théorèmes suivants qui sont des extensions respectives des théorèmes 1 de [2] et [3], les idées de démonstration étant les mêmes.

THÉORÈME 4. — Soit f la fonction caractéristique définie par

$$\log f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} [\exp(i(t, x)) - 1] \alpha(x) dx$$

où

$$\alpha(x) = \begin{cases} \rho & \text{si } x \in D_j = \{|x - a_j| < r\} \quad (j = 1, \dots, m), \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

ρ et r étant des nombres positifs et a_j des vecteurs non nuls de \mathbb{R}^n tels que

$$(3.1) \quad \sum_{j=1}^m \lambda_j a_j = 0$$

(λ_j entiers positifs). Alors f n'appartient pas à I_0 .

THÉORÈME 5. — Soit f la fonction caractéristique définie par

$$\log f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} [\exp(i(t, x)) - 1] \alpha(x) dx$$

où

$$\alpha(x) = \begin{cases} \rho & \text{si } x \in D_j = \{ |x - a_j| < r \} \quad (j = 1, \dots, m), \\ \rho & \text{si } x \in E_j = \{ |x - b_j| < r \} \quad (j = 1, 2), \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

ρ et r étant des nombres positifs et a_j et b_j des vecteurs de \mathbb{R}^n tels que

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j a_j = (b_1 + b_2) \sum_{j=1}^m \lambda_j$$

(λ_j entiers positifs). Alors f n'appartient pas à I_0 .

Démonstration du théorème 4. — On peut, sans restreindre la généralité, supposer que a_1, \dots, a_{m-1} ne vérifient pas une relation de la forme (3.1), que $m > 2$ et que

$$(3.2) \quad r < \frac{2}{3} \inf_{1 \leq j \leq m} |a_j|.$$

Soient maintenant α_k et β_k les fonctions définies par

$$\alpha_k = \alpha^{*k}; \quad \beta_k = \beta^{*k}$$

où

$$\beta(x) = \begin{cases} -\varepsilon \rho & \text{si } x \in C = \{ |x| < r/2 \}, \\ \alpha(x) & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Si nous montrons que pour une valeur positive de ε

$$(3.3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \beta_k(x) \geq 0$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors la fonction g définie par

$$\log g(t) = \int_{\mathbb{R}^n} [\exp(i(t, x)) - 1] \beta(x) dx$$

est une fonction caractéristique qui n'est pas indéfiniment divisible et divise f , ce qui démontrerait le théorème.

Soit M_k l'ensemble défini par

$$M_k = \cup [(s)C(+)(q_1)D_1(+)\dots(+)(q_m)D_m]$$

où l'union est prise pour tous les entiers positifs s et tous les entiers non négatifs q_j tels que

$$s + \sum_{j=1}^m q_j = k.$$

Alors, de la définition de β_k on voit que

$$(3.4) \quad \beta_k(x) \geq 0 \quad (x \notin M_k).$$

Si nous notons A le plus petit ouvert convexe contenant tous les D_j et d le supremum de la distance de l'origine à la frontière de A , de

$$\begin{aligned} \alpha_k(x) - \beta_k(x) &= \int_{\mathbf{R}^n} \alpha_{k-1}(x-y)[\alpha_1(y) - \beta_1(y)]dy \\ &+ \int_{\mathbf{R}^n} [\beta_{k-1}(x-y) - \alpha_{k-1}(x-y)]\beta_1(y)dy, \end{aligned}$$

on montre facilement par récurrence que pour $x \in M_k$,

$$|\alpha_k(x) - \beta_k(x)| \leq \varepsilon(2\rho)^k d^{k-1},$$

ce qui entraîne que pour un k donné

$$(3.5) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in M_k} |\alpha_k(x) - \beta_k(x)| = 0.$$

Soit N_k l'ensemble défini par

$$N_k = \cup [(q_1)D_1(+) \dots (+)(q_m)D_m]$$

où l'union est prise pour tous les entiers non négatifs q_j tels que

$$\sum_{j=1}^m q_j = k.$$

Alors il existe un K tel que

$$(3.6) \quad M_K \subset N_K.$$

En effet, si A^* est le plus petit convexe contenant les a_j , il existe dans A^* un ensemble de points p_k ($k = 1, \dots, s$) de la forme

$$p_k = \sum_{j=1}^m \mu_j a_j \left[\sum_{j=1}^m \mu_j \right]^{-1}$$

(μ_j entiers non négatifs) et tels que

$$\sup_k [\inf_{k' \neq k} |p_k - p_{k'}|] < \frac{r}{2}$$

Si K est le p. p. c. m. de tous les $\Sigma \mu_j$, on voit que N_K contient la réunion de toutes les boules de centre Kp_k et de rayon Kr qui recouvrent $(K)A^*$. (3.6) se déduit alors de (3.2). On déduit alors de (3.6)

$$(3.7) \quad M_k \subset N_k \quad (k \geq K)$$

et, puisque $M_k \supset M_{k-1} \supset \dots \supset M_1$,

$$(3.8) \quad Q_K = \bigcup_{k=1}^{K-1} M_k \subset N_K$$

Par conséquent

$$\inf_{x \in M_k} \alpha_k(x) > 0 \quad (k \geq K)$$

et

$$\inf_{x \in M_k} \sum_{k=1}^K \frac{1}{k!} \alpha_k(x) > 0$$

Donc si $\varepsilon > 0$ est assez petit

$$(3.9) \quad \inf_{x \in M_k} \beta_k(x) \geq 0 \quad k = K, \dots, 2K - 1$$

et

$$(3.10) \quad \inf_{x \in Q_k} \sum_{j=1}^K \frac{1}{k!} \beta_k(x) \geq 0$$

Mais de (3.4), (3.9) et de

$$\beta_l(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \beta_{l-k}(x-y) \beta_k(y) dy$$

si $l > k$, on obtient

$$(3.11) \quad \beta_k(x) \geq 0 \quad k \geq K$$

quel que soit x et de (3.10) et (3.4) on obtient

$$\sum_{k=1}^K \frac{1}{k!} \beta_k(x) \geq 0$$

quel que soit x , ce qui entraîne (3.3) et démontre le théorème.

Démonstration du théorème 5. — Nous pouvons de nouveau supposer, sans restreindre la généralité que $m \geq 2$, que les a_j sont tous différents et que

$$r < \frac{2}{3} \inf (|a_j - b_1 - b_2|, |b_1|, |b_2|).$$

Si nous définissons maintenant α_k et β_k par

$$\alpha_k = \alpha^{*k}; \quad \beta_k = \beta^{*k}$$

où

$$\beta(x) = \begin{cases} -\varepsilon\rho & \text{si } x \in C = \left\{ |x - b_1 - b_2| < \frac{r}{2} \right\}, \\ \alpha(x) & \text{ailleurs.} \end{cases} \text{ ailleurs.}$$

nous devons de nouveau démontrer (3.3). Si nous définissons M_k par

$$M_k = \cup [(s)C(+) (q_1)D_1(+) \dots (+) (q_m)D_m(+) (r_1)E_1(+) (r_2)E_2]$$

où l'union est prise pour tous les entiers positifs s et tous les entiers non négatifs q_j et r_j tels que

$$s + r_1 + r_2 + \sum_{j=1}^m q_j = k,$$

nous obtenons, avec la même méthode que celle du théorème 4, (3.4) et (3.5).

Si maintenant nous définissons N_k par

$$N_k = \cup [(q_1)D_1(+) \dots (+) (q_m)D_m(+) (r_1)E_1(+) (r_2)E_2]$$

où l'union est prise pour tous les q_j et r_j non négatifs tels que

$$\sum_{j=1}^m q_j + r_1 + r_2 = k,$$

il existe de nouveau un K tel que (3.6) soit vérifié. On en déduit de nouveau (3.7) et de là (3.11) si $\varepsilon > 0$ est assez petit. Soit maintenant M_k pour $k < K$. Il est évident de la définition de C que

$$Q_K = \bigcup_{j=1}^{K-1} M_k \subset \bigcup_{j=1}^{2K-2} N_k$$

ce qui implique que

$$\inf_{x \in \mathbb{Q}_K} \sum_{k=1}^{2K-2} \frac{1}{k!} \alpha_k(x) > 0$$

et

$$\inf_{x \in \mathbb{Q}_K} \sum_{k=1}^{2K-2} \frac{1}{k!} \beta_k(x) \geq 0$$

si $\varepsilon > 0$ est assez petit, ce qui avec (3.4) et (3.11) implique (3.3) et démontre le théorème.

RÉFÉRENCES

- [1] R. CUPPENS, Décomposition des fonctions caractéristiques des vecteurs aléatoires. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, **16**, 1967, 61-153.
- [2] R. CUPPENS, On the decomposition of infinitely divisible characteristic functions with continuous Poisson spectrum. I. *A paraître dans Proc. Amer. Math. Soc.*
- [3] R. CUPPENS, On the decomposition of infinitely divisible characteristic functions with continuous Poisson spectrum. II. *A paraître.*
- [4] R. CUPPENS et E. LUKACS, Factorization of generalized Poisson distributions. *A paraître dans Studia Sci. Math. Hungar.*
- [5] P. LÉVY, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. 2^e éd., Gauthier-Villars, Paris, 1954.
- [6] I. V. OSTROVSKIY, Décomposition des lois indéfiniment divisibles à plusieurs dimensions sans composantes gaussiennes (en russe). *Vestnik Har'kov Gos. Univ.*, **32**, 1966, n° 14, 51-72.
- [7] B. RAMACHANDRAN, *Advanced theory of characteristic functions*. Statistical Publ. Soc. Calcutta, 1967.

Reçu le 8 novembre 1968.