ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. NEVEU

Harmonicité des moments d'une fonction aléatoire

Annales de l'I. H. P., section B, tome 5, nº 1 (1969), p. 13-29
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1969__5_1_13_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. V, n° 1, 1969, p. 13-29. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Harmonicité des moments d'une fonction aléatoire

par

J. NEVEU
Institut Henri Poincaré
Université de Paris (*)

RÉSUMÉ. — On montre que pour une fonction aléatoire réelle harmonisable définie sur R, soit $(\xi_t, t \in \mathrm{R})$, l'espace hilbertien engendré par les monômes $\xi_{t_1} \ldots \xi_{t_n}$ (n fixé; $t_1, \ldots t_n \in \mathrm{R}$) est isomorphe à un espace hilbertien de mesures sur R^n. On étudie en particulier le cas des fonctions aléatoires stationnaires.

SUMMARY. — For a real harmonizable random function defined on R, say $(\xi_t, t \in \mathrm{R})$, the Hilbert space generated by the monomials $\xi_{t_1}, \ldots \xi_{t_n}$ (n fixed; $t_1, \ldots t_n \in \mathrm{R}$) is isomorphic to a Hilbert space of measure on R^n. Special attention is given to the case of stationary random functions.

1. INTRODUCTION

Une fonction aléatoire réelle (en abrégé f. a. r.) sur R, soit $\xi = (\xi_t, t \in \mathrm{R})$, définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ est dite harmonisable d'ordre n si ses moments d'ordre n, soient $\mathrm{E}(\xi_{t_1} \ldots \xi_{t_n})$, existent et peuvent s'exprimer comme les valeurs en $(t_1, \ldots t_n)$ de la transformée de Fourier d'une

(*) Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications », dépendant de la Section n° 2 « Théories Physiques et Probabilités », associée au CNRS.

mesure bornée sur R^n. On sait que cette définition est inspirée par le cas des f. a. r. stationnaires et continues dans L^2 qui sont harmonisables d'ordre 2 en vertu d'un théorème de Bochner; on sait aussi que dans ce cas le sous-espace fermé de $L^2(\Omega, \mathscr{A}, P)$ engendré par les $\xi_t (t \in R)$ est naturellement isomorphe à l'espace fonctionnel $L^2(R, \nu_\xi)$ associé à la mesure spectrale ν_ξ de la f. a. r. considérée.

Nous montrons dans ce travail [proposition 2.2] que pour toute f. a. r. harmonisable d'ordre $2n$ il existe un espace hilbertien formé de mesures bornées sur R^n, soit M_n, qui est naturellement isomorphe au sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$ engendré par les monômes $\xi_{t_1}, \ldots \xi_{t_n}$ $(t_1, \ldots t_n \in R)$. Dans le cas où la f. a. r. harmonisable d'ordre $2n$ est stationnaire, nous établissons dans un 2e paragraphe que le flot $(\theta_t, t \in R)$ des translations associé à la f. a. r. stationnaire ξ induit dans l'espace M_n le groupe des multiplications des mesures par les fonctions

$$\exp\left[2\pi i t\left(\sum_1^n x_m\right)\right] \qquad (t \in R).$$

Les résultats que nous avons obtenus complètent notamment ceux de Sinaï.

On notera que notre définition de l'harmonicité d'ordre n diffère un peu de celle introduite originellement par Fortet [*1*]: une f. a. r. de la classe Φ_n au sens de [*1*] est une f. a. r. harmonisable de tout ordre $\leqq n$ au sens de notre définition. Cette modification s'imposait pour pouvoir énoncer la proportion suivant laquelle une fonction harmonisable d'ordre $2n$ est automatiquement harmonisable d'ordre n.

Nous terminerons cette introduction en énoncant le résultat suivant qui est fondamental pour la suite ; ce résultat est connu [*0*] et nous n'en rappelons la démonstration que pour permettre une étude plus facile de l'ensemble de notre travail.

PROPOSITION 1.1. — *Soit* $(E, \mathscr{I})$ *un espace mesurable et soit* Λ *un espace vectoriel sur* C *de fonctions mesurables bornées à valeurs complexes définies sur* $(E, \mathscr{I})$*; on suppose que pour toute mesure complexe bornée* λ *sur* $(E, \mathscr{I})$, *on ne peut avoir* $\lambda(f) = 0$ *pour tout* $f \in \Lambda$ *que si la mesure* λ *est nulle. Soit* μ *une mesure complexe bornée sur* $(E, \mathscr{I})^2$, *hermitienne et de type positif sur* Λ *c'est-à-dire telle que :*

$$\int_{E^2} \mu(dxdy) f(x) \overline{f(y)} \geqq 0 \qquad \forall f \in \Lambda.$$

On note m la mesure positive bornée sur $(E, \mathscr{I})$ *définie par*

$$m(F) = |\mu|(E \times F) \qquad (F \in \mathscr{I})$$

avec

$$|\mu| = (\mathrm{Re}\,\mu)^+ + (\mathrm{Re}\,\mu)^- + (\mathrm{Im}\,\mu)^+ + (\mathrm{Im}\,\mu)^-.$$

Il existe alors un espace de Hilbert unique sur C, *soit* $M_\mu(E, \mathscr{I})$ *formé de mesures complexes bornées sur* $(E, \mathscr{I})$ *tel que :*

a) *toute mesure* $\nu \in M_\mu(E, \mathscr{I})$ *est absolument continue par rapport à m ; en outre sa densité appartient à* $L^2_C(E, \mathscr{I}, m)$ *et vérifie*

$$\left\| \frac{d\nu}{dm} \right\|_{L^2(m)} \leqq \| \nu \|_{M_\mu} ;$$

b) *pour tout* $f \in L^2_C(E, \mathscr{I}, m)$ (*donc pour tout* $f \in \Lambda$) *la mesure complexe bornée* μ_f *définie par :*

$$\mu_f(F) = \int_{E \times F} f(x)\mu(dxdy)$$

appartient à M_μ *et le produit scalaire de* M_μ *est tel que* $\langle \nu, \mu_f \rangle = \nu(\bar{f})$ *pour toute mesure* $\nu \in M_\mu$;

c) *le sous-espace vectoriel* $[\mu_f, f \in \Lambda]$ *de* M_μ *et* a fortiori *le sous-espace vectoriel* $[\mu_f, f \in L^2_C(E, \mathscr{I}, m)]$ *sont denses dans* M_μ.

Démonstration. — A tout $f \in \Lambda$ associons la mesure μ_f définie par la formule du (*b*) ci-dessus et désignons par $\mathscr{M}$ l'espace vectoriel $(\mu_f, f \in E)$ de mesures ainsi obtenu. Le théorème de Fubini montre que l'on a, quels que soient $f, g \in \Lambda$:

$$\int_E \int_E \mu(dxdy) f(x)\overline{g(y)} = \mu_f(\bar{g}) = \bar{\mu}_g(f)$$

(la 2^e égalité s'obtient en tenant compte de ce que $\overline{\mu(dxdy)} = \mu(dydx)$, ce qui est une conséquence du caractère hermitien positif de μ). En notant $\langle \mu_f, \mu_g \rangle$ l'expression précédente, on définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}$ puisque cette expression ne dépend manifestement de f et de g que par l'intermédiaire de μ_f et μ_g et puisque par hypothèse cette expression est non négative si $f = g$. En outre ce produit scalaire est séparé car $\langle \mu_f, \mu_f \rangle = 0$ entraîne par l'inégalité de Schwarz que $\mu_f(\bar{g}) = \langle \mu_f, \mu_g \rangle = 0$ pour tout $g \in \Lambda$, donc que $\mu_f = 0$ par l'hypothèse faite sur Λ. Nous désignerons alors par M l'espace de Hilbert abstrait obtenu par complétion de $\mathscr{M}$ en notant par i l'application injective canonique de $\mathscr{M}$ dans M.

L'application $f \to \mu_f$ de Λ dans $\mathscr{M}$ est telle que :

$$\begin{aligned} \| \mu_f \|^2 &= \int_E \int_E \mu(dxdy) f(x) \overline{f(y)} \\ &\leqq \int_E \int_E |\mu|(dxdy) \frac{1}{2} [|f(x)|^2 + |f(y)|^2] \\ &= m(|f|^2) ; \end{aligned}$$

elle est donc continue du sous-vectoriel Λ de $L^2_C(E, \mathscr{I}, m)$ dans $\mathscr{M}$. D'autre part Λ est dense dans $L^2_C(m)$; en effet pour tout $h \in L^2_C(m)$ orthogonal à Λ la mesure $h.m$ s'annulle sur Λ, donc s'annulle identiquement ce qui implique que $h = 0$ dans $L^2_C(m)$. On en déduit l'existence d'une application de norme $\leqq 1$ de $L^2_C(m)$ dans M, soit u, telle que $u(f) = i(\mu_f)$ si $f \in \Lambda$. Comme $u[L^2_C(m)]$ est un sous-vectoriel dense de M puisqu'il contient $u(\Lambda) = i(\mathscr{M})$, l'application conjuguée u^* de M dans $L^2_C(m)$ est injective et nous permet d'identifier tout élément v de M à la mesure $u^*(v).m$ sur $(E, \mathscr{I})$; l'espace de Hilbert M devient ainsi un espace de mesures complexes bornées sur $(E, \mathscr{I})$ absolument continues par rapport à m de densités de normes L^2_C inférieures aux normes dans M des mesures respectives. L'identification précédente implique que l'on a pour tout $f \in L^2_C(m)$ et tout $v \in M$,

$$v(\bar{f}) = \langle v, u(f) \rangle_M.$$

Remarquons ensuite que pour tout $f \in \Lambda$, l'identification précédente associe la mesure μ_f à l'élément $i(\mu_f)$ de M; en effet si $g \in \Lambda$ on a :

$$i(\mu_f)[\bar{g}] = \langle i(\mu_f), u(g) \rangle_M = \langle \mu_f, \mu_g \rangle_{\mathscr{M}} = \mu_f(\bar{g})$$

et par suite $i(\mu_f) = \mu_f$ puisque la mesure $i(\mu_f) - \mu_f$ s'annule sur Λ. Il résulte donc de la construction de M que $\{ \mu_f, f \in \Lambda \}$ est dense dans l'espace de mesures M.

Pour achever la démonstration de la proposition il reste à établir la propriété (*a*). Or si $f \in \Lambda$ cette propriété est claire puisque compte tenu de l'identification de $u(f) = i(\mu_f)$ à la mesure μ_f, on a, quel que soit $v \in M$:

$$v(\bar{f}) = \langle v, u(f) \rangle_M = \langle v, \mu_f \rangle_M.$$

Si $f \in L^2_C(m)$ sans appartenir à Λ, on peut encore définir la mesure μ_f par la formule de la proposition (cette mesure ne dépend effectivement que de la classe d'équivalence de f par rapport à m) et le théorème de Fubini montre que l'on a $\mu_f(\bar{g}) = \bar{\mu}_g(f)$ pour tout $g \in \Lambda$ mais alors, comme:

$$\bar{\mu}_g(f) = \overline{\langle \mu_g, u(f) \rangle_M} = \langle u(f), u(\bar{g}) \rangle_M = u(f)[\bar{g}]$$

on voit que $u(f)$ s'identifie encore à la mesure μ_f.

2. FONCTIONS ALÉATOIRES RÉELLES HARMONISABLES

DÉFINITION 2.1. — *Une f. a. r.* $[\xi_t, t \in \mathrm{R}]$ *définie sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ *et dont le paramètre varie dans* R *est dite harmonisable d'ordre n si* $\xi_t \in \mathrm{L}^n_{\mathrm{C}}(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ *pour tout* $t \in \mathrm{R}$ *et s'il existe en outre une mesure complexe bornée* μ_n *sur* R^n *telle que :*

$$\mathrm{E}\left[\prod_1^n \xi_{t_m}\right] = \int_{\mathrm{R}^n} \exp\,(2\pi i \langle t, x \rangle)\mu_n(dx)$$

pour tout $t = (t_1, \ldots t_n) \in \mathrm{R}^n$. *La mesure* μ_n *est appelée la mesure spectrale d'ordre n de la f. a. r.* $(\xi_t, t \in \mathrm{R})$.

Comme une mesure complexe bornée sur R^n est univoquement déterminée par sa transformation de Fourier on voit sans peine *a*) que la mesure μ_n attachée à la f. a. r. $(\xi_t, t \in \mathrm{R})$ par la définition précédente est univoquement déterminée par cette f. a. r. : *b*) que la mesure μ_n est invariante par le groupe symétrique des permutations de coordonnées de R^n : *c*) que la mesure μ_n vérifie $\overline{\mu_n(dx)} = \mu_n(-dx)$ relativement à la symétrie $x \to -x$ de R^n.

On désignera par Λ_n l'espace vectoriel sur C des polynômes trigonométriques complexes sur R^n et par X_n l'unique application linéaire de Λ_n dans l'espace des variables aléatoires complexes telle que :

$$\mathrm{X}_n\,(\exp\,[2\pi i \langle t, \ldots \rangle]) = \prod_1^n \xi_{t_m} \qquad t = (t_1, \ldots t_n) \in \mathrm{R}^n.$$

Il est alors clair que la fonction $(\xi_t, t \in \mathrm{R})$ est harmonisable d'ordre n si et seulement si $\mathrm{X}_n(f) \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{C}}(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ pour tout $f \in \Lambda_n$ et s'il existe une mesure complexe bornée μ_n sur R^n telle que $\mathrm{E}[\mathrm{X}_n(f)] = \mu_n(f)$ pour tout $f \in \Lambda_n$

La proposition suivante est une conséquence directe de la proposition 1.1 du paragraphe 1.

PROPOSITION 2.2. — *On suppose que la f. a. r.* $(\xi_t, t \in \mathrm{R})$ *est harmonisable d'ordre 2n. Si* μ_{2n} *désigne la mesure spectrale d'ordre 2n de cette f. a. r., la mesure* $\tilde{\mu}_{2n}$ *définie par* $\tilde{\mu}_{2n}(dxdy) = \mu_{2n}[dx(-dy)]$ *sur* $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n$ *est hermitienne positive par rapport a l'espace* Λ_n. *On définit la mesure positive* m_n *sur* R^n *en posant* $m_n(\mathrm{F}) = |\mu_{2n}|(\mathrm{F} \times \mathrm{R}^n)$.

Il existe alors un espace de Hilbert M_n *formé de mesures complexes bor-*

nées sur $\mathbf{R}^n$ *et une application linéaire isométrique* $\tilde{X}_n$ *de* M_n *SUR le sous-espace fermé* H_n *de* $L^2_{\mathbf{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *engendré par les produits*

$$\prod_1^n \xi_{t_m}[t = (t_1, \dots t_n) \in \mathbf{R}^n]$$

tels que :

a) *toute mesure* $\nu \in M_n$ *est absolument continue par rapport à* m_n *et sa densité vérifie*

$$\left\| \frac{d\nu}{dm_n} \right\|_{L^2(m_n)} \leqq \| \nu \|_{M_n} ;$$

b) *quel que soit* $f \in L^2_{\mathbf{C}}(m_n)$, *la mesure complexe bornée* μ_f *sur* $\mathbf{R}^n$ *dé nie par*

$$\mu_f(.) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \tilde{\mu}_{2n}(dx, .)$$

appartient à M_n *et on a* $\langle \nu, \mu_f \rangle_{M_n} = \nu(\bar{f})$ *pour toute mesure* $\nu \in M_n$;

c) *le sous-vectoriel* $[\mu_f, f \in \Lambda_n]$ *de* M_n *est dense dans* M_n *et pour tout* $f \in \Lambda_n$ *on a* $\tilde{X}_n(\mu_f) = X_n(f)$.

Pour tout f dans $L^2_{\mathbf{C}}(m_n)$ n'appartenant pas à Λ_n, on conviendra de poser $X_n(f) = \tilde{X}_n(\mu_f)$.

On prendra garde pour la suite que les fonctions $\frac{d\mu_f}{dm_n}$ et $f (f \in L^2(m_n))$ sont en général distinctes [c'est seulement si la mesure $\tilde{\mu}_{2n}(dxdy)$ était concentrée sur $\{x_i = y_i (1 \leqq i \leqq n)\}$ que ces 2 fonctions seraient confondues].

Démonstration. — Dès que $\xi_t \in L^{2n}_{\mathbf{C}}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, les v. a. $X_n(f)$ appartiennent à L^2 pour tout $f \in \Lambda_n$ en vertu des inégalités de Hölder. On montre ensuite facilement que pour tout couple $f, g \in \Lambda_n$:

$$\begin{aligned} E[X_n(f)\overline{X_n(g)}] &= \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \mu_{2n}(dxdy) f(x) \overline{g(-y)} \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{\mu}_{2n}(dxdy) f(x) \overline{g(y)} \end{aligned}$$

en considérant d'abord le cas de fonctions exponentielles

$$f(x) = \exp(2\pi i \langle s, x \rangle), \qquad g(y) = \exp(2\pi i \langle t, y \rangle)$$

et en étendant ensuite le résultat par linéarité en f et anti-linéarité en g. La formule ainsi établie montre que $\tilde{\mu}_{2n}$ est hermitienne positive par rapport à Λ_n et comme toute mesure complexe bornée sur R^n ne peut s'annuler sur Λ_n sans être nulle, la proposition est applicable à l'espace Λ_n et à la mesure $\tilde{\mu}_{2n}$. L'existence de l'espace de Hilbert M_n avec les propriétés énoncés ci-dessus résultent donc de la proposition citée. En outre comme X_n est une application linéaire isométrique du sous-espace dense Λ_n de M_n dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathscr{A}, P)$, le prolongement isométrique de X_n à M_n, soit $\tilde{X}_n$, possède les propriétés énoncées dans la proposition ci-dessus.

COROLLAIRE 2.3. — *La f. a. r. $(\xi_t, t \in R)$ est harmonisable d'ordre n dès qu'elle est harmonisable d'ordre 2n. En outre si μ_n est la mesure spectrale d'ordre n la mesure $\bar{\mu}_n$ appartient à l'espace M_n, vérifie $\| \bar{\mu}_n \|_{M_n} \leqq 1$ ainsi que :*

$$E[\tilde{X}_n(v)] = \langle v, \bar{\mu}_n \rangle_{M_n} \qquad \textit{pour tout} \qquad v \in M_n,$$
$$E[X_n(f)] = \mu_n(f) \qquad \textit{pour tout} \qquad f \in L^2(R^n, m_n).$$

Démonstration. — La forme linéaire sur M_n que définit $E[\tilde{X}_n(.)]$ est de norme inférieure à 1 puisque :

$$E[\tilde{X}_n(v)] \leqq [E(|\tilde{X}_n(v)|^2]^{1/2} = \| v \|_{M_n}.$$

Comme M_n est un espace de Hilbert, il existe une mesure dans M_n, soit ε_n, telle que :

$$E[\tilde{X}_n(v)] = \langle v, \varepsilon_n \rangle \qquad (v \in M_n)$$

En particulier on a donc pour tout $f \in \Lambda_n$:

$$E[X_n(f)] = \langle \mu_f, \varepsilon_n \rangle = \bar{\varepsilon}_n(f)$$

et cela montre que la f. a. r. $(\xi_t, t \in R)$ est harmonisable d'ordre n, la mesure μ_n associée étant égale à $\bar{\varepsilon}_n$.

Remarques. — 1) Il résulte de l'invariance de la mesure μ_{2n} par les permutations de coordonnées de R^{2n} : *a)* que la mesure m_n et que toute mesure $v \varepsilon M_n$ est invariante par les permutations de coordonnées de R^n : *b)* que pour tout $f \in L^2(m_n)$, la mesure μ_f ne dépend de f que par la fonction symétrisée

$$\hat{f}(x_1 \ldots x_n) = \frac{1}{n!} \sum_\sigma f(x_{\sigma_1} \ldots x_{\sigma_n})$$

puisque $\mu_f = \mu_{\hat{f}}$. On en déduit l'inégalité $\| \mu_f \|_{M_n} \leqq \| \hat{f} \|_{L^2(m_n)}$ qui améliore l'inégalité $\| \mu_f \|_{\hat{M}_n} \leqq \| f \|_{L^2(m_n)}$ trouvée précédemment.

2) Si la mesure $\tilde{\mu}_{2n}$ est portée par $B \times R^n$ pour un borélien B de R^n, alors

la mesure positive m_n sur R^n est portée par B et toute mesure $\nu \in M_n$ est aussi portée par B (puisque $\nu \ll m_n$).

3) Si la f. a. r. $(\xi_t, t \in R)$ est harmonisable d'ordre $2n$ et $2p$ (n, p entiers positifs distincts), l'image de la restriction à H_n du projecteur orthogonal de $L^2_C(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sur H_p par les isométries $\tilde{X}_n$ de M_n sur H_n et $\tilde{X}_p$ de M_p sur H_p est un opérateur linéaire contractant de M_n dans M_p, soit A_{np}. Pour tout $\nu \in M_n$, $\tilde{X}_p(A_{np}\nu)$ est donc la projection orthogonale sur H_p de $\tilde{X}_n(\nu)$ et on a la formule :

$$\begin{aligned} E[\tilde{X}_n(\nu)\overline{\tilde{X}_p(\sigma)}] &= E[\tilde{X}_p(A_{np}\nu)\tilde{X}_p(\sigma)] \\ &= \langle A_{np}(\nu), \sigma \rangle_{M_p} \end{aligned}$$

pour tout $\nu \in M_n$ et tout $\sigma \in M_p$. Remarquons que l'opérateur A_{pn} de M_p dans M_n (défini de manière analogue à A_{np}) n'est autre que l'opérateur conjugué A^*_{np}.

Si la f. a. r. $(\xi_t, t \in R)$ est harmonisable d'ordres $2n$, $2p$ et $n + p$ et si les espaces M_n et M_p sont donnés, il est facile de voir que la donnée de l'opérateur A_{np} et celle de la mesure μ_{n+p} sont équivalentes. On montre en effet facilement que si $f \in \Lambda_n$ et $g \in \Lambda_p$ on a :

$$E[X_n(f)\overline{X_p(g)}] = \int_{R^n}\int_{R^p} \mu_{n+p}(dxdy) f(x)\overline{g(-y)}$$

tandis que la formule de l'alinéa précédent montre que :

$$\begin{aligned} E[X_n(f)\overline{X_p(g)}] &= \langle A_{np}(\mu_f^{(n)}), \mu_g^{(p)} \rangle_{M_p} \\ &= A_{np}(\mu_f^{(n)})(g) \end{aligned}$$

L'égalité que l'on en déduit pour tout $f \in \Lambda_n$, $g \in \Lambda_p$:

$$A_{np}(\mu_f^{(n)})(\overline{g}) = \int_{R^n}\int_{R^p} \mu_{n+p}(dxdy) f(x)\overline{g(-y)}$$

montre bien que μ_{n+p} et A_{np} se déterminent l'un l'autre.

3. FONCTIONS ALÉATOIRES STATIONNAIRES HARMONISABLES

Une f. a. r. $(\xi_t, t \in R)$ définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est dite stationnaire si la loi de probabilité qu'elle induit sur R^R, soit $P_\xi = P \quad (\xi_t, t \in R)^{-1}$, est invariante par le groupe $(\theta_t, t \in R)$ des translations de coordonnées de R^R. Si en outre toute fonction mesurable sur R^R invariante par le groupe $(\theta_t, t \in R)$ est p. s. constante pour P_ξ, la f. a. r. stationnaire donnée est dite ergodique. Nous simplifierons les notations sans nuire à la généralité en supposant dans la suite que la f. a. r. $(\xi_t,\ t \in \mathrm{R})$ est celle formée par les coordonnées de R^{R}.

Le théorème de Bochner de représentation des fonctions définies positives implique, comme il est bien connu, qu'une f. a. r. stationnaire $(\xi_t,\ t \in \mathrm{R})$ est harmonisable d'ordre 2 dès que $\xi_t \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{C}}$ pour tout (= pour un) $t \in \mathrm{R}$ et que l'application $t \to \xi_t$ de R dans $\mathrm{L}^2_{\mathrm{C}}$ est continue. Plus exactement il existe une mesure positive bornée sur R, soit ν_ξ telle que :

$$\mathrm{E}(\xi_s \xi_t) = \int_{\mathrm{R}} e^{2\pi i(t-s)z} \nu_\xi(dz) \qquad (s,\ t \in \mathrm{R})$$

ce qui signifie que la mesure spectrale d'ordre 2, soit μ_2, associée à la f. a. r. $(\xi_t,\ t \in \mathrm{R})$ est concentrée sur la seconde bissectrice $[x + y = 0]$ de R^2. La première partie de la proposition suivante rappelle (cf. [*1*]) que ce dernier résultat sur le support de μ_2 n'est pas particulier à l'ordre 2.

PROPOSITION 3.1. — *Si la f. a. r. stationnaire* $(\xi_t,\ t \in \mathrm{R})$ *est harmonisable d'ordre n, la mesure* μ_n *sur* R^n *associée est portée par l'hyper-plan*

$$\left\{ \sum_1^n x_m = 0 \right\}.$$

Si la f. a. r. stationnaire $(\xi_t,\ t \in \mathrm{R})$ *est harmonisable d'ordre* $2n$, *on a pour toute mesure* ν *de l'espace de Hilbert* M_n :

$$\tilde{\mathrm{X}}_n(\nu) \circ \theta_t = \tilde{\mathrm{X}}_n(\chi_t^n \, . \, \nu)$$

et pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{C}}(m_n)$:

$$\mathrm{X}_n(f) \circ \theta_t = \mathrm{X}_n(\chi_t^n f)$$

quel que soit $t \in \mathrm{R}$, *à condition de définir la fonction* χ_t^n *sur* R^n *par*

$$\chi_t^n(x) = \exp \left[2\pi i t \left(\sum_1^n x_m \right) \right].$$

Démonstration. — Si $(\xi_t,\ t \in \mathrm{R})$ est harmonisable d'ordre n, on a quels que soient $s \in \mathrm{R}^n$ et $t \in \mathrm{R}$:

$$\int_{\mathrm{R}^n} \exp\,[2\pi i \langle s, x \rangle] \chi_t(x) \mu(dx) = \mathrm{E}\left[\prod_1^n \xi_{s_m + t} \right]$$

$$= \mathrm{E}\left(\prod_1^n \xi_{s_m} \right) = \int_{\mathrm{R}^n} \exp 2\pi i \langle s, x \rangle \, \mu_n(dx)$$

On en conclut que $\chi_t^n . \mu_n = \mu_n$ sur R^n pour tout $t \in R$, ce qui n'est possible que si μ_n est concentrée sur

$$\left\{ \sum_1^n x_m = 0 \right\}.$$

Pour toute f. a. r. stationnaire $(\xi_t, t \in R)$ on vérifie immédiatement que $X_n(f) \circ \theta_t = X_n(\chi_t^n f)$ pour tout $n \geqq 1$, $t \in R$ et pour toute fonction $f \in \Lambda_n$. Si la f. a. r. stationnaire $(\xi_t, t \in R)$ est harmonisable d'ordre $2n$, le sous-espace H_n de $L_C^2(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est invariant par le groupe des transformations unitaires $Z \to Z \circ \theta_t (t \in R)$ et on peut donc considérer le groupe $(T_t, t \in R)$ de transformations unitaires de M_n, image de groupe $[\theta_t, t \in R]$ par l'isométrie $\tilde{X}_n$ de M_n sur H_n; on a par définition :

$$\tilde{X}_n(T_t \nu) = \tilde{X}_n(\nu) \circ \theta_t \qquad (t \in R, \nu \in M_n).$$

Montrons que $T_t \nu = \chi_t^n . \nu$.

En vertu de $X_n(f) = \tilde{X}_n(\mu_f)(f \in \Lambda_n)$, l'égalité $X_n(f) \circ \theta_t = X_n(\chi_t^n f)$ peut encore s'écrire $T_t \mu_f = \mu_{\chi_t^n . f}(f \in \Lambda_n)$. On a alors quels que soient $\nu \in M_n$ et $f \in \Lambda_n$:

$$\begin{aligned} T_t \nu(\bar{f}) &= \langle T_t \nu, \mu_f \rangle_{M_n} \\ &= \langle \nu, T_{-t} \mu_f \rangle_{M_n} \\ &= \langle \nu, \mu_{\chi_{-t}^n f} \rangle_{M_n} = \nu[\overline{\chi_{-t}^n f}] \end{aligned}$$

comme $\overline{\chi_{-t}^n} = \chi_t^n$, on a bien démontré que $T_t \nu = \chi_t^n . \nu$ pour tout $\nu \in M_n$.

Quant à l'égalité $X_n(f) \circ \theta_t = X_n(\chi_t^n f)$ que l'on a démontrée ci-dessus lorsque $f \in \Lambda_n$, on l'étend facilement par un passage à la limite à tout $f \in L_C^2(m_n)$ puisque Λ_n est dense dans $L^2(m_n)$ et que l'application X_n de $L_C^2(m_n)$ dans $L_C^2(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est contractante.

On pourra remarquer que lorsque $\nu = \mu_f (f \in L^2(m_n))$ l'égalité

$$\tilde{X}_n(\nu) \circ \theta_t = \tilde{X}_n(\chi_t^n . \nu)$$

de la proposition 3.1 s'écrit encore

$$X_n(f) \circ \theta_t = \tilde{X}_n(\chi_t^n . \mu_f);$$

en comparant avec la formule

$$X_n(f) \circ \theta_t = X_n(\chi_t^n . f),$$

on voit donc que $\chi_t^n . \mu_f = \mu_{\chi_t^n . f}$ pour tout $f \in L^2(m_n)$. Cette identité est d'ailleurs facile à vérifier directement sur la définition des μ_f.

COROLLAIRE 3.2. — *Si la f. a. r. stationnaire* $(\xi_t, t \in \mathrm{R})$ *est ergodique et harmonisable d'ordre 2n, la v. a.* $\tilde{\mathrm{X}}_n(\nu)$ *est constante pour toute mesure* ν *de* M_n *portée par l'hyperplan*

$$\left(\sum_1^n x_m = 0\right)$$

de R^n *et on a plus précisément :* $\tilde{\mathrm{X}}_n(\nu) = \langle \nu, \bar{\mu}_n \rangle$ *où* μ_n *désigne la mesure spectrale d'ordre n. En particulier si f est une fonction de* $\mathrm{L}^2(m_n)$ *nulle en dehors de l'hyperplan précédent on a* $\mathrm{X}_n(f) \underset{\text{p. s.}}{=} \mu_n(f)$.

Démonstration. — Si la mesure ν de M_n est concentrée sur l'hyperplan

$$\left\{\sum_1^n x_m = 0\right\},$$

on a $\chi_t^n . \nu = \nu$ pour tout $t \in \mathrm{R}$ il résulte alors de la proposition précédente que $\tilde{\mathrm{X}}_n(\nu)$ est invariante par le groupe $(\theta_t, t \in \mathrm{R})$ donc que $\tilde{\mathrm{X}}_n(\nu)$ est p. s. constante en vertu de l'ergodicité de la f. a. r. $(\xi_t, t \in \mathrm{R})$. On a alors

$$\tilde{\mathrm{X}}_n(\nu) = \mathrm{E}[\tilde{\mathrm{X}}_n(\nu)]$$

et la fin de l'énoncé du corollaire résulte du corollaire 2.3.

LEMME 3.3. — *On suppose que la f. a. r. stationnaire* $(\xi_t, t \in \mathrm{R})$ *est harmonisable d'ordre 2n et on définit la mesure positive* λ_n *sur* R *comme la projection orthogonale dans* R^n *de* m_n *sur la droite* $\{x_1 = \ldots = x_n\}$. *Plus précisément on pose :*

$$\int_{\mathrm{R}} g(z)\lambda_n(dz) = \int_{\mathrm{R}^n} g\left(\sum_1^n x_i\right) m_n(dx) = \int_{\mathrm{R}^n}\int_{\mathrm{R}^n} g\left(\sum_1^n x_i\right) |\mu_{2n}|(dxdy).$$

Il existe alors une famille mesurable $(\tilde{\mu}_{2n}(z, .), z \in \mathrm{R})$ *de mesures complexes bornées sur* $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n$ *portées respectivement par les sous-espaces*

$$\left\{x, y : \sum_1^n x_m = \sum_1^n y_m = z\right\},$$

hermitiennes et de type positif relativement à l'espace Λ_n, *telles que :*

$$\tilde{\mu}_{2n} = \int_{\mathrm{R}} \lambda_n(dz)\tilde{\mu}_{2n}(z, .).$$

La famille de mesures $[\tilde{\mu}_{2n}(z,.)]$ *est unique à une* λ*-équivalence près. En outre l'ensemble des z pour lesquels* $\tilde{\mu}_{2n}(z,.) = 0$ *est négligeable.*

Démonstration. — Pour tout couple $f, g \in L^2_C(m_n)$ on a :

$$\begin{aligned}E[X_n(f) \circ \theta_t \overline{X_n(g)}] &= E[X_n(\chi_t^n f)\overline{X_n(g)}] \\ &= \int_{R^n}\int_{R^n} \exp\left[2\pi i t\left(\sum_1^n x_m\right)\right] f(x)\overline{g(y)}\tilde{\mu}_{2n}(dxdy) \\ &= \int_R \exp(2\pi i t z)\nu_{f,g}(dz)\end{aligned}$$

à condition de définir la mesure $\nu_{f,g}$ sur R par :

$$\nu_{f,g}(dz) = \iint_{\left\{\sum_1^n x_m \in dz\right\}} f(x)\overline{g(y)}\tilde{\mu}_{2n}(dxdy).$$

Il est clair que l'application $f, g \to \nu_{f,g}$ de $L^2(m_n) \times L^2(m_n)$ dans l'espace des mesures complexes bornées sur R est linéaire en f, anti-linéaire en g; le théorème de Bochner entraîne en outre que les mesures $\nu_{f,f}$ sont positives (puisque leurs transformées de Fourier sont définies positives).

Il est aisé de voir que les mesures $\nu_{f,g}[f, g \in L^2_C(m_n)]$ sont absolument continues par rapport à λ_n. Réciproquement tout borélien $B \subset R$ tel que $\nu_{f,f}(B) = 0$ pour tout $f \in L^2(m_n)$ est négligeable pour λ_n. On a en effet

$$|\nu_{f,g}(B)|^2 \leqq \nu_{f,f}(B)\nu_{g,g}(B) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\int_{R^n}\int_{R^n} 1_B(\Sigma x_m) f(x)\overline{g(y)}\tilde{\mu}_{2n}(dxdy) = 0$$

pour tout couple $f, g \in L^2_C(m_n)$; or cela n'est possible que si $\tilde{\mu}_{2n} = 0$ sur $(\Sigma x_m \in B) \times R^n$ ou ce qui est équivalent si $\lambda_n(B) = 0$.

Il ne reste plus alors pour démontrer le lemme qu'à utiliser la technique classique de désintégration des mesures. On écrira d'abord la mesure bornée $\tilde{\mu}_{2n}$ comme l'intégrale sur R par rapport à λ_n d'une famille mesurable $(\tau_z, z \in R)$ de mesures bornées portées respectivement par

$$\left\{\sum_1^n x_m = z\right\},$$

soit :

$$\tilde{\mu}_{2n}(\,.\,) = \int_{\mathrm{R}} \lambda_n(dz)\tau_z(\,.\,).$$

Comme la mesure $\tilde{\mu}_{2n}$ est portée par l'hyperplan

$$\left\{ \sum_1^n x_m = \sum_1^n y_m \right\},$$

il en est de même de presque toutes les mesures τ_z, donc de toutes les mesures τ_z après une modification inessentielle de la famille $\{\tau_z\}$. D'après une formule du début de la démonstration on a pour tout couple $f, g \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{C}}(m_n)$:

$$\nu_{f,g}(dz) = \int_{\mathrm{R}^n} \int_{\mathrm{R}^n} f(x)\overline{g(y)}\tau_z(dxdy)\,.\,\lambda_n(dz).$$

Comme la mesure $\nu_{f,f}$ est positive quel que soit f, la fonction mesurable de z égale à l'intégrale

$$\int_{\mathrm{R}^n} \int_{\mathrm{R}^n} f(x)\overline{f(y)}\tau_z(dxdy)$$

est p. s. positive. On pourra donc trouver un ensemble négligeable de z en dehors duquel l'intégrale

$$\int_{\mathrm{R}^n} \int_{\mathrm{R}^n} f(x)\overline{f(y)}\tau_z(dxdy)$$

soit positive quel que soit f dans l'ensemble dénombrable des polynômes trigonométriques à paramètres rationnels, donc par continuité, quel que soit $f \in \Lambda_n$. Il ne reste plus alors qu'à modifier τ_z en 0 pour tout z de l'ensemble négligeable précédent et à appeler cette modification $\tilde{\mu}^z_{2n}$ pour que le lemme soit complètement démontré.

PROPOSITION 3.4. — *La f. a. r. stationnaire* $(\xi_t, t \in \mathrm{R})$ *est supposée harmonisable d'ordre 2n. On désigne comme précédemment par* M_n *l'espace de mesures sur* R^n *associé à la mesure hermitienne positive* $\tilde{\mu}_{2n}$ *et on désigne par* $\mathrm{M}^z_n(z \in \mathrm{R})$ *les espaces de Hilbert de mesures sur* R^n *associés respectivement aux mesures hermitiennes positives* $\tilde{\mu}_{2n}(z,.)$ *d'une désintégration de* μ_{2n} *(voir lemme précédent); les mesures* ν *de* M^z_n *sont toutes portées par l'hyperplan* $\left\{ \sum_1^n x_m = z \right\}$. *On a* dim $(\mathrm{M}^z_n) \geqq 1$ p. s. $[\lambda]$.

Toute mesure ν de M_n s'écrit alors d'une et essentiellement d'une seule manière sous la forme :

$$\nu = \int_{\mathbf{R}} \lambda_n(dz)\nu_z$$

où $[\nu_z, z \in \mathbf{R}]$ est une famille mesurable de mesures sur $\mathbf{R}^n$ telle que $\nu_z \in M_n^z$ pour tout $z \in \mathbf{R}$ et où λ_n est la mesure introduite dans le lemme précédent ; en outre on a, quels que soient ν, $\nu' \in M_n$ et $t \in \mathbf{R}$:

$$\langle \nu, \nu' \rangle_{M_n} = \int_{\mathbf{R}} \lambda_n(dz) \langle \nu_z, \nu'_z \rangle_{M_n^z},$$

$$\chi_t^n . \nu = \int_{\mathbf{R}} \lambda_n(dz) e^{2\pi i t z} \nu_z$$

Inversement pour toute famille mesurable $(\nu_z, z \in \mathbf{R})$ de mesures sur $\mathbf{R}^n$ telle que $\nu_z \in M_n^z$ pour tout $z \in \mathbf{R}$ et que

$$\int_{\mathbf{R}} \| \nu_z \|_{M_n^z}^2 \lambda_n(dz) < \infty,$$

la mesure

$$\nu = \int_{\mathbf{R}} \lambda_n(dz)\nu_z$$

est bien définie et appartient à M_n.

La proposition précédente exprime que la désintégration des mesures de M_n relativement à l'application $\sum_1^n x_m$ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ et la mesure λ_n, définit un isomorphisme d'espaces de Hilbert entre M_n et l'intégrale hilbertienne des M_n^z, soit :

$$M_n \simeq \int_{\mathbf{R}}^{\oplus} M_n^z \lambda_n(dz).$$

Démonstration. — Les mesures ν de M_n^z sont portées par l'hyperplan

$$\left\{ \sum_1^n x_m = z \right\}$$

en vertu de la remarque 2, p. 19 puisque la mesure $\tilde{\mu}_{2n}^z$ est portée par

$$\left\{ \sum_1^n x_m = z \right\} \times \mathbf{R}^n.$$

On remarquera aussi que presque aucun des espaces M_n^z n'est dégénéré (c'est-à-dire n'est de dimension 0) puisque d'après le lemme précédent $\tilde{\mu}_{2n}^z \neq 0$ p. s. (λ_n).

Pour tout $f \in \Lambda_n$, les mesures :

$$\mu_f^z = \int_{R^n} f(x)\tilde{\mu}_{2n}(z\,;\,dx.) \qquad (z \in R)$$

forment une famille mesurable de mesures appartenant respectivement aux M_n^z et telle que :

$$\mu_f = \int_R \lambda_n(dz)\mu_f^z$$

en vertu de la formule du lemme précédent. En outre on a :

$$\mu_{\chi_t f}^z = \exp(2\pi i t z).\mu_f^z (f \in \Lambda_n,\ z \in R,\ t \in R)$$

puisque la mesure $\tilde{\mu}_{2n}(z;\ dxdy)$ sur $R^n \times R^n$ est concentrée sur

$$\left\{\sum_1^n x_m = z\right\}.$$

on a aussi la formule de produit scalaire :

$$\begin{aligned}\int_R \lambda_n(dz)\langle \mu_f^z, \mu_g^z \rangle_{M_n^z} &= \int_R \lambda_n(dz)\mu_f^z(\bar{g}) \\ &= \mu_f(\bar{g}) = \langle \mu_f, \mu_g \rangle\end{aligned}$$

si $f, g \in \Lambda_n$.

Reformulons ce qui précède en introduisant l'intégrale hilbertienne

$$\int_R^{\oplus} M_n^z \lambda_n(dz),$$

c'est-à-dire l'espace de Hilbert formé par les classes d'équivalence de familles mesurables $(\nu_z, z \in R)$ de mesures sur R^n telles que $\nu_z \in M_n^z (z \in R)$ et que

$$\int_R \|\nu_z\|_{M_n^z}^2 \lambda_n(dz) < \infty;$$

le produit scalaire de cet espace est défini par :

$$\langle \{\nu_.\}, \{\nu'_.\} \rangle = \int_R \langle \nu_z, \nu'_z \rangle \lambda_n(dz).$$

D'après ce qui précède la correspondance qui pour tout $f \in \Lambda_n$ associe la classe d'équivalence de la famille $\{\mu_f^z\}$ à la mesure μ_f est une application linéaire isométrique du sous-espace $\{\mu_f, f \in \Lambda_n\}$ dense de M_n dans l'intégrale hilbertienne $\int_R^{\oplus} M_n^z \lambda_n(dz)$; par prolongement M_n s'injecte isométriquement dans cette intégrale hilbertienne et si $(\sigma_z, z \in R)$ est l'image de σ, on a, pour tout $f \in \Lambda_n$:

$$\sigma(\bar{f}) = \langle \sigma, \mu_f \rangle = \int_R \lambda_n(dz) \langle \sigma_z, \mu_f^z \rangle = \int_R \lambda_n(dz) \sigma_z(\bar{f})$$

c'est-à-dire :

$$\sigma = \int_R \lambda_n(dz) \sigma_z.$$

La première partie de la proposition est ainsi démontrée. Pour démontrer la partie inverse, il faut montrer que l'injection isométrique de M_n dans

$$\int_R^{\oplus} M_n^z \lambda_n(dz)$$

est surjective, donc que tout élément $(v_z, z \in R)$ de l'intégrale hilbertienne orthogonal à M_n est nul. Or pour une telle famille $(v_z, z \in R)$ orthogonale à M_n on a, pour tout $f \in \Lambda_n$ et tout $t \in R$:

$$\int_R \lambda_n(dz) e^{-2\pi i t z} v_z(\bar{f}) = \int_R \lambda_n(dz) \langle v_z, \mu_{\chi_{F}.t}^z \rangle = 0$$

on a donc $v.(\bar{f}) = 0$ p. s. $[\lambda_n]$ pour tout $f \in \Lambda_n$ et cela entraîne que $v_z = 0$ pour presque tout $z \in R$.

COROLLAIRE 3.5. — *Si la f. a. r. stationnaire $(\xi_t, t \in R)$ est harmonisable d'ordre 2n, alors pour tout $v \in M_n$ la mesure spectrale de la f. a.*

$$\{ \tilde{X}_n(v) \circ \theta_t, t \in R \}$$

est égale à $\| v_z \|^2 . \lambda_n(dz)$, *si*

$$v = \int_R v_z \lambda_n(dz)$$

est la désintégration de v donnée par la proposition précédente.

Démonstration. — On a en effet d'après la proposition précédente :

$$\mathrm{E}[\tilde{\mathrm{X}}_n(v) \circ \theta_t . \overline{\tilde{\mathrm{X}}_n(v)}] = \langle \mathrm{X}_t^n . v, v \rangle$$
$$= \int_{\mathbf{R}} \exp(2\pi i t z) \langle v_z, v_z \rangle \lambda_n(dz).$$

BIBLIOGRAPHIE

[*0*] N. Aronszajn, Theory of reproducing kernels. *Trans. A. M. S.*, **68**, 1950, 337-404.

[*1*] A. Blanc-Lapierre et R. Fortet, *Théorie des fonctions aléatoires*. Masson, 1953.

[*2*] C. Foias, Sur les mesures spectrales qui interviennent dans la théorie ergodique. *J. Math. Mech.*, **13**, 1964, 639-658.

[*3*] G. Sinaï, Sur les mesures spectrales des processus stationnaires ergodiques. *Teoria Veroyatnosi i Primen*, **8**, 1963, 463-469 [Trad. angl.: *Theory of Proba. and Applic.*, **8**, 1963, 429-436].

[*4*] G. Sinaï, Remarques sur les propriétés spectrales des systèmes dynamiques ergodiques. *Doklady*, **50**, 1963, 1235-1237 [Trad. angl.: *Russian Math. Surveys*, **18**, 1963, 37-50].

(Manuscrit reçu le 27 septembre 1968).