

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

PIERRE PRIOURET

Processus de Markov sur une variété à bord compacte

Annales de l'I. H. P., section B, tome 4, n° 3 (1968), p. 193-253

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1968__4_3_193_0

© Gauthier-Villars, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Processus de Markov sur une variété à bord compacte

par

Pierre PRIOURET

SUMMARY. — Let M be a compact manifold with boundary, W an operator from $C^2(M)$ into $C(M)$ satisfying the maximum principle on $\overset{\circ}{M}$, L a Ventcel's boundary condition; under certain conditions (cf. [2]) there exists a Markov process X on M whose infinitesimal generator coincides with W for every smooth function u satisfying $Lu = 0$. The properties of this process are studied; in particular it is shown that there exists a time change of X such that the transformed process is a Markov process on ∂M with generator LH , where H is the Dirichlet operator corresponding to W . This generalises the results of Sato-Ueno [12].

0. Introduction.

Soit M une variété à bord compacte, connexe de classe C^∞ . On considère sur M un opérateur de Waldenfels de classe C^0 , c'est un opérateur de $C^2(M)$ dans $C(M)$ ayant le principe du maximum suivant,

$$(PM) : u \in C^2(M), u(x) = \sup u \geq 0 \text{ et } x \in \overset{\circ}{M} \Rightarrow Wu(x) \leq 0$$

(voir Bony, Courrège, Priouret [2]). Alors si T_t est un semi-groupe de Feller sur $C(M)$ (semi-groupe d'opérateurs positifs contractants fortement continus) dont le générateur infinitésimal A est une restriction de \overline{W} , il existe un opérateur L (condition frontière de Ventcel') de $C^2(M)$ dans $B(\partial M)$ (fonctions boréliennes sur ∂M) tel que, si $u \in C^2(M) \cap D_A$, $Lu = 0$ (Ventcel' [17] et [2]); L est de la forme $Lu = \Gamma u - \delta Wu$ où δ est une fonction

positive de $B(\partial M)$ et Γ un opérateur de $C^2(M)$ dans $B(\partial M)$ ayant le principe du maximum au bord,

$$(PMB) : u \in C^2(M), u(x) = \sup u \geq 0 \text{ et } x \in \partial M \Rightarrow \Gamma u(x) \leq 0.$$

Dans [2] on s'intéressait, partant d'un opérateur de Waldenfels W et d'une condition frontière de Ventcel' L décrits ci-dessus, au problème de la construction d'un semi-groupe de Feller sur $C(M)$ de générateur $(\overline{\mathcal{U}_L}, \overline{W})$ où $\mathcal{U}_L = \{u; u \in C^2(M), Lu = 0\}$. On effectuait cette construction sous certaines conditions de régularité höldérienne des opérateurs, de non-dégénérescence de certains opérateurs elliptiques et enfin d'une condition de « transversabilité » de L introduite par Sato et Ueno [12]. De plus, on montrait qu'en même temps l'opérateur LH_0 (où H_0 est l'opérateur de Dirichlet relatif à W : si $\varphi \in C^\infty(\partial M)$; $H_0\varphi \in C^2(M)$, $WH_0\varphi = 0$ et $H_0\varphi|_{\partial M} = \varphi$) était le générateur d'un semi-groupe de Feller sur $C(\partial M)$. Sato et Ueno [12] ont d'ailleurs établi que ceci était une condition suffisante pour que $(\overline{\mathcal{U}_L}, \overline{W})$ soit un générateur.

Cet article étudie les propriétés du processus de Markov sur M associé au semi-groupe de générateur $(\overline{\mathcal{U}_L}, \overline{W})$ construit sous les hypothèses de [2]. En principe les résultats de [2] sont supposés connus, cependant on a rappelé dans les § 1 et 2 les définitions et les résultats intervenant par la suite. On commence par montrer qu'il existe un temps local A_t sur ∂M tel que le changement de temps associé transforme le processus X en le processus de générateur LH_0 (§ 4 et 5); ce qui signifie que ce dernier processus est la trace de X sur ∂M . La méthode utilisée s'applique, à de légères modifications près, sous les hypothèses de Sato-Ueno [12] (c'est-à-dire que LH_0 est un générateur) et ceci répond à une conjoncture de ces auteurs, qui avaient établi ce résultat lorsque W est un opérateur elliptique et $L = \frac{\partial}{\partial n}$. On trouve une étude axiomatique de cette question dans Motoo [8] et Sato [11].

Au § 6 on étudie le temps de séjour de X au bord en fonction de δ ; au § 8, on établit une formule qui lie les répartitions de sortie de X des ouverts aux noyaux de W et L . Au § 9, on interprète stochastiquement à l'aide de X la condition de « transversabilité » imposée à L . Au § 10, on étudie, lorsque $W1 = L1 = 0$, l'existence de mesures invariantes et au § 11, lorsque W et L sont locaux et réguliers, que δ est nulle et que $W1 = L1 = 0$, l'existence d'un processus adjoint; ce qui est un prolongement à l'article de Nagasawa [9].

Cet article développe les résultats annoncés dans la note [10].

Nous remercions M. J. Neveu de ces encouragements tout au long de ce travail et M. Ph. Courrège qui a bien voulu lire certains passages et nous a suggéré le lemme 10.1 (§ 10).

1. On désigne par M une variété à bord, compacte, de dimension $n \geq 1$, de classe C^∞ , par ∂M son bord, par $\overset{\circ}{M} = M \setminus \partial M$ son intérieur. On suppose que ∂M est non vide ⁽¹⁾. On ne considère que des cartes locales (U, χ) de M pour lesquelles $\chi(U)$ est un ouvert de

$$\overline{\mathbb{R}^{n+}} = \{z; z \in \mathbb{R}^n, z^n \geq 0\};$$

la $n^{\text{ième}}$ coordonnée définissant le bord :

$$\begin{aligned} x \in U \cap \overset{\circ}{M} &\Leftrightarrow x \in U && \text{et} && \chi^n(x) > 0, \\ x \in U \cap \partial M &\Leftrightarrow x \in U && \text{et} && \chi^n(x) = 0. \end{aligned}$$

On désigne par $C^p(M)$ (resp. $C^p(\partial M)$) l'espace des fonctions de classe C^p sur M , y compris au bord (resp. ∂M) muni de la topologie usuelle. Pour r entier ≥ 0 et $0 < \lambda < 1$, on désigne par $C^{r,\lambda}(M)$ (resp. $C^{r,\lambda}(\partial M)$) l'espace des fonctions de classe C^r (y compris au bord) sur M (resp. ∂M) dont les dérivées d'ordre r (dans chaque carte locale) vérifient une condition de Hölder d'exposant λ , muni de la topologie d'espace de Fréchet « Banachisable », associé à l'une quelconque des normes Höldériennes $\| \cdot \|_{r,\lambda}$.

On appelle *opérateur de Lévy sur M de classe C^0* (voir [2], n° I.2.5) un opérateur linéaire continu S de $C^2(M)$ dans $C(M)$ tel que :

$$(i) \quad Sf(x) = \int_M \bar{s}(x, dy) f(y), \quad f \in C^2(M), \quad x \notin \text{supp } f^{(2)};$$

(ii) Pour toute carte locale (U, χ) , et toute fonction f de $C^2(M)$ telle que $\text{supp } f \subset U$, il existe des fonctions a^i, a continues sur U telles que, pour $x \in U$,

$$\begin{aligned} Sf(x) = & \sum_{i=1}^n a^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) + a(x) f(x) \\ & + \int_M \left\{ f(y) - f(x) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) (\chi(y) - \chi(x)) \right\} \bar{s}(x, dy); \end{aligned}$$

(1) Le bord ∂M constitue alors une variété de classe C^∞ , de dimension $n - 1$.

(2) On note $\text{supp } f$ le support de la fonction f .

(iii) $S1(x) \leq 0$ pour tout $x \in M$; où $\bar{s}(x, dy)$ est un noyau borélien sur M tel que :

(a) $\bar{s}(x, \{x\}) = 0$ pour tout $x \in M$,

(b) pour toute carte locale (U, χ) et toute fonction $f \in C(M)$ telle que

$$\text{supp } f \subset U, \quad \int_V \bar{s}(x, dy) |\chi(y) - \chi(x)|^2 f(y)$$

est continue sur U ,

(c) pour toute $\Phi \in C(M \times M)$ nulle au voisinage de la diagonale, $\int \bar{s}(x, dy) \Phi(x, y)$ appartient à $C(M)$.

Le noyau $\bar{s}(x, dy)$ s'appelle le noyau de Lévy associé à l'opérateur de Lévy S . Inversement un noyau borélien vérifiant (a); (b); (c) est le noyau d'un opérateur de Lévy. Enfin remarquons qu'un opérateur de Lévy de classe C^0 est compact de $C^2(M)$ dans $C(M)$ ([2], n° III.3.4, théorème XXI).

On appelle *opérateur de diffusion elliptique sur M , de classe C^0* , un opérateur différentiel P du second ordre appliquant $C^2(M)$ dans $C(M)$, dont la partie principale π est strictement positive (c'est-à-dire $\pi_x(\omega, \omega) > 0$ pour tout x , et tout $\omega \neq 0$ de $T_x^*(M)$) et tel que $P1 \leq 0$.

On appelle *opérateur de Waldenfels décomposable elliptique de classe C^0* un opérateur linéaire W de $C^2(M)$ dans $C(M)$ de la forme $W = P + S$ où P est un opérateur de diffusion elliptique de classe C^0 et S un opérateur de Lévy de classe C^0 .

Un opérateur de Waldenfels elliptique décomposable de classe C^0 W a les propriétés de maximum suivantes ([2], n° I.4, Théorème VII et VIII) (1) :

(1.1) Si $u \in C^2(M)$, $x \in M \setminus \partial M$ et $u(x) = \sup u \geq 0$, alors $Wu(x) \leq 0$.

(1.2) Soit $u \in C^2(M)$ telle que $Wu \geq 0$;

(i) si $x \in M \setminus \partial M$ et $u(x) = \sup u \geq 0$, alors u est constante,

(ii) si $x \in \partial M$ et $u(x) = \sup u \geq 0$, alors ou bien u est constante, ou bien $\frac{\partial u}{\partial n}(x) < 0$, n étant un vecteur de $T_x(M)$ strictement dirigé vers l'intérieur de M .

On appelle *opérateur de Waldenfels elliptique de classe $C^{0,\lambda}$* un opérateur de Waldenfels décomposable elliptique de classe C^0 , $W = P + S$ où P et S

(1) Les propriétés sont encore valables si le bord ∂M est vide.

appliquent $C^{2,\lambda}(M)$ dans $C^{0,\lambda}(M)$ et où S est compact de $C^{2,\lambda}(M)$ dans $C^{0,\lambda}(M)$.

Remarquons ([2], n° III.3.6) que pour que S soit compact de $C^{2,\lambda}(M)$ dans $C^{0,\lambda}(M)$ il est suffisant, s'il est de classe C^0 , qu'il applique $C^{2,\mu}(M)$ dans $C^{0,\mu}(M)$ pour un $\mu > \lambda$.

Dans toute la suite W désigne un opérateur de Waldenfels elliptique de classe $C^{0,\lambda}$.

On notera $\gamma^0 u$ la restriction à ∂M d'une fonction $u \in C(M)$. Dans [2], n° III.1 on a établi (1) :

(1.3) Pour tout $\beta \geq 0$ (2), $u \rightarrow (\beta u - Wu, \gamma^0 u)$ est un isomorphisme de $C^{2,\lambda}(M)$ sur $C^{0,\lambda}(M) \times C^{2,\lambda}(\partial M)$.

(1.4) Pour chaque $\beta \geq 0$, il existe des opérateurs linéaires positifs G_β^0 et H_β respectivement de $C(M)$ dans $C(M)$ et de $C(\partial M)$ dans $C(M)$ caractérisés par les propriétés :

(1.4.1) si $f \in C^{0,\lambda}(M)$, alors $G_\beta^0 f \in C^{2,\lambda}(M)$ et $(\beta - W)G_\beta^0 f = f$,
 $\gamma^0 G_\beta^0 f = 0$;

(1.4.2) si $\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M)$ alors $H_\beta \varphi \in C^{2,\lambda}(M)$ et $(\beta - W)H_\beta \varphi = 0$,
 $\gamma^0 H_\beta \varphi = \varphi$.

(1.5) Il existe un semi-groupe de Feller et un seul sur $C_0(\overset{\circ}{M})$ dont le générateur infinitésimal est la fermeture (dans $C_0(\overset{\circ}{M})$) de (\mathcal{U}_0, W) où $\mathcal{U}_0 = \{ u; u \in C^2(M), \gamma^0 u = 0, \gamma^0 Wu = 0 \}$. Ce semi-groupe admet $(G_\beta^0)_{\beta \geq 0}$ comme résolvante.

(1.6) Pour $\varphi \in C(\partial M)$, $\beta, \beta' \geq 0$, on a

$$H_\beta \varphi - H_{\beta'} \varphi + (\beta - \beta') G_\beta^0 H_{\beta'} \varphi = 0.$$

(1.7) Pour $\varphi \in C(\partial M)$, $0 \leq \beta \leq \beta'$, on a $H_\beta \varphi \geq H_{\beta'} \varphi$.

(1.8) Pour $\varphi \in C(\partial M)$ et $x \in \overset{\circ}{M}$, on a $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} H_\beta \varphi(x) = 0$.

(1) Les résultats sont une extension à un opérateur de Waldenfels des résultats utilisés par Sato et Ueno [12] pour un opérateur elliptique.

(2) Rappelons que l'on a supposé M connexe à bord non vide.

(1.9) Si on désigne par v un champ de vecteurs de classe C^0 sur ∂M , strictement dirigé vers l'intérieur de M , $\frac{\partial}{\partial v} H_{\beta} 1$ décroît uniformément vers $-\infty$ lorsque β croît vers $+\infty$.

Enfin on utilisera par la suite, la propriété suivante :

(1.10) Soit $f \in C(M)$, $f \geq 0$, $f \not\equiv 0$, alors, pour tout $x \in \overset{\circ}{M}$, $G_{\beta}^0 f(x) > 0$ ($\beta \geq 0$).

En effet, supposons d'abord $f \in C^{0,\lambda}(M)$ et soit $u = -G_{\beta}^0 f$; puisque $f \not\equiv 0$, $u \not\equiv 0$ (d'après (1.3)). On a $(W - \beta)u = f \geq 0$, donc (d'après (1.2)) ou bien u est constante donc nulle puisque $\gamma^0 u = 0$, ce qui est impossible puisque $f \not\equiv 0$, ou bien u n'atteint pas de maximum ≥ 0 sur $\overset{\circ}{M}$; ce qui entraîne, puisque $\gamma^0 u = 0$, que $u(x) < 0$ pour tout $x \in \overset{\circ}{M}$. Dans tous les cas $G_{\beta}^0 f(x) > 0$ si $x \in \overset{\circ}{M}$. Maintenant si $f \in C(M)$, $f \not\equiv 0$, $f \geq 0$, on peut trouver $g \in C^{0,\lambda}(M)$, $g \geq 0$, $g \not\equiv 0$ telle que $g \leq f$; on conclut en utilisant la positivité de l'opérateur G_{β}^0 .

2. On appellera *opérateur frontière de Ventcel'-Lévy* un opérateur linéaire continu T de $C^2(M)$ dans $B(\partial M)$ ⁽¹⁾ tel que (voir [2], n° II.2.3) :

$$(i) \quad Tf(x') = \int_M \bar{i}(x', dy) f(y), \quad f \in C^2(M), \quad x' \notin \text{supp } f;$$

(ii) Pour toute carte locale (U, χ) et toute fonction $f \in C^2(M)$ telle que $\text{supp } f \subset U$, il existe des fonctions b^i ($1 \leq i \leq n-1$) et b de $C(M)$ telles que, pour $x' \in U \cap \partial M$,

$$Tf(x') = \sum_{i=1}^{n-1} b^i(x') \frac{\partial f}{\partial x^i}(x') + b(x') f(x') + \int_M \left\{ f(y) - f(x') - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x') [\chi^i(y) - \chi^i(x')] \right\} \bar{i}(x', dy);$$

(iii) $T1(x') \leq 1$ pour tout $x' \in \partial M$; où $\bar{i}(x', dy)$ est un noyau borélien de ∂M dans M tel que :

$$(a) \quad \bar{i}(x', \{x'\}) = 0 \quad \text{pour tout } x' \in \partial M;$$

⁽¹⁾ $B(\partial M)$ désignant l'espace des fonctions numériques boréliennes bornées sur ∂M , muni de la topologie de la convergence uniforme.

(b) pour toute carte locale (U, γ) et toute fonction $f \in C(M)$ telle que $\text{supp } f \subset U$,

$$\int_U \bar{i}(x', dy)[\chi_n(y) + \sum_{i=1}^{n-1} [\chi_i(y) - \chi_i(x)]^2 f(y)]$$

est bornée sur $U \cap \partial M$;

(c) pour toute fonction numérique Φ définie sur $\partial M \times M$ et nulle au voisinage de la diagonale, $\int_M \bar{i}(x', dy)\Phi(x', y)$ est bornée sur M .

Le noyau $\bar{i}(x', dy)$ s'appellera le noyau de Ventcel' associé à l'opérateur de Ventcel'-Lévy T . Inversement tout noyau borélien de M dans ∂M vérifiant (a), (b), (c) est le noyau d'un opérateur de Ventcel'-Lévy.

On appellera *opérateur frontière de Ventcel'* un M un opérateur Γ de $C^2(M)$ dans $B(\partial M)$ de la forme,

$$(2.1) \quad \Gamma u = \bar{\alpha} \frac{\partial u}{\partial \nu} + Q(\gamma^0 u) + Tu \quad (u \in C^2(M))$$

où $\bar{\alpha}$ est une fonction non négative de $B(\partial M)$, ν un champ de vecteurs sur ∂M strictement dirigé vers l'intérieur de classe C^0 , Q un opérateur de diffusion sur ∂M à coefficients boréliens bornés et T un opérateur frontière de Ventcel'-Lévy.

On dira que Γ est *elliptique d'ordre 1 et de classe $C^{1,\lambda}$* ($0 < \lambda < 1$) si

- ν est de classe $C^{1,\lambda}$ sur ∂M ,
- $\bar{\alpha} \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ et $\bar{\alpha}(x') > 0$ pour tout $x' \in \partial M$,
- Q est de classe $C^{1,\lambda}$ et d'ordre 1,
- T applique $C^{2,\lambda}(M)$ dans $C^{1,\lambda}(\partial M)$ et est compact de $C^{2,\lambda}(M)$ dans $C^{1,\lambda}(\partial M)$.

On dira que Γ est *elliptique d'ordre 2 et de classe $C^{0,\lambda}$* ($0 < \lambda < 1$) si

- ν est de classe $C^{0,\lambda}$ sur ∂M ,
- $\bar{\alpha} \in C^{0,\lambda}(\partial M)$,
- Q est de classe $C^{0,\lambda}$ et *elliptique*,
- T applique $C^{2,\lambda}(M)$ dans $C^{0,\lambda}(\partial M)$ et est compact de $C^{2,\lambda}(M)$ dans $C^{0,\lambda}(\partial M)$.

Rappelons que pour que T soit compact de $C^{2,\lambda}(M)$ dans $C^{1,\lambda}(\partial M)$ (resp. de $C^{2,\lambda}(M)$ dans $C^{0,\lambda}(\partial M)$) il est suffisant que T applique continûment $C^{2,\mu}(M)$ dans $C^{1,\mu}(\partial M)$ (resp. $C^{2,\mu}(M)$ dans $C^{0,\mu}(\partial M)$) pour un $\mu > \lambda$ ([2], n° III.3.6).

Un opérateur frontière Γ est dit :

faiblement transversal en $x' \in \partial M$ si $\bar{\alpha}(x') + \bar{i}(x', \overset{\circ}{M}) > 0$,

fortement transversal en $x' \in \partial M$ si $\bar{\alpha}(x') > 0$ ou $\bar{i}(x', \overset{\circ}{M}) = +\infty$.

On appellera *condition frontière de Ventcel'* un opérateur L de $C^2(M)$ dans $B(\partial M)$ de la forme,

$$(2.2) \quad Lu = \Gamma u - \delta \gamma^0 W u \quad (u \in C^2(M))$$

où Γ est un opérateur frontière de Ventcel'-Lévy, δ une fonction non négative de $B(\partial M)$ et W un opérateur de Waldenfels défini au n° 1.

L'opérateur W étant elliptique de classe $C^{0,\lambda}$ on dira que L vérifie :

(El 1) si Γ est d'ordre 1, de classe $C^{1,\lambda}$ et si $\delta \in C^{1,\lambda}(\partial M)$,

(El 2) si Γ est d'ordre 2, de classe $C^{0,\lambda}$ et si $\delta \in C^{0,\lambda}(\partial M)$.

Les principaux résultats établis dans [2], n° III.2 sont :

(2.3) Si L satisfait (El 1),

(1) pour tout $\beta > 0$ ($\beta = 0$ si $W1 \neq 0$ ou $\Gamma 1 \neq 0$)

$u \rightarrow (\beta u - Wu, -\Gamma u)$ est un isomorphisme de $C^{2,\lambda}(M)$ sur

$$C^{0,\lambda}(M) \times C^{1,\lambda}(\partial M).$$

(2) Pour tout $\beta > 0$ ($\beta = 0$ si $W \neq 0$ ou $\Gamma 1 \neq 0$).

$u \rightarrow (\beta u - Wu, -Lu)$ applique injectivement $C^{2,\lambda}(M)$ sur un sous-espace de $C^{0,\lambda}(M) \times C^{0,\lambda}(\partial M)$ contenant $C^{1,\lambda}(M) \times C^{1,\lambda}(\partial M)$.

Introduisons la condition :

(U) D'une part $\Gamma 1 \neq 0$ ou $W1 \neq 0$; d'autre part en tout point x' tel que

$$\bar{\alpha}(x') + \bar{i}(x', \overset{\circ}{M}) = 0, \quad \Gamma 1(x') < 0.$$

Alors

(2.4) Si L satisfait (El 2) et si Γ est faiblement transversal en tout point x' tel que $\delta(x') = 0$, alors, pour $\beta > 0$ ($\beta = 0$ si (U) est satisfaite), $u \rightarrow (\beta u - Wu, -Lu)$ est un isomorphisme de $C^{2,\lambda}(M)$ sur $C^{0,\lambda}(M) \times C^{0,\lambda}(\partial M)$.

(2.5) Sous l'hypothèse (El 1) ou (El 2) et si Γ est faiblement transversal en tout point x' tel que $\delta(x') = 0$ (1), il existe, pour chaque $\beta > 0$, $\rho \geq 0$

(1) Remarquons que cette hypothèse est évidemment toujours satisfaite si L vérifie (El 1).

($\beta = 0$ si $\rho > 0$ ou si (U) est satisfaite) des opérateurs linéaires positifs $G_{\rho,\beta}$, K_{ρ}^{β} respectivement de $C(M)$ dans $C(M)$ et de $C(\partial M)$ dans $C(\partial M)$ caractérisés par les propriétés :

(2.5.1) si $f \in C^{1,\lambda}(M)$ (et aussi pour $f \in C^{0,\lambda}(M)$ si $\delta \equiv 0$ ou si (L) satisfait (El 2)) $G_{\rho,\beta}f \in C^{2,\lambda}(M)$ et satisfait $(\beta - W)G_{\rho,\beta}f = f$, $(\rho - L)G_{\rho,\beta}f = 0$;

(2.5.2) si $\varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ (et aussi pour $\varphi \in C^{0,\lambda}(\partial M)$ si L satisfait (El 2)) $K_{\rho}^{\beta}\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M)$ et satisfait $(\rho - LH_{\beta})K_{\rho}^{\beta}\varphi = \varphi$.

On pose

$$G_{\beta} = G_{0,\beta} ; \quad K^{\beta} = K_0^{\beta} ; \quad J_{\beta} = H_{\beta}K^{\beta}$$

Utilisant le théorème de Hille-Yosida-Ray et les travaux de Sato-Ueno [12] on déduit de (2.3)-(2.5) :

(2.6) THÉORÈME ([2], n° III.2.10, Théorème XX). — Soit L une condition frontière de Ventcel' vérifiant (El 1) ou (El 2) et telle que Γ soit faiblement transversal en tout point $x' \in \partial M$ où $\delta(x') = 0$.

Alors l'opérateur $(C^{2,\lambda}(\partial M), LH_{\beta})$ est préfermé dans $C(\partial M)$ et sa fermeture est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur $C(\partial M)$ de résolvantes $(K_{\rho}^{\beta})_{\rho>0}$. Pour $\beta > 0$ ($\beta = 0$ si (U) est satisfaite) ce semi-groupe est intégrable et admet l'opérateur K^{β} comme potentiel.

(2.7) THÉORÈME 2.2 ([2], n° III.2.8, Théorème XIX). — Soit L une condition frontière de Ventcel' vérifiant (El 1) ou (El 2) et telle que Γ soit fortement transversal en tout point $x' \in \partial M$ où $\delta(x') = 0$. On pose

$$\mathcal{U}_L = \{ u ; u \in C^2(M), Lu = 0 \}.$$

Alors \mathcal{U}_L est dense dans $C(M)$ et il existe un semi-groupe de Feller (et un seul) sur $C(M)$ dont le générateur infinitésimal est la fermeture (dans $C(M)$) de l'opérateur (\mathcal{U}_L, W) ⁽¹⁾. Ce semi-groupe admet $(G_{\beta})_{\beta>0}$ comme résolvante; il est intégrable et admet G_0 comme potentiel sous l'hypothèse (U).

(H) Dans la suite on supposera toujours que la condition frontière L vérifie (El 1) ou (El 2) et que Γ est fortement transversal en tout point $x' \in \partial M$ tel que $\delta(x') = 0$.

On utilisera les propriétés suivantes (Sato et Ueno [12]) :

(2.8) LG_{β}^0 (définie sur $C^{0,\lambda}(M)$) se prolonge en un opérateur positif (donc borné) de $C(M)$ dans $C(\partial M)$ ([2], n° III.2.4).

(1) Dans la suite on notera fréquemment (L, W) l'opérateur (\mathcal{U}_L, W) .

$$(2.9) \quad G_\beta f = G_\beta^0 f + J_\beta \overline{LG_\beta^0} f \quad (f \in C(M)) \quad ([2], \text{n}^\circ \text{III.2.5})$$

$$(2.10) \quad \lim_{\beta \rightarrow +\infty} (\sup LH_\beta 1) = -\infty \quad ([2], \text{n}^\circ \text{III.2.7}).$$

$$(2.11) \quad \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \|K^\beta\| = 0 \quad ([2], \text{n}^\circ \text{III.2.7}).$$

$$(2.12) \quad \text{On a pour } \alpha, \beta > 0, \quad \varphi \in C(\partial M), \quad J_\alpha \varphi - J_\beta \varphi + (\alpha - \beta) G_\alpha J_\beta \varphi = 0.$$

En effet, par positivité des opérateurs en cause, il suffit de montrer la relation pour $\varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$. Or, si on pose $u = J_\alpha \varphi - J_\beta \varphi + (\alpha - \beta) G_\alpha J_\beta \varphi$, on a $(B - W)u = 0$, $Lu = 0$ donc ((2.3) ou (2.5)) $u = 0$.

Établissons enfin deux propriétés qui seront utiles au paragraphe suivant.

(2.13) Soient $f \in C(M)$, $f \geq 0$, $f \not\equiv 0$, et $\beta \geq 0$, alors $\overline{LG_\beta^0} f(x') > 0$ en tout $x' \in \partial M$ tel que $f(x') + \bar{\alpha}(x') + \bar{i}(x', \overset{\circ}{M}) > 0$. En particulier $\frac{\partial G_\beta^0 f}{\partial \nu}(x') > 0$ en tout $x' \in \partial M$.

En vertu de la positivité de l'opérateur $\overline{LG_\beta^0}$ il suffit d'établir (2.13) pour $f \in C^{1,\lambda}(M)$.

Supposons d'abord $L = \frac{\partial}{\partial \nu}$; et soit $u = -G_\beta^0 f$, u vérifie

$$(\beta - W)u = f \geq 0.$$

u ne peut être constante et vérifie $u(x) < 0$ pour tout $x \in \overset{\circ}{M}$ (1.10), donc, puisque $\gamma^0 u = 0$, u atteint un maximum ≥ 0 en tout point x' de ∂M ;

on a donc (1.2) $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x') < 0$ pour tout $x' \in \partial M$.

Dans le cas général

$$\overline{LG_\beta^0} f(x') = \bar{\alpha}(x') \frac{\partial}{\partial \nu} G_\beta^0 f(x') + \int \bar{i}(x', dy) G_\beta^0 f(y) + \delta(x') f(x'),$$

donc si $\bar{\alpha}(x') > 0$, $\overline{LG_\beta^0} f(x') > 0$ d'après le cas précédent; si $\bar{i}(x', \overset{\circ}{M}) > 0$, $\overline{LG_\beta^0} f(x') > 0$ d'après (1.10); si $\bar{\alpha}(x') + \bar{i}(x', \overset{\circ}{M}) = 0$, alors d'après l'hypothèse (H) sur L $\delta(x') > 0$ d'où $\delta(x') f(x') > 0$.

(2.14) Soient $\varphi \in C(\partial M)$, $\varphi \geq 0$, $\varphi \not\equiv 0$ et $\beta > 0$ alors $J_\beta \varphi(x) > 0$ pour tout $x \in M$.

D'après la positivité de l'opérateur J_β il suffit d'établir (2.14) pour

$\varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$. Il est suffisant de montrer que $K^\beta \varphi(x') > 0$ pour tout $x' \in \partial M$; car $-J_\beta \varphi = -H_\beta K^\beta \varphi$ ne peut avoir un maximum positif à l'intérieur sans être constante.

Supposons d'abord que l'hypothèse (El 2) soit satisfaite; alors LH_β est un opérateur de Waldenfels elliptique de classe C^0 sur la variété au bord vide ∂M , et on a $LH_\beta (-K^\beta \varphi) = \varphi \geq 0$, donc (1.2) $(-K^\beta \varphi)$ ne peut prendre une valeur ≥ 0 ; c'est-à-dire $K^\beta \varphi(x') > 0$ pour tout $x' \in \partial M$.

Supposons maintenant que l'hypothèse (El 1) soit satisfaite, et soit x'_0 un maximum ≥ 0 de $\psi = -K^\beta \varphi$. On a,

$$0 \leq \varphi(x'_0) = LH_\beta \psi(x'_0) = \bar{\alpha}(x'_0) \frac{\partial}{\partial \nu} H_\beta \psi(x'_0) + Q\psi(x'_0) + T(H_\beta \psi)(x'_0) - \delta(x'_0)WH_\beta \psi(x'_0)$$

soit encore,

$$(2.14.1) \quad 0 \leq \bar{\alpha}(x'_0) \frac{\partial}{\partial \nu} H_\beta \psi(x'_0) + \int \bar{t}(x'_0, dy)(H_\beta \psi(y) - \psi(x'_0)) - \beta \delta(x'_0) \psi(x'_0).$$

Puisque x'_0 est un maximum de ψ on a $Q\psi(x'_0) \leq 0$ et $H_\beta \psi(y) \leq \psi(x'_0)$ (1.2) donc (2.14.1) entraîne $\bar{\alpha}(x'_0) \frac{\partial}{\partial \nu} H_\beta \psi(x'_0) \geq 0$ et puisque $\bar{\alpha}(x'_0) > 0$ sous l'hypothèse (El 1) $\frac{\partial}{\partial \nu} H_\beta \psi(x'_0) > 0$. Toujours d'après (1.2) ceci implique $H_\beta \psi = Cte = \psi(x'_0) = 0$ puisque $-K^\beta \varphi \leq 0$; mais ceci est impossible puisque $\varphi \not\equiv 0$ (d'après (2.3)). Donc $K^\beta \varphi(x') > 0$ pour tout $x' \in \partial M$.

3. Ce paragraphe est consacré à la démonstration du théorème suivant (toujours sous les hypothèses du n° 2).

THÉORÈME 3.1. — On a, pour tout $f \in C(M)$, $\varphi \in C(\partial M)$, $\beta > 0$,

$$(3.1) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \| G_\beta(f\alpha J_\alpha \varphi) - J_\beta(\gamma^0 f \cdot \varphi) \| = 0,$$

On commence par remarquer,

PROPOSITION 3.2. — Si $\psi \in C(\partial M)$, $\beta > 0$, alors

$$(3.2) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \| G_\beta(\alpha J_\alpha \psi) - J_\beta \psi \| = 0.$$

En effet, d'une part $\alpha G_\alpha J_\beta \psi \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} J_\beta \psi$ (propriété des résolvantes d'un semi-groupe de Feller) et d'autre part $G_\alpha J_\beta = G_\beta J_\alpha$ (d'après (2.12)) ce qui entraîne (3.2).

D'après cette proposition, il suffira de montrer que

$$\| G_\beta(f\alpha J_\alpha \varphi) - G_\beta(\alpha J_\alpha(\gamma^0 f\varphi)) \|$$

tend vers 0, lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$.

Ceci nous conduit à étudier le comportement de $K^\alpha(\varphi\psi) - \psi K^\alpha \varphi$ lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$. D'après (1.10), (2.13) et (2.14) les fonctions $G_\alpha^0 1$, $\frac{\partial}{\partial \nu} G_\alpha^0 1$, $LG_\alpha^0 1$, $K^\alpha 1$ sont strictement positives sur $\overset{\circ}{M}$ et ∂M respectivement; on peut donc énoncer,

PROPOSITION 3.3.

(i) Lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$, $(G_\alpha^0 1(x))^{-1} \cdot G_\alpha^0 f(x) \rightarrow f(x)$ uniformément lorsque x décrit $\overset{\circ}{M}$, et f une partie équicontinue de $C(M)$.

(ii) Lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$, $(LG_\alpha^0 1)^{-1} \cdot \overline{LG_\alpha^0 f} \rightarrow \gamma^0 f$ (dans $C(\partial M)$) uniformément lorsque f décrit une partie équicontinue de $C(M)$.

(iii) Lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$, $(K^\alpha 1)^{-1} K^\alpha \varphi \rightarrow \varphi$ (dans $C(\partial M)$) uniformément lorsque f décrit une partie équicontinue de $C(\partial M)$.

Démonstration de la proposition 3.3. Afin d'éviter des répétitions on utilisera le lemme suivant :

LEMME 3.4. — Soient K_1 un compact métrisable, K_2 un fermé de K_1 et $(N_\alpha)_{\alpha > 0}$ une famille d'opérateurs linéaires positifs de $C(K_1)$ dans $C(K_2)$. On suppose que, si $f \in C(K_1)$ est nulle sur un ouvert U de K_1 , alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout compact $K \subset U$, il existe α_0 tel que, pour tout $\alpha \geq \alpha_0$ et tout $x \in K \cap K_2$, on ait $|N_\alpha f(x)| \leq \varepsilon N_\alpha 1(x)$; alors si Φ est une partie équicontinue de $C(K_1)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe α_0 tel que, si $\alpha \geq \alpha_0$, $x \in K_2$ et $\varphi \in \Phi$,

$$|N_\alpha \varphi(x) - \varphi(x)N_\alpha 1(x)| \leq \varepsilon N_\alpha 1(x).$$

En effet, soit η tel que, si $d(x, y) \leq \eta$ et $\varphi \in \Phi$, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (d distance donnant la topologie de K_1).

On recouvre K_2 par des boules $B(z_i, \eta/2)$, $i = 1, 2, \dots, p$.

On désigne, pour $i = 1, 2, \dots, p$, par ψ_i une fonction de $C(K_1)$ nulle sur $B(z_i, 2\eta/3)$, valant 1 sur le complémentaire de $B(z_i, \eta)$.

Par hypothèse, posant $R = \sup_{\varphi \in \Phi} \|\varphi\|$, on peut trouver

$$(3.4) \quad \alpha_0 \text{ tel que si } \alpha \geq \alpha_0, \quad |N_\alpha \psi_i(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4R} N_\alpha 1(x),$$

pour $x \in B(z_i, \eta/2) \cap K_2, i = 1, 2, \dots, p$.

Alors si $\alpha \geq \alpha_0$, on a pour $\varphi \in \Phi$ et $x \in B(z_i, \eta/2) \cap K_2$:

$$\begin{aligned} |N_\alpha \varphi(x) - \varphi(x)N_\alpha 1(x)| &\leq N_\alpha(|\varphi - \varphi(x)|)(x) \\ &\leq N_\alpha(|\varphi - \varphi(x)|(1 - \psi_i))(x) + N_\alpha(|\varphi - \varphi(x)|\psi_i)(x) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} N_\alpha 1(x) + 2\|\varphi\| N_\alpha \psi_i(x) \\ &\leq \varepsilon N_\alpha 1(x). \end{aligned}$$

Le lemme est démontré.

Pour démontrer (i) il suffit de montrer que $\|G_\alpha^0 f - fG_\alpha^0 1\|$ peut être rendu arbitrairement petit avec l'uniformité désirée en f ; d'après le lemme ci-dessus il suffit de montrer (3.3) c'est-à-dire :

(3.5) Soient $f \in C(M), f$ nulle sur U ouvert de M et K un compact, $K \subset U$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe α_0 tel que si $\alpha \geq \alpha_0$ et $x \in K, |G_\alpha^0 f(x)| \leq \varepsilon G_\alpha^0 1(x)$.

Pour cela, on peut (G_α^0 étant un opérateur positif) supposer $f \in C^{1,\lambda}(M)$ et $f \geq 0$.

Donnons-nous $\varepsilon > 0$. On peut trouver $h \in C^\infty(M)$ telle que $h \leq 0, h$ nulle sur $K, \sup h = a < 0$ et $|Wh| \leq \varepsilon$ (il suffit de diviser par une

\int_U

constante convenable une fonction ayant les trois premières propriétés).

Soit α_0 tel que $\alpha_0 |a| \geq \|f\|$ et supposons $\alpha \geq \alpha_0$.

On pose $u_\alpha = G_\alpha^0 f - \varepsilon G_\alpha^0 1 + h, u_\alpha \in C^{2,\lambda}(M)$.

On a $\gamma^0 u_\alpha = h \leq 0, (\alpha - W)u_\alpha = f - \varepsilon + \alpha h - Wh$.

Si $x \in U, (\alpha - W)u_\alpha(x) = -\varepsilon + \alpha h(x) - Wh(x) \leq -\varepsilon - Wh(x) \leq 0$; si $x \notin U, (\alpha - W)u_\alpha(x) \leq f(x) + \alpha h(x) - \varepsilon - Wh(x) \leq \|f\| + \alpha a \leq 0$. On a donc $\gamma^0 u_\alpha \leq 0, (\alpha - W)u_\alpha \leq 0$, donc (d'après (1.4)), $u_\alpha \leq 0$. Mais, si $x \in K, u_\alpha(x) = G_\alpha^0 f(x) - \varepsilon G_\alpha^0 1(x) \leq 0$. Ce qui montre (3.5) et la propriété (i).

Une première conséquence de (i) est la propriété suivante :

$$(3.6) \quad \text{si } f \in C^{1,\lambda}(M), \left(\frac{\partial}{\partial \nu} G_\alpha^0 1\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \nu} G_\alpha^0 f \rightarrow \gamma^0 f \quad (\text{dans } C(\partial M))$$

lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$.

En effet, $\varepsilon > 0$ étant donné, on peut trouver α_0 tel que si

$$\alpha \geq \alpha_0 \quad \text{et} \quad x \in \overset{\circ}{M}, \quad |(G_\alpha^0 1(x))^{-1} G_\alpha^0 f(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

(c'est la propriété (i)). Si on fait tendre $x \in \overset{\circ}{M}$, sur $x' \in \partial M$ le long d'une courbe différentielle tracée sur M et tangente à $v_{x'}$ en x' , on obtient

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial v} G_\alpha^0 1(x') \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial v} G_\alpha^0 f(x') - f(x') \right| \leq \delta,$$

c'est-à-dire (3.6) (il faut remarquer (2.13) que $\frac{\partial}{\partial v} G_\alpha^0 1(x') > 0$).

Pour démontrer (ii), il suffit d'appliquer le lemme 3.4 aux opérateurs positifs $(\overline{LG}_\alpha^0)_{\alpha > 0}$ après avoir montré :

(3.7) soient $f \in C(M)$, f nulle sur un ouvert U de M et K un compact de U ; alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe α_0 tel que si $\alpha \geq \alpha_0$ et $x \in K \cap \partial M$, $|\overline{LG}_\alpha^0 f(x)| \leq \varepsilon LG_\alpha^0 1(x)$.

Pour cela, \overline{LG}_α^0 étant un opérateur positif, on peut supposer $f \in C^{0,1}(M)$, $f \geq 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver d'après (i) et (3.6) α_0 tel que si

$$\begin{aligned} \alpha \geq \alpha_0, \quad G_\alpha^0 f(x) &\leq \frac{\varepsilon}{2} G_\alpha^0 1(x) && \text{pour tout } x \in U, \\ \frac{\partial}{\partial v} G_\alpha^0 f(x') &\leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial v} G_\alpha^0 1(x') && \text{pour } x' \in U \cap \partial M. \end{aligned}$$

On a pour $\alpha \geq \alpha_0$ et $x' \in K$;

$$\begin{aligned} LG_\alpha^0 f(x') &= \bar{\alpha}(x') \frac{\partial}{\partial v} G_\alpha^0 f(x') + \int_M \bar{i}(x', dy) G_\alpha^0 f(y) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial v} G_\alpha^0 1(x') + \frac{\varepsilon}{2} \int_U \bar{i}(x', dy) G_\alpha^0 1(y) + \int_{\mathbf{C}_U} \bar{i}(x', dy) G_\alpha^0 f(y). \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} LG_\alpha^0 1(x') + \frac{\|f\|}{\alpha} \int_{\mathbf{C}_U} \bar{i}(x', dy) \quad \left(\text{puisque } \|G_\alpha^0 f\| \leq \frac{\|f\|}{\alpha}, (1.5) \right) \end{aligned}$$

Mais on a $\sup_{x' \in K} \bar{i}(x', \mathbf{C}_U) \leq C$ (propriété (C), n° 2 d'un noyau de Ventcel);

d'où, compte tenu de $1 \leq \frac{LG_\alpha^0 1(x')}{\inf LG_\alpha^0 1}$,

$$(3.8) \quad LG_\alpha^0 f(x') \leq \frac{\varepsilon}{2} LG_\alpha^0 1(x') + \frac{C \|f\|}{\inf \alpha LG_\alpha^0 1} LG_\alpha^0 1(x').$$

On déduira (3.7) de (3.8) si on montre que $\frac{C \|f\|}{\inf \alpha \text{LG}_\alpha^0 1} \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} 0$, ou encore,

LEMME 3.5. — $\inf_{y' \in \partial M} \alpha \text{LG}_\alpha^0 1(y') \rightarrow +\infty$ lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} \text{En effet } \alpha \text{LG}_\alpha^0 1(y') &\geq \alpha \text{LG}_\alpha^0 \text{H}_0 1(y') && (1.2), \\ &\geq \text{LH}_0 1(y') - \text{LH}_\alpha 1(y') && (1.6), \end{aligned}$$

$\alpha \text{LG}_\alpha^0 1(y') \geq -\|\text{LH}_0 1\| + \inf |\text{LH}_\alpha 1(y')| \rightarrow +\infty$ (2.10), ce qui montre le lemme et par suite la propriété (ii).

Pour montrer (iii) on va appliquer le lemme 3.4 aux opérateurs $(\text{K}^\alpha)_{\alpha > 0}$. Pour vérifier (3.3) il faut montrer,

(3.9) soient $\varphi \in C(\partial M)$, φ nulle sur un ouvert U de ∂M et K un compact, $K \subset U$; alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe α_0 tel que si $\alpha \geq \alpha_0$ et $x' \in K$, $|\text{K}^\alpha \varphi(x')| \leq \varepsilon \text{K}^\alpha 1(x')$.

Pour cela d'après la positivité des K^α , on peut supposer $\varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$, $\varphi \geq 0$.

Donnons-nous $\varepsilon > 0$. On peut trouver $h \in C^\infty(\partial M)$ telle que $h \geq 0$, h nulle sur K ,

$$\inf_{\text{C}_U} h = a > 0, \quad |\text{LH}_0 h| \leq \varepsilon$$

(il suffit de diviser par une constante convenable une fonction ayant les trois premières propriétés).

D'après la propriété (ii) on peut trouver α_1 tel que, si

$$\alpha \geq \alpha_1, \quad \|(\text{LG}_\alpha^0 1)^{-1} \text{LG}_\alpha^0 \text{H}_0 h - h\| \leq \frac{a}{2}$$

On a donc, pour $\alpha \geq \alpha_1$ et $x' \notin U$,

$$\alpha \text{LG}_\alpha^0 \text{H}_0 h(x') \geq \left(h(x') - \frac{a}{2}\right) \alpha \text{LG}_\alpha^0 1(x') \geq \frac{a}{2} \inf_{\partial M} \alpha \text{LG}_\alpha^0 1.$$

Utilisant le lemme 3.5, on peut trouver α_0 tel que,

$$(3.10) \quad \alpha \text{LG}_\alpha^0 \text{H}_0 h(x') \geq \|\varphi\| \quad \text{pour } \alpha \geq \alpha_0 \quad \text{et } x' \notin U.$$

Pour $\alpha \geq \alpha_0$, on pose $\psi_\alpha = \text{K}^\alpha \varphi - \varepsilon \text{K}^\alpha 1 - h$, $\psi_\alpha \in C^{2,\lambda}(\partial M)$.

$$\begin{aligned} \text{LH}_\alpha \psi_\alpha &= -\varphi + \varepsilon - \text{LH}_\alpha h \\ &= -\varphi + \varepsilon - \text{LH}_0 h + \alpha \text{LG}_\alpha^0 \text{H}_0 h && \text{(d'après (1.6))} \\ &\geq -\varphi + \alpha \text{LG}_\alpha^0 \text{H}_0 h && \text{(puisque } \varepsilon \geq \text{LH}_0 h \text{)}. \end{aligned}$$

Si $x' \in U$, $LH_\alpha \psi_\alpha(x') \geq \alpha LG_\alpha^0 H_0 h(x') \geq 0$ (puisque $\varphi(x') = 0$); si $x' \notin U$, $LH_\alpha \psi_\alpha(x') \geq -\|\varphi\| + \alpha LG_\alpha^0 H_0 h(x') \geq 0$ (d'après (3.10)).

On a donc $LH_\alpha \psi_\alpha \geq 0$, donc $\psi_\alpha \leq 0$ (2.5).

Mais si $x' \in K$, $\psi_\alpha(x') = K^\alpha \varphi(x') - \varepsilon K^\alpha 1(x') \leq 0$; ce qui montre (3.9) donc (iii) et la proposition.

Pour démontrer le théorème 3.1 on utilisera également,

PROPOSITION 3.6. — Soient $\varphi \in C(\partial M)$, φ nulle sur un ouvert U de ∂M et K un compact de M tel que $K \cap \partial M \subset U$ (remarquer que U peut être vide); alors il existe C tel que, pour tout $x \in K$, $|\alpha H_\alpha \varphi(x)| \leq C$.

Il suffit évidemment de montrer la proposition pour $\varphi \geq 0$, $\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M)$.

Soit V un ouvert de M tel que $K \subset V$ et $V \cap \partial M \subset U$, et soit h une fonction de $C^\infty(M)$, nulle sur K , ≥ 0 et telle que $\inf h \geq \|\varphi\|$.

On pose $C = \|Wh\|$ et $u_\alpha = C - \alpha H_\alpha \varphi + \alpha h$.

D'une part $(\alpha - W)u_\alpha = \alpha^2 h + \alpha(C - Wh) - CW1 \geq 0$ (puisque $W1 \leq 0$) d'autre part $\gamma^0 u_\alpha = C - \alpha \varphi + \alpha \gamma^0 h \geq 0$ (en effet si $x' \in U$, $\varphi(x') = 0$, si $x' \notin U$, $|\varphi(x')| \leq h(x')$).

Donc (1.4) $u_\alpha \geq 0$; ce qui donne pour $x' \in K$, $u_\alpha(x') = C - \alpha H_\alpha \varphi(x') \geq 0$; ce qui montre la proposition.

Démonstration du théorème 3.1. Elle repose sur,

LEMME 3.7. — Soient $f \in C(M)$, $\varphi \in C(\partial M)$, $\varphi \geq 0$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante C_1 et α_0 tels que l'on ait pour $\alpha \geq \alpha_0$, $x \in M$:

$$|\alpha J_\alpha(\gamma^0 f \cdot \varphi)(x) - f(x) \alpha J_\alpha \varphi(x)| \leq \varepsilon \alpha J_\alpha \varphi(x) + C_1 \|K^\alpha\|.$$

En effet, $\varepsilon > 0$ donné, soit η tel que $d(x, y) < \eta$ entraîne

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2$$

(d distance donnant la topologie de M).

On recouvre M par des boules $B(z_i, \eta/2)$, $i = 1, 2, \dots, p$, et on désigne par ψ_i une fonction de $C^\infty(M)$ telle que ψ_i soit nulle sur $B(z_i, 2\eta/3)$ et valant 1 sur le complémentaire de $B(z_i, \eta)$ ($i = 1, 2, \dots, p$). Appliquant la proposition 3.6 on peut trouver C_2 telle que, pour $x \in B(z_i, \eta/2)$, $|\alpha H_\alpha \psi_i(x)| \leq C_2$ ($i = 1, 2, \dots, p$).

D'autre part, pour $\varphi \not\equiv 0$, $K^\alpha \varphi > 0$ (2.14) et on déduit de la proposition 3.3 (iii) que $(K^\alpha \varphi)^{-1} K^\alpha \gamma^0 f \varphi \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} \gamma^0 f$ (dans $C(\partial M)$), donc qu'il existe α_0 tel que,

$$(3.11) \quad |K^\alpha(\gamma^0 f \varphi)(x') - f(x') K^\alpha \varphi(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2} K^\alpha \varphi(x') \quad \text{pour } x' \in \partial M, \alpha \geq \alpha_0.$$

Alors pour $x \in B(z_i, \eta/2)$,

$$| \alpha J_\alpha(\gamma^0 f \cdot \varphi)(x) - f(x) \alpha J_\alpha \varphi(x) | \leq | \alpha H_\alpha K^\alpha(\gamma^0 f \varphi)(x) - \alpha H_\alpha(\gamma^0 f K^\alpha \varphi)(x) | (=I_1) \\ + | \alpha H_\alpha(\gamma^0 f K^\alpha \varphi)(x) - f(x) \alpha H_\alpha K^\alpha \varphi(x) | (=I_2)$$

$$I_1 = \alpha H_\alpha(K^\alpha(\gamma^0 f \cdot \varphi) - \gamma^0 f \cdot K^\alpha \varphi)(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} H_\alpha K^\alpha \varphi(x) \quad (\text{d'après 3.11})$$

$$I_2 = \alpha H_\alpha(\gamma^0 f \cdot K^\alpha \varphi - f(x) K^\alpha \varphi)(x) \\ = \alpha H_\alpha[(\gamma^0 f - f(x) K^\alpha \varphi)(1 - \psi_i)](x) + \alpha H_\alpha[(\gamma^0 f \cdot K^\alpha \varphi - f(x) K^\alpha \varphi) \psi_i](x) \\ \geq \frac{\varepsilon}{2} \alpha H_\alpha K^\alpha \varphi(x) + \|f\| \cdot \|K^\alpha\| \cdot \|\varphi\| C_2$$

d'où

$$I_1 + I_2 \leq \varepsilon \alpha J_\alpha \varphi(x) + C_1 \|K^\alpha\|;$$

ce qui démontre le lemme.

Pour montrer le théorème il suffit de montrer (3.1) pour $\varphi \geq 0$. Soit $\varepsilon > 0$; observons (3.2) que $G_\beta(\alpha J_\alpha \varphi) \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} J_\beta \varphi$ donc qu'il existe $C_3 > 0$ telle que $\|G_\beta(\alpha J_\alpha \varphi)\| < C_3$ pour tout α assez grand. Appliquant le lemme 3.7 à $\frac{\varepsilon}{C_3}$ on obtient pour $\alpha \geq \alpha_0$,

$$\|G_\beta(\alpha J_\alpha \gamma^0 f \cdot \varphi) - G_\beta(\gamma^0 f \cdot \alpha J_\alpha \varphi)\| \leq \frac{\varepsilon}{C_3} \|G_\beta(\alpha J_\alpha \varphi)\| + C_1 \|K_\alpha\|.$$

D'où, puisque $\|K^\alpha\| \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} 0$ (2.11),

$$\limsup_{\alpha \rightarrow +\infty} \|G_\beta(\alpha J_\alpha \gamma^0 f \cdot \varphi) - G_\beta(\gamma^0 f \cdot \alpha J_\alpha \varphi)\| = 0.$$

Le théorème résulte alors de la proposition 3.2.

4. On peut (voir par exemple Meyer [5] et [13]) associer un processus de Markov au semi-groupe de générateur $(\overline{L}, \overline{W})$; de façon plus précise,

THÉOREME 4.1. — Soient W un opérateur de Waldenfels elliptique de classe $C^{0,\lambda}$ et L une condition frontière de Ventcel' satisfaisant (H) (§ 2); alors il existe un processus de Hunt $X = (\Omega, \mathcal{F}, (X_t)_{t \geq 0}, (P_x)_{x \in M_D})$ et un seul à équivalence près tel que, pour tout $\beta > 0$ et $f \in C(M)$,

$$G_\beta f(x) = E_x \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cdot f(X_t) dt \right) \quad (x \in M).$$

De plus si les noyaux \bar{s} de W et \bar{t} de L sont nuls le processus X est à trajectoires continues.

La deuxième partie du théorème sera démontrée ultérieurement (n° 8). Sans rappeler en détail les axiomes que vérifie un processus de Hunt, précisons les notations et quelques propriétés (voir Meyer [5] et [13]).

∂ désigne un point isolé adjoint à l'espace M et $M_\partial = MU \{ \partial \}$;

Ω désigne l'ensemble des applications $t \rightarrow \omega(t)$ de R_+ dans M_∂ continues à droite et pourvues d'une limite à gauche et telles que $\omega(u) = \partial$ entraîne $\omega(u+h) = \partial$ pour tout $h > 0$; X_t désigne l'application de Ω dans M_∂ telle que $X_t(\omega) = \omega(t)$. On pose pour $0 \leq t \leq +\infty$, $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$; alors $(P_x)_{x \in M_\partial}$ désigne une famille de probabilités sur \mathcal{G}_∞ telle que $x \rightarrow P_x(A)$ ($A \in \mathcal{G}_\infty$) soit \mathcal{B}_M -mesurable ⁽¹⁾. Pour toute probabilité μ sur \mathcal{B}_M , on définit

une probabilité sur \mathcal{G}_∞ par $P_\mu(A) = \int P_x(A) d\mu(x)$ ($A \in \mathcal{G}_\infty$); et on pose

$\mathcal{F} = \bigcap_{\mu} \overline{\mathcal{G}_\infty}^{\mu}$, $\mathcal{F}_t = \{ A; A \in \mathcal{F} \text{ et pour toute probabilité } \mu \text{ sur } \mathcal{B}_M \text{ il existe}$

$A_\mu \in \mathcal{G}_t \text{ tel que } P_\mu(A \Delta A_\mu) = 0 \}$. On prolonge sans difficulté les mesures P_μ à \mathcal{F} et on désigne par E_μ l'opération d'intégration par rapport à P_μ . Enfin on appelle temps d'arrêt de X un temps d'arrêt de la famille \mathcal{F}_t .

Les principales propriétés de X (qui seront utilisées par la suite) sont :

— pour tout temps d'arrêt τ de X , $f \in \mathcal{B}_M$ et $h > 0$ (propriété de Markov forte) :

$$E_\mu(1_{\tau < +\infty} \cdot f(X_{\tau+h}) \mid \mathcal{F}_\tau) = 1_{\tau < +\infty} E_{X_\tau}(f(X_h)) P_\mu ds$$

— Les tribus \mathcal{F}_t sont continues à droite i. e. $\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$.

— Si $A \in \mathcal{F}_0$, $P_x(A) = 0$ ou 1 (loi 0-1).

— Si τ_n est une suite de temps d'arrêt croissant vers τ , alors X_{τ_n} tend vers X p. s. sur $\tau < +\infty$ (quasi-continuité à gauche).

Enfin, on pose pour $A \in \mathcal{B}_M$,

$\tau_A = \inf(t \geq 0, X_t \in A)$ ou $+\infty$ si cet ensemble est vide

(temps d'atteinte de A);

$\sigma_A = \inf(t \geq 0, X_t \notin A)$ ou $+\infty$ si cet ensemble est vide

(temps de sortie de A)

(avec ces notations $\sigma_A = \tau((\mathcal{C}_A) \cup \{\partial\})$).

Alors τ_A et σ_A sont des temps d'arrêt de X .

Notons que si A est fermé $X_{\tau_A} \in A$. Et on convient que $X_\infty = \partial$.

Rappelons (voir par exemple Gettoor [4] et Meyer [6] qu'une fonction-

(1) \mathcal{B}_M désigne la tribu borélienne de M .

nelle additive continue de X est une famille $A = (A_{t \geq 0})$ de variables aléatoires positives sur (Ω, \mathcal{F}) telles que :

1) pour tout $\omega \in \Omega$

$$A_0(\omega) = 0$$

$t \rightarrow A_t(\omega)$ est non décroissante et continue;

2) A_t est \mathcal{F}_t mesurable pour tout t ;

3) pour tout $t, s \geq 0, A_{t+s} = A_t + A_s \circ \theta_t$ (où θ_t est l'opérateur qui associe à la trajectoire ω la trajectoire $s \rightarrow \omega(t + s)$).

La propriété 1) entraîne que $t \rightarrow A_t(\omega)$ définit une mesure sur \mathbb{R}_+ ; on peut donc définir pour f borélienne positive et $x \in M$,

$$(4.2) \quad V_A^\beta f(x) = E_x \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} f(X_t) dA_t \right).$$

$V_A^\beta f$ s'appelle le β -potentiel de f par rapport à $A, V_A^\beta 1$ le β -potentiel de A ; si $V_A^\beta 1$ est fini on peut définir $V_A^\beta f$ pour $f \in B(M)$.

On dit que deux fonctionnelles additives sont équivalentes si, pour tout $x \in M, P_x[A_t \neq B_t \text{ pour un } t \geq 0] = 0$. Si pour un $\beta \geq 0$ deux fonctionnelles additives continues ont même β -potentiel fini elles sont équivalentes.

Un ensemble borélien $B \subset M$ porte la fonctionnelle A si l'on a :

$$(4.3) \quad \int_0^{+\infty} 1_{(M \setminus B)} \circ X_s dA_s = 0 \text{ p. s. (ce qui équivaut à } V_A^\beta 1_{M \setminus B} \equiv 0)$$

Dans toute la suite on suppose vérifier les hypothèses du théorème 4.1 et on va étudier les propriétés du processus X .

THÉORÈME 4.2. — Il existe une fonctionnelle additive continue A de X , unique à une équivalence près, telle que, pour tout $\beta > 0$ et $f \in C(M)$,

$$(4.4) \quad V_A^\beta f = J_\beta \gamma^0 f.$$

De plus,

i) A est portée par ∂M ;

ii) il existe une suite $\alpha_n \rightarrow +\infty$ telle que, pour tout $t_0 < +\infty$,

$$(4.5) \quad A_t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \alpha_n J_{\alpha_n} 1(X_s) ds \quad \text{uniformément pour } t \in [0, t_0], \text{ p. s.}$$

Enfin (4.4) est encore vrai pour $\beta = 0$ si la condition (U) (n° 2) est satisfaite.

Ce théorème va reposer sur le lemme suivant, qui utilise des techniques classiques de la théorie des processus de Markov (voir Gettoor [4]).

LEMME 4.3. — Soit h_n une suite de fonctions boréliennes positives telles que, pour tout $\beta > 0$, $G_\beta(h_n)$ converge uniformément vers une fonction borélienne bornée u_β ; alors il existe une fonctionnelle additive continue A de X telle que $u_\beta = V_A^\beta 1$; de plus il existe une suite $n_q \rightarrow +\infty$ telle que,

- (i) $A_t = \lim_{q \rightarrow +\infty} \int_0^t h_{n_q}(X_s) ds$ uniformément localement p. s.
(ii) pour tout $\beta > 0$, $f \in C(M)$, $x \in M$, $G_\beta(h_{n_q} \cdot f)(x) \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} V_A^\beta f(x)$.

1) On suppose d'abord $E_x(\zeta^p)$ borné pour tout $p \geq 1$ (ζ désignant comme d'habitude de la durée de vie du processus X); en particulier $G_0 1(x) = E_x(\zeta)$ est borné; et on montre l'énoncé du lemme 4.1 pour $\beta = 0$ (au lieu de pour tout $\beta > 0$).

On pose

$$A_n(t) = \int_0^t h_n(X_s) ds.$$

On a

$$E_x(A_n(t)) = E_x\left(\int_0^t h_n(X_s) ds\right) \leq E_x\left(\int_0^\zeta h_n(X_s) ds\right) = G_0 h_n(x).$$

Par hypothèse $G_0 h_n \rightarrow u_0$ uniformément, on en déduit donc,

$$\sup_n \sup_x E_x \int_0^t h_n(X_s) ds \leq C < +\infty.$$

Alors la démonstration de (i) est bien connue : on montre d'abord que

$$\sup_{x \in M} E_x \{ |A_n(\zeta) - A_m(\zeta)|^2 \} \xrightarrow{m, n \rightarrow +\infty} 0,$$

puis posant $B_n(t) = E_x(A_n(t) | \mathcal{F}_t)$ on déduit de l'inégalité de Doob sur les martingales et du lemme de Borel-Cantelli l'existence d'une sous-suite (n_q) telle que $P_x[B_{n_q}(t) \text{ converge uniformément en } t] = 1$ ce qui entraîne que $A_{n_q}(t)$ converge localement uniformément en t p. s.

On pose $A(t, \omega) = \lim_{q \rightarrow +\infty} A_{n_q}(t, \omega)$ si cette limite existe;
 $= 0$ autrement;

$A(t)$ est une fonctionnelle additive continue de X et $E_x(A(\zeta)) = u(x)$.

Pour montrer (ii) rappelons que si C_t est une fonctionnelle additive continue de X de potentiel fini et si $g \in C(M)$ on a (Gettoor [4] ou Meyer [6])

$$E_x\left(\int_0^\zeta G_0 g(X_t) dC_t\right) = E_x\left(\int_0^\zeta g(X_t) \cdot C_t \cdot dt\right).$$

Soient $g \in C(M)$ et $f = G_0g$ alors,

$$G_0(h_{n_q}f)(x) = E_x \left(\int_0^\zeta h_{n_q}(X_t) f(X_t) dt \right) = E_x \left(\int_0^\zeta g(X_t) \cdot A_{n_q}(t) dt \right)$$

D'une part, puisque ζ est p. s. fini,

$$\int_0^\zeta g(X_t) A_{n_q}(t) dt \rightarrow \int_0^\zeta g(X_t) A(t) dt,$$

d'autre part

$$\left| \int_0^\zeta g(X_t) A_{n_q}(t) dt \right| \leq \|g\| \cdot \zeta \cdot A_{n_q}(\zeta) \rightarrow \|g\| \cdot \zeta \cdot A(\zeta)$$

dans $\bar{L}^1(P_x)$ car $A_{n_q}(\zeta) \rightarrow A(\zeta)$ dans $L^2(P_x)$ et $\zeta \in L^2(P_x)$; on a donc,

$$G_0(h_{n_q}f)(x) \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} E_x \left(\int_0^\zeta g(X_t) \cdot A(t) dt \right) = E_x \left(\int_0^\zeta f(X_t) dA_t \right).$$

De là on passe à $f \in C(M)$ quelconque, puisque $G_0(h_{n_q}) \leq C$.

2) Cas général. Rappelons la construction suivante :

$$(4.6) \quad -\beta > 0 \text{ fixé, on pose } \bar{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad \bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+},$$

$$\bar{X}_t(\omega, u) = X_t(\omega) \quad \text{si } t < u \quad (\omega, u) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$$

$$= \varnothing \quad \text{si } t \geq u$$

$$\bar{P}_{\beta, x} = P_x \otimes \beta e^{-\beta u} du$$

Alors le terme $\bar{X}_\beta = (\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, (\bar{X}_t), (\bar{P}_{\beta, x}))$ est un processus de Markov sur M dont la durée de vie $\bar{\zeta}$ vaut $\bar{\zeta}(\omega, u) = \zeta(\omega) \wedge u$; en particulier, on a, pour $p \geq 1$, $\bar{E}_{\beta, x}(\bar{\zeta}^p) < +\infty$. Le 0-potentiel $\bar{G}_{(\beta), 0}$ de \bar{X}_β existe et vaut G_β . On en déduit que le processus \bar{X}_β est le processus de générateur $(\bar{L}, \bar{W} - \beta)$.

On pose

$$A_n(t) = \int_0^t h_n(X_s) ds, \quad \bar{A}_n^\beta(t) = \int_0^t h_n(\bar{X}_s) ds;$$

appliquant les résultats de 1) au processus \bar{X}^β , on peut trouver une sous-suite (n_q) telle que :

$$\bar{A}_{n_q}^\beta(t, \bar{\omega}) = \int_0^t h_{n_q}(\bar{X}_s(\bar{\omega})) ds = \int_0^{t \wedge u} h_{n_q}(X_s(\omega)) ds \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} \bar{A}^\beta(t, \bar{\omega})$$

localement uniformément, $\bar{P}_{\beta, x}$ p. s.; ou $\bar{A}^\beta(t, \bar{\omega})$ est la fonctionnelle de \bar{X}^β de potentiel $\bar{G}_{(\beta), 0} 1 = G_\beta 1$.

Soit $\bar{\Omega}_1 = \{ (\omega, u); \int_0^{t \wedge u} h_{n_q}(X_s(\omega)) ds \text{ converge uniformément en } t \}$; on a $P_x \otimes \beta e^{-\beta u} du(\bar{\Omega}_1) = 1$, pour tout x ; si maintenant, on pose,

$$\Omega_k = \{ \omega; \int_0^t h_{n_q}(X_s) ds \text{ converge uniformément en } t \in [0, k] \},$$

on a $P_x(\Omega_k) = 1$ (il suffit de remarquer que $\bigcap \Omega_k \times [k, +\infty[\subset \bar{\Omega}_1$) donc si $\omega \in \bigcap \Omega_k$, $A_{n_q}(t, \omega)$ converge uniformément sur tout compact.

On pose $A(t, \omega) = \lim_{q \rightarrow +\infty} A_{n_q}(t, \omega)$ si cette limite existe;
 $= 0$ autrement.

$A(t)$ est une fonctionnelle additive continue de X et, p. s., $A_{n_q}(t)$ converge vers $A(t)$ uniformément localement; de plus

$$A(t \wedge u, \omega) = \bar{A}^\beta(t, (\omega, u)) \bar{P}_{\beta, x} \text{ p. s.}$$

Enfin

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow +\infty} G_\beta(h_{n_q} f)(x) &= \bar{E}_{\beta, x} \left(\int_0^{\bar{\zeta}} f(\bar{X}_t) d\bar{A}_t^\beta \right), \quad \text{d'après 1)} \\ &= E_x \left(\int_0^{+\infty} \beta e^{-\beta u} du \int_0^u f(X_t) dA_t \right) \\ &= E_x \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} f(X_t) dA_t \right) = V_A^\beta f(x) \quad (f \in C(M)). \end{aligned}$$

Si on prend $\alpha \neq \beta$, on peut faire la même construction en choisissant la même suite n_q car,

$$\bar{A}_{n_q}^\alpha(t, \omega, u) = \int_0^{t \wedge u} h_{n_q}(X_s) ds$$

converge uniformément localement \bar{P}_x p. s. pour tout u , donc $P_{\alpha, x}$ p. s. en (ω, u) . Le lemme 4.3 est donc démontré.

Démonstration du théorème 4.2. — D'après le théorème 3.1 $G_\beta(\alpha J_\alpha 1) \rightarrow J_\beta 1$ (dans $C(M)$) lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$. Il existe donc (lemme 4.3) une fonctionnelle additive continue A de X et une suite $\alpha_n \rightarrow +\infty$, telles que

$$J_\beta 1 = V_A^\beta 1 \quad \text{et} \quad A(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \alpha_n J_{\alpha_n} 1(X_s) ds$$

localement uniformément p. s.

De plus, d'après la propriété (2) du lemme 4.3 on a, pour $f \in C(M)$,

$$G_\beta(f \alpha_n J_{\alpha_n} 1)(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} V_a^\beta f(x).$$

Mais (théorème 3.1)

$$G_\beta(f \alpha_n J_{\alpha_n} 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} J_\beta(\gamma^0 f).$$

On a donc $V_A^\beta f = J_\beta(\gamma^0 f)$.

En particulier $V_M^\beta 1_\circ = \sup_n V_M^\beta f_n = 0$ où f_n est une suite de $C(M)$ croissant vers 1_\circ ; ce qui montre que A est portée par ∂M .

Lorsque la condition (U) est satisfaite, on peut soit montrer directement (4.4) pour $\beta = 0$, soit passer à la limite lorsque $\beta \rightarrow 0$ en utilisant le lemme suivant qui sera utile au n° 5.

LEMME 4.4. — *Sous l'hypothèse (U), $J_\beta \psi \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} J_0 \psi$ ($\psi \in C(\partial M)$).*

En effet (voir (2.5)) sous l'hypothèse (U), les opérateurs J_0 et G_0 existent et sont bornés. Alors soit v_β la solution de $(\beta - W)v_\beta = 0$, $-Lv_\beta = \psi$ ($\psi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$, $\beta \geq 0$), on a $v_\beta = J_\beta \psi$; de plus $-W(v_0 - v_\beta) = \beta v_\beta$, $-L(v_0 - v_\beta) = 0$, donc $v_0 - v_\beta = G_0(\beta v_\beta)$, donc

$$\begin{aligned} \|v_0 - v_\beta\| &\leq \beta \|G_0\| \cdot \|v_\beta\| \leq \beta \|G_0\| \cdot \|H_\beta\| \cdot \|K^\beta \psi\| \\ &\leq \beta \|G_0\| \cdot \|K^0\| \cdot \|\psi\| \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

puisque $\|K^\beta\| \leq \|K^0\|$. Comme $\|J_\beta\| \leq \|J_0\|$ on passe sans difficulté à $\psi \in C(\partial M)$.

c. q. f. d

DÉFINITION. — *On appelle la fonctionnelle additive continue A de β -potentiel $J_\beta 1$ le temps local sur ∂M associé à X .*

A étant portée par ∂M on peut considérer que V_M^β opère sur $B(\partial M)$, c'est ce que l'on fera dorénavant.

Au cours de la démonstration du lemme 4.3 et du théorème 4.2 on a montré :

COROLLAIRE 4.5. — *Soient \bar{X}^β le processus défini en (4.6) de générateur $(\bar{L}, \bar{W} - \beta)$, et \bar{A}^β son temps local, on a $\bar{A}_t^\beta(\omega, u) = A_{t \wedge u}(\omega)$ où A est le temps local de X .*

Remarque. — $H_\beta G_\beta f$ ($f \in C(M)$, $f \geq 0$) est une fonction β excessive régulière, c'est donc le β -potentiel d'une fonctionnelle additive continue A_f^β

portée par ∂M , la β -balayée sur ∂M de la fonction β -excessive $G_\beta u$ au sens de Motoo [7].

A_f^β est liée à A par la relation $A_f^\beta(t) = \int_0^t \overline{LG}_\beta^0 f(X_s) dA_s$ puisque

$$H_\beta G_\beta f = H_\beta K^\beta \overline{LG}_\beta^0 f = J_\beta \overline{LG}_\beta^0 f.$$

L'intérêt de la construction directe de A est, entre autre, de donner la formule $V_A^\beta \varphi = J_\beta \varphi$ pour tout $\varphi \in C(\partial M)$.

On obtient également une relation entre α et β balayées : soit g une fonction de $C(M)$, $g > 0$, $g \not\equiv 0$ et vérifiant, pour $x' \in \partial M$,

$$g(x') + \bar{\alpha}(x') + \bar{i}(x', \overset{\circ}{M}) > 0$$

(alors $\overline{LG}_\alpha^0 g > 0$ (2.13)) et soit $f \in C(M)$, $f \geq 0$, on a :

$$A_f^\beta(t) = \int_0^t \overline{LG}_\beta^0 f(X_s) dA_s = \int_0^t \frac{\overline{LG}_\beta^0 f}{\overline{LG}_\alpha^0 f}(X_s) dA_s^\alpha(s).$$

5. (A_t) étant une fonctionnelle additive continue de X , on définit :

$$\begin{aligned} \tau_t(\omega) &= \inf \{ s, A_s(\omega) > t \} \text{ si cet ensemble est non vide,} \\ &= +\infty \text{ autrement.} \end{aligned}$$

Alors τ_t est un temps d'arrêt de X et le terme $X' = (\Omega, \mathcal{F}, (X_{\tau_t}), (P_x)_{x \in M_\partial})$ est un processus de Markov sur M qu'on appelle le processus déduit de X par le changement de temps τ_t (ou associé à A_t) (voir Meyer [6] ou Motoo [7]).

De plus si (A_t) est portée par N ensemble fermé, X' est (à une légère modification près) un processus de Markov sur N ; si on désigne par R'_β la résolvante de X' et par ζ' sa durée de vie on a :

$$\zeta'(\omega) = A_{\tau}(\omega)$$

$$R'_\beta f(x) = E_x \left(\int_0^{\zeta'} e^{-\beta t} \cdot f(X_{\tau_t}) dt \right) = E_x \left(\int_0^{\zeta'} e^{-\beta A_t} \cdot f(X_t) dA_t \right) \quad (x \in N, f \in B(N)).$$

Dans ce paragraphe on va étudier le processus (X_{τ_t}) sur ∂M obtenu par le changement de temps associé au temps local (A_t) construit au théorème 4.2 et montrer que ce processus est le processus de générateur \overline{LH}_0 .

Soit $\sigma = \inf \{ t, X_t \notin \overset{\circ}{M} \}$ le temps de sortie de $\overset{\circ}{M}$, alors $X_\sigma \in \partial M \cup \{ \partial \}$.

Rappelons que dans les formules stochastiques les fonctions définies sur M (ou ∂M) sont toujours prolongées par la valeur 0 au point ∂ en des fonctions sur M_∂ (∂M_∂).

THÉORÈME 5.1. — *On a pour $\beta \geq 0$:*

$$H_\beta \varphi(x) = E_x(e^{-\beta\sigma} \varphi(X_\sigma)) \quad \text{pour } \varphi \in C(\partial M),$$

$$G_\beta^0 \varphi(x) = E_x \left(\int_0^\sigma e^{-\beta t} f(X_t) dt \right) \quad \text{pour } f \in C(M).$$

Supposons d'abord $\beta > 0$, et soit $\varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$. On pose $\varphi_\beta = -LH_\beta \varphi$. On a $J_\beta \varphi_\beta = H_\beta \varphi$, en particulier pour $x' \in \partial M$, $\varphi(x') = J_\beta \varphi_\beta(x')$, d'où :

$$\begin{aligned} H_\beta \varphi(x) &= V_A^\beta \varphi_\beta(x) = E_x \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cdot \varphi_\beta(X_t) dA_t \right) \quad (\text{théorème 4.2}) \\ &= E_x \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \varphi_\beta(X_t) dA_t \right) \quad \text{puisque } A_t \text{ est porté par } \partial M, \\ &= E_x \left(e^{-\beta\sigma} E_{X_\sigma} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \varphi_\beta(X_t) dA_t \right) \right) = E_x(e^{-\beta\sigma} \varphi(X_\sigma)). \end{aligned}$$

Par passage à la limite, cette formule est encore vraie pour $\varphi \in C(\partial M)$.

Pour $f \in C(M)$, $G_\beta^0 f = G_\beta f - H_\beta \gamma^0 G_\beta f$, et on a :

$$\begin{aligned} G_\beta^0 f(x) &= E_x \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cdot f(X_t) dt \right) - E_x \left(e^{-\beta\sigma} E_{X_\sigma} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cdot f(X_t) dt \right) \right) \\ &= E_x \left(\int_0^\sigma e^{-\beta t} \cdot f(X_t) dt \right). \end{aligned}$$

Le résultat est encore vrai pour $\beta = 0$ car lorsque β tend vers 0, $G_\beta^0 f$ tend vers $G_\beta^0 f$ et $H_\beta \varphi$ vers $H_0 \varphi$.

Le théorème 5.1 montre que le processus induit par X sur \mathring{M} est le processus de résolvantes (G_β^0) .

PROPOSITION 5.2. — *Soit $\varphi \geq 0$, $\varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ (sous l'hypothèse (El 2) (n° 2) on peut prendre $\varphi \in C^{0,\lambda}(\partial M)$). Alors pour $\beta > 0$, $f \in C^{1,\lambda}(M)$, $\psi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ — $f \in C^{0,\lambda}(M)$, $\psi \in C^{0,\lambda}(\partial M)$ sous l'hypothèse (El 2) — la fonction*

$$(5.1) \quad \begin{aligned} u(x) &= E_x \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \exp \left(- \int_0^t \varphi(X_s) dA_s \right) f(X_t) dt \right) \\ &\quad + E_x \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \exp \left(- \int_0^t \varphi(X_s) dA_s \right) \psi(X_t) dA_t \right) \end{aligned}$$

appartient à $C^{2,\lambda}(M)$ et vérifie $(\beta - W)u = f$, $(\varphi - L)u = \psi$.

Ce résultat est encore vrai pour $\beta = 0$ si, d'une part $\varphi - \Gamma 1 \neq 0$ ou $W 1 \neq 0$ et d'autre part, pour tout $x' \in \partial M$,

$$\bar{\alpha}(x') + \bar{i}(x', \overset{\circ}{M}) - \Gamma 1(x') + \varphi(x') > 0.$$

1) On introduit le processus $\bar{X}_\beta = (\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, (\bar{X}_t), (\bar{P}_{\beta, x}))$ du générateur $(\bar{L}, \bar{W} - \beta)$ utilisé au lemme 4.3, propriété (4.6). Soit \bar{A}^β le temps local sur ∂M associé, on sait (Corollaire 4.5) que $\bar{A}^\beta(t, (\omega, u)) = A(t \wedge u, \omega)$ où A est le temps local associé à X .

Soit $\bar{\tau}_t^\beta$ le changement de temps associé à \bar{A}_t^β ; et soit \bar{Y}_β le processus $(\bar{X}_{\bar{\tau}_t^\beta})$ associé, \bar{Y}_β est un processus de Markov sur ∂M . Désignons par $(\bar{R}_{\beta, \rho})_{\rho \geq 0}$ la résolvante de \bar{Y}_β ; on a pour $\psi \in C(\partial M)$, et $x' \in \partial M$:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\beta, 0}\psi(x') &= \bar{E}_{\beta, x'} \left(\int_0^{+\infty} \psi(\bar{X}_{\bar{\tau}_t^\beta}) dt \right) = \bar{E}_{\beta, x'} \left(\int_0^{+\infty} \psi(\bar{X}_t) d\bar{A}_t^\beta \right) \\ &= E_{x'} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \psi(X_t) dA_t \right) = J_\beta \psi(x') = K_0^\beta \psi(x'). \end{aligned}$$

De là, on déduit, en utilisant l'équation résolvante vérifiée par $(\bar{R}_{\beta, \rho})_{\rho \geq 0}$ et $(K_\rho^\beta)_{\rho \geq 0}$, que $\bar{R}_{\beta, \rho} = K_\rho^\beta$ pour tout $\rho \geq 0$; c'est-à-dire que \bar{Y}_β est le processus de générateur $\bar{L}\bar{H}_\beta$.

2) Rappelons le résultat suivant (voir par exemple Dynkin [3]) :

Soit E un compact métrisable, T_t un semi-groupe de Feller sur $C(E)$ de générateur infinitésimal (D_A, A) , de résolvante $(R_\alpha)_{\alpha > 0}$,

$$X = (\Omega, \mathcal{F}, (X_t), P_x)$$

le processus de Markov associé, φ une fonction continue positive sur E . On pose,

$$\tilde{R}_\alpha f(x) = E_x \left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \exp \left(- \int_0^t \varphi(X_s) ds \right) f(X_t) dt \right) \quad (f \in C(E)).$$

Alors la famille $(\tilde{R}_\alpha)_{\alpha > 0}$ est la résolvante d'un semi-groupe de Feller sur $C(E)$, de générateur (\tilde{D}_A, \tilde{A}) . On a $\tilde{D}_A = D_A$ et $\tilde{A} = A - \varphi I$. De plus si R_0 existe, \tilde{R}_0 existe.

On pose pour $\psi \in C^{1, \lambda}(\partial M)$ - resp. $\psi \in C^{0, \lambda}(\partial M)$ -, et $x' \in \partial M$.

$$\bar{\psi}(x') = \bar{E}_{\beta, x'} \left(\int_0^{+\infty} \exp \left(- \int_0^t \varphi(\bar{Y}_s) ds \right) \psi(\bar{Y}_s) dt \right) \quad \text{où} \quad \bar{Y}_t = \bar{X}_{\bar{\tau}_t^\beta};$$

d'après le résultat rappelé ci-dessus $\bar{\psi} \in \mathcal{D}(\overline{LH}_\beta)$ et $(\varphi - \overline{LH}_\beta)\bar{\psi} = \psi$. Mais, d'autre part il existe $\bar{\bar{\psi}} \in C^{2,\lambda}(\partial M)$ telle que $(\varphi - LH_\beta).\bar{\bar{\psi}} = \psi$ ((2.3) ou (2.4)); on a donc $\bar{\bar{\psi}} \in \mathcal{D}(\overline{LH}_\beta)$, d'où $(\varphi - \overline{LH}_\beta)(\bar{\psi} - \bar{\bar{\psi}}) = 0$, c'est-à-dire, puisque $\overline{LH}_\beta - \varphi I$ est le générateur d'un semi-groupe intégrable $\bar{\psi} = \bar{\bar{\psi}}$.

Mais $\bar{\psi}$ peut encore s'écrire,

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x') &= \bar{E}_{\beta,x'} \left(\int_0^{+\infty} \exp \left(- \int_0^t \varphi(\bar{X}_s) d\bar{A}_s \right) \psi(\bar{X}_s) d\bar{A}_s \right) \\ &= E_x \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \exp \left(- \int_0^t \varphi(X_s) dA_s \right) \cdot \psi(X_t) dA_t \right).\end{aligned}$$

Si, maintenant on pose $u_1 = H_\beta \bar{\psi}$, $u_1 \in C^{2,\lambda}(M)$ (puisque $\bar{\psi} \in C^{2,\lambda}(\partial M)$) et vérifie $(\beta - W)u_1 = 0$, $(\varphi - L)u_1 = \psi$; en utilisant le théorème 5.1, on obtient, posant

$$M_t = \exp \left(- \int_0^t \varphi(X_s) dA_s \right),$$

$$\begin{aligned}u_1(x) &= E_x(e^{-\beta \sigma} \bar{\psi}(X_\sigma)) = E_x \left(\int_\sigma^{+\infty} e^{-\beta t} \cdot M_t \cdot \psi(X_t) dA_t \right) \\ &= E_x \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cdot M_t \cdot \psi(X_t) dA_t \right).\end{aligned}$$

$$3) \text{ Soient } v(x) = E_x \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} f(X_t) dt \right),$$

$$w(x) = E_x \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cdot M_t \cdot \varphi(X_t) v(X_t) dA_t \right); \quad v \in C^{2,\lambda}(M)$$

et vérifie $(\beta - W)v = f$, $Lv = 0$; $w \in C^{2,\lambda}(M)$ et vérifie (d'après 2)) $(\beta - W)w = 0$, $(\varphi - L)w = \varphi v$; donc $u_2 = v - w \in C^{2,\lambda}(M)$ et vérifie $(\beta - W)u_2 = f$, $(\varphi - L)u_2 = 0$.

$$\begin{aligned}w(x) &= E_x \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cdot M_t \cdot \varphi(X_t) \cdot E_{X_t} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta r} f(X_r) dr \right) dA_t \right) \\ &= E_x \left(\int_0^{+\infty} M_t \cdot \varphi(X_t) \cdot \int_t^{+\infty} e^{-\beta r} f(X_r) dr \cdot dA_t \right) \\ &= E_x \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta r} f(X_r) \cdot \int_0^r M_t \varphi(X_t) dA_t dr \right)\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_0^r M_t \varphi(X_t) dA_t &= \int_0^r \exp\left(-\int_0^t \varphi(X_{t_s}) ds\right) \varphi(X_{t_r}) dt \\ &= 1 - \exp\left(-\int_0^r \varphi(X_{t_s}) ds\right) = 1 - M_r, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit,

$$u_2(x) = v(x) - w(x) = E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta r} \cdot M_r \cdot f(X_r) dr\right).$$

On obtient enfin,

$$\begin{aligned} u(x) = u_1(x) + u_2(x) &= E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta r} \cdot M_r \cdot f(X_r) dr\right) \\ &\quad + E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta r} \cdot M_r \cdot \psi(X_r) dA_r\right) \end{aligned}$$

est de classe $C^{2,\lambda}$ et vérifie $(\beta - W)u = f$, $(\varphi - L)u = \varphi$.

4) Supposons maintenant que d'une part $\varphi - \Gamma 1 \not\equiv 0$ ou $W 1 \not\equiv 0$ et d'autre part que $\bar{\alpha}(x') + \bar{t}(x', \hat{M}) - \Gamma 1(x') + \varphi(x') > 0$ en tout point x' de ∂M .

Soient $\hat{\Gamma} = \Gamma - \varphi I$, $\hat{L} = \hat{\Gamma} - \delta\gamma^0 W = L - \varphi I$. On a

$$\hat{\Gamma} 1(x') = \Gamma 1(x') - \varphi(x').$$

Donc, le système frontière (\hat{L}, W) satisfait à l'hypothèse (U) d'intégrabilité (n° 2), donc (2.5) les opérateurs

$$\hat{K}^\beta = -(\widehat{LH}_\beta)^{-1} \quad \text{et} \quad \hat{G}_\beta = (\widehat{\beta - W\hat{L}})^{-1}$$

existent pour $\beta \geq 0$.

On a pour $\beta > 0$ et $x \in M$ (c'est ce qu'on vient de montrer) :

$$\begin{aligned} (5.2) \quad \hat{G}_\beta f(x) + H_\beta \hat{K}^\beta \psi(x) &= E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cdot M_t \cdot f(X_t) dt\right) \\ &\quad + E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cdot M_t \cdot \psi(X_t) dA_t\right). \end{aligned}$$

On obtient le résultat cherché en faisant tendre β vers 0 dans (5.2) car $\hat{G}_\beta f \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \hat{G}_0 f$ et d'autre part

$$H_\beta \hat{K}^\beta \psi = \hat{J}_\beta \psi \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \hat{J}_0 \psi \quad (\text{Lemme 4.4}).$$

Remarque 1. — La proposition 5.2 est vraie pour $\beta = 0$ si $\varphi(x') > 0$ pour tout $x' \in \partial M$, en particulier si $\varphi = \rho$ constante > 0 .

Remarque 2. — Utilisant à nouveau le résultat rappelé au 2) ci-dessus, on peut montrer que si $f, g \in C^{1,\lambda}(M), g \geq 0; \psi, \varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M), \varphi \geq 0$ (sous l'hypothèse (El 2) on peut supposer les fonctions de classe $C^{0,\lambda}$), et si on pose

$$N_t = \exp\left(-\int_0^t g(X_s) ds\right), \quad M_t = \exp\left(-\int_0^t \varphi(X_s) dA_s\right),$$

alors, pour tout

$$\beta > 0, \quad u(x) = E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cdot N_t \cdot M_t \cdot f(X_t) dt\right) + E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cdot N_t \cdot M_t \cdot \psi(X_t) dA_t\right)$$

est de classe $C^{2,\lambda}$ et vérifie $(\beta + g - W)u = f, (\varphi - L)u = \psi$. Ce résultat est encore valable pour $\beta = 0$ sous des hypothèses analogues à celles de la proposition 5.2.

Dans le cas $L = \frac{\partial}{\partial \nu}$ la représentation des solutions que l'on peut obtenir de la sorte, ainsi qu'à l'aide de changement de temps, a été étudiée par Sato et Ueno [12].

PROPOSITION 5.3. — On a pour $\rho \geq 0, \beta \geq 0, \rho + \beta > 0$

$$(5.3) \quad J_\beta K_\rho^\beta \varphi(x) = E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cdot e^{-\rho A_t} \varphi(X_t) dA_t\right), \quad \varphi \in C(\partial M).$$

$$(5.4) \quad G_{\rho,\beta} f(x) = E_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cdot e^{-\rho A_t} f(X_t) dt\right), \quad f \in C(M).$$

C'est une conséquence immédiate de la proposition 5.2 et de la remarque 1 qui suit.

THÉORÈME 5.4. — *Le processus déduit de X par le changement de temps associé au temps local (A_t) est le processus de Markov sur ∂M de résolvante $(K_\rho^0)_{\rho > 0}$, de générateur $\bar{L}H_0$.*

En effet, soit $(R_\rho)_{\rho > 0}$ la résolvante du processus sur $\partial M (X_{\tau_t})$, où τ_t est le changement de temps associé à A_t (voir le rappel au début du paragraphe), on a pour $\varphi \in C(\partial M)$:

$$R_\rho \varphi(x') = E_{x'}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\rho A_t} \varphi(X_t) dA_t\right) = K_\rho^0 \varphi(x') - \text{proposition 5.3.}$$

COROLLAIRE 5.5. — On a $P_{x'}(A_t > 0 \text{ pour tout } t > 0) = 1$, pour tout $x' \in \partial M$.

En effet le processus (X_t) étant associé à un semi-groupe de Feller est normal, c'est-à-dire $P_{x'}[X_{\tau_0} = x'] = 1$ pour tout $x' \in \partial M$. D'où :

$$\begin{aligned} P_{x'}\{A_t > 0 \text{ pour tout } t > 0\} &= P_{x'}\{\tau_0 = 0\} = E_x(P_{X_{\tau_0}}(\tau_0 = 0)) \\ &= P_{x'}\{\tau_0 \circ \theta_{\tau_0} = 0\} = 1 \end{aligned}$$

Ce corollaire montre que la fonctionnelle (A_t) est non seulement portée par ∂M mais qu'elle a pour support ∂M , voir Gettoor [4].

Remarque. — Soit $\psi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$, ou $C^{0,\lambda}(\partial M)$ si (El 2), $\psi > 0$ est $\widehat{L} = \psi L$.

Alors $(W, L) = (W, \widehat{L})$ et le changement de temps qui fait passer de X au processus de générateur \widehat{LH}_0 est celui associé à la fonctionnelle

$$\widehat{A}_t = \int_0^t \psi^{-1}(X_s) ds.$$

En effet $(\widehat{R}_\rho)_{\rho > 0}$ désignant la résolvante du processus déduit de X au moyen de \widehat{A}_t , on a, pour $\varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ et $x' \in \partial M$,

$$\begin{aligned} \widehat{R}_\rho \varphi(x') &= E_{x'}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\rho \widehat{A}_t} \varphi(X_t) d\widehat{A}_t\right) \\ &= E_{x'}\left(\int_0^{+\infty} \exp\left(-\rho \int_0^t \psi^{-1}(X_s) dA_s\right) \varphi(X_t) \psi^{-1}(X_t) dt\right) \end{aligned}$$

d'où (proposition 5.2), $\widehat{R}_\rho \varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M)$, et $(\rho \psi^{-1} - LH_0)\widehat{R}_\rho \varphi = \varphi \psi^{-1}$, ou encore $(\rho - \widehat{LH}_0)\widehat{R}_\rho \varphi = \varphi$; (\widehat{R}_ρ) est la résolvante du processus de générateur \widehat{LH}_0 .

Le théorème suivant éclaire le rôle joué par le coefficient δ .

Soit $\varphi \geq 0$, $\varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ ($\varphi \in C^{0,\lambda}(\partial M)$ sous l'hypothèse (El 2)).

On considère la fonctionnelle additive continue de X ,

$$B_t = t + \int_0^t \varphi(X_s) dA_s$$

où A est le temps local sur ∂M de X ; et soit (σ_t) le changement associé à B_t .

On considère le processus $Y = (\Omega, \mathcal{F}, (X_{\sigma_t}), (P_x))$, soit $(R_\beta)_{\beta > 0}$ sa résolvante.

On a pour $f \in C^{1,\lambda}(M)$:

$$\begin{aligned} R_\beta f(x) &= E_x \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} f(X_t) dt \right) = E_x \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta B_t} f(X_t) dB_t \right) \\ &= E_x \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \exp \left(- \int_0^t \beta \varphi(X_s) dA_s \right) f(X_t) dt \right) \\ &\quad + E_x \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \exp \left(- \int_0^t \beta \varphi(X_s) dA_s \right) f(X_t) \varphi(X_t) dA_t \right) \end{aligned}$$

On en déduit (proposition 5.2) que $R_\beta f$ appartient à $C^{2,\lambda}(M)$ et vérifie $(\beta - W)R_\beta f = f$, $(\beta\varphi - L)R_\beta f = \varphi f$; soit encore, $(\beta - W)R_\beta f = f$, $(\varphi W - L)R_\beta f = 0$.

On obtient donc,

THÉORÈME 5.6. — *Le processus déduit de X par le changement de temps associé à la fonctionnelle $B_t = t + \int_0^t \varphi(X_s) ds - \varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ sous l'hypothèse (El 1), $\varphi \in C^{0,\lambda}(\partial M)$ sous l'hypothèse (El 2) (voir n° 2) — est le processus de générateur $(\overline{L'}, \overline{W})$ où $L' = L - \varphi\gamma^0 W$.*

Ce théorème montre, en particulier, comment on peut déduire le processus de générateur $(\overline{L}, \overline{W})$ du processus de générateur (Γ, \overline{W}) lorsque Γ est fortement transversal (voir n° 2) et permet d'interpréter le coefficient δ comme un coefficient de « glue » qui retarde les trajectoires lorsqu'elles atteignent le bord.

En général, cependant, Γ n'est pas fortement transversal et il faut étudier directement le rôle du coefficient δ , c'est ce qu'on fera au paragraphe suivant.

6. On a vu au paragraphe précédent que, sur chaque trajectoire, $A_t(\omega)$ est la limite de $\int_0^t \alpha_n J_{\alpha_n} 1(X_s(\omega)) ds$ lorsque $\alpha_n \rightarrow +\infty$; pour étudier le temps local (A_t) on va étudier le comportement lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$ de $\alpha J_\alpha 1$. On en déduira qu'il y a essentiellement deux cas : dans une région de ∂M où δ est > 0 , le processus X séjourne un temps de mesure (de Lebesgue) > 0 et le temps local A_t a une densité $\delta^{-1} \cdot 1_{\partial M}$ par rapport à la fonctionnelle temps t , par contre dans une région de ∂M où δ est nul le processus séjourne un temps de mesure nulle et la fonctionnelle A_t est un « vrai » temps local qui ne croît que sur un ensemble de mesure nulle.

PROPOSITION 6.1.

- (i) si $x \in \overset{\circ}{M}$, $\alpha J_\alpha 1(x) \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} 0$ uniformément sur tout compact $K \subset \overset{\circ}{M}$
 (ii) si $x' \in \partial M$ et si $\delta(x') = 0$, $\alpha J_\alpha 1(x') = \alpha K^\alpha 1(x') \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} +\infty$, et la convergence est uniforme sur $\{\delta = 0\}$.
 (iii) si $x' \in \partial M$ et $\delta(x') > 0$, $\alpha J_\alpha 1(x') = \alpha K^\alpha 1(x') \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} \delta^{-1}(x')$, et la convergence est uniforme sur tout compact $K \subset \{\delta > 0\}$.

Cette proposition va reposer sur une série de lemmes.

LEMME 6.2. — Soient $v \in C^{2,\lambda}(M)$ telle que $\gamma^0 v = 0$, $\frac{\partial v}{\partial \nu} > 0$, $v > 0$ sur $\overset{\circ}{M}$, et A une constante ≥ 0 , alors il existe $u \in C^{2,\lambda}(M)$ telle que $\gamma^0 u = 0$, $u > 0$ sur $\overset{\circ}{M}$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu}$, $\gamma^0 W u \leq -A$.

En effet, soit $W = Q + S$ et remarquons que sur les fonctions de classe C^2 nulles au bord Q s'écrit,

$$(6.1) \quad Qu(x') = a(x') \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}(x') + b(x') \frac{\partial u}{\partial \nu}(x'), \quad \text{avec} \quad a > 0$$

puisque Q est elliptique.

Puisque $a > 0$ on peut trouver B tel que $-Ba(x') \leq -A - Wv(x')$ pour tout $x' \in \partial M$. On choisit $u_1 \in C^{2,\lambda}(M)$ telle que $\gamma^0 u_1 = 0$, $\frac{\partial u_1}{\partial \nu} = 0$, $\frac{\partial^2 u_2}{\partial \nu^2} = -1$, $u_1 \leq 0$; et on pose $u_2 = Bu_1 + v$. On a $\frac{\partial u_2}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} > 0$, on peut donc trouver un voisinage V de ∂M tel que sur $\overset{\circ}{M} \cap V$, $u_2 > 0$.

Soit f une fonction C^∞ , valant 1 sur $\overset{\circ}{V}$, nulle sur un voisinage de ∂M , et telle que $0 \leq f \leq 1$. On pose $u = u_2 - Bu_1 \cdot f = v + Bu_1(1 - f)$.

On a $\gamma^0 u = 0$ et $0 < u \leq v$ sur $\overset{\circ}{M}$ (en effet, sur $\overset{\circ}{M} \cap V$

$$v \geq u \geq v + Bu_1 = u_2 > 0; \text{ sur } \overset{\circ}{V}, u = v).$$

Comme $\gamma^0 u = \gamma^0 v$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu}$ et $u \leq v$, on a $Su(x') \leq Sv(x')$ pour tout $x' \in \partial M$ (il suffit d'écrire l'expression de S , voir n° 1).

Enfin, pour $x \in \partial M$,

$$\begin{aligned} Wu(x') &= a(x') \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}(x') + b(x') \frac{\partial v}{\partial v}(x') + Su(x') \\ &\leq a(x') \left[-B + \frac{\partial^2 v}{\partial v^2}(x') \right] + b(x') \frac{\partial v}{\partial v}(x') + Sv(x') \\ &\leq -a(x')B + Wv(x') \leq -A, \quad \text{d'où le lemme.} \end{aligned}$$

LEMME 6.3.

$$\| \overline{\Gamma G_\alpha^0} \| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \alpha \rightarrow + \infty.$$

Il suffit de montrer que $\Gamma G_\alpha^0 1 \rightarrow 0$ uniformément.

Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver une fonction $u \in C^{2,\lambda}(M)$ telle que $\gamma^0 u = 0$, $u > 0$ sur $\overset{\circ}{M}$, $\Gamma u \leq \varepsilon$, $\gamma^0 Wu \leq -2$ (il suffit d'appliquer le lemme 6.2 à une fonction v telle que $\gamma^0 v = 0$, $\frac{\partial v}{\partial v} > 0$, $\Gamma v \leq \varepsilon$).

Soit V un voisinage de ∂M tel que, sur V , $Wu \leq -1$; et soit

$$a = \inf_{C^V} u > 0.$$

Si $\alpha \geq a^{-1}(1 + \|Wu\|)$ on a :

$$\begin{aligned} (a - W)(u - G_\alpha^0 1) &= \alpha u - Wu - 1 \\ &\geq 1_V \cdot (-Wu - 1) + 1_{C^V} \cdot (\alpha a - \|Wu\| - 1) \geq 0. \\ \gamma^0(u - G_\alpha^0 1) &= 0. \end{aligned}$$

Donc $u - G_\alpha^0 1 \geq 0$ (1.4); comme $\gamma^0 u = 0$ ceci implique

$$0 \leq \Gamma G_\alpha^0 1 \leq \Gamma u \leq \varepsilon.$$

COROLLAIRE 6.4. — Pour tout $\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M)$, $\alpha^{-1} \cdot \Gamma H_\alpha \varphi \rightarrow 0$ lorsque $\alpha \rightarrow + \infty$.

En effet,

$$\alpha^{-1} \cdot \Gamma H_\alpha \varphi = \alpha^{-1} \Gamma H_0 \varphi - \Gamma G_\alpha^0 H_0 \varphi \quad ((1.6) \text{ n}^\circ 1).$$

donc

$$\| \alpha^{-1} \cdot \Gamma H_\alpha \varphi \| \leq \alpha^{-1} \cdot \| \Gamma H_0 \varphi \| + \| H_0 \varphi \| \cdot \| \overline{\Gamma G_\alpha^0} \| \rightarrow 0.$$

LEMME 6.5. — Soit $\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M)$, $\varphi \geq 0$, on a pour tout compact $K \subset \{ \varphi > 0 \}$:

$$\sup_{x' \in K} LH_\alpha \varphi(x') \rightarrow -\infty \quad \text{lorsque} \quad \alpha \rightarrow + \infty.$$

Rappelons que l'on a $\sup LH_\alpha 1 \rightarrow -\infty$, et $\inf (\alpha LG_\alpha^0 1) \rightarrow +\infty$ (2.10 et lemme 3.5). Il existe $a > 0$ tel que $K \subset \{H_0\varphi \geq a\}$, et soit $f \in C^\infty(M)$ telle que $f = 0$ sur K , $f = 1$ sur $\{H_0\varphi < a\}$. Utilisant la proposition 3.3 (ii) il existe α_0 , tel que si $\alpha \geq \alpha_0$

$$| (LG_\alpha^0 1)^{-1} \cdot LG_\alpha^0 f - \gamma^0 f | \leq \frac{1}{2};$$

en particulier, si $x' \in K$:

$$\alpha LG_\alpha^0 f(x') \leq \alpha \frac{1}{2} LG_\alpha^0 1(x').$$

On a pour $\alpha \geq \alpha_0$, $x' \in K$:

$$\begin{aligned} LH_\alpha \varphi(x') &= LH_0 \varphi(x') - \alpha LG_\alpha^0 H_0 \varphi(x') \\ &= LH_0 \varphi(x') - \alpha LG_\alpha^0 (H_0 \varphi + af)(x') + \alpha a LG_\alpha^0 f(x') \\ &\leq \| LH_0 \varphi \| - \alpha a LG_\alpha^0 1(x') + \frac{\alpha}{2} a LG_\alpha^0 1(x') \\ &\leq \| LH_0 \varphi \| - \frac{a}{2} \alpha LG_\alpha^0 1(x') \end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{x' \in K} LH_\alpha \varphi \leq \| LH_0 \varphi \| - \frac{a}{2} \inf (\alpha LG_\alpha^0 1) \rightarrow -\infty \quad (\text{lemme 3.5})$$

c. q. f. d.

Démonstration de la proposition 6.1 :

(i) Soit K un compact contenu dans $\overset{\circ}{M}$; on a $\sup_{x \in K} \alpha H_\alpha 1(x) \leq C$ (proposition 3.6).

Alors, si $x \in K$, $\alpha J_\alpha 1(x) = \alpha H_\alpha K^\alpha 1(x) \leq \| K^\alpha \| \alpha H_\alpha 1(x) \leq C \| K^\alpha \|$ d'où (i) puisque $\| K^\alpha \| \rightarrow 0$ lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$ (2.11).

(ii) Soient $A \geq 0$ et $K = \{\delta = 0\}$.

On pose $U = \left\{ 1 - \delta A > \frac{1}{2} \right\}$, alors $U \subset K$ et soit $\varphi \in C^\infty(\partial M)$ telle que $\varphi = 0$ sur K , $\varphi > 0$ sur $\overset{\circ}{U}$, et $LH_0 \varphi \leq \frac{1}{4}$ (remarquons que $LH_\alpha \varphi$ est pour $\varphi \geq 0$ une fonction décroissante de α , donc $LH_\alpha \varphi \leq \frac{1}{4}$ pour tout $\alpha \geq 0$).

Soit α_0 tel que l'on ait pour $\alpha \geq \alpha_0$:

$$\| \alpha^{-1} \cdot A \cdot LH_\alpha 1 \| \leq \frac{1}{4} \quad (\text{corollaire 6.4})$$

$$LH_\alpha \varphi \leq -A \| \delta \| \quad \text{sur } \overset{\circ}{U} \quad (\text{lemme 6.5})$$

Si on pose $u_\alpha = \alpha K^\alpha 1 - A + \alpha \varphi$, on a pour $\alpha \geq \alpha_0$:

$$\begin{aligned} (-LH_\alpha)u_\alpha &= \alpha[1 - \delta A + \alpha^{-1}A \cdot \Gamma H_\alpha 1 - LH_\alpha \varphi] \\ &\geq 1_U \cdot \alpha \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + 1_{\mathbf{C}_U} \cdot \alpha \cdot (-\delta \|A\| - LH_\alpha \varphi) \geq 0 \end{aligned}$$

u_α est donc ≥ 0 (2.5). D'où, si $x' \in K$, $\alpha K^\alpha 1(x') \geq A$.

(iii) Soient $\varepsilon > 0$ et K un compact contenu dans $\{\delta > 0\}$.

Soit U un ouvert tel que $K \subset U \subset \bar{U} \subset \{\delta > 0\}$; on pose $a = \inf_{\bar{U}} \delta$,

a est > 0 .

Soient ψ une fonction positive de $C^\infty(\partial M)$ valant 1 sur \bar{U} telle que $\psi \cdot \delta^{-1} \in C(\partial M)$, et φ une fonction positive de $C^\infty(\partial M)$ nulle sur K , strictement positive sur \mathbf{C}_U et telle que $LH_0 \varphi \leq \frac{a\varepsilon}{2}$ (on a donc $LH_\alpha \varphi \leq \frac{a\varepsilon}{2}$ puisque $LH_\alpha \varphi$ est décroissant (1.7)).

On choisit α_0 tel que si $\alpha \geq \alpha_0$,

$$(6.2) \quad LH_\alpha \varphi \leq -\|\psi\| - 1 - \frac{a\varepsilon}{2} \text{ sur } \mathbf{C}_U \quad (\text{en vertu du lemme 6.5})$$

$$(6.3) \quad \|\alpha^{-1} \Gamma H_\alpha (\psi \delta^{-1})\| + \|\alpha^{-1} \Gamma H_\alpha \varepsilon\| \leq \frac{a\varepsilon}{2} \quad (\text{en vertu du corollaire 6.4}).$$

On pose pour $i = 1, 2$ et $\eta_1 = +1, \eta_2 = -1$,

$$v_\alpha^i = \alpha K^\alpha 1 - \delta^{-1} \psi + \eta_i \varepsilon - \eta_i \alpha \varphi.$$

On a pour $\alpha \geq \alpha_0$,

$$\begin{aligned} (-LH_\alpha)v_\alpha^i &= \alpha \{ 1 - \psi + \delta \eta_i \varepsilon + \alpha^{-1} \Gamma H_\alpha (\delta^{-1} \psi) - \alpha^{-1} \eta_i \Gamma H_\alpha \varepsilon - \eta_i LH_\alpha \varphi \} \\ &= \alpha \{ 1 - \psi + \eta_i \delta \varepsilon - \eta_i LH_\alpha \varphi + \theta_\alpha^i \} \quad \text{avec } |\theta_\alpha^i| \leq \frac{a\varepsilon}{2} \text{ d'après (6.3)}. \end{aligned}$$

Ce qui donne pour $i = 1$,

$$\begin{aligned} (-LH_\alpha)v_\alpha^1 &= \alpha 1_U (\delta \varepsilon - LH_\alpha \varphi + \theta_\alpha^1) + \alpha 1_{\mathbf{C}_U} \cdot (1 - \psi + \delta \varepsilon - LH_\alpha \varphi + \theta_\alpha^1) \\ &\geq \alpha 1_U \left(\delta \varepsilon - \frac{a\varepsilon}{2} - \frac{a\varepsilon}{2} \right) + \alpha 1_{\mathbf{C}_U} \cdot \left(-\|\psi\| - \frac{a\varepsilon}{2} - LH_\alpha \varphi \right) \\ &\geq 0 \text{ (d'après (6.2))} \end{aligned}$$

donc (2.5) $v_\alpha^1 \geq 0$; et pour $i = 2$,

$$\begin{aligned} (-LH_\alpha)v_2 &= \alpha 1_U \cdot (-\delta\varepsilon + LH_\alpha\varphi + \theta_\alpha^2) + \alpha 1_{\mathbf{C}_U} (1 - \psi - \delta\varepsilon + LH_\alpha\varphi + \theta_\alpha^2) \\ &\leq \alpha 1_U \left(-\delta\varepsilon + \frac{a\varepsilon}{2} + \frac{a\varepsilon}{2} \right) + \alpha 1_{\mathbf{C}_U} \left(1 + \frac{a\varepsilon}{2} + LH_\alpha\varphi \right) \\ &\leq 0 \text{ (d'après (6.2))} \end{aligned}$$

donc (2.5) $v_\alpha^2 \geq 0$.

On a donc si $x' \in K$

$$-\varepsilon \leq \alpha K^\alpha 1(x') - \delta^{-1}(x') \leq \varepsilon.$$

c. q. f. d.

COROLLAIRE 6.6. — Soit K un compact de M tel que $K \cap \partial M \subset \{ \delta > 0 \}$, alors

$$\sup_{\alpha \geq 1} \sup_{x \in K} \alpha J_\alpha 1(x) < +\infty.$$

En effet, soient V un ouvert tel que $K \subset V$ et $\bar{V} \cap \partial M = F \subset \{ \delta > 0 \}$ et g une fonction positive de $C^\infty(M)$ telle que $g = 0$ sur K , $g \geq 1$ sur $\mathbf{C}\bar{V}$.

Puisque $F \subset \{ \delta > 0 \}$, $\alpha K^\alpha 1 \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} \delta^{-1}$ uniformément sur F (proposition 6.1); il existe donc $A \geq 0$ et $\alpha_1 > 0$ tels que

$$A \geq \sup_{\alpha \geq \alpha_1} \sup_{x \in F} \alpha K^\alpha 1(x).$$

Soient $B \geq 0$ tel que $B \geq A$ et $B \geq \|Wf\|$, et α_2 tel que pour $\alpha \geq \alpha_2$, $K^\alpha 1 \leq 1$ (c'est possible d'après (2.11)) et soit $\alpha_0 = \sup(\alpha_1, \alpha_2)$.

On pose pour $\alpha \geq \alpha_0$, $u_\alpha = B - \alpha J_\alpha 1 + \alpha g$; on a d'une part,

$$\gamma^0 u_\alpha = B - \alpha K^\alpha 1 + \alpha \gamma^0 g \geq 1_F \cdot (B - A) + 1_{\mathbf{C}_F} (B - \alpha + \alpha) \geq 0;$$

d'autre part,

$$(\alpha - W)u_\alpha = \alpha^2 g + \alpha(B - Wg) - WB \geq 0$$

(puisque $W1 \leq 0$).

On en déduit (1.4) que $u_\alpha \geq 0$, ce qui donne pour $x \in K$, $B \geq \alpha J_\alpha 1(x)$. Ceci montre le corollaire car pour $1 \leq \alpha \leq \alpha_0$, $\alpha J_\alpha 1(x) \leq \alpha_0 H_0 K^1 1(x) \leq B'$.

On va déduire le théorème suivant de la proposition 6.1 et du corollaire 6.6; on pourrait également le déduire d'une étude plus précise des opérateurs G_β^0 définis au n° 1 (voir à ce sujet Bony [I]). La méthode utilisée ici a l'avantage de pouvoir se généraliser à des cas moins réguliers.

THÉORÈME 6.7. — On a pour $\varphi \in B(\partial M)$ et $\beta > 0$, $G_\beta(\varphi 1_{\partial M}) = J_\beta(\varphi \cdot \delta)$.

En effet, posons $K = \{ \delta = 0 \}$, $U = \{ \delta > 0 \}$ et soient $\psi \in C(\partial M)$ à support contenu dans U , V un ouvert tel que $V \cap \partial M \supset \text{supp } \psi$ et $\bar{V} \cap \partial M \subset U$, f une fonction de $C^\infty(M)$ telle que $0 \leq f \leq 1$, $f = 1$ sur $\text{supp } \psi$, $f = 0$ sur \bar{V} ; g une fonction de $C(M)$ telle que $\gamma^0 g = \delta \psi$. D'après le corollaire 6.6 $\sup_{\alpha \geq 1} \|fg\alpha J^\alpha 1\| < +\infty$.

D'après la proposition 6.1 (i) et (iii) pour tout $x \in M$

$$fg\alpha J^\alpha 1(x) \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} \psi 1_{\partial M}(x),$$

on a donc (d'après le théorème de Lebesgue puisque

$$\sup_{\alpha \geq 1} \|fg\alpha J_\alpha 1\| < +\infty),$$

$$(6.4) \quad G_\beta(1_{\partial M} \cdot \psi)(x) = G_\beta(\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} fg\alpha J_\alpha 1)(x) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} G_\beta(fg\alpha J^\alpha 1)(x), \\ = J_\beta(\gamma^0 fg)(x) = J_\beta(\delta \psi)(x) \text{ (théorème 3.1)}$$

Mais G_β et J_β sont des opérateurs positifs (6.4) est encore vraie pour $\psi = \varphi^1_U$ où $\varphi \in B(\partial M)$, donc pour $\varphi \in B(\partial M)$:

$$(6.5) \quad G_\beta(1_{\partial M} 1_U \varphi) = J_\beta(\delta \varphi 1_U).$$

Soit maintenant $m_\alpha = \inf_{x \in K} \alpha K^\alpha 1(x)$, $m_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} +\infty$ (proposition 6.1 (ii)), et on a $1_K \leq m_\alpha^{-1} \alpha K^\alpha 1$, d'où, pour $\varphi \in B(\partial M)$,

$$G_\beta(1_{\partial M} 1_K \varphi) \leq m_\alpha^{-1} G_\beta(1_{\partial M} \alpha K^\alpha 1 \varphi) \leq m_\alpha^{-1} \|\varphi\| G_\beta(\alpha J_\alpha 1) \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} 0$$

puisque (théorème 3.1) $G_\beta(\alpha J_\alpha 1) \rightarrow J_\beta 1$; ce qui peut s'écrire,

$$(6.6) \quad G_\beta(1_{\partial M} 1_K \varphi) = J_\beta(\delta \varphi 1_K).$$

Les égalités (6.5) et (6.6) entraînent le théorème 6.7.

On désigne par l la mesure de Lebesgue sur R_+ .

COROLLAIRE 6.8.

- (i) $l(t; X_t \in \partial M \cap \{ \delta = 0 \}) = 0$ p. s.;
- (ii) si $\delta \not\equiv 0$ et V est un ouvert contenu dans $\{ \delta > 0 \}$,

$$l(t; X_t \in \partial M \cap V) > 0 \text{ p. s.}$$

En effet

$$0 = G_\beta(1_{\partial M \cap \{ \delta = 0 \}})(x) = E_x \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} 1_{\partial M \cap \{ \delta = 0 \}}(X_t) dt \right);$$

d'où (i). D'autre part si φ est une fonction $\geq 0, \neq 0$ de $C(\partial M)$ telle que $0 \leq \varphi \leq 1_V$, on a $\delta\varphi \neq 0$, donc (d'après (2.14)) $J_\beta(\delta\varphi)(x) > 0$ pour tout $x \in M$, d'où

$$0 < J_\beta(\delta\varphi)(x) = G_\beta(\varphi 1_{\partial M})(x) \leq G_\beta(1_V \cap \partial M)(x) \leq E_x \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} 1_{\partial M \cap V}(X_t) dt,$$

ce qui montre (ii).

COROLLAIRE 6.9.

$$\delta(x') = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{E_{x'} \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} 1_{\partial M}(X_t) dt}{E_{x'} \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} dA_t}$$

En effet (proposition 3.2),

$$\delta(x') = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{K^\beta \delta(x')}{K^\beta 1(x')} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{G_\beta(1_{\partial M})(x')}{K^\beta 1(x')}$$

PROPOSITION 6.10. — Soit τ le temps d'entrée dans $\{\delta = 0\}$, on a

$$A_{t \wedge \tau} = \int_0^{t \wedge \tau} \delta^{-1}(X_s) 1_{\partial M}(X_s) \text{ p. s.}$$

En particulier, si $\delta(x') > 0$ pour tout $x' \in \partial M$,

$$A_t = \int_0^t \delta^{-1}(X_s) 1_{\partial M}(X_s) ds.$$

En effet, soit U_p une suite d'ouverts telle que

$$\overline{U_{p+1}} \subset U_p \text{ et } \bigcap_p U_p = \{\delta = 0\} \cap \partial M$$

et soit τ_p le temps d'atteinte de U_p , on a $\tau_p \uparrow \tau$ p. s. (d'après la quasi-continuité à gauche). Il existe (théorème 4.2) une suite α_n telle que

$$A_t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \alpha_n J_{\alpha_n} 1(X_s) ds \text{ p. s. ;}$$

en particulier

$$A_{t \wedge \tau_p} = \int_0^{t \wedge \tau_p} \alpha_n J_{\alpha_n} 1(X_s) ds \text{ p. s.}$$

Mais pour $s \leq t \wedge \tau_p, \alpha_n J_{\alpha_n} 1(X_s) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1_{\partial M}(X_s) \delta^{-1}(X_s)$ (proposition 6.1 (i) et (iii)) en restant uniformément (en s) borné (corollaire 6.6).

On a donc

$$A_{t \wedge \tau_p} = \int_0^{t \wedge \tau_p} \delta^{-1}(X_s) 1_{\partial M}(X_s) ds \quad \text{p. s. :}$$

d'où en faisant croître τ_p vers τ

$$A_{t \wedge \tau} = \int_0^{t \wedge \tau} \delta^{-1}(X_s) \cdot 1_{\partial M}(X_s) ds.$$

Enfin une conséquence de la proposition 6.1 est la proposition suivante :

PROPOSITION 6.11. — *On a,*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} E_x(A_t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \overset{\circ}{M} \\ \delta^{-1}(x) & \text{si } x \in \partial M \quad \text{et } \delta(x) > 0 \\ + \infty & \text{si } x \in \partial M \quad \text{et } \delta(x) = 0 \end{cases}$$

En effet d'après le théorème de Karamata il suffit d'étudier le comportement lorsque $\alpha \rightarrow + \infty$ de $\alpha J_\alpha 1(x)$ (proposition 6.1).

7. Dans ce paragraphe on suppose la dimension de M supérieure ou égale à 2 et on désigne par g une métrique riemannienne sur M de classe $C^{1,\lambda}$, par τ et σ les mesures riemanniennes sur M et ∂M associées à g et à la métrique g' induite par g sur ∂M , par n la conormale intérieure sur ∂M et par d la distance géodésique sur M associée à g .

On suppose,

1) $W = P$ où P est un opérateur elliptique de classe A_λ (c'est-à-dire que π désignant la partie principale d'ordre 2 de P et X l'unique champ de vecteurs tels que $Pu = \text{div}_g(\pi(du)) + \langle X, u \rangle + P1 \cdot u$ ($u \in C^2(M)$) π et X sont de classe $C^{1,\lambda}$ et $P1 \in C^{0,\lambda}(M)$);

2) $\Gamma = \frac{\partial n}{\partial n} + Q \circ \gamma^0 + T$ où Q est de classe A_λ et T un opérateur de Ventcel'-Lévy quasi local (c'est-à-dire que $\bar{i}(x', \overset{\circ}{M}) = 0$ pour tout $x' \in \partial M$) tel qu'il existe un opérateur T^* tel que $T^* - T^*1$ soit un opérateur de Ventcel'-Lévy quasi local et que, pour tout $\varphi, \psi \in C^2(M)$,

$$\int_{\partial M} (\varphi T \psi - \psi T^* \varphi) d\sigma = 0;$$

o n suppose soit (E' 1), soit (E' 2),

(E' 1) : Q est un opérateur différentiel du premier ordre et T et T* sont compacts de $C^{2,\lambda}(\partial M)$ dans $C^{1,\lambda}(\partial M)$,

(E' 2) : Q est elliptique et T et T* sont compacts de $C^{2,\lambda}(\partial M)$ dans $C^{0,\lambda}(\partial M)$ (1);

3) $\delta \equiv 0$.

Alors (voir Courrège [16]) il existe une famille de fonctions $(g_\beta(x, y))_{\beta > 0}$ continues sur $M \times M \setminus \Delta_{M \times M}$ et vérifiant,

$$(7.1) \quad g_\beta(x, y) \leq \text{Cte } (d(x, y))^{2-n} \quad \text{si } n \geq 3,$$

$$(7.2) \quad g_\beta(x, y) \leq \text{Cte } (d(x, y))^{-\varepsilon} \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0 \text{ si } n = 2,$$

telle que, pour $f \in C^{0,\lambda}(M)$, $\varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$ ($\varphi \in C^{0,\lambda}(\partial M)$ si (E' 2) est vérifiée)

$$u(x) = \int_M g_\beta(x, y) f(y) \tau(dy) + \int_{\partial M} g_\beta(x, y') \varphi(y') \sigma(dy')$$

appartient à $C^{2,\lambda}(M)$ et vérifie $(\beta - W)u = f$, $-Lu = \varphi$.

Désignant par M_r l'ensemble $\{x; x \in M, d(x, \partial M) < r\}$, on montre, en utilisant (7.1) et (7.2) (voir [16], appendice D) que, pour $f \in C(M)$,

$$(7.4) \quad \frac{1}{r} \int_{M_r} g_\beta(x, y) f(y) \tau(dy) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \int_{\partial M} g_\beta(x, y') f(y') \sigma(dy')$$

uniformément en $x \in M$.

Notant toujours, A_t le temps local du processus X (n° 4), on obtient,

THÉORÈME 7.1. — *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe une suite r_n tendant vers $+\infty$ telle que, pour tout $t_0 < +\infty$,*

$$A_t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{r_n} \int_0^t 1_{M_{r_n}}(X_s) ds$$

uniformément sur $[0, t_0]$, p. s.

En effet, soit $h_r = \frac{1}{r} 1_{M_r}$, on a,

$$G_\beta(h_r)(x) = \frac{1}{r} \int_{M_r} g_\beta(x, y) \tau(dy) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \int_{\partial M} g_\beta(x, y') \sigma(dy'),$$

(1) On peut, en particulier, prendre $T = 0$.

uniformément sur M (d'après 7.4). Donc, en vertu du lemme 4.3, il existe une fonctionnelle B_t et une suite r_n telle que

$$V_B^\beta 1(x) = \int_{\partial M} g_\beta(x, y') \sigma(dy') \quad \text{et} \quad B_t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{r_n} \int_0^t 1_{M_{r_n}}(X_s) ds$$

localement uniformément, p. s. Mais (7.3) $V_B^\beta 1 = J_\beta 1 = V_A^\beta 1$ d'où (théorème d'unicité) $B_t = A_t$.

8. On se place à nouveau sous les hypothèses du théorème 4.1 ; et on va établir une formule liant les répartitions de sortie des ouverts du processus X aux noyaux \bar{s} et \bar{t} des opérateurs S et T .

LEMME 8.1. — Pour tout temps d'arrêt de X τ et $\beta > 0$, on a, uniformément en $x \in M$,

$$(8.1) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E_x \left(\int_0^\tau e^{-\beta t} \alpha J_\alpha \varphi(X_t) dt \right) = E_x \left(\int_0^\tau e^{-\beta t} \varphi(X_t) dA_t \right) \quad (\varphi \in C(M)).$$

En effet, introduisant l'opérateur usuel $P_\tau^\beta u(x) = E_x(e^{-\beta \tau} u(X_\tau))$ on a (vérification immédiate),

- 1) $\|P_\tau^\beta\| \leq 1$;
- 2) $G_\beta u(x) - P_\tau^\beta G_\beta u(x) = E_x \left(\int_0^\tau e^{-\beta t} u(X_t) dt \right), \quad u \in C(M)$;
- 3) $V_A^\beta \varphi(x) - P_\tau^\beta V_A^\beta \varphi(x) = E_x \left(\int_0^\tau e^{-\beta t} \varphi(X_t) dA_t \right), \quad \varphi \in C(\partial M)$.

On en déduit, pour $\varphi \in C(\partial M)$, φ positive,

$$\begin{aligned} & \left| E_x \left(\int_0^\tau e^{-\beta t} \alpha J_\alpha \varphi(X_t) dt \right) - E_x \left(\int_0^\tau e^{-\beta t} \varphi(X_t) dA_t \right) \right| \\ & \leq |G_\beta(\alpha J_\alpha \varphi)(x) - V_A^\beta \varphi(x)| + |P_\tau^\beta G_\beta(\alpha J_\alpha \varphi)(x) - P_\tau^\beta V_A^\beta \varphi(x)| \\ & \leq 2 \|G_\beta(\alpha J_\alpha \varphi) - J_\beta \varphi\| \end{aligned}$$

et le lemme résulte du théorème 3.1.

COROLLAIRE 8.2. — On a pour $\varphi \in C(M)$ et pour tout t , uniformément en $x \in M$,

$$(8.2) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E_x \left(\int_0^t \alpha J_\alpha \varphi(X_s) ds \right) = E_x \left(\int_0^t \varphi(X_s) dA_s \right).$$

Il suffit de remarquer que pour $\varphi \geq 0$, $\varphi \in C(\partial M)$,

$$\begin{aligned} E_x \left(\int_0^t (1 - e^{-\beta s}) \alpha J_\alpha \varphi(X_s) ds \right) &\leq e^t (1 - e^{-\beta t}) E_x \left(\int_0^t e^{-s} \alpha J_\alpha \varphi(X_s) ds \right) \\ &\leq \text{Cte. } t. (1 - e^{-\beta t}). \end{aligned}$$

PROPOSITION 8.3. — On a pour $f \in C^{2,\lambda}(M)$, $\beta > 0$ et tout temps d'arrêt τ ,

$$(8.3) \quad E_x(e^{-\beta\tau} f(X_\tau)) - f(x) = E_x \left(\int_0^\tau e^{-\beta t} (W - \beta) f(X_t) dt \right) + E_x \left(\int_0^\tau e^{-\beta t} Lf(X_t) dA_t \right).$$

On commence par rappeler que si $u = G_\beta h$ ($h \in C(M)$), on a d'après la formule de Dynkin (Dynkin [3]),

$$(8.4) \quad E_x(e^{-\beta\tau} u(X_\tau)) - u(x) = - E_x \left(\int_0^\tau e^{-\beta t} h(X_t) dt \right).$$

On prend $u = \alpha G_\alpha f = G_\beta(\alpha(I - (\alpha - \beta)G_\alpha f))$; on obtient

$$(8.5) \quad E_x(e^{-\beta\tau} \alpha G_\alpha f(X_\tau)) - \alpha G_\alpha f(x) = - E_x \left(\int_0^\tau e^{-\beta t} \alpha (I - (\alpha - \beta)G_\alpha) f(X_t) dt \right)$$

On remarque que (d'après (2.5)) $f = G_\beta(\beta - W)f + J_\beta(-Lf)$; d'où on déduit,

$$(8.6) \quad \begin{aligned} (I - (\alpha - \beta)G_\alpha) f &= (I - (\alpha - \beta)G_\alpha)G_\beta(\beta - W)f + (I - (\alpha - \beta)G_\alpha)J_\beta(-Lf) \\ &= G_\alpha(\beta - W)f + J_\alpha(-Lf) \end{aligned}$$

(d'après l'équation résolvante et la propriété (2.12)).

Utilisant (8.6), (8.5) devient,

$$(8.7) \quad E_x(e^{-\beta\tau} \alpha G_\alpha f(X_\tau)) - \alpha G_\alpha f(x) = E_x \left(\int_0^\tau e^{-\beta t} \alpha G_\alpha (W - \beta) f(X_t) dt \right) + E_x \left(\int_0^\tau e^{-\beta t} \alpha J_\alpha (Lf)(X_t) dt \right)$$

Si on fait tendre α vers $+\infty$ dans (8.7), en tenant compte de

$$\| \alpha G_\alpha f - f \| \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} 0$$

et du lemme 8.1, on obtient

$$E_x(e^{-\beta\tau} f(X_\tau)) - f(x) = E_x \left(\int_0^\tau e^{-\beta t} (W - \beta) f(X_t) dt \right) + E_x \left(\int_0^\tau e^{-\beta t} Lf(X_t) dA_t \right).$$

Observons d'une part que si τ est borné ($\tau \leq t$), $E_x(A_\tau)$ est borné car

$$E_x(A_\tau) \leq E_x(A_t) \leq e^t V_A^1 1(x) \leq e^t J_1 1(x);$$

et d'autre part,

LEMME 8.4.

$$t - \int_0^t \delta(X_s) dA_s = \int_0^t 1_M^\circ(X_s) ds \quad \text{p. s.}$$

En effet, soit

$$C_t = \int_0^t 1_M^\circ(X_s) ds + \int_0^t \delta(X_s) dA_s,$$

C_t est une fonctionnelle additive continue de X et l'on a,

$$V_C^\beta 1(x) = G_\beta 1_M^\circ(x) + J_\beta \delta(x) = G_\beta 1_M^\circ(x) + G_\beta 1_{\partial M}(x) = G_\beta 1(x);$$

ceci d'après le théorème 6.7. On conclut en utilisant le théorème d'unicité appelé au début du paragraphe 4.

On peut maintenant déduire de la proposition 8.3,

COROLLAIRE 8.5. — Soient $f \in C^{2,\lambda}(M)$ et τ un temps d'arrêt borné, alors

$$(8.8) \quad E_x(f(X_\tau)) - f(x) = E_x\left(\int_0^\tau Wf(X_t) dt\right) + E_x\left(\int_0^\tau Lf(X_t) dA_t\right),$$

$$(8.8') \quad = E_x\left(\int_0^\tau Wf(X_t) 1_M^\circ(X_t) dt\right) + E_x\left(\int_0^\tau \Gamma f(X_t) dA_t\right).$$

(8.8) est une conséquence immédiate de (8.3) en faisant tendre β vers 0 et en utilisant le théorème de Lebesgue ce qui est possible puisque τ et A_τ sont sommables. Pour montrer (8.8') on écrit $Lf = \Gamma f - \delta \gamma^0 W$ et on a,

$$E_x(f(X_\tau) - f(x)) = E \left\{ \int_0^\tau Wf(X_t) dt - \int_0^\tau \delta(X_t) \gamma^0 W(X_t) dA_t \right\} + E_x\left(\int_0^\tau \Gamma f(X_t) dA_t\right);$$

on conclut en utilisant le lemme 8.4.

Si on prend $\tau = t$ dans (8.8) et (8.8') on obtient,

THÉOREME 8.6. — Soient $f \in C^2(M)$ et $t > 0$ alors,

$$(8.9) \quad E_x(f(X_t)) - f(x) = E_x\left(\int_0^t Wf(X_s) ds\right) + E_x\left(\int_0^t Lf(X_s) dA_s\right)$$

$$(8.9') \quad = E_x\left(\int_0^t Wf(X_s) \cdot 1_{\circ_M}(X_s) ds\right) + E_x\left(\int_0^t \Gamma f(X_s) dA_s\right).$$

En effet pour $f \in C^{2,\lambda}$ il suffit de prendre $\tau = t$ dans le corollaire 8.5; et pour $f \in C^2(M)$, d'approcher f par une suite de fonction $f_n \in C^{2,\lambda}(M)$ telle que $f_n \rightarrow f$, $Wf_n \rightarrow Wf$ et $\Gamma f_n \rightarrow \Gamma f$ uniformément lorsque $n \rightarrow +\infty$ puisque, d'après la remarque ci-dessus $E_x(A_t) < +\infty$.

THÉOREME 8.7. — Soient U un ouvert de M , σ_U le temps de sortie de U et $f \in C(M)$ une fonction nulle sur un voisinage de \bar{U} , on a, pour tout $\beta > 0$,

$$(8.10) \quad E_x(e^{-\beta\sigma_U} \cdot f(X_{\sigma_U})) = E_x\left(\int_0^{\sigma_U} e^{-\beta v} \int_M \bar{s}(X_v, dy) f(y) 1_{\circ_M}(X_v) dv\right) \\ + E_x\left(\int_0^{\sigma_U} e^{-\beta v} \int_M \bar{t}(X_v, dy) f(y) \cdot dA_v\right).$$

Supposons d'abord $f \in C^{2,\lambda}(M)$; on remarque d'abord que si $v < \sigma_U$, $X_v \in U$ et donc que

$$(W - \beta)f(X_v) = \int \bar{s}(X_v, dy) f(y)$$

et que

$$Lf(X_v) \cdot 1_{\partial M}(X_v) = \left\{ \int \bar{t}(X_v, dy) f(y) - \delta(X_v) \int \bar{s}(X_v, dy) f(y) \right\} 1_{\partial M}(X_v)$$

d'où (proposition 8.3),

$$E_x(e^{-\beta\sigma_U} \cdot f(X_{\sigma_U})) = E_x \left\{ \int_0^{\sigma_U} e^{-\beta v} \int_M \bar{s}(X_v, dy) f(y) dv \right. \\ \left. - \int_0^{\sigma_U} e^{-\beta v} \delta(X_v) 1_{\partial M}(X_v) \int_M \bar{s}(X_v, dy) f(y) dA_v \right\} \\ + E_x \left\{ \int_0^{\sigma_U} e^{-\beta v} \int_M \bar{t}(X_v, dy) f(y) dA_v \right\}$$

soit, encore

$$(8.11) \quad E_x(e^{-\beta\sigma_U} f(X_{\sigma_U})) = E_x \left\{ \int_0^{\sigma_U} e^{-\beta v} \int_M \bar{s}(X_v, dy) f(y) \cdot 1_{\circ_M}(X_v) dv \right\} \\ + E_x \left\{ \int_0^{\sigma_U} e^{-\beta v} \int_M \bar{t}(X_v, dy) f(y) dA_v \right\},$$

ceci d'après le lemme 8.4.

Soit maintenant $f \in C(M)$; on désigne par V un ouvert contenant \bar{U} et tel que f soit nulle sur \bar{V} , et par h une fonction nulle sur un voisinage de \bar{U} et égale à 1 sur $\overset{\circ}{C}V$. Soit $g \in C^{2,\lambda}(M)$, g nulle sur un voisinage de \bar{V} telle que $\|f - g\| \leq \varepsilon$, on a pour $z \in U$,

$$\left| \int_M \bar{s}(z, dy)f(y) - \int_M \bar{s}(z, dy)g(y) \right| \leq \int_M \bar{s}(z, dy) |f(y) - g(y)| h(y) \leq \varepsilon Sh(y) \leq \varepsilon \|Sh\|,$$

d'où

$$\left| E_x \left(\int_0^{\sigma_U} e^{-\beta v} \int_M \bar{s}(X_v, dy)f(y) \cdot 1_{\overset{\circ}{M}}(X_v) dv \right) - E_x \int_0^{\sigma_U} e^{-\beta v} \int_M \bar{s}(X_v, dy)g(y) \cdot 1_{\overset{\circ}{M}}(X_v) dv \right| \leq \varepsilon \|Sh\| G_\beta 1(x);$$

on procède de la même façon pour le second terme du membre de droite de (8.11); et on déduit que (8.11) est encore valable pour $f \in C(M)$. Ceci montre le théorème.

Si on suppose que les noyaux \bar{s} et \bar{t} sont nuls (c'est-à-dire que W et L sont locaux) le théorème 8.7 montre que les répartitions de sortie de X des ouverts, $\Pi_U(x, A) = P_x(\sigma_U < +\infty, X_{\sigma_U} \in A)$ ($x \in U$) sont portées par la frontière ∂U , en effet d'après (8.10) si f est à support contenu dans l'intérieur de $\overset{\circ}{C}U$, on a, pour tout $\beta > 0$,

$$E_x(e^{-\beta\sigma_U} \cdot f(X_{\sigma_U})) = 0, \quad \text{d'où} \quad E_x(1_{[\sigma_U < +\infty]} f(X_{\sigma_U})) = 0.$$

On déduit de là par un raisonnement élémentaire (voir par exemple [14], annexe 1) que dans ce cas-là le processus X a ses trajectoires continues (jusqu'à l'instant ζ); ce qui montre la dernière assertion du théorème 4.1.

9. Étude du comportement du processus X .

Dans ce paragraphe on étudie les visites de X aux ouverts de M et de ∂M , puis les retours de X à l'intérieur suivant les propriétés de Γ .

Commençons par introduire la condition :

(T) : il existe $x' \in \partial M$ tel que $\bar{\alpha}(x') + \bar{i}(x', \overset{\circ}{M}) > 0$.

On a,

LEMME 9.1. — Soient $f \in C(M)$, $f \geq 0$, $f \neq 0$, et $\beta > 0$,

(i) pour tout $x \in \overset{\circ}{M}$, $G_\beta f(x) > 0$;

- (ii) a) si (T) est satisfaite; pour tout $x' \in \partial M$, $G_\beta f(x') > 0$;
- b) si (T) n'est pas satisfaite; pour $x' \in \partial M$, $G_\beta f(x') > 0$ si et seulement si $\gamma^0 f \neq 0$.

En effet, d'après (2.9) $G_\beta f(x) \geq \overline{G_\beta^0 f}(x)$ et $G_\beta^0 f(x) > 0$ si $x \in \overset{\circ}{M}$ (1.10). D'autre part, rappelons (2.13) que $\overline{LG_\beta^0 f}(x')$ est > 0 en tout point x' tel que $f(x') + \bar{\alpha}(x') + t(x', \overset{\circ}{M}) > 0$. On en déduit que $\overline{LG_\beta^0 f} \neq 0$ soit si (T) est satisfaite, soit si $\gamma^0 f \neq 0$. De plus d'après (2.14) $K^\beta(\overline{LG_\beta^0 f})(x')$ est > 0 en tout point dès que $\overline{LG_\beta^0 f}$ est $\neq 0$. D'après (2.9), pour $x' \in \partial M$, $G_\beta f(x') = K^\beta(\overline{LG_\beta^0 f})(x')$ et cette quantité est > 0 si (T) est satisfaite, ou si $\gamma^0 f \neq 0$.

Lorsque la condition (T) n'est pas satisfaite, avec les hypothèses faites (voir (H), n° 2) la condition frontière L est de la forme suivante

$$Lu = Qu + Tu - \delta\gamma^0 Wu$$

($u \in C^2(M)$) avec Q elliptique, T opérateur de Lévy (voir n° 1) de $C^2(\partial M)$ dans $C(\partial M)$ (c'est-à-dire que $Q + T$ est un opérateur de Waldenfels elliptique sur ∂M) et $\delta(x') > 0$ pour tout $x' \in \partial M$.

Alors le processus X reste sur le bord ∂M après l'avoir atteint et y coïncide avec le processus de générateur $(C^2(M), \delta^{-1}(Q + T))$.

En effet soient $\tau_{\overset{\circ}{M}}$ le temps d'atteinte pour X de $\overset{\circ}{M}$, et $x' \in \partial M$; d'après la continuité à droite des trajectoires $P_{x'}(\tau_{\overset{\circ}{M}} < +\infty) > 0$ si et seulement s'il existe une fonction $f \in C(M)$, $f \geq 0$, $f \neq 0$, $\gamma^0 f = 0$, telle que

$$E_{x'}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t} f(X_t) dt\right) > 0,$$

i. e. $G_1 f(x') > 0$; ce qui est impossible d'après le lemme 9.1, ii, b).

On peut donc considérer le processus sur ∂M ($\Omega, \mathcal{F}, (X_t), (P_{x'})_{x' \in \partial M}$) et on a pour $\varphi \in C^2(\partial M)$, en appliquant le théorème 8.6 à un prolongement $\bar{\varphi} \in C^2(M)$ de φ ,

$$(9.1) \quad E_{x'}(\varphi(X_t)) - \varphi(x') = E_{x'} \int_0^t \Gamma \varphi(X_s) dA_s.$$

D'où en utilisant la proposition 6.10,

$$E_{x'} \varphi(X_t) - \varphi(x') = E_{x'} \int_0^t [\delta^{-1}(Q + T)] \varphi(X_s) ds,$$

ce qui montre, puisque $(C^2(M), \delta^{-1}(Q + T))$ est un générateur et puisque

$[\delta^{-1}(Q + T)](C^2(M))$ est dense dans $C(M)$ que $((X_t), (P_x)_{x' \in \partial M})$ est le processus de générateur $(C^2(M), \delta^{-1}(Q + T))$.

On suppose dans toute la suite du paragraphe que (T) est satisfaite.

Soient U un ouvert de M, $U' = U \cap \partial M$; on désigne par τ_U et $\tau_{U'}$ les temps d'atteinte pour X de U et de U'.

PROPOSITION 9.2 :

- 1) pour tout $x \in M, P_x(\tau_U < + \infty) > 0$;
- 2) si U' est $\neq \emptyset$, pour tout $x \in M, P_x(\tau_{U'} < + \infty) > 0$ (1).

Pour montrer 1), soit $f \in C(M), 0 \leq f \leq 1, f \not\equiv 0$, à support contenu dans U, on a (lemme 9.1)

$$0 < G_1 f(x) \leq G_1 \cdot 1_U(x) = E_x \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot 1_U(X_t) dt$$

ce qui entraîne $P_x(\tau_U < + \infty) > 0$.

Pour montrer 2), on remarque, désignant par $\sigma = \sigma_M^o$ le temps de sortie de $\overset{\circ}{M}$ que $\tau_{U'} = \sigma + \tau_{U'} \circ \theta_\sigma$ donc que

$$P_x(\tau_{U'} < + \infty) = E_x(1_{[\sigma < + \infty]} P_{X_\sigma}(\tau_{U'} < + \infty)).$$

Comme $P_x(\sigma < + \infty) > 0$ (puisque, d'après (1.2), $H_1 1(x) > 0$ et que $H_1 1(x) = E_x(e^{-\sigma})$) il suffit de montrer que $P_{x'}(\tau_{U'} < + \infty) > 0$ pour tout $x' \in \partial M$. Soient Y_t le processus de générateur $(C^2(M), LH_0)$ déduit de X par le changement de temps τ_t associé à A_t (théorème 5.4) et $\tilde{\tau}_{U'}$, le temps d'atteinte de U' pour Y_t ; on a

$$P_{x'}(\tau_{U'} < + \infty) = P_{x'}(\tilde{\tau}_{U'} < + \infty).$$

Soit $\varphi \in C(\partial M), 0 \leq \varphi \leq 1, \varphi \not\equiv 0$ à support contenu dans U'; d'après (2.14),

$$0 < K^\beta \varphi(x') = E_{x'} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta \tau_t} \cdot \varphi(X_t) dt \right),$$

ce qui entraîne $P_{x'}(\tilde{\tau}_{U'} < + \infty) > 0$, d'où la proposition.

Les propositions suivantes ont pour but d'étudier les retours de X à

(1) Il faut bien remarquer que l'on est toujours sous l'hypothèse (H) du n° 2.

l'intérieur selon la transversabilité de Γ ; essentiellement trois cas sont à distinguer :

Soit U' un ouvert de ∂M , si,

(i) $\bar{\alpha}$ et $\bar{i}(\cdot, \overset{\circ}{M})$ sont nuls sur U' , alors le processus ne pénètre pas dans $\overset{\circ}{M}$ tant qu'il est dans U' ;

(ii) $\bar{\alpha}$ est nul sur U' , $\bar{i}(\cdot, \overset{\circ}{M})$ est > 0 mais $< +\infty$ sur U' ; alors le processus peut entrer dans $\overset{\circ}{M}$ à partir de U' mais il n'y entre pas immédiatement;

(iii) $\bar{\alpha}$ est > 0 ou $\bar{i}(\cdot, \overset{\circ}{M})$ est égal à $+\infty$ sur U' , alors le processus pénètre instantanément dans $\overset{\circ}{M}$.

De façon plus précise, on note $\tau_{\overset{\circ}{M}}$ le temps d'atteinte de $\overset{\circ}{M}$, et on utilisera une suite V_n de voisinage de ∂M telle que $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$ et décroissant vers ∂M , alors $\tau_{\overset{\circ}{M}} = \inf \sigma_{V_n}$; on a,

PROPOSITION 9.3. — Soient U' un ouvert de ∂M , $K' = (\overset{\circ}{C}U') \cap \partial M$ et $\tau_{K'}$ le temps d'atteinte de K' ; on suppose que, pour tout $x' \in U'$,

$$\bar{\alpha}(x') + \bar{i}(x', \overset{\circ}{M}) = 0;$$

alors $P_{x'}(\tau_{K'} < \tau_{\overset{\circ}{M}}) = 1$ pour tout $x' \in U'$.

En effet si $P_{x'}(\tau_{\overset{\circ}{M}} < \tau_{K'}) > 0$, on peut trouver n assez grand pour que $P_{x'}(\sigma_{V_n} < \tau_{K'}) > 0$ et, donc, un ouvert U de M tel que $x' \in U$, $U \cap \partial M \subset U'$ et $P_{x'}(X_{\sigma_U} \notin \partial M) > 0$.

Soit $f \in C^\infty(M)$, $0 \leq f \leq 1$, $f \not\equiv 0$ et $f = 0$ sur U ; on pose $u = G_\beta^0 f$ ($\beta > 0$) on a $\gamma_0 u = 0$ et $u > 0$ sur $\overset{\circ}{M}$ (1.10), donc

$$E_{x'}(e^{-\beta\sigma_U} \cdot u(X_{\sigma_U})) > 0.$$

Mais d'après la proposition 8.3 et le lemme 8.4,

$$\begin{aligned} E_{x'}(e^{-\beta\sigma_U} u(X_{\sigma_U})) &= E_{x'}\left(\int_0^{\sigma_U} e^{-\beta s} (-f)(X_s) \cdot 1_{\overset{\circ}{M}}(X_s) ds\right) \\ &+ E_{x'}\left(\int_0^{\sigma_U} e^{-\beta s} \Gamma u(X_s) dA_s\right); \end{aligned}$$

si $s \leq \sigma_U$, on a d'une part $f(X_s) = 0$, et d'autre part $\Gamma u(X_s) 1_{\partial M}(X_s) = 0$ (car si $y' \in U \cap \partial M \subset U'$,

$$\Gamma u(y') = \alpha(y') \frac{\partial u}{\partial \nu}(y') + \int \bar{i}(y', dz) u(z) = 0);$$

ce qui entraîne $E_{x'}(e^{-\beta\sigma_U} \cdot u(X_{\sigma_U})) = 0$; d'où une contradiction. Donc

$$P_{x'}(\tau_{K'} \leq \tau_{\overset{\circ}{M}}) = 0.$$

PROPOSITION 9.4. — Soit U' un ouvert de ∂M tel que pour tout $y' \in U'$, $\bar{\alpha}(y') = 0$ et $\bar{i}(y', \overset{\circ}{M}) < +\infty$, alors $P_{x'}(\tau_{\overset{\circ}{M}} > 0) = 1$ pour tout $x' \in U'$. Si de plus $\bar{i}(x', \overset{\circ}{M}) > 0$, on a, avec les notations de la proposition 9.3,

$$P_{x'}(\tau_{\overset{\circ}{M}} < \tau_{K'}) > 0.$$

En effet soient V' un ouvert de ∂M contenant x' et tel que $\bar{V}' \subset U'$, et φ une fonction de $C^\infty(\partial M)$ telle que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(x') = 1$, $\varphi = 0$ sur un voisinage de $\overset{\circ}{\mathbf{C}}\bar{V}'$; alors (proposition 3.6) $H_\beta\varphi(z) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} 0$ pour tout $z \in \overset{\circ}{M}$; on pose $\tau' = \tau(\overset{\circ}{\mathbf{C}}V')_{\cap \partial M}$.

Avec les hypothèses faites, pour $z' \in \bar{V}'$,

$$\begin{aligned} |\Gamma H_\beta\varphi(z')| &= \left| \Gamma H_0\varphi(z') + \int \{H_\beta\varphi(y) - H_0\varphi(y)\} \bar{i}(z', dy) \right| \\ &\leq \|\Gamma H_0\varphi\| + \bar{i}(z', \overset{\circ}{M}) \leq C, \end{aligned}$$

car $\Gamma H_\beta 1(z') = \int \{H_\beta 1(y) - 1\} \bar{i}(z', dy)$ est continue et décroît vers $\bar{i}(z', \overset{\circ}{M})$.

D'après la proposition 9.2 on peut trouver t assez grand pour que $P_{x'}(\sigma_{V_n} < t) = a > 0$, et soit $\tau_n = \sigma_{V_n} \wedge \tau' \wedge t$; d'après (8.8') corollaire 8.5,

$$\begin{aligned} E_{x'}(H_\beta\varphi(X_{\tau_n})) - 1 &= E_{x'}\left(\int_0^{\tau_n} \beta H_\beta\varphi(X_s) 1_{\overset{\circ}{M}}(X_s) ds\right) + E_{x'}\left(\int_0^{\tau_n} \Gamma H_\beta\varphi(X_s) dA_s\right), \\ (9.2) \qquad \qquad \qquad &\geq E_{x'}\left(\int_0^{\tau_n} \Gamma H_\beta\varphi(X_s) dA_s\right) \geq -C \cdot E_{x'}(A_{\tau_n}), \end{aligned}$$

car si $s < \tau_n$, $X_s \in V'$ dès que $X_s \in \partial M$.

Si $\sigma_{V_n} < t$, $\tau_n = \sigma_{V_n} \wedge \tau'$ et on a $X_{\tau_n} \in (\overset{\circ}{\mathbf{C}}V') \cap \partial M$ ou $X_{\tau_n} \in \bar{V}_n$; dans tous les cas $H_\beta\varphi(X_{\tau_n}) \rightarrow 0$ lorsque $\beta \rightarrow +\infty$. On en déduit donc de (9.2) d'abord $0 > a - 1 \geq -C E_{x'}(A_{\tau_n})$ puis $0 < E_{x'}(A_{\tau_n})$ ce qui entraîne $P_{x'}(\tau_{\overset{\circ}{M}} > 0) > 0$ puis (loi 0-1) $P_{x'}(\tau_{\overset{\circ}{M}} > 0) = 1$.

Pour montrer que $P_{x'}(\tau_M^\circ < \tau_{K'}) > 0$ si $\bar{t}(x', \overset{\circ}{M}) > 0$, soit $f \in C^\infty(M)$ telle que $f \geq 0, f \not\equiv 0, \gamma^0 f = 0$; on pose $u = G_\beta^0(-f)$; d'après la proposition (8.3)

$$(9.3) \quad E_{x'}(e^{-\beta\tau_{K'}} \cdot u(X_{\tau_{K'}})) - u(x') \\ = E_{x'}\left(\int_0^{\tau_{K'}} e^{-\beta t} f(X_t) dt\right) + E_{x'}\left(\int_0^{\tau_{K'}} e^{-\beta t} \Gamma u(X_t) dA_t\right),$$

mais $X_{\tau_{K'}} \in K' \subset \partial M$ et d'autre part u étant > 0 sur $\overset{\circ}{M}$, l'hypothèse $\bar{t}(x', \overset{\circ}{M}) > 0$ entraîne $\Gamma u(x') < 0$; on déduit donc de (9.3) (grâce au corollaire 5.5)

$$E_{x'}\left(\int_0^{\tau_{K'}} e^{-\beta t} f(X_t) dt\right) = -E_{x'}\left(\int_0^{\tau_{K'}} e^{-\beta t} \Gamma u(X_t) dA_t\right) > 0;$$

c'est-à-dire puisque $\gamma^0 f = 0, P_{x'}(\tau_{K'} > \tau_M^\circ) > 0$.

c. q. f. d.

PROPOSITION 9.5. — Soit $x' \in \partial M$, on suppose que pour tout y' voisin de x' $\bar{\alpha}(y') > 0$ ou $t(y', \overset{\circ}{M}) = +\infty$ (condition toujours réalisée si $\bar{\alpha}(x') > 0$); alors $P_{x'}[\tau_M = 0] = 1$.

En effet soit V' un voisinage de x' dans ∂M tel que, au voisinage de \bar{V}' , $\bar{\alpha}(y') > 0$ ou $t(y', \overset{\circ}{M}) = +\infty$; on pose $u_\beta = 1 - H_\beta 1$, alors

$$0 \leq u_\beta \leq 1, \quad \gamma^0 u_\beta = 0, \quad \inf_{y' \in \bar{V}'} \Gamma u_\beta(y') \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} +\infty$$

car, pour $y' \in \bar{V}'$,

$$\Gamma u_\beta(y') = L1(y') + \bar{\alpha} \frac{\partial H_\beta 1}{\partial \nu}(y') + \int_M (1 - H_\beta(z)) \bar{t}(y', dz) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} +\infty,$$

ceci en croissant (d'après (2.10) et l'hypothèse).

On peut donc trouver $u_n = u_{\beta_n}$ telles que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$,

$$\inf_{y' \in \bar{V}'} \Gamma u_n(y) \geq 1, \quad \gamma^0 u_n = 0.$$

En appliquant le corollaire 8.5 à $\tau = \tau_M^\circ \wedge \sigma_{V'} \wedge t$ (où $t > 0$), on obtient,

$$(9.4) \quad E_{x'}(u_n(X_\tau)) = E_{x'}\left(\int_0^\tau W u_n(X_t) 1_{\sigma_{V'}(X_t)} dt\right) + E_{x'}\left(\int_0^\tau \Gamma u_n(X_t) dA_t\right);$$

mais si $t \leq \tau$, $X_t \in \partial M \cap V'$ donc $\Gamma u_n(X_t) \geq 1$, donc,

$$(9.5) \quad \frac{1}{n} \geq E_x(A_\tau) \quad \text{pour tout } n,$$

ce qui entraîne (corollaire 5.5) $\tau = 0$ $P_{x'}$ p. s. et $\tau_M^0 = 0$ $P_{x'}$ p. s. car

$$P_{x'}(\sigma_{V'} > 0) = 1.$$

Remarque. — Soient (W, Γ) un système frontière de Ventcel' où Γ vérifie (H) (n° 2), $X = ((X_t), (P_x))$ le processus associé, A_t le temps local sur le bord (n° 4); si on pose $B_t = t + A_s$ le processus Y_t , déduit de X par le changement de temps associé à B_t , est le processus correspondant au système frontière $(W, \Gamma - \gamma^0 W)$ (théorème 5.6); de plus

$$\int_0^{B_t} 1_M^\circ(X_s) ds = t,$$

ce qui montre que si on transforme Y_t par le changement de temps associé à la fonctionnelle (de (Y_t))

$$C_t = \int_0^t 1_M^\circ(Y_s) ds,$$

on obtient le processus X .

Ceci fournit un moyen d'associer un processus à un système frontière (W, Γ) où Γ vérifie (El 1) ou (El 2) mais pas nécessairement la condition de transversabilité intervenant dans (H) (n° 2) : on considère le système frontière $(W, \Gamma - \gamma^0 W)$ qui, lui, vérifie (H), on lui associe un processus X et on transforme X par le changement de temps associé à

$$C_t = \int_0^t 1_M^\circ(X_s) ds.$$

Le problème se pose alors de savoir si on obtient bien un processus sur M , pour cela il faut avoir pour tout $x' \in \partial M$, $P_{x'}(A_t > 0 \text{ pour tout } t > 0) = 1$ (à remarquer que cette dernière quantité vaut 0 ou 1 d'après la loi 0-1) où, ce qui revient au même, si $P_{x'}(\tau_M^0 = 1)$. La proposition 9.4 montre qu'une hypothèse du genre $\bar{i}(x', \overset{\circ}{M}) > 0$ n'est pas suffisante.

10. Mesures invariantes.

Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe de Feller sur M (resp. ∂M), markovien (c'est-à-dire $T_t 1 = 1$) de résolvante $(U_\beta)_{\beta > 0}$.

On appelle mesure invariante pour (T_t) toute mesure de Radon m non

nulle sur M (resp. ∂M) telle que, pour toute $f \in C(M)$, et tout $t > 0$,

$$(10.1) \quad \int T_t f(x) m(dx) = \int f(x) m(dx).$$

Il est facile de voir que ceci équivaut à,

$$(10.2) \quad \text{pour tout } f \in C(M) \text{ et } \beta > 0 \quad \int \beta U_\beta f(x) m(dx) = \int f(x) m(dx).$$

Pour montrer l'existence de mesures invariantes, on utilisera le lemme suivant,

LEMME 10.1 ⁽¹⁾. — *On suppose qu'il existe un entier $p \geq 0$, un nombre λ , $0 \leq \lambda < 1$ ⁽²⁾, et un $\beta > 0$ tel que U_β soit compacte de $C^{p,\lambda}(M)$ dans $C^{p,\lambda}(M)$, et que, de plus $f \in C^{p,\lambda}(M)$, $f - \beta U_\beta f \geq 0$ entraînent $f = \text{Cte}$. Alors il existe une et une seule, à une constante multiplicative près, mesure invariante pour (T_t) ; cette mesure est positive.*

On pose $\mathcal{R} = (I - \alpha U_\alpha)(C^{p,\lambda}(M))$.

\mathcal{R} ne dépend pas de α car d'après l'équation résolvente,

$$I - \beta U_\beta = (I + (\alpha - \beta)U_\beta) - \alpha U_\alpha (I + (\alpha - \beta)U_\beta).$$

L'opérateur βU_β étant compact de $C^{p,\lambda}(M)$ dans $C^{p,\lambda}(M)$; l'opérateur $I - \beta U_\beta$ est d'indice 0 de $C^{p,\lambda}(M)$ dans $C^{p,\lambda}(M)$ (voir [2], appendice 1).

Son noyau étant de dimension 1, on en déduit que son image \mathcal{R} est de co-dimension 1; donc il existe une forme linéaire $\neq 0$ sur $C^{p,\lambda}(M)$, Λ telle que $u \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \Lambda(u) = 0$.

Mais cette forme linéaire est positive; sinon il existerait $u, v \in C^{p,\lambda}(M)$, $u \geq 0$, $u \not\equiv 0$, $v \geq 0$, $v \not\equiv 0$ telles que $\Lambda(u) > 0$ et $\Lambda(v) < 0$; donc $w \in C^{p,\lambda}(M)$, $w \geq 0$, $w \not\equiv 0$ telles que $\Lambda(w) = 0$; mais alors il existerait $f \in C^{p,\lambda}(M)$ telle que $f - \beta U_\beta f = w \geq 0$, donc $f = \text{Cte}$ et $w \equiv 0$. Λ est donc une mesure de Radon positive sur M , notée m . m est non nulle et pour $f \in C^{p,\lambda}(M)$ on a, pour tout $\alpha > 0$,

$$(10.3) \quad \int (\alpha U_\alpha f - f) dm = \Lambda(\alpha U_\alpha f - f) = 0.$$

Par passage à la limite, puisque m est bornée, (10.3) est encore valable

⁽¹⁾ Ce lemme nous a été suggéré par Ph. Courrège.

⁽²⁾ $C^{p,0}(M) = C^p(M)$.

pour $f \in C(M)$; ce qui montre que m est une mesure invariante pour T_t .

Soient m_1 une autre mesure invariante et Λ_1 la forme linéaire positive sur $C^{p,\lambda}(M)$ associée; si $f \in C^{p,\lambda}(M)$ est telle que $\Lambda(f) = 0$, on a alors $f = g - \alpha U_{\alpha} g$ pour un certain $g \in C(M)$, donc

$$\Lambda_1(f) = \int f dm_1 = \int (g - \alpha U_{\alpha} g) dm_1 = 0 ;$$

d'où $\Lambda_1 = k\Lambda$ et finalement $m_1 = km$.

On suppose que $W1 = L1 = 0$ (W et L vérifiant toujours les hypothèses du théorème 4.1), alors les semi-groupes de résolvantes $(G_{\beta})_{\beta > 0}$ et $(K_{\rho}^0)_{\rho > 0}$ sont markoviens et le processus X est ininterrompu. De plus, il résulte de la proposition 9.2 que si la condition (T) (n° 9) est satisfaite le processus X est récurrent.

THÉORÈME 10.2. — *On suppose $W1 = L1 = 0$. Alors il existe une mesure m' sur ∂M de support ∂M invariante pour le semi-groupe de résolvantes $(K_{\rho}^0)_{\rho > 0}$; et, si la condition (T) (n° 9) est satisfaite, une mesure m sur M , de support M , invariante pour le semi-groupe de résolvantes $(G_{\beta})_{\beta > 0}$. Ces mesures sont positives et uniques à une constante multiplicative près.*

L'existence et l'unicité des mesures invariantes vont résulter du lemme 10.1 appliqué aux espaces $C^{1,\lambda}(\partial M)$ et $C^{1,\lambda}(M)$ compte tenu de

$$K_{\rho}^0(C^{1,\lambda}(\partial M)) \subset C^{2,\lambda}(\partial M) \quad \text{et} \quad G_{\beta}(C^{1,\lambda}(M)) \subset C^{2,\lambda}(M)$$

et du lemme suivant :

LEMME 10.3.

- (i) $\varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$, $\varphi - \rho K_{\rho}^0 \varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi = \text{Cte}$.
- (ii) si (T) est satisfaite, $f \in C^{1,\lambda}(M)$, $f - \beta G_{\beta} f \geq 0 \Rightarrow f = \text{Cte}$.

En effet soit $a = \inf \varphi$, on a $a = \rho K_{\rho}^0 a$ d'où

$$\varphi - a \geq \rho K_{\rho}^0(\varphi - a) \geq \rho K_{\rho}^{\beta}(\varphi - a)$$

donc si $\varphi \neq a$, $\varphi(x') - a > 0$ pour tout $x' \in \partial M$ d'après (2.14) appliqué au système frontière $(W, L - \rho)$; ce qui est impossible.

De la même façon soit $b = \inf f$, on a $f - b \geq \beta G_{\beta}(f - b)$ d'où, si $f \neq b$, et si (T) est satisfaite $f(x) > b$ pour tout $x \in M$ d'après le lemme 9.1; ce qui est impossible.

Enfin si U' est un ouvert de ∂M ,

$$m'(U') \geq \int \varphi dm' = \int \rho K_\rho^0 \varphi dm'$$

où $\varphi \in C^\infty(\partial M)$, $0 \leq \varphi \leq 1$ et $\text{supp}(\varphi) \subset U$; d'où

$$m'(U') \geq \int \rho K_\rho^\beta \varphi > 0$$

(toujours d'après (2.14) appliqué au système frontière $(W, L - \rho)$). De la même façon, si (T) est satisfaite, $\beta G_\beta f(x) > 0$ pour tout $f \geq 0, f \neq 0, f \in C(M)$ et tout $x \in M$ (lemme 9.1); ceci entraîne $m(U) > 0$ pour tout U de M .

Remarque. — Lorsque (T) n'est pas satisfaite, et si on suppose $\delta \equiv 1$ (ce qui est toujours possible en remplaçant L par $\delta^{-1} \cdot L$), $\gamma^0 G_\beta f$ est solution de $(\beta - (Q + T))\psi = \gamma^0 f$; donc, $\gamma^0 G_\beta f = K_\beta^0 \gamma^0 f$, et la mesure m' de support ∂M invariante pour le semi-groupe $(K_\rho^0)_{\rho > 0}$ est aussi invariante pour le semi-groupe $(G_\beta)_{\beta > 0}$.

PROPOSITION 10.4. — *Pour tout $\beta > 0$,*

$$\mu(\varphi) = \beta \int J_\beta(\varphi) dm \quad (\varphi \in C(M));$$

(*m* mesure invariante de $(G_\beta)_{\beta > 0}$) est une mesure invariante (indépendante de β) pour (K_ρ^0) .

Il est clair que μ est une mesure sur ∂M , non nulle (car $J_\beta 1 > 0$ (2.14), (1.2)), indépendante de β car (puisque d'après (2.12) $G_\alpha J_\beta = G_\beta J_\alpha$),

$$\begin{aligned} (10.4) \quad \beta \int J_\beta(\varphi) dm &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int \beta \alpha G_\alpha J_\beta \varphi dm = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int \beta G_\alpha(\alpha J_\beta \varphi) dm \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int \alpha J_\alpha \varphi dm. \end{aligned}$$

De plus pour $\varphi \in C(\partial M)$,

$$(10.5) \quad J_\beta \varphi - \rho J_\beta K_\rho^0 \varphi = H_0 K_\rho^0 \varphi - \beta G_\beta (H_0 K_\rho^0 \varphi).$$

Par positivité il suffit de vérifier (10.5) pour $\varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$; et, désignant alors par u_1 et u_2 les membres de gauche et de droite de (10.5), on a

$$(\beta - W)u_1 = 0 = (\beta - W)u_2 \quad \text{et} \quad Lu_1 = \rho K_\rho^0 \varphi - \varphi = LH_0 K_\rho^0 \varphi = Lu_2;$$

d'où $u_1 = u_2$.

On en déduit,

$$\begin{aligned} \int (\rho K_\rho^0 \varphi - \varphi) d\mu &= \beta \int (J_\beta \rho K_\rho^0 \varphi - J_\beta \varphi) dm \\ &= \beta \int (\beta G_\beta (H_0 K_\rho^0 \varphi) - H_0 K_\rho^0 \varphi) dm = 0 ; \end{aligned}$$

ce qui montre la proposition.

COROLLAIRE 10.5. — Avec les notations de la proposition 10.4, $\mu = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} (\alpha J_\alpha 1) m$ (pour la convergence vague).

En effet, on a pour $\varphi \in C(\partial M)$, d'après le théorème 3.1,

$$\mu(\varphi) = \beta \int J_\beta(\varphi) dm = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int \beta G_\beta(\alpha J_\alpha 1 \cdot \varphi) dm = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int \alpha J_\alpha 1 \cdot \varphi dm.$$

PROPOSITION 10.6. — On suppose que $W1 = L1 = 0$ et que la condition (T) est satisfaite. Soient δ une fonction ≥ 0 de $C^{1,\lambda}(\partial M)$ (de $C^{0,\lambda}(\partial M)$ si (El 2) est satisfaite), m et μ les mesures invariantes de $(G_\beta)_{\beta>0}$ et $(K_\rho^0)_{\rho>0}$ (théorème 10.2, proposition 10.4); alors $m + \delta \cdot \mu$ est une mesure invariante pour le semi-groupe de générateur $\overline{(L - \delta \gamma^0 W, W)}$.

Soit $(G'_\beta)_{\beta>0}$ la résolvante du semi-groupe de générateur $\overline{(L - \delta \gamma^0 W, W)}$; il suffit de montrer que, pour $f \in C^{1,\lambda}(M)$ et, $\beta > 0$,

$$\begin{aligned} \int [\beta G'_\beta f - f] d\tilde{m} &= 0 \quad \text{où} \quad \tilde{m} = m + \delta \cdot \mu. \\ \int [\beta G'_\beta f - f] d\tilde{m} &= \int W G'_\beta f d\tilde{m} = \int \{ W G'_\beta f + \beta J_\beta(\delta W G'_\beta f) \} dm \\ &= \int W(G'_\beta f + J_\beta(\delta W G'_\beta f)) dm = \int W u_\beta dm \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$u_\beta = G'_\beta f + J_\beta(\delta W G'_\beta f), \quad \text{mais} \quad L u_\beta = L G'_\beta f - \delta W G'_\beta f = (L - \delta \gamma^0 W) G'_\beta f = 0,$$

on a donc

$$u_\beta = G_\beta f_\beta, \quad \text{d'où} \quad \int W u_\beta dm = \int (\beta G_\beta f_\beta - f_\beta) dm = 0.$$

c. q. f. d.

11. Semi-groupes adjoints.

Dans le cas $W = Q$ régulier, $L = \frac{\partial}{\partial n}$ Nagasawa [9] a établi l'existence d'un processus adjoint pour X et montré comment, de façon plus générale, ce problème se ramenait à la recherche d'une solution strictement positive de

$$(11.1) \quad W^* \varphi = 0, \quad L^* \varphi = 0$$

où W^* et L^* sont des opérateurs convenables.

On va définir et étudier (11.1) sous certaines conditions.

On se place dans tout ce paragraphe sous les hypothèses 1), 2), 3) du n° 7 et on suppose de plus $P1 = L1 = 0$.

On prend pour métrique riemannienne sur M la métrique g associée à la partie principale d'ordre deux de P , alors P s'écrit,

$$(11.2) \quad Pu = \Delta_g u + \langle du, X \rangle$$

($u \in C^2(M)$, $\Delta_g u = \text{div}_g(\text{grad } u)$, X champ de vecteurs).

Alors posant,

$$(11.3) \quad P^*u = \Delta_g u - \text{div}_g(uX)$$

($u \in C^2(M)$), P^* est de classe A_λ , et si,

$$(11.4) \quad p = g(X, n)$$

(n co-normale intérieure relativement à g), $p \in C^{0,1}(\partial M)$

$$(11.5) \quad \int_M \{uPv - vP^*u\} d\tau = - \int_{\partial M} \left\{ u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} + uv p \right\} d\sigma \quad (u, v \in C^2(M)).$$

C'est la « formule de Green »; τ et σ désignent les mesures riemanniennes sur M et ∂M associées à g et à la métrique g' induite par g sur ∂M .

D'autre part Q s'écrit, en notant π' sa partie principale d'ordre 2,

$$(11.6) \quad Q\varphi = \text{div}_{g'}(\pi'(d\varphi)) + \langle d\varphi, Y \rangle$$

(Y champ de vecteurs sur ∂M , $\varphi \in C^2(\partial M)$)

et si

$$(11.7) \quad Q^*\varphi = \text{div}_{g'}(\pi'(d\varphi)) - \text{div}_{g'}(\varphi Y),$$

Q^* est de classe A_λ et on a,

$$(11.8) \quad \int_{\partial M} \{ \varphi Q \psi - \psi Q^* \varphi \} d\sigma = 0 \quad (\varphi, \psi \in C^2(\partial M)).$$

Finalement en posant,

$$(11.9) \quad L^*u = \frac{\partial u}{\partial n} + Q^*(\gamma^0 u) + T^*(\gamma^0 u) - pu \quad (u \in C^2(M));$$

on a

$$(11.10) \quad \int_M \{ uPv - vP^*u \} dt = - \int_{\partial M} \{ uLv - vL^*v \} d\sigma \quad (v, v \in C^2(M)).$$

(P^*, L^*) s'appellera le système frontière adjoint de (P, L) ⁽¹⁾.

THÉORÈME 11.1. — *Le système $P^*f = 0, L^*f = 0$ admet une solution non nulle $h \in C^{2,\lambda}(M)$, unique à une constante multiplicative près; cette relation est partout strictement positive. De plus $h \cdot \tau$ est une mesure invariante pour le semi-groupe de résolvante $(G_\beta)_{\beta > 0}$, $h \cdot \sigma$ est une mesure invariante pour le semi-groupe de résolvantes $(K_\rho^0)_{\rho > 0}$.*

Démonstration.

1) Si on pose $P'u = P^*u - (P^*1)u$, $L'u = L^*u - (L^*1)u$, $u \in C^2(M)$, le couple (P', L') vérifie les hypothèses du n° 7, en particulier P' est de diffusion et L' est une condition frontière de Ventcel' vérifiant (H).

Soit, pour $\beta > 0$ fixé, et selon que L' vérifie (El 1) ou (El 2),

$\gamma : C^{2,\lambda}(M) \rightarrow C^{0,\lambda}(M) \times C^{1,\lambda}(\partial M)$ (resp. $C^{0,\lambda}(\partial M)$),
 $u \rightarrow (\beta u - P'u, -L'u)$; γ est un isomorphisme d'après (2.3) (resp. (2.4)) puisque $\delta \equiv 0$.

Soit maintenant,

$\gamma' : C^{2,\lambda}(M) \rightarrow C^{0,\lambda}(M) \times C^{1,\lambda}(\partial M)$ (resp. $C^{0,\lambda}(\partial M)$),

$$u \rightarrow (P^*u, L^*u).$$

$\gamma' + \gamma : u \rightarrow ((\beta + P^*1)u, (L^*1)u)$ est compacte de $C^{2,\lambda}(M)$ dans $C^{0,\lambda}(M) \times C^{1,\lambda}(\partial M)$ (resp. $C^{0,\lambda}(\partial M)$) donc γ' est d'indice zéro dans les espaces considérés (voir [2], appendice 1).

Pour montrer l'existence d'une solution de $P^*f = L^*f = 0$ il suffit de

⁽¹⁾ Pour toutes les formules (11.2)-(11.10) le lecteur pourra consulter utilement Courrège [15] et [16].

montrer que γ' n'est pas surjective. Supposons γ' surjective, et soit u une solution de $Pu = Lu = 0$, soient g quelconque dans $C^{0,\lambda}(M)$ et $v \in C^{2,\lambda}(M)$ telle que $P^*v = g$, $L^*v = 0$ (surjectivité de γ') alors, d'après (11.10),

$$\int_M (vPu - uP^*v) d\tau = - \int_{\partial M} (vLu - uL^*v) d\sigma = 0, \quad \text{donc} \quad \int_M gud\tau = 0,$$

donc, g étant quelconque $u = 0$, ce qui est absurde car $Pu = Lu = 0$ admet les constantes comme solutions.

2) Soit donc h une solution de $P^*f = L^*f = 0$; $h \cdot \tau$ est une mesure invariante pour (G_β) . En effet soit $f \in C^{0,\lambda}(M)$, et $\beta > 0$

$$\begin{aligned} \int_M [\beta G_\beta f - f] h d\tau &= \int_M P(G_\beta f) h d\tau = \int_M \{h \cdot P(G_\beta f) - G_\beta f P^*h\} d\tau \\ &= - \int_{\partial M} \{h L G_\beta f - G_\beta f L^*h\} d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Le théorème 10.2 entraîne alors que h est ≥ 0 et que h est unique à une constante multiplicative près.

3) h est strictement positive. Soient $k = \sup |P^*1|$, et $\bar{P} = P^* - k$, \bar{P} est un opérateur de diffusion et $\bar{P}h = -k \cdot h \leq 0$. Donc (1.2), ou bien h est constante (et alors $h > 0$ car $h \not\equiv 0$), ou bien h atteint son maximum en $x' \in \partial M$ et en ce point $\frac{\partial h}{\partial n}(x') > 0$; mais, si en $x' h(x') = 0$, on a,

$$0 = L^*h(x') = \frac{\partial h}{\partial n}(x') + (Q^* - Q^*1)h(x') + (T^* - T^*1)h(x');$$

ce qui est impossible car en un minimum de h $(Q^* - Q^*1)h(x') \geq 0$,

$$(T^* - T^*1)h(x') \geq 0;$$

donc $h(x') > 0$.

4) $h \cdot \sigma$ est une mesure invariante pour $(K_\rho^0)_{\rho > 0}$. En effet, pour $\varphi \in C(\partial M)$,

$$\begin{aligned} \int \varphi \cdot h d\sigma &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int \frac{1}{r} 1_{M_r} \cdot \varphi \cdot h \cdot d\tau && \text{(avec les notations du n° 7 } ^{(1)} \text{)} \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \beta \int G_\beta \left(\frac{1}{r} 1_{M_r} \cdot \varphi \right) h d\tau && \text{(puisque } h\tau \text{ est invariante pour } G_\beta \text{).} \\ &= \beta \int J_\beta(\varphi) h d\tau && \text{(d'après le n° 7)} \end{aligned}$$

(¹) Voir Courrège [15], appendice A.10.

Donc $h.\sigma$ est une mesure invariante pour $(K_\rho^0)_{\rho>0}$ (proposition 10.4).

c. q. f. d.

Deux semi-groupes de Feller sur M , T_t et \widehat{T}_t de mesure invariante commune sont dits adjoints si,

$$(11.11) \quad \text{pour tout } f, g \in C(M), \quad t > 0, \quad \int T_t f \cdot g \cdot dm = \int \widehat{T}_t g \cdot f \cdot dm ;$$

où ce qui est équivalent, si,

$$(11.12) \quad \text{pour tout } f, g \in C(M), \quad \beta > 0, \quad \int G_\beta f \cdot g \cdot dm = \int \widehat{G}_\beta g \cdot f \cdot dm$$

où $(G_\beta)_{\beta>0}$ et $(\widehat{G}_\beta)_{\beta>0}$ sont les résolvantes de (T_t) et (\widehat{T}_t) .

On pose,

$$(11.13) \quad \widehat{P}u = h^{-1}P^*(hu) \quad \widehat{L}u = h^{-1}L^*(hu), \quad \widehat{T}\varphi = h^{-1}T^*(\gamma^0 h \cdot \varphi)$$

($u \in C^2(M)$, $\varphi \in C^2(\partial M)$) où h est la densité de la mesure invariante (théorème 11.1).

Il est facile de voir que \widehat{T} est un opérateur de Ventcel'-Lévy quasi local de noyau

$$\widehat{t}(x', A) = h^{-1}(x') \int_A h(y) \bar{t}^*(x', dy),$$

que \widehat{P} est un opérateur de diffusion sur M , que \widehat{L} est une condition frontière de Ventcel'; le couple $(\widehat{P}, \widehat{L})$ satisfait aux conditions du n° 7 et $\widehat{P}1 = \widehat{L}1 = 0$; en fait, un calcul rapide montre que

$$\widehat{P}u = \Delta_g u - \langle X, u \rangle + 2\check{g}(du, d(\text{Log } h)) \quad (u \in C^2(M)),$$

$$\widehat{L}u = \frac{\partial u}{\partial n} + \text{div}_g(\pi' d(\gamma^0 u)) - \langle Y, \gamma^0 u \rangle + 2\pi'(d\gamma^0 u, d(\text{Log } \gamma^0 h)) + \widehat{T}(\gamma^0 u) \quad (u \in C^2(M)).$$

Il existe donc un semi-groupe de Feller sur M de résolvante $(\widehat{G}_\beta)_{\beta>0}$ de générateur $(\widehat{L}, \widehat{P})$ et un semi-groupe de Feller sur ∂M de résolvante $(\widehat{K}_\rho^0)_{\rho>0}$ de générateur $\widehat{L}\widehat{H}_0$ où \widehat{H}_0 est défini pour $\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial M)$ pour

$$\widehat{P}\widehat{H}_0\varphi = 0, \quad \gamma^0\widehat{H}_0\varphi = \varphi.$$

THÉORÈME 11.2. — *Les semi-groupes de résolvantes $(G_\beta)_{\beta>0}$, $(\widehat{G}_\beta)_{\beta>0}$ sont adjoints par rapport à la mesure $h.\tau$; les semi-groupes de résolvantes $(K_\rho^0)_{\rho>0}$ et $(\widehat{K}_\rho^0)_{\rho>0}$ sont adjoints par rapport à la mesure $h.\sigma$.*

Il suffit de montrer (11.12) pour $f, g \in C^{0,\lambda}(M)$ ou encore de montrer (si on pose $u = G_\beta f, v = \widehat{G}_\beta g$) que $\int (vPu - u\widehat{P}v)h d\tau = 0$ pour tout $u, v \in C^{2,\lambda}(M)$ telles que $Lu = \widehat{L}v = 0$, Mais,

(11.10)

$$\begin{aligned} \int_M (vPu - u\widehat{P}v)h d\tau &= \int_M (hvPu - uP^*(hv))d\tau = - \int_{\partial M} (hvLu - uL^*(hv))d\sigma \\ &= - \int_{\partial M} (vLu - u\widehat{L}v)hd\sigma = 0. \end{aligned}$$

De la même façon pour la deuxième assertion il suffit de montrer que pour $\varphi, \psi \in C^{2,\lambda}(\partial M)$, $\int_{\partial M} (\varphi LH_0\psi - \psi\widehat{L}\widehat{H}_0\varphi)hd\sigma = 0$; mais

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} (\varphi LH_0\psi - \psi\widehat{L}\widehat{H}_0\varphi)hd\sigma &= \int_{\partial M} (h\varphi LH_0\psi - \varphi L^*(h\widehat{H}_0\varphi))d\sigma \\ &= - \int_M (hH_0\varphi PH_0\psi - \psi P^*(h\widehat{H}_0\varphi))d\tau \\ &= \int_M \psi\widehat{P}\widehat{H}_0\varphi \cdot h d\tau = 0. \end{aligned}$$

c. q. f. d.

RÉFÉRENCES

- [1] J. M. BONY, Problème de Dirichlet et semi-groupe fortement Fellerien associé à un opérateur intégro-différentiel. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **265**, Série A, 1967, p. 361-365.
- [2] J. M. BONY, Ph. COURRÈGE et P. PRIOURET, Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte et... *Ann. Inst. Fourier*, t. **18**, n° 1 (à paraître).
- [3] E. B. DYNKIN, *Markov Process*. Springer Verlag, 1965.
- [4] R. K. GETTOOR, *Additive functionals of a Markov Process*. Cours de l'Université de Hambourg, 1964.
- [5] P. A. MEYER, *Processus de Markov*. Lectures notes in Mathematics. Springer Verlag, 1967.
- [6] P. A. MEYER, Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov. *Ann. Inst. Fourier*, t. **12**, 1962, p. 125-230.
- [7] M. MOTOO, The sweeping out of additive functionals and processes on the boundary. *Ann. Inst. Stat. Math.*, **16**, 1964, p. 317-345.
- [8] M. MOTOO, Application of additive functionals to the boundary problem of Markov process. *Proceedings of the 5th Berkeley Symposium on prob.* Vol. II, part II, 1965, p. 75-110.
- [9] N. NAGASAWA, The adjoint process of a diffusion with reflecting barrier. *Kodai Math. Sem. Rep.*, t. **13**, 1961, p. 235-248.

- [10] P. PRIOURET, Processus de Markov sur une variété à bord compacte. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **265**, série A, 1967, p. 786-789.
- [11] K. SATO, A decomposition Theorem of Markov process. *J. Soc. Math. Jap.*, t. **17**, 1965, p. 219-243.
- [12] K. SATO et T. UENO, Multidimensional diffusion process and the Markov Process on the boundary. *J. Math. Kyoto Univ.*, t. **14**, 1965, p. 529-605.
- [13] Séminaire BRELOT, CHOQUET et DENY, *Théorie du potentiel*, 5^e année, 1960-1961, Paris, Secrétariat Mathématique.
- [14] Séminaire BRELOT, CHOQUET et DENY, *Théorie du potentiel*, 8^e année, 1963-1964, exposé n° 8, Paris, Secrétariat Mathématique.
- [15] Séminaire BRELOT, CHOQUET et DENY, *Théorie du potentiel*, 10^e année, 1965-1966, exposé n° 1, Paris, Secrétariat Mathématique.
- [16] Séminaire BRELOT, CHOQUET et DENY, *Théorie du potentiel*, 10^e année, 1965-1966, exposé n° 5, Paris, Secrétariat Mathématique.
- [17] A. D. VENTCEL', On lateral conditions for multidimensional diffusion processes. *Theor. Prob. and Appl.*, t. **4**, 1959, p. 164-177.

(Manuscrit reçu le 1^{er} mai 1968).
