

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

CLAUDE MAYER

## **Processus de Markov non stationnaires et espace-temps**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 4, n° 3 (1968), p. 165-177

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1968\\_\\_4\\_3\\_165\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1968__4_3_165_0)

© Gauthier-Villars, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Processus de Markov non stationnaires et espace-temps

par

Claude MAYER

Institut Henri Poincaré,  
Source de probabilités.  
11, rue Pierre-et-Marie-Curie, Paris, 5<sup>e</sup>.

RÉSUMÉ. — Au § I, on donne une définition d'un processus de Markov non stationnaire, généralisant directement les processus stationnaires. Cette définition diffère par certains détails de celle de Dynkin [1].

Dans le § II, on associe à tout processus non stationnaire  $X$  sur l'espace des états  $E$  un processus « espace-temps » *stationnaire*  $\tilde{X}$  sur  $E \times \mathbb{R}_+$ ; puis on montre que la correspondance  $X \leftrightarrow \tilde{X}$  conserve les principales propriétés de régularité des processus : propriété de Markov forte, propriété de Blumenthal, continuité des trajectoires, etc.

Enfin, dans le § III, on déduit de la représentation ci-dessus les conditions pour qu'une fonction de transition  $\{P_t^s\}$  engendre un processus suffisamment régulier.

SUMMARY. — In parag. I, we give a definition of a non-stationary Markov process, as a direct generalisation of stationary processes. This definition is slightly different from Dynkin's [1].

In parag. II, to each non-stationary Markov process  $X$ , with state space  $E$ , is associated a *stationary* « space-time » process  $\tilde{X}$ , with state space  $E \times \mathbb{R}_+$ ; we show that the main regularity properties of the processes such as strong Markov property, Blumenthal property, right continuity of paths, etc., remain invariant through the correspondance  $X \leftrightarrow \tilde{X}$ .

In parag. III, we use the above representation to give conditions such that a transition function  $\{P_t^s\}$  generates a sufficiently regular process.

NOTATIONS. — Soit  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable; nous désignerons par :  $\mathfrak{B}(E)$  l'ensemble des fonctions numériques  $\mathcal{E}$ -mesurables bornées sur  $E$ ;  $\mathcal{M}(E)[\mathcal{M}_+(E), \mathcal{M}_+^1(E)]$  l'ensemble des mesures sur  $(E, \mathcal{E})$  [des mesures  $\geq 0$ , des mesures  $\geq 0$  de masse totale 1].

Soit  $\mu \in \mathcal{M}(E)$ ; lorsqu'une suite d'égalités sera suivie du signe  $[\mu]$ , cela signifiera que chacune de ces égalités est vraie  $\mu$ -presque sûrement.

## § I. GÉNÉRALITÉS

1. DÉFINITION. — Soit  $(E, \mathcal{E})$  un ensemble mesurable.

Nous appellerons Processus de Markov à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$  un système :

$$X = (\Omega, \{ \mathcal{F}_t \}_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+}, \{ X_t \}_{t \geq 0}, \{ \theta_t \}_{t \geq 0}, \{ P_\mu^s \}_{s \geq 0, \mu \in \mathcal{M}_+^1(E)}),$$

où :  $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$  est un ensemble mesurable ;

$\{ \mathcal{F}_t \}_{t \geq 0}$  est une famille croissante de sous-tribus de  $\mathcal{F}_\infty$  ;

$\{ X_t \}$  est une famille de variables aléatoires de  $\Omega$  dans  $E$ , adaptée à  $\{ \mathcal{F}_t \}$  (chaque  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable) ;

$\theta_t$  est une fonction de  $\Omega$  dans  $\Omega$  ;

$P_\mu^s$  est une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$  ;

ces éléments doivent satisfaire aux axiomes suivants :

$$\boxed{\text{A 1}} \quad \theta_0 = \text{identité} ; \forall s, t \geq 0, \quad X_s \circ \theta_t = X_{s+t}.$$

$\boxed{\text{A 2}}$  La fonction  $(x, s) \rightsquigarrow P_x^s \{ X_t \in A \}$  est  $\mathcal{E} \otimes \mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+}$ -mesurable, pour tous  $t \geq 0$ ,  $A \in \mathcal{E}$  ( $P_x^s$  est une abréviation de  $P_{\varepsilon_x}^s$ , et  $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+}$  est la tribu des boréliens de  $\mathbb{R}_+$ ).

$$\boxed{\text{A 3}} \quad \forall s \geq 0, \quad \mu \in \mathcal{M}_+^1(E), \quad A \in \mathcal{E},$$

on a :

$$P_\mu^s \{ X_0 \in A \} = \mu(A)$$

$\boxed{\text{A 4}}$  (propriété de Markov) :  $\forall t, u \geq 0, A \in \mathcal{E}$ , on a :

$$P_\mu^s \{ X_{t+u} \in A \mid \mathcal{F}_u \} = P_{X_u}^{s+u} \{ X_t \in A \} \quad [P_\mu^s]$$

Le processus  $X$  est dit stationnaire (ou homogène) si les probabilités  $P_\mu^s$  sont indépendantes de  $s$ ; on omet alors l'indice supérieur  $s$  dans les notations ci-dessus.

Le processus  $X$  est dit canonique si l'on a :

$$\Omega \subset \mathbb{E}^{\mathbb{R}^+} \quad ; \quad X_t(\omega) = \omega(t) \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega ;$$

$$\mathcal{F}_t = \sigma \{ X_s ; s \leq t \} \quad ; \quad \text{et } \theta_t \omega = \omega(\bullet + t).$$

Les notations introduites ici diffèrent de celles de Dynkin [1]; la différence principale est la suivante : presque sûrement pour la mesure  $\mathbb{P}_x^s$ , les trajectoires partent de  $x$  à l'instant 0 (et non à l'instant  $s$ ); cette particularité permet d'introduire les opérateurs de translation, et d'utiliser la définition classique des temps d'arrêt, car elle évite d'avoir à considérer des tribus  $\mathcal{F}_t^s$  à deux indices. L'inconvénient de cette simplification, cependant, est de cacher la différence fondamentale entre les tribus  $\mathcal{F}_{s+t}^s$ , lorsque  $s$  varie.

Nous désignerons dans la suite par  $\mathcal{G}$  la tribu  $\sigma \{ X_t ; t \geq 0 \}$ .

2. LEMME. — Soit  $Z$  une fonction numérique  $\mathcal{G}$ -mesurable bornée sur  $\Omega$ ; alors  $Z \circ \theta_t$  est aussi  $\mathcal{G}$ -mesurable; et l'on a :

$$(I, 2, 1) \quad \mathbb{E}_\mu^s \{ Z \circ \theta_t \mid \mathcal{F}_t \} = \mathbb{E}_{X_t}^{s+t}(Z) \quad [\mathbb{P}_\mu^s]$$

En particulier,

$$\mathbb{E}_\mu^s(Z) = \int_{\mathbb{E}} \mathbb{E}_x^s(Z) \mu(dx).$$

Démonstration. — Ce lemme étant bien connu dans le cas stationnaire, nous en rappellerons seulement les grandes lignes. On vérifie par récurrence que (I, 2, 1) est vraie pour  $Z = f_1 \circ X_{t_1} \dots f_n \circ X_{t_n}$ , où les  $f_i$  sont  $\mathcal{E}$ -mesurables bornées; pour cela, on utilise la propriété de Markov ( $\boxed{A\ 4}$ ).

Le lemme s'en déduit par les méthodes classiques de prolongement par mesurabilité.  $\circ \circ$

### 3. Propriété de Markov forte.

DÉFINITION. — Nous dirons que le processus  $X$  est fortement Markovien si l'on a, pour tout temps d'arrêt  $T$  de la famille  $\{ \mathcal{F}_t \}$ , et pour tous  $s \geq 0$ ,  $A \in \mathcal{E}$  :

La démonstration du lemme suivant est analogue à celle du lemme I.2 :

LEMME. — Soit  $X$  un processus fortement Markovien;  $Z$  une fonction  $\mathcal{G}$ -mesurable bornée sur  $\Omega$ .

On a alors pour tout temps d'arrêt  $T$  :

$$E_{\mu}^s \{ Z \circ \theta_T \mid \mathcal{F}_T \} = E_{X_T}^{s+T}(Z) \quad [P_{\mu}^s].$$

#### 4. Remarque.

Si  $X$  est un processus « de Markov » sans axiome A 4, tel qu'on ait pour toute variable aléatoire  $Z$ ,  $\mathcal{G}$ -mesurable et bornée :

$$E_{\mu}^s(Z) = \int_E E_x^s(Z) \mu(dx),$$

$X$  est alors Markovien (resp. fortement Markovien), dès qu'il l'est pour les mesures initiales  $P_x^s$ ; ce résultat, souvent utilisé dans le cas homogène, est facile à démontrer.

#### 5. Fonction de transition.

Soit  $X$  un processus de Markov; il est facile de voir que les opérateurs  $P_t^s$  de  $\mathcal{B}(E)$  dans  $\mathcal{B}(E)$ , définis par :

$$(I, 5, 1) \quad P_t^s f(x) = E_x^s \{ f \circ X_{t-s} \} \quad (0 \leq s \leq t),$$

satisfont aux relations :

$$\boxed{\text{F T 1}} \quad \forall s \geq 0, \quad P_s^s = \text{Identité.}$$

$$\boxed{\text{F T 2}} \quad \forall s, t (0 \leq s \leq t) \quad P_t^s 1 = 1^{(1)}$$

$$\boxed{\text{F T 3}} \quad \forall s, t, u (0 \leq s \leq t \leq u), \quad P_t^s P_u^t = P_u^s.$$

<sup>(1)</sup> On peut toujours se ramener à ce cas si l'on a seulement  $P_t^s 1 \leq 1$  : il suffit d'adjoindre à  $E$  un point « absorbant »  $\delta \notin E$ , et de poser :

$$P_t^s = (x, A) = P_t^s(x, A \setminus \{ \delta \}) + (1 - P_t^s 1) \cdot 1_A(\delta) \quad \text{pour } x \in E,$$

$$P_t^s(\delta, \{ \delta \}) = 1 \quad (\text{où } P_t^s(x, A) = P_t^s 1_A(x)),$$

Nous appellerons *semi-groupe généralisé* (s. g. g.) sur  $\mathcal{B}(E)$  une famille d'opérateurs positifs  $P_t^s$  satisfaisant à  $\boxed{\text{FT 1}}$  -  $\boxed{\text{FT 3}}$ ; un processus de Markov satisfaisant à (I, 5, 1) s'appelle une *réalisation* de  $\{P_t^s\}$ .

Le théorème suivant se démontre par les procédés classiques de construction d'un processus canonique (cf. Meyer [1], p. 8).

**THÉORÈME.** — Soit  $(E, \mathcal{E})$  un espace polonais muni de sa tribu borélienne; tout s. g. g. sur  $\mathcal{B}(E)$ , tel que la fonction  $(x, s) \rightsquigarrow P_t^s 1_A(x)$  soit mesurable, pour tout  $t \geq 0, A \in \mathcal{E}$ , admet une réalisation canonique.

### § II. PROCESSUS ESPACE-TEMPS

1. Soit  $X$  un processus de Markov dans l'espace des états  $(E, \mathcal{E})$ . Nous allons construire un nouveau processus dans l'espace  $(\tilde{E}, \tilde{\mathcal{E}})$ , où

$$\tilde{E} = E \times \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}.$$

Posons :

$$\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}_+ ;$$

Pour tout  $t \geq 0$  :

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} ;$$

Pour tout  $(\omega, s) \in \tilde{\Omega}$  :

$$\tilde{X}_t(\omega, s) = (X_t(\omega), s + t);$$

$$\tilde{\theta}_t(\omega, s) = (\theta_t \omega, s + t) ;$$

Pour tout  $(x, s) \in \tilde{E}$  :

$$\tilde{P}_{(x,s)} = P_x^s \otimes \varepsilon_s \quad (\text{sur } \tilde{\mathcal{F}}_\infty);$$

enfin, pour tous  $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}_+^1(\tilde{E}), \Gamma \in \tilde{\mathcal{F}}_\infty$  :

$$\tilde{P}_{\tilde{\mu}}(\Gamma) = \int_{\tilde{E}} \tilde{P}_{(x,s)}(\Gamma) d\tilde{\mu}(x,s).$$

**THÉORÈME.** — *Le système  $\tilde{X} = (\tilde{\Omega}, \{\tilde{\mathcal{F}}_t\}, \{\tilde{X}_t\}, \{\tilde{\theta}_t\}, \{\tilde{P}_{\tilde{\mu}}\})$  est un processus de Markov stationnaire sur  $(\tilde{E}, \tilde{\mathcal{E}})$ , que nous appellerons processus espace-temps associé à  $X$ .*

La fonction de transition (homogène)  $\{ Q_t \}$  <sup>(2)</sup> de  $\tilde{X}$  est donnée par

$$(II, 1, 1) \quad Q_t f(x, s) = P_{s+t}^s f_{s+t}(x);$$

où  $f \in \mathcal{B}(\tilde{E})$ , et  $f_s = f(\bullet, s) \in \mathcal{B}(E)$ .

*Démonstration.* — Il est immédiat que  $\{ \tilde{\mathcal{F}}_t \}$  est une famille croissante de sous-tribus de  $\tilde{\mathcal{F}}_\infty$ , et que  $\{ \tilde{X}_t \}$  est une fonction aléatoire à valeurs dans  $(\tilde{E}, \tilde{\mathcal{E}})$  adaptée à  $\{ \tilde{\mathcal{F}}_t \}$ .

$\tilde{P}_\mu$  est une famille de probabilités sur  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}_\infty)$ ; vérifions les axiomes  $\boxed{A 1}$  —  $\boxed{A 4}$  (les indices supérieurs étant omis) :

$\boxed{A 1}$  est immédiat.

$\boxed{A 2}$  et  $\boxed{A 3}$  se déduisent de la formule :

$$(II, 1, 2) \quad \tilde{P}_{(x,s)} \{ \tilde{X}_t \in A \times I \} = P_x \{ X_t \in A \} \cdot 1_I(s + t),$$

pour tous  $A \in \mathcal{E}$ ,  $I \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}$ .

$\boxed{A 4}$  : vérifions d'abord que  $\tilde{X}$  est Markovien pour les probabilités  $\tilde{P}_{(x,s)}$ ; il suffit pour cela de considérer des éléments de  $\tilde{\mathcal{E}}$  de la forme  $A \times I$  ( $A \in \mathcal{E}$ ,  $I \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}$ ).

Les égalités suivantes s'obtiennent par application répétée de la formule (II, 1, 2) :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{(x,s)} \{ \tilde{X}_{t+u} \in A \times I \mid \tilde{\mathcal{F}}_u \} &= \tilde{P}_{(x,s)} \{ (\omega, s) : X_{t+u}(\omega) \in A, s+t+u \in I \mid \mathcal{F}_u \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+} \} \\ &= 1_I(s+t+u) \cdot P_x \{ X_{t+u} \in A \mid \mathcal{F}_u \} = 1_I(s+t+u) \cdot P_{x_u}^{s+u} \{ X_t \in A \} \\ &= \tilde{P}_{\tilde{X}_u}^{s+u} \{ \tilde{X}_t \in A \times I \} \quad [ \tilde{P}_{(x,s)} ]. \end{aligned}$$

Le fait que  $\tilde{X}$  est Markovien résulte alors de la remarque I.4.

La formule (II, 1, 1) est immédiate;  $\tilde{X}$  est donc bien un processus stationnaire admettant  $\{ Q_t \}$  pour fonction de transition.  $\circ \circ$

Dans la suite, pour toute tribu  $\mathcal{F}$  sur  $\Omega$ , nous noterons  $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}$ .

2. PROPOSITION. — Si  $X$  est canonique,  $\tilde{X}$  l'est aussi.

*Démonstration.* — La définition d'un processus canonique exige seulement que  $\Omega \subset E^{\mathbb{R}^+}$ ; la formule définissant  $\tilde{X}_t$  plonge  $\tilde{\Omega}$  dans  $\tilde{E}^{\mathbb{R}^+}$ ; toutes les vérifications sont faciles.  $\circ \circ$

---

(2) On écrit  $Q_t$  au lieu de  $P_{s+t}^s$ , pour tout  $s$ .

### 3. Temps d'arrêt.

PROPOSITION. — Soit  $\tilde{T}(\omega, s)$  un temps d'arrêt pour la famille  $\{\tilde{\mathcal{F}}_t\}$ ; désignons par  $T_s$  la variable aléatoire  $T_s(\omega) = \tilde{T}(\omega, s)$ ;  $T_s$  est alors un temps d'arrêt de  $\{\mathcal{F}_t\}$ ; et si  $\tilde{T}$  ne dépend pas de  $s$ , on a :

$$: \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{T}} = \mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \quad (3).$$

Démonstration. — a) Si  $\tilde{T}$  est un temps d'arrêt,

$$\{T_s \leq t\} = \{\omega : \tilde{T}(\omega, s) \leq t\};$$

cet ensemble appartient à  $\mathcal{F}_t$  comme section d'indice  $s$  de l'ensemble

$$\{\tilde{T} \leq t\} \in \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}.$$

b) : résulte des équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (A \in \mathcal{F}_T) &\Leftrightarrow (\forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t) \\ &\Leftrightarrow (\forall I \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}, \forall t \geq 0, (A \times I) \cap \{\tilde{T} \leq t\} \in \tilde{\mathcal{F}}_t) \\ &\Leftrightarrow (\forall I \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}, A \times I \in \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{T}}) \quad \text{§ §} \end{aligned}$$

### 4. Propriété de Markov forte.

THÉORÈME. —  $X$  est fortement Markovien, si et seulement si  $\tilde{X}$  est fortement Markovien.

Démonstration. — Soit  $\tilde{\Omega}_s \subset \tilde{\Omega}$  l'ensemble des  $(\omega, s)$ , où  $\omega$  parcourt  $\Omega$ ; pour les mesures  $\tilde{P}_{\mu \otimes \varepsilon_s}$ , l'ensemble  $\tilde{\Omega}_s$  est négligeable; et pour tout  $\Gamma \in \tilde{\mathcal{F}}_\infty$ , on a :

$$\tilde{P}_\mu^s(\Gamma) = \tilde{P}_{\mu \otimes \varepsilon_s}(\Gamma \times \{s\}) = \tilde{P}_{\mu \otimes \varepsilon_s}(\Gamma \times \mathbb{R}_+);$$

dans les égalités qui vont suivre, nous nous restreindrons à  $\tilde{\Omega}_s$ , et utiliserons l'isomorphisme ci-dessus entre les espaces

$$(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P_\mu^s) \quad \text{et} \quad (\tilde{\Omega}_s, \tilde{\mathcal{F}}_\infty \otimes \{s\}, \tilde{P}_{\mu \otimes \varepsilon_s}).$$

(3) Cette propriété ne s'étend pas si  $T$  dépend de  $s$ ; on a seulement

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{T}} \supset \mathcal{F}_{T_s} \otimes \{s\} = \{\Gamma \times \{s\} : \Gamma \in \mathcal{F}_{T_s}\}, \quad \text{pour tout } s \geq 0.$$



a) Supposons  $\tilde{X}$  fortement Markovien; soit T un temps d'arrêt de  $\{\tilde{\mathcal{F}}_t\}$ . On a :

$$\begin{aligned} P_\mu^s \{ X_{T+u} \in A \mid \mathcal{F}_T \} (\omega, s) &= \tilde{P}_{\mu \otimes \varepsilon_s} \{ \tilde{X}_{T+u} \in A \times \mathbf{R}_+ \mid \mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}_{\mathbf{R}_+} \} (\omega, s) \\ &= \tilde{P}_{\tilde{X}_T(\omega, s)} \{ \tilde{X}_u \in A \times \mathbf{R}_+ \} = \tilde{P}_{(X_T, s+T)(\omega, s)} \{ X_u \in A \times \mathbf{R}_+ \} \\ &= P_{X_T(\omega)}^{s+T} \{ X_u \in A \} \quad [P_\mu^s] \text{ ou } [P_{\mu \otimes \varepsilon_s}] \text{ sur } \Omega \sim \tilde{\Omega}_s. \end{aligned}$$

X est donc fortement Markovien.

b) Supposons X fortement Markovien; soit  $\tilde{T}$  un temps d'arrêt de  $\{\tilde{\mathcal{F}}_t\}$ . Restreignons-nous de nouveau à  $\tilde{\Omega}_s$ ; nous avons :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{(x, s)} \{ \tilde{X}_{\tilde{T}+u} \in A \times I \mid \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{T}} \} (\omega, s) \\ = P_x^s \{ X_{T_s+u} \in A, T_s + u + s \in I \mid \mathcal{F}_{T_s} \} (\omega) \quad [\tilde{P}_{(x, s)}] \end{aligned}$$

En effet,  $\forall \Gamma \in \mathcal{F}_{T_s}$ ,  $\Gamma \times \{s\} \in \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{T}}$ ; on voit, en revenant à la définition des espérances conditionnelles, que les deux membres de l'équation ci-dessus coïncident  $\tilde{P}_{(x, s)}$ -presque sûrement sur  $\tilde{\Omega}_s$ .

D'où :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{(x, s)} \{ \tilde{X}_{\tilde{T}+u} \in A \times I \mid \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{T}} \} (\omega, s) &= P_{X_{T_s}}^{s+T_s} \{ X_u \in A, T_s + u + s \in I \} (\omega) \\ &= \tilde{P}_{(X_{T_s}, s+T_s)(\omega, s)} \{ \tilde{X}_u \in A \times I \} = \tilde{P}_{\tilde{X}_{\tilde{T}}(\omega, s)} \{ \tilde{X}_u \in A \times I \}, \end{aligned}$$

$\tilde{P}_{(x, s)}$ - ou  $P_x^s$ -presque sûrement sur  $\tilde{\Omega}_s \sim \Omega$ .

Le théorème en résulte, d'après I.4.  $\circ \circ$

## 5. Propriété de Blumenthal.

Nous dirons qu'un processus X a la propriété de Blumenthal si, pour toute mesure initiale  $\mu$ , pour tout  $s \geq 0$ , et pour toute suite  $(T_n)$  de temps d'arrêt tendant *en croissant* vers un temps d'arrêt T, on a :

$$X_{T_n}(\omega) \rightarrow X_T(\omega), P_\mu^s - \text{p. s. sur l'ensemble } \{ T < \infty \}.$$

**THÉORÈME.** —  $\tilde{X}$  a la propriété de Blumenthal, si et seulement si X a la propriété de Blumenthal.

*Démonstration.* — Il suffit de démontrer la propriété pour les mesures initiales ponctuelles. Supposons que X ait la propriété de Blumenthal; soit  $(\tilde{T}^n)$  une suite de temps d'arrêt de  $\{\tilde{\mathcal{F}}_t\}$ , telle que  $\tilde{T}^n \nearrow \tilde{T}$ .

On a,  $\tilde{P}_{(x,s)}$ -p. s. sur  $\tilde{\Omega}_s \cap \{ \tilde{T} < \infty \}$  :

$$\begin{aligned} \lim_n (\tilde{X}_{T_n}(\omega, s)) &= \lim_n (X_{T_n}(\omega), s + T_n(\omega)) \\ &= (X_{T_s}(\omega), s + T_s(\omega)) = \tilde{X}_{\tilde{T}}(\omega, s). \end{aligned}$$

$\tilde{X}$  possède donc la propriété de Blumenthal; la réciproque étant évidente, le théorème est démontré.  $\circ\circ$

### § III. FONCTIONS DE TRANSITION

1. Supposons que E soit un espace localement compact.

Nous considérons sur E un s. g. g.  $\{ P_t^s \}$  satisfaisant aux axiomes  $\boxed{\text{FT 1}}$  -  $\boxed{\text{FT 3}}$ ; le théorème suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que le semi-groupe  $\{ Q_t \}$ , défini au n° II.1, formule (II,1,1), soit Fellérien.

**THÉORÈME.** — *Pour que  $\{ Q_t \}$  soit un semi-groupe de Feller sur  $C_0(\tilde{E})$ , il faut et il suffit que pour toute  $f \in C_0^+(\tilde{E})$ , les conditions suivantes soient réalisées :*

$\boxed{\text{F 1}}$   $\quad \forall (s, x) : \lim_{t \downarrow 0} P_{s+t}^s f(x) = f(x).$

$\boxed{\text{F 2}}$  *Pour tout  $t \geq 0$ , la fonction  $(x, s) \rightsquigarrow P_{s+t}^s f(x)$  est continue.*

$\boxed{\text{F 3}}$  *Pour tout  $t \geq 0$ , la fonction  $P_{s+t}^s f$  tend vers 0 à l'infini, uniformément en s sur tout compact de  $R_+$ .*

*(La condition  $\boxed{\text{F 3}}$  est superflue si E est compact).*

**Démonstration.** — Il est assez facile de vérifier que les conditions sont nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes. Soit  $f \in C_0^+(\tilde{E})$ . Nous utiliserons le fait que f est uniformément continue, ce qui entraîne que  $\lim_{s \rightarrow 0} f_{s+t} = f_s$  uniformément en x. Il suffit de vérifier que pour tout  $t \geq 0$ ,

$Q_t f \in C_0(\tilde{E})$ , et pour tout  $(x, s) \in \tilde{E}$ ,  $\lim_{t \downarrow 0} Q_t f(x, s) = f(x, s)$ ; ces conditions

sont en effet suffisantes pour que le semi-groupe  $\{ Q_t \}$  soit Fellérien (cf. Meyer [I], p. 25).

a) Montrons que  $Q_t f$  est une fonction continue :

$$\begin{aligned} Q_t f(y, s) - Q_t f(x, u) &= P_{s+t}^s f_{s+t}(y) - P_{u+t}^u f_{u+t}(x) \\ &= P_{s+t}^s (f_{s+t} - f_{u+t})(y) + (P_{s+t}^s f_{u+t}(y) - P_{u+t}^u f_{u+t}(x)) \end{aligned}$$

Cette expression tend vers 0 lorsque  $(y, s) \rightarrow (x, u)$  : cela vient pour le premier terme, de la convergence uniforme de  $f_{s+t}$  vers  $f_{u+t}$ ; et pour le deuxième terme de la condition  $\boxed{\text{F 2}}$ .

b) Montrons maintenant que  $Q_t f \in C_0^+(\tilde{E})$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ ; il faut trouver un compact  $\tilde{K}$  de  $\tilde{E}$ , par exemple de la forme  $\tilde{K} = K \times [0, M]$  ( $K$  compact de  $E$ ), tel que :

$$(x, s) \in \tilde{K} \Rightarrow Q_t f(x, s) \leq \varepsilon.$$

Comme  $f \in C_0^+(\tilde{E})$ , il existe  $M \geq 0$  tel que

$$(III, 1, 1) \quad s \geq M \Rightarrow \sup_x f(x, s) \leq \varepsilon \text{ (i. e. } \|f_s\| \leq \varepsilon).$$

Considérons la fonction  $f'(x) = \sup_{s \leq M} f(x, s)$ . La continuité de  $f'$  résulte du lemme suivant :

LEMME. — Soit  $f$  une fonction  $\geq 0$ , continue sur  $E \times [0, M]$ ; la fonction  $f'(x) = \sup_{s \leq M} f(x, s)$  est continue; et  $f'$  tend vers 0 à l'infini s'il en est de même des  $f_s$  ( $s \leq M$ ).

Démonstration. — Lorsque  $f$  est de la forme particulière

$$f(x, s) = a(x) \cdot b(s),$$

où  $a$  et  $b$  sont des fonctions  $\geq 0$  continues, le lemme est immédiat, car

$$f'(x) = a(x) \cdot \sup_s b(s).$$

Dans le cas général, on conclut par approximation uniforme de combinaisons linéaires des  $a(x) \cdot b(s)$ .

Pour la deuxième phrase du lemme, on considère le compactifié d'Alexandrov  $E \cup \{\delta\}$  de  $E$ , et on pose  $f_s(\delta) = 0$ ,  $\forall s \leq M$ .  $\circ\circ$

D'après ce lemme, on a  $f' \in C_0^+(E)$ ; la condition  $\boxed{\text{F 3}}$  entraîne alors l'existence d'un compact  $K$ , tel que :

$$x \in K \Rightarrow P_{s+t}^s f'(x) \leq \varepsilon \quad \forall s \leq M - t.$$

Soit  $\tilde{K} = K \times [0, M - t]$ ; si  $(x, s) \in \tilde{K}$ , alors :

— ou bien  $s \geq M - t$ , d'où

$$Q_t f(x, s) = P_{s+t}^s f_{s+t}(x) \leq \|f_{s+t}\| \leq \varepsilon \text{ d'après (III, 1, 1),}$$

— ou bien  $s \leq M - t$  et  $x \in \mathbf{K}$ , d'où

$$Q_t f(x, s) = P_{s+t}^s f_{s+t}(x) \leq P_{s+t}^s f'(x) \leq \varepsilon.$$

En conclusion,  $f \in C_0(\tilde{E}) \Rightarrow Q_t f \in C_0(\tilde{E})$ .

c) Fixons  $(x, s) \in \tilde{E}$  :

$$\begin{aligned} Q_t f(x, s) - f(x, s) &= P_{s+t}^s f_{s+t}(x) - f_s(x) \\ &= P_{s+t}^s (f_{s+t} - f_s)(x) + (P_{s+t}^s f(x) - f(x)) ; \end{aligned}$$

cette expression tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers 0 : pour le premier terme, ceci résulte de la convergence uniforme de  $f_{s+t}$  vers  $f_s$ ; pour le deuxième terme, c'est la condition  $\boxed{F 1}$ .  $\circ\circ$

2. THÉORÈME. — Soient  $E$  un espace  $L. C. D.$  (\*),  $\{P_t^s\}$  un s.g.g. satisfaisant aux conditions  $\boxed{F 1}$ ,  $\boxed{F 2}$ ,  $\boxed{F 3}$  du théorème précédent ( $\boxed{F 1}$  et  $\boxed{F 2}$  si  $E$  est compact).

Il existe alors un processus de Markov  $X$  sur  $E$ , admettant  $\{P_t^s\}$  comme fonction de transition, ayant les propriétés suivantes :

- $X$  est fortement Markovien;
- la famille des tribus  $\{\mathcal{F}_t\}$  est continue à droite;
- les trajectoires de  $X$  sont continues à droite et pourvues de limites à gauche;
- $X$  a la propriété de Blumenthal.

Démonstration. — Le semi-groupe  $\{Q_t\}$  est alors Fellerien sur  $\tilde{E}$ ; nous allons utiliser les résultats classiques de la théorie des processus stationnaires (cf. Dynkin [2], chap. III, Meyer [1] et la note de la p. 177).

Soit  $X' = (\Omega', \{X'_t\}, \{\mathcal{F}'_t\}, \{\theta'_t\}, \{P'_\mu\})$  une réalisation canonique de  $Q_t$ , telle que  $\Omega' = \tilde{E}^{\mathbf{R}^+}$ . Nous allons progressivement transformer le processus  $X'$ , pour en faire un processus  $\tilde{X}$ , équivalent à  $X'$ , tel que  $\tilde{X}$  ait toutes les propriétés exigées, et soit le processus espace-temps associé à un certain processus non stationnaire,  $X$ , sur  $E$ .

D'après les résultats du § II, ceci entraînera que  $X$  est une réalisation de  $\{P_t^s\}$  ayant les bonnes propriétés, et achèvera la démonstration.

a) Restriction de  $X'$  à l'espace  $\Omega''$  des fonctions de  $\tilde{E}$  dans  $\mathbf{R}_+$ , continues

(\*) Localement compact à base dénombrable.

à droite et pourvues de limites à gauche en tout point; on sait que  $\Omega''$  a une probabilité extérieure 1 pour tous les  $P'_\mu$  ( $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}_+^1(\tilde{E})$ ).

b) Restriction du nouveau processus à l'espace  $\tilde{\Omega}$ , défini par :

$$\tilde{\Omega} = \{ \tilde{\omega} \in \Omega'' : \forall t \geq 0, pr_{R_+}(X'_t(\tilde{\omega})) = pr_{R_+}(X'_0(\tilde{\omega})) + t \};$$

nous allons montrer que  $\tilde{\Omega}$  est de probabilité intérieure 1 pour tous les  $P'_{(x,s)}$ ; ceci entraînera que  $\tilde{\Omega}$  est de probabilité extérieure 1 pour tous les  $P'_\mu$ .

Soit I un borélien de  $R_+$ ; nous avons :

$$\begin{aligned} P'_{(x,s)} \{ pr_{R_+}(X'_t) \in I \} &= P'_{(x,s)} \{ X'_t \in E \times I \} = Q_t(1_{E \times I})(x, s) \\ &= 1_I(s + t) \cdot P'_{s+t}(x, E) = 1_I(s + t). \end{aligned}$$

Donc, pour tout  $t \geq 0$ ,  $P'_{(x,s)} \{ pr_{R_+}(X'_t) = s + t \} = 1$ ; d'où

$$P'_{(x,s)} \{ \forall t \text{ rationnel } \geq 0 : pr_{R_+}(X'_t) = s + t \} = 1;$$

et par continuité à droite des trajectoires :

$$P'_{(x,s)} \{ \forall t \geq 0 : pr_{R_+}(X'_t) = s + t \} = 1$$

D'où enfin :

$$[P'_{(x,s)}]_* (\tilde{\Omega}) = P'_{(x,s)} \{ pr_{R_+}(X'_0) = s \text{ et } pr_{R_+}(X'_t) = s + t \text{ pour tout } t \} = 1.$$

c'est le résultat cherché.

c)  $\tilde{\Omega}$  est alors de la forme  $\Omega \times R_+$ , où  $\Omega \subset E^{R^+}$  est l'image de  $\tilde{\Omega}$  par l'application qui à tout  $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ , fait correspondre  $\omega \in E^{R^+}$ , tel que :

$$\omega(t) = Pr_E(X'_t(\tilde{\omega})) :$$

on a

$$\tilde{\omega} = [\omega, pr_{R_+}(X'_0(\tilde{\omega}))].$$

$\mathcal{F}'_t$  vaut alors  $\mathcal{F}'_t \otimes \mathcal{B}_{R_+}$ , où  $\{ \mathcal{F}'_t \}$  est la famille des tribus canoniques sur  $\Omega$ .

Le processus définitif  $\tilde{X}$  se déduit du précédent en remplaçant les tribus  $\mathcal{F}'_t$  par les tribus  $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}'_{t+}$ .

$\tilde{X}$  possède alors toutes les propriétés exigées (<sup>5</sup>); de plus,  $\tilde{X}$  est le processus espace-temps associé à un processus  $X$  sur  $E$ , dont l'espace des trajectoires est  $\Omega$ , et dont les tribus  $\mathcal{F}_t$  sont les  $\mathcal{F}_{t+}^0$  (donc continues à droite) : les vérifications sont automatiques, et le théorème est démontré.  $\circ\circ$

### 3. REMARQUE

Dynkin [1] établit le résultat suivant : soit  $E$  un espace L. C. D.,  $X$  un processus de Markov non stationnaire sur  $E$ , *continu à droite*; si la fonction de transition  $\{P_t^s\}$  de  $X$  est telle que :

(D) pour tous  $x \in E$ ,  $0 \leq u < t$ ,  $f \in C(E)$  :

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ s \downarrow u}} P_t^s f(y) = P_t^u f(x);$$

alors  $X$  est fortement Markovien.

Soit  $(D_0)$  la condition (D), restreinte aux  $f \in C_0(E)$ ; il est facile de voir qu'un s. g. g. satisfaisant à  $\boxed{F1}$ ,  $\boxed{F2}$ ,  $\boxed{F3}$ , vérifie  $(D_0)$  : on considère le semi-groupe  $\{Q_t\}$ , qui est de Feller, et on prend une fonction de la forme :

$$\tilde{f}(x, s) = f(x) \cdot a(s),$$

où  $a$  est un élément de  $\varphi_0(\mathbb{R}_+)$ , tel que  $a(t) = 1$ .

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. B. DYNKIN, *Théorie des processus de Markov*. Dunod, 1963.  
 [2] E. B. DYNKIN, *Markov processes*. Springer-Verlag, 1965.  
 [3] P.-A. MEYER, *Processus de Markov*. Lecture notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1967.

Reçu le 27 février 1968.

---

(<sup>5</sup>) D'après le résultat suivant, qu'on peut extraire de Meyer ([1]) en adaptant certaines démonstrations :

THÉORÈME — Soit  $\{P_t\}$  un semi-groupe de Feller sur  $C_0(E)$ ; considérons une réalisation canonique  $Y'$  de  $\{P_t\}$ , dont l'espace des trajectoires est  $E^{\mathbb{R}_+}$ .

Soit  $Y$  le processus déduit de  $Y'$  en restreignant l'ensemble des trajectoires aux fonctions continues à droite et pourvues de limites à gauche, et en remplaçant les tribus  $\mathcal{F}_t$  par les  $\mathcal{F}_{t+}$ ; alors,  $Y$  est encore une réalisation de  $\{P_t\}$ ,  $Y$  est fortement Markovien et possède la propriété de Blumenthal.