

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

R. FORTET

Sur les répartitions ponctuelles aléatoires, en particulier de Poisson

Annales de l'I. H. P., section B, tome 4, n° 2 (1968), p. 99-142

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1968__4_2_99_0

© Gauthier-Villars, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur les répartitions ponctuelles aléatoires, en particulier de Poisson

par

R. FORTET

(Paris).

SOMMAIRE. — L'article rappelle la définition générale des répartitions ponctuelles aléatoires, sur un espace de points quelconque; il donne un fondement rigoureux aux notions de somme et réunion de répartitions ponctuelles aléatoires, et de répartitions induites; l'application principale est la définition générale et les propriétés des répartitions de Poisson. Les derniers paragraphes concernent la définition et les propriétés des fonctionnelles caractéristiques des répartitions ponctuelles; une condition suffisante pour qu'une fonctionnelle soit caractéristique d'une répartition ponctuelle σ -finie est donnée.

SUMMARY. — The paper gives a general definition of the random points distributions, over an arbitrary point space; it gives rigorous foundations to the notions of sum and union of random points distributions, and of induced distributions; the principal application is to the general definition and properties of Poisson distributions. The last sections are dealing with the definition and the properties of the characteristic functionals of the random points distributions; a sufficient condition for a functional to be the characteristic of a σ -finite points distribution is given.

1. LES RÉPARTITIONS PONCTUELLES

Je rappelle rapidement dans ce paragraphe 1 des définitions, des notations et des propriétés que j'ai déjà indiquées dans R. Fortet [1] [2].

Désignons par \mathcal{E} l'ensemble de tous les entiers ≥ 0 et finis; par \mathcal{E}_∞ l'ensemble \mathcal{E} complété par l'élément $+\infty$.

Soit \mathfrak{X} un espace (non-vide) quelconque d'éléments x appelés « points ». Une répartition ponctuelle (1) sur \mathfrak{X} d'effectif s , où s est un cardinal quelconque $\in \varepsilon_\infty$, est un système non-ordonné $r = \{x_j\}$ de s points $x_j \in \mathfrak{X}$, *distincts ou non*.

Pour $A \subset \mathfrak{X}$, appelons $n(r; A)$ le nombre (fini ou non) des x_j (distincts ou non) de $r = \{x_j\}$ qui appartiennent à A ; comme fonction de A , $n(r; A)$ est une mesure (discrète); il y a identité entre la notion de répartition ponctuelle $r = \{x_j\}$, et celle de la mesure $n(r; A)$ associée à r ; $n(r; \mathfrak{X})$ est l'effectif de r .

Appelons : Ω l'ensemble des répartitions ponctuelles sur \mathfrak{X} ; Ω^s (s entier ≥ 0 et fini), l'ensemble des répartitions ponctuelles r sur \mathfrak{X} , telles que $n(r; \mathfrak{X}) = s$; $\Omega^\phi = \bigcup_s \Omega^s$ l'ensemble des répartitions ponctuelles r sur \mathfrak{X} finies, c'est-

à-dire telles que : $n(r; \mathfrak{X}) < +\infty$; Ω^∞ l'ensemble des répartitions ponctuelles r sur \mathfrak{X} infinies, c'est-à-dire telles que $n(r; \mathfrak{X}) = +\infty$.

Soit \mathfrak{B} une σ -algèbre de parties de \mathfrak{X} , telle que : \mathfrak{X} appartient à \mathfrak{B} ; et que : pour tout $x \in \mathfrak{X}$, la partie $\{x\}$ de \mathfrak{X} constituée par x seul, appartient à \mathfrak{B} . Soient :

- a) k un entier > 0 et $< +\infty$;
- b) A_1, A_2, \dots, A_k , k sous-ensembles de \mathfrak{X} , appartenant à \mathfrak{B} ;
- c) J un sous-ensemble quelconque (éventuellement vide) de ε_∞^k ;

le sous-ensemble ω de Ω constitué par les r. p. r telles que :

$$\{n(r; A_1), n(r; A_2), \dots, n(r; A_k)\} \in J \subset \varepsilon_\infty^k \quad (1, 1)$$

sera appelé un (sous-ensemble) *cylindrique* de Ω (sous-entendu : relativement à \mathfrak{B}). Soit ${}_c\mathfrak{B}(\mathfrak{X}; \mathfrak{B})$ — ou plus brièvement : ${}_c\mathfrak{B}$ — la σ -algèbre de Boole de parties de Ω engendrée par les cylindriques.

Définition. — Une répartition ponctuelle aléatoire (2) R sur \mathfrak{X} est un élément aléatoire (3) sur $(\Omega, {}_c\mathfrak{B})$.

Des définitions du même type, mais apparemment moins générales, ont été indiquées antérieurement par d'autres auteurs, par exemple par T. E. Harris [1].

Structure de la σ -algèbre ${}_c\mathfrak{B}$. — Dans R. Fortet [1] [2], j'ai donné sur la structure de ${}_c\mathfrak{B}$, quelques résultats que je résume rapidement ici.

(1) Répartition ponctuelle : abréviation, r. p.

(2) Répartition ponctuelle aléatoire : abréviation, r. p. a.

(3) Élément aléatoire : abréviation e.

1) Soient : Q^s l'algèbre des parties de Ω^s qui sont des cylindriques; \mathcal{R}^s la plus petite σ -algèbre de parties de Ω^s qui contient Q^s ; Q^∞ l'algèbre des parties de Ω^∞ qui sont des cylindriques; \mathcal{R}^∞ la plus petite σ -algèbre de parties de Ω^∞ qui contient Q^∞ .

Un élément $x = \{x_1, \dots, x_s\}$ de \mathbb{X}^s est un système ordonné de s points de \mathbb{X} ; faisons lui correspondre la répartition ponctuelle :

$$r = \lambda_s(x) \in \Omega^s,$$

constituée par le système non-ordonné des s points x_1, \dots, x_s qui constituent x (λ_s est une application de \mathbb{X}^s sur Ω^s). Soient $S_1, S_2, \dots, S_{s!}$, les diverses permutations distinctes des entiers $1, 2, \dots, s$. Pour tout $e \subset \mathbb{X}^s$, posons : $\Gamma(e) = \bigcup_i S_i(e)$, et disons que e est Γ -complet si $e = \Gamma(e)$.

Un pavé P de \mathbb{X}^s est une partie de \mathbb{X}^s de la forme :

$$P = \prod_{j=1}^s A_j,$$

où les $A_j \in \mathcal{B}$ ($j = 1, \dots, s$); soit \mathcal{F} la famille de ces pavés, et \mathcal{F}_Γ la famille des parties de \mathbb{X}^s de la forme $\Gamma(P)$, où P est un pavé. \mathcal{F} engendre une algèbre \mathcal{A}^s et une σ -algèbre \mathcal{B}^s ; \mathcal{F}_Γ engendre une algèbre \mathcal{A}'_s et une σ -algèbre \mathcal{B}'_s .

Soient \mathcal{A}'_Γ la famille des ensembles de \mathcal{A}'^s qui sont Γ -complets, et \mathcal{B}'_Γ la famille des ensembles de \mathcal{B}'^s qui sont Γ -complets.

THÉORÈME 1 :

- a) $\mathcal{A}'_\Gamma = \mathcal{A}'_s; \mathcal{B}'_\Gamma = \mathcal{B}'_s;$
- b) $\lambda_s(\mathcal{A}'_\Gamma = \mathcal{A}'_s) = Q^s;$
- c) $\lambda_s(\mathcal{B}'_\Gamma = \mathcal{B}'_s) = \mathcal{R}^s.$

2) Soit $\mathbb{X}^\infty = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \dots \times \mathbb{X}_s \times \dots$ le produit cartésien d'une infinité dénombrable ordonnée d'espace \mathbb{X}_s tous identiques à \mathbb{X} . Un pavé P de \mathbb{X}^∞ est une partie de \mathbb{X}^∞ de la forme :

$$P = \prod_{s=1}^{+\infty} A_s,$$

où $A_s \subset \mathbb{X}_s, A_s \in \mathcal{B}, A_s = \mathbb{X}_s = \mathbb{X}$ sauf pour un nombre fini de valeurs de s . \mathcal{F} engendre une σ -algèbre \mathcal{B}^∞ de parties de \mathbb{X}^∞ . Soit λ^∞ l'application de \mathbb{X}^∞

sur Ω^∞ qui, à l'élément $x = \{x_1, x_2, \dots, x_s, \dots\}$ de \mathfrak{X}^∞ fait correspondre la répartition ponctuelle $r = \{x_s\}$ constituée par les mêmes points x_s que x , mais abstraction faite de l'ordre.

Soit p une permutation des entiers $1, 2, \dots, s, \dots$; p est finie, si $p(s) = s$ sauf pour un nombre fini de valeurs de s ; soient \mathfrak{P} l'ensemble (dénombrable) des permutations finies, \mathfrak{P}^* celui de toutes les permutations. Pour $e \subset \mathfrak{X}^\infty$, posons :

$$\Gamma(e) = \bigcup_{p \in \mathfrak{P}} p(e), \quad \Gamma^*(e) = \bigcup_{p \in \mathfrak{P}^*} p(e);$$

soient :

\mathcal{F}_Γ (resp. \mathcal{F}_{Γ^*}) la famille des $e \subset \mathfrak{X}^\infty$, telle que $e = \Gamma(P)$ (resp. $\Gamma^*(P)$), où P est un pavé;

$\mathcal{B}_\Gamma^\infty$ (resp. $\mathcal{B}_{\Gamma^*}^\infty$) l'ensemble des $e \subset \mathfrak{B}^\infty$ tels que $e = \Gamma(e)$ (resp. $e = \Gamma^*(e)$);

\mathcal{B}'_Γ (resp. \mathcal{B}'_{Γ^*}) la plus petite σ -algèbre contenant \mathcal{F}_Γ (resp. \mathcal{F}_{Γ^*}).

THÉORÈME (1,2) :

$$1^\circ \quad \mathcal{B}'_\Gamma = \mathcal{B}'_{\Gamma^*} \subset \mathcal{B}_{\Gamma^*}^\infty \subset \mathcal{B}_\Gamma^\infty \subset \mathfrak{B}^\infty;$$

$$2^\circ \quad \mathfrak{R}^\infty = \lambda_\infty(\mathcal{B}'_\Gamma = \mathcal{B}'_{\Gamma^*}) \subset \lambda_\infty(\mathcal{B}_{\Gamma^*}^\infty) = \lambda_\infty(\mathcal{B}_\Gamma^\infty) = \lambda_\infty(\mathfrak{B}^\infty).$$

Ces notions et résultats permettent d'introduire avec rigueur un certain nombre de notions intuitives, en particulier de poser une définition générale des répartitions induites, et une définition générale des répartitions de Poisson : ce qui va être l'objet des paragraphes suivants.

2. SOMME DE RÉPARTITIONS ALÉATOIRES

Soient $(\Omega_k, \mathcal{B}_k)$ ($k = 1, 2, 3, \dots, K$), où K est un entier $\leq +\infty$, une famille (finie ou dénombrable) d'espaces mesurables tous identiques à (Ω, \mathcal{B}) ; appelons \mathfrak{Z} le produit cartésien :

$$\mathfrak{Z} = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_k \times \dots \times \Omega_K,$$

muni de la σ -algèbre Λ , « produit » au sens usuel des \mathcal{B}_k .

Soit $\{r_1, r_2, \dots, r_k, \dots\}$ ($k = 1, 2, \dots, K$) une famille (finie ou dénombrable) de r. p. sur \mathfrak{X} ; nous appellerons *somme* des r_k , la r. p. $r = \sum_k r_k$ cons-

tituée par : tous les points de r_1 , tous les points de r_2, \dots , tous les points de r_k, \dots , c'est-à-dire la r. p. r telle que, pour tout $A \in \mathcal{B}$,

$$n(r ; A) = \sum_k n(r_k ; A) . \tag{2,1}$$

Notons que : $z = \{ r_1, \dots, r_k, \dots \}$ peut être interprété comme un point de \mathcal{Z} , en considérant pour chaque k , que $r_k \in \Omega_k$.

Soit alors Ψ l'application de \mathcal{Z} dans Ω qui, à $z = \{ r_1, \dots, r_k, \dots \}$, fait correspondre $r = \Psi(z) = \sum_k r_k$.

Un pavé P de \mathcal{Z} est une partie de \mathcal{Z} de la forme :

$$P = \prod_{1 \leq k \leq K} e_k,$$

où $e_k \subset \Omega_k, e_k \in {}_c\mathcal{B}_k$, avec $e_k = \Omega_k$ sauf pour un nombre fini de valeurs de k .

Soient :

p une permutation des indices $k = 1, 2, 3, \dots$;

\mathcal{P} la famille des p ;

$S_1, S_2, S_3, \dots, S_p, \dots$ les permutations finies des indices $k = 1, 2, 3, \dots$;

Γ l'application qui, à $e \subset \mathcal{Z}$, fait correspondre $\Gamma(e) = \bigcup_i S_i(e) \subset \mathcal{Z}$;

Γ^* l'application qui, à $e \subset \mathcal{Z}$, fait correspondre $\Gamma^*(e) = \bigcup_{\mathcal{P}} p(e)$.

Nous savons (cf. R. Fortet [2]) que, pour un pavé $P, \Gamma(P) = \Gamma^*(P) \in \Lambda$.

Soit ω un cylindrique de Ω . Supposons d'abord que ω est défini par :

$$n(r ; A) \geq j \quad (A \in \mathcal{B}), \tag{2,2}$$

où j est un entier ≥ 0 et $< + \infty$. Cherchons ce qu'est $\Psi^{-1}(\omega)$.

Si $j = 0, \omega = \Omega, \Psi^{-1}(\Omega) = \mathcal{Z}$; supposons donc $j \geq 1$.

Soit $u = \{ u_1, u_2, \dots, u_\alpha \}$ un système d'entiers $u_j > 0$, tels que : $u_1 + u_2 + \dots + u_\alpha = j$; les systèmes u de ce type forment un ensemble fini \mathcal{U} . A $u \in \mathcal{U}$, associons le pavé P_u défini par :

$$P_u = \{ n(r_1 ; A) \geq u_1 \} \times \dots \times \{ n(r_\alpha ; A) \geq u_\alpha \} \times \Omega_{\alpha+1} \times \Omega_{\alpha+2} \times \dots ; \tag{2,3}$$

Soit $z = \{ r_1, r_2, \dots, r_k, \dots \} \in \mathcal{Z}$ tel que $\Psi(z) \in \omega$; c'est-à-dire tel que :

$$\sum_k n(r_k ; A) \geq j ;$$

soit k' l'entier tel que :

$$\sum_{k=1}^{k'-1} n(r_k; A) < j, \quad \sum_{k=1}^{k'} n(r_k; A) \geq j;$$

soit $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_\alpha = k'$ ceux des $k \leq k'$, tels que $n(r_k; A) > 0$, de sorte que :

$$n(r_{k_1}; A) + n(r_{k_2}; A) + \dots + n(r_{k_\alpha}; A) \geq j;$$

il existe nécessairement un $u = \{u_1, u_2, \dots, u_\alpha\} \in \mathfrak{U}$, tel que :

$$n(r_{k_1}; A) \geq u_1, n(r_{k_2}; A) \geq u_2, \dots, n(r_{k_\alpha}; A) \geq u_\alpha;$$

de sorte que :

$$z \in \Gamma(P_u);$$

par conséquent :

$$\Psi(z) \in \omega \implies z \in \bigcup_{\mathfrak{U}} \Gamma(P_u).$$

Réciproquement, si $z \in \bigcup_{\mathfrak{U}} \Gamma(P_u)$, c'est que, pour un l déterminé et un $u = \{u_1, \dots, u_\alpha\}$ déterminé, on a :

$$z \in S_l(P_u);$$

alors il existe forcément α indices $k_1, k_2, \dots, k_\alpha$ tels que :

$$n(r_{k_1}; A) \geq u_1, \dots, n(r_{k_\alpha}; A) \geq u_\alpha, \text{ de sorte que : } n(r; A) \geq j.$$

On conclut que :

$$\Psi^{-1}(\omega) = \bigcup_{\mathfrak{U}} \Gamma(P_u) \in \Lambda. \quad (2,4)$$

Supposons maintenant que ω est l'ensemble défini par :

$$\{n(r; A_1) \geq j_1, \dots, n(r; A_h) \geq j_h\}; \quad (2,5)$$

en appelant ω_α l'ensemble défini par :

$$n(r; A_\alpha) \geq j_\alpha,$$

$$\omega = \bigcap_{\alpha=1}^h \omega_\alpha; \quad \Psi^{-1}(\omega) = \bigcap_{\alpha=1}^h \Psi^{-1}(\omega_\alpha) \in \Lambda. \quad (2,6)$$

Soit \mathcal{G} la famille des ω de la forme (2,5); \mathcal{G} engendre ${}_c\mathcal{B}$; par conséquent :

$${}_c\mathcal{B} \subset \Psi(\Lambda). \tag{2,7}$$

Considérons maintenant un e. a. :

$$Z = \{ R_1, R_2, \dots, R_k, \dots \}$$

à valeurs dans \mathfrak{J} ; supposons donnée sa loi de probabilité sur Λ ; alors, à partir de cette loi de probabilité, Ψ induit sur $\Psi(\Lambda)$, et par conséquent sur ${}_c\mathcal{B}$, une loi de probabilité, qui est celle de :

$$R = \sum_k R_k.$$

3. UNION DE RÉPARTITIONS ALÉATOIRES

Soient $\{ M_h \}$ ($h = 1, 2, \dots$) une suite finie ou dénombrable d'espaces M_h , deux à deux disjoints; soit pour chaque h , une σ -algèbre \mathcal{B}_h de parties de M_h , contenant M_h lui-même. Posons :

$$\mathfrak{X} = \bigcup_h M_h; \tag{3,1}$$

soit \mathcal{B} la σ -algèbre des parties $e \in \mathfrak{X}$ telles que pour tout h , $e \cap M_h \in \mathcal{B}_h$.

Soit pour chaque h , r_h une r. p. sur M_h ; nous appellerons *union* des $\{ r_h \}$, et nous désignerons par : $r = \bigcup_h r_h$, la r. p. r sur \mathfrak{X} , constituée par l'ensemble des points des diverses r_h ($h = 1, 2, \dots$).

Une r. p. r_h sur $M_h \subset \mathfrak{X}$, peut être considérée comme une r. p. sur \mathfrak{X} : telle que nous venons de la définir, l'union est donc une somme de r. p. au sens du paragraphe 2 précédent, mais de type spécial. Au lieu d'utiliser la méthode du paragraphe 2, procédons directement à l'étude de la notion d'union.

Pour toute r. p. r sur \mathfrak{X} , appelons : $r_h = \rho_h(r)$ sa restriction à M_h , c'est-à-dire la r. p. r_h sur M_h constituée par ceux des points de r qui appartiennent à M_h ; r est l'union de ces restrictions $r_h = \rho_h(r)$ ($h = 1, 2, \dots$).

Posons :

$$\Omega_h = \Omega(M_h); \quad {}_c\mathcal{B}_h = {}_c\mathcal{B}(M_h; \mathcal{B}_h); \quad \Omega = \Omega(\mathfrak{X}); \quad {}_c\mathcal{B} = {}_c\mathcal{B}(\mathfrak{X}; \mathcal{B}).$$

ρ_h est une application de Ω sur Ω_h .

Soit \mathfrak{Z} l'espace produit :

$$\mathfrak{Z} = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_h \times \dots ; \quad (3,2)$$

un élément $z = \{r_h\}$ de \mathfrak{Z} est un système ordonné de r. p. r_h , telles que pour chaque h , $r_h \in \Omega_h$; l'union $r = \bigcup_h r_h$ de ces r_h , est donc le résultat $r = \Psi(z)$

d'une application *biunivoque* Ψ de $z = \{r_h\} \in \mathfrak{Z}$ dans Ω .

Soit Λ la σ -algèbre-produit de parties de \mathfrak{Z} , définie par les ${}_c\mathcal{B}_h$; soit $\Psi(\Lambda)$ la σ -algèbre de parties de Ω , induite par Ψ à partir de Λ .

Soit $\omega \in {}_c\mathcal{B}$; supposons d'abord que ω est un cylindrique, défini par la condition :

$$n(r; \Lambda) = k, \quad (3,3)$$

où k est un entier ≥ 0 , et où $\Lambda \in \mathcal{B}$.

Examinons d'abord le cas où $k < +\infty$. Posons : $A_h = \Lambda \cap M_h \in \mathcal{B}_h$; les A_h ($h = 1, 2, \dots$) sont deux à deux disjoints. α_h désignant un entier ≥ 0 , le sous-ensemble $\omega_h(\alpha_h)$ de Ω_h défini par :

$$n(r_h; A_h) = \alpha_h,$$

appartient à ${}_c\mathcal{B}_h$; par suite, l'ensemble :

$$\omega_1(\alpha_1) \times \omega_2(\alpha_2) \times \dots \times \omega_h(\alpha_h) \times \dots = e(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h, \dots)$$

est un sous-ensemble de \mathfrak{Z} qui appartient à Λ , quelle que soit la suite $\{\alpha_h\}$ fixée d'entiers $\alpha_h \geq 0$. Soit e l'union *dénombrable* :

$$e = \bigcup_{\substack{\alpha_h \geq 0, \\ \sum_h \alpha_h = k}} e(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h, \dots);$$

e appartient à Λ ; or la condition : $r \in \omega$, est évidemment équivalente à : $z = \Psi^{-1}(r) \in e$; donc :

$$\Psi^{-1}(\omega) \in \Lambda, \quad \text{ou :} \quad \omega \in \Psi(\Lambda).$$

Supposons maintenant $k = +\infty$; le complémentaire $\check{\omega}$ de ω est l'ensemble défini par : $n(r; \Lambda) < +\infty$; $\check{\omega}$ est l'union dénombrable d'ensembles du type (3,3) avec $k < +\infty$; donc $\check{\omega} \in \Psi(\Lambda)$, donc : $\omega \in \Psi(\Lambda)$.

Il en résulte que tout sous-ensemble cylindrique de Ω appartient à $\Psi(\Lambda)$, et par suite que : ${}_c\mathcal{B} \subset \Psi(\Lambda)$. Mais il est d'autre part à peu près immédiat que : $\Psi(\Lambda) \subset {}_c\mathcal{B}$, d'où :

THÉOREME (3,1). — Les σ -algèbres ${}_c\mathcal{B}$ et $\Psi(\Lambda)$ sont identiques.

Supposons alors donnée une loi de probabilité sur $(\mathfrak{Z}; \Lambda)$, définissant un e. a. $Z = \{ R_1, \dots, R_h, \dots \}$ à valeurs dans \mathfrak{Z} , c'est-à-dire un système ordonné de r. p. a. R_h ($h = 1, 2, \dots$), tel que pour chaque h , R_h est une r. p. a. sur $(M_h; \mathcal{B}_h)$. Alors la formule :

$$R = \bigcup_h R_h = \Psi(Z) \tag{3,4}$$

définit l'union R des R_h , comme une r. p. a. sur $(\mathfrak{X} = \bigcup_h M_h; \mathcal{B})$.

Répartitions σ -finies. — Désignons par Ω_h^ϕ la partie de Ω_h constituée par les r. p. r_h sur M_h telles que :

$$n(r; M_h) < + \infty.$$

La r. p. r sur \mathfrak{X} est dite σ -finie, relativement au système $\mathcal{M} = \{ M_h \}$ des M_h , si pour chaque h , $r_h = \rho_h(r) \in \Omega_h^\phi$. L'ensemble des r. p. r sur \mathfrak{X} qui sont σ -finies, forment un sous-ensemble $\Omega(\mathcal{M})$ de Ω ; il est clair que

$$\Omega(\mathcal{M}) \in {}_c\mathcal{B}.$$

Soit ${}_c\mathcal{B}(\mathcal{M})$ la restriction de ${}_c\mathcal{B}$ à $\Omega(\mathcal{M})$.

Quant aux éléments :

$$z = \{ r_1, \dots, r_h, \dots \}$$

de \mathfrak{Z} , tels que pour chaque h , $r_h \in \Omega_h^\phi$, ils forment une partie $\mathfrak{Z}(\mathcal{M})$ de \mathfrak{Z} ; $\mathfrak{Z}(\mathcal{M})$ n'est autre que :

$$\mathfrak{Z}(\mathcal{M}) = \Omega_1^\phi \times \dots \times \Omega_h^\phi \times \dots$$

On a : $\mathfrak{Z}(\mathcal{M}) \in \Lambda$; soit $\Lambda(\mathcal{M})$ la restriction de la σ -algèbre Λ à $\mathfrak{Z}(\mathcal{M})$; il est clair que :

$$\Omega(\mathcal{M}) = \Psi[Z(\mathcal{M})], {}_c\mathcal{B}(\mathcal{M}) = \Psi[\Lambda(\mathcal{M})].$$

Pour chaque h , appelons :

Ω_h^s l'ensemble des r. p. r_h sur M_h , telles que : $n(r_h; M_h) = s$, s entier ≥ 0 et fini;

Q_h^s la famille des parties de Ω_h^s , qui sont des sous-ensembles cylindriques de Ω_h ; rappelons que Q_h^s est une algèbre de parties de Ω_h^s ;

Q_h^ϕ la famille des parties ω_h de Ω_h^ϕ , telles que : $\omega_h \cap \Omega_h^s \in Q_h^s$ pour tout $s \geq 0$ et fini;

${}_c\mathcal{A}_h$ la famille des parties ω_h de Ω_h qui sont des cylindriques.

Dans ce qui suit, nous désignerons par :

- n un entier > 0 et fini quelconque;
- $\{h_1, \dots, h_n\}$ un système de n valeurs distinctes quelconques de h ;
- $\{s_1, \dots, s_n\}$ un système de n entiers $s_j, \geq 0$ et finis quelconques.

Désignons par $e(h_1, \dots, h_n)$ une partie de \mathfrak{Z} du type :

$$e(h_1, \dots, h_n) = \prod_h \omega_h,$$

avec :

$$\varphi_h = \left\{ \begin{array}{l} \omega_{h_j} \in \mathcal{Q}_{h_j}^\phi, \quad \text{si } h = h_j (j = 1, 2, \dots, n); \\ \Omega_h^\phi \text{ dans les autres cas;} \end{array} \right\} \quad (3,6)$$

soit $\mathcal{F}(h_1, \dots, h_n)$ la famille, pour n et $\{h_1, \dots, h_n\}$ donnés, de ces $e(h_1, \dots, h_n)$; en fait, $\mathcal{F}(h_1, \dots, h_n)$ est une famille de parties de $\mathfrak{Z}(\mathcal{M})$, et plus précisément une semi-algèbre de parties de $\mathfrak{Z}(\mathcal{M})$; soit $\mathcal{R}(h_1, \dots, h_n)$ la σ -algèbre de parties de $\mathfrak{Z}(\mathcal{M})$ qu'elle engendre.

Soit enfin \mathcal{R} la plus petite σ -algèbre de parties de $\mathfrak{Z}(\mathcal{M})$ qui contient toutes les $\mathcal{R}(h_1, \dots, h_n)$, pour tous les n et tous les $\{h_1, \dots, h_n\}$.

Soit e une partie de $\mathfrak{Z}(\mathcal{M})$ appartenant par hypothèse à $\Lambda(\mathcal{M})$; cela veut dire que e est de la forme :

$$e = e' \cap \mathfrak{Z}(\mathcal{M}), \quad \text{où : } e' \in \Lambda, \quad e' \subset \mathfrak{Z}; \quad (3,7)$$

prenons d'abord le cas où e' est de la forme :

$$e' = e'(h_1, \dots, h_n) = \prod_h \omega'_h, \quad (3,8)$$

avec :

$$\omega'_h = \left\{ \begin{array}{l} \omega'_{h_j} \in \mathcal{A}_{h_j} \quad \text{si } h = h_j (j = 1, \dots, n), \\ \Omega_h \text{ dans les autres cas;} \end{array} \right\} \quad (3,9)$$

alors e est de la forme :

$$e = \prod_h (\omega'_h \cap \Omega_h^\phi);$$

or :

$$\omega_h = \omega'_h \cap \Omega_h^\phi = \left\{ \begin{array}{l} \omega'_{h_j} \cap \Omega_{h_j}^\phi \quad \text{si } h = h_j (j = 1, \dots, n); \\ \Omega_h^\phi \text{ dans tous les autres cas.} \end{array} \right.$$

Donc : $e \in \mathcal{F}(h_1, \dots, h_n) \subset \mathcal{R}(h_1, \dots, h_n) \subset \mathcal{R}$; or Λ est la plus petite σ -algèbre contenant tous les e' de la forme (3,8) (3,9); par conséquent :

$$\Lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{R};$$

il est d'ailleurs clair que tout $e \in \mathcal{F}(h_1, \dots, h_n)$ appartient à $\Lambda(\mathcal{M})$; d'où :

THÉORÈME (3,2). — La σ -algèbre $\Lambda(\mathcal{M})$ est identique à la σ -algèbre \mathcal{R} engendrée par les σ -algèbres $\mathcal{R}(h_1, \dots, h_n)$ dont chacune est engendrée par la semi-algèbre $\mathcal{F}(h_1, \dots, h_n)$ des ensembles $e(h_1, \dots, h_n)$ du type (3,7).

Maintenant, désignons par :

$$e \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{pmatrix}$$

une partie de \mathfrak{Z} du type :

$$e \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{pmatrix} = \prod_h \omega_h,$$

avec :

$$\omega_h = \left\{ \begin{array}{ll} \omega_{h_j} \in \mathcal{Q}_{h_j}^{s_j} & \text{si } h = h_j \ (j = 1, \dots, n), \\ \Omega_h^\phi & \text{dans les autres cas ;} \end{array} \right\} \quad (3,10)$$

et par $\mathcal{F} \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{pmatrix}$ la famille, pour $n, \{h_1, \dots, h_n\}$ et $\{s_1, \dots, s_n\}$ donnés, de ces $e \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{pmatrix}$. Soit encore : $\mathfrak{Z} \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{pmatrix}$ l'espace défini par :

$$\mathfrak{Z} \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{pmatrix} = \prod_h \mathfrak{y}_h,$$

où :

$$\mathfrak{y}_h = \left\{ \begin{array}{ll} \Omega_{h_j}^{s_j} & \text{si } h = h_j \ (j = 1, \dots, n); \\ \Omega_h^\phi & \text{dans les autres cas.} \end{array} \right\} \quad (3,11)$$

$\mathcal{F} \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{pmatrix}$ est une semi-algèbre de parties de $\mathfrak{Z} \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{pmatrix}$. Notons d'autre part que, pour n et h_1, \dots, h_n donnés, les diverses $\mathcal{F} \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{pmatrix}$ correspondant aux divers $\{s_1, \dots, s_n\}$ sont disjointes, et que $\mathcal{F}(h_1, \dots, h_n)$ est leur union (*dénombrable*).

Répartitions ponctuelles aléatoires σ -finies. — Conservant le schéma précédent, nous dirons que la r. p. a. :

$$\mathbf{R} = \bigcup_h \mathbf{R}_h,$$

union des r. p. a. $R_h \in \Omega_h$, est σ -finie (sous-entendu : relativement au système $\mathcal{M} = \{M_h\}$ des M_h), si presque sûrement $R \in \Omega(\mathcal{M})$; donc si presque sûrement, l'e. a. :

$$Z = \{R_1, \dots, R_h, \dots\}$$

à valeurs dans \mathfrak{Z} , est dans $\mathfrak{Z}(\mathcal{M})$. Pour que la r. p. a. R soit définie, il suffit que soit définie sa loi de probabilité sur ${}_c\mathfrak{B}(\mathcal{M})$; pour cela, il suffit que soit définie la loi de probabilité de l'e. a. (équivalent) Z , sur $\Lambda(\mathcal{M})$. Et pour cela, d'après le Théorème (3,2), il suffit que cette dernière loi de probabilité soit définie, sur chaque $\mathcal{F}(h_1, \dots, h_n)$ (pour tout n et tout système $\{h_1, \dots, h_n\}$). Et pour cela il est finalement suffisant que cette loi soit définie sur chacune des familles $\mathcal{F}\left(\begin{smallmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{smallmatrix}\right)$, semi-algèbres de parties de $\mathfrak{Z}\left(\begin{smallmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{smallmatrix}\right)$.

Soit $m(dx)$ la répartition moyenne associée à une r. p. a. R sur l'espace mesurable $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$; il est clair que :

THÉORÈME (3,3). — Si $\mathcal{M} = \{M_h\}$ est un système de parties de \mathfrak{X} , telles que :

$$M_h \in \mathfrak{B}, \quad M_h \cap M_k = \Phi, \quad \bigcup_h M_h = \mathfrak{X} \quad (h, k = 1, 2, \dots; h \neq k);$$

et que :

$$m(M_h) < +\infty \text{ pour tout } h;$$

alors la répartition ponctuelle aléatoire R est σ -finie, relativement au système \mathcal{M} .

4. RÉPARTITIONS INDUITES

Soit $\Omega(\mathfrak{X})$ l'ensemble des r. p. sur $(\mathfrak{X}; \mathfrak{B})$ à propos desquelles nous utiliserons les notations précédemment introduites. Soit \mathfrak{Y} un espace quelconque, d'éléments y , muni d'une σ -algèbre \mathfrak{G} , telle que $\mathfrak{Y} \in \mathfrak{G}$, et contenant les ensembles réduits à un seul point. A chaque $x \in \mathfrak{X}$ et à chaque $C \in \mathfrak{G}$, associons $p(x; C)$ telle que :

- 1° pour tout $x \in \mathfrak{X}$ fixé, $p(x; C)$ est en C une loi de probabilité sur $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{G})$;
- 2° pour tout $C \in \mathfrak{G}$ fixé, $p(x; C)$ est en x mesurable — \mathfrak{B} .

Imaginons que pour chaque $x \in \mathfrak{X}$, on tire au sort un e. a. $Y(x)$ à valeurs dans \mathfrak{Y} , selon la loi $p(x; C)$; et que les tirages relatifs aux divers x de \mathfrak{X} sont mutuellement indépendants.

Soit d'autre part une r. p. a. R sur $(\mathfrak{X}; \mathfrak{B})$, indépendante des tirages au

sort précédents; désignons par $l(\omega)$ sa loi de probabilité sur ${}_c\mathcal{B}(\mathfrak{X}; \mathfrak{B})$, par $\{X_j\}$ les points (aléatoires) de \mathfrak{X} qui constituent R ; $S = \{Y(X_j)\}$ constitue une r. p. a. sur $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{G})$, dont nous dirons qu'elle est *induite* par la r. p. a. *inductrice* R . Nous nous proposons ici d'établir cette notion sur une définition solide.

Soient, pour k entier ≥ 0 et fini :

\mathfrak{X}^k la puissance cartésienne k ème de \mathfrak{X} ;

\mathfrak{B}^k la σ -algèbre de parties de \mathfrak{X}^k , engendrée par \mathfrak{B} ;

$\Omega^k = \Omega^k(\mathfrak{X})$ l'ensemble des r. p. sur \mathfrak{X} , comportant k points;

\mathcal{Q}^k l'algèbre des parties de Ω^k qui sont des sous-ensembles cylindriques de $\Omega(\mathfrak{X}; \mathfrak{B})$;

\mathfrak{R}^k la σ -algèbre de parties de Ω^k engendrée par \mathcal{Q}^k ;

\mathfrak{Y}^k la puissance cartésienne k ème de \mathfrak{Y} ;

\mathfrak{G}^k la σ -algèbre de parties de \mathfrak{Y}^k , engendrée par \mathfrak{G} ;

$\Omega^k(\mathfrak{Y})$ l'ensemble des r. p. sur \mathfrak{Y} , comportant k points;

$\mathcal{Q}^k(\mathfrak{Y}, \mathfrak{G})$ l'algèbre des parties de $\Omega^k(\mathfrak{Y})$ qui sont des sous-ensembles cylindriques de $\Omega(\mathfrak{Y}; \mathfrak{G})$;

$\mathfrak{R}^k(\mathfrak{Y}; \mathfrak{G})$ la σ -algèbre de parties de $\Omega^k(\mathfrak{Y})$ engendrée par $\mathcal{Q}^k(\mathfrak{Y}; \mathfrak{G})$.

Enfin, désignons par $\Omega^\phi = \Omega^\phi(\mathfrak{X}; \mathfrak{B}) = \bigcup_k \Omega^k$, l'ensemble des r. p. sur \mathfrak{X} qui sont finies, et par $\mathfrak{R}^\phi = \mathfrak{R}^\phi(\mathfrak{X}; \mathfrak{B})$ la restriction à Ω^ϕ de ${}_c\mathcal{B} = {}_c\mathcal{B}(\mathfrak{X}; \mathfrak{B})$.

Considérons d'abord un cas particulier, celui où :

$$l(\Omega^\phi) = 1; \tag{4,1}$$

c'est-à-dire où R est presque sûrement finie.

Soit $r = \{x_1, \dots, x_k\} \in \Omega^k$, une r. p. r sur \mathfrak{X} , comportant k points; si $y = \{y_1, \dots, y_k\}$ est un élément de \mathfrak{Y}^k , soit $s = \mu_k(y)$ la r. p. sur \mathfrak{Y} constituée par les y_j de y ; $s \in \Omega^k(\mathfrak{Y})$; et l'application μ_k induit, à partir de \mathfrak{G}^k , la σ -algèbre $\mathfrak{R}^k(\mathfrak{Y}; \mathfrak{G})$ [cf. Théorème (1,1)].

Munissons $(\mathfrak{Y}^k, \mathfrak{G}^k)$ de la mesure produit des $p(x_j; C)$; à partir de cette mesure, μ_k induit sur $\mathfrak{R}^k(\mathfrak{Y}; \mathfrak{G})$ une mesure de probabilité :

$$p_k(x_1, \dots, x_k; \pi) = p_k(r; \pi), \quad \pi \in \mathfrak{R}^k(\mathfrak{Y}; \mathfrak{G}); \tag{4,2}$$

en effet, pour un π donné, $p_k(x_1, \dots, x_k; \pi)$ est fonction symétrique des x_j , ce qui justifie de l'écrire $p_k(r; \pi)$.

Supposons pour commencer que π est l'ensemble défini par :

$$n(s; C) = \alpha, \quad n(s; \mathfrak{Y}) = k, \tag{4,3}$$

où α est un entier ≥ 0 et $\leq k$, et où $C \in \mathcal{G}$; on a alors évidemment :

$$p_k(r; \pi) = \sum_{\{u\}} \prod_{l \in u} p(x_l; C) \prod_{m \notin u} (1 - p(x_m; C)), \quad (4,4)$$

où u est un sous-ensemble de α éléments de l'ensemble des k indices $1, 2, \dots, k$; et où $\{u\}$ est la famille de ces sous-ensembles; comme $p(x_j; C)$ est fonction mesurable — \mathcal{B} de x_j , $p_k(r; \pi)$ est fonction mesurable — \mathcal{B}_k de $x = \{x_1, \dots, x_k\}$, et par conséquent, d'après le Théorème (1,1), $p_k(r; \pi)$ est fonction mesurable — \mathcal{R}_k de $r \in \Omega^k$.

Plus généralement, supposons que $\pi \in \Omega^k(\mathcal{Y})$ est un cylindrique « élémentaire », du type :

$$\{n(s; C_1) = \alpha_1, \dots, n(s; C_l) = \alpha_l, n(s; \mathcal{Y}) = k\}, \quad (4,5)$$

où l est un entier fini, où les $C_j \in \mathcal{G}$ sont disjoints, et où les α_j sont des entiers ≥ 0 , tels que $\sum_j \alpha_j \leq k$; on constate de la même façon que $p_k(r; \pi)$

est, en r , mesurable — \mathcal{R}^k . Or, tout sous-ensemble π de $\Omega^k(\mathcal{Y})$ qui est cylindrique, est une union dénombrable de cylindriques élémentaires du type (4,5); donc pour tout $\pi \in \mathcal{Q}^k(\mathcal{Y}; \mathcal{G})$, $p_k(r; \pi)$ est en r mesurable — \mathcal{R}^k . Un théorème connu (cf. J. Neveu [1], III-2) permet alors d'affirmer que, pour tout $\pi \in \mathcal{R}^k(\mathcal{Y}; \mathcal{G})$, $p_k(r; \pi)$ est en r , mesurable — \mathcal{R}^k .

Posons maintenant :

$$P(r; \pi) = p_k[r; \pi \cap \Omega^k(\mathcal{Y}; \mathcal{G})] \quad \text{si} \quad n(r; \mathcal{X}) = k, \quad (4,6)$$

qui définit $P(r; \pi)$ pour tout $\pi \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}; \mathcal{G})$, et pour tout $r \in \Omega^\phi$; il est clair que, pour tout $\pi \in {}_c\mathcal{B}(\mathcal{Y}; \mathcal{G})$, $P(r; \pi)$ est en r , mesurable — ${}_c\mathcal{B}$, et plus précisément mesurable — \mathcal{R}^ϕ ; et que pour tout $r \in \Omega^\phi$, $P(r; \pi)$ est comme fonction π , une loi de probabilité sur ${}_c\mathcal{B}(\mathcal{Y}; \mathcal{G})$. Donc $P(r; \pi)$ est une *probabilité de transition* de Ω^ϕ à $\Omega(\mathcal{Y})$; par suite l'expression :

$$T(\omega; \pi) = \int_{\omega} P(r; \pi) l(dr), \quad (4,7)$$

où $\omega \in \mathcal{R}^\phi$, constitue une loi de probabilité sur $\Omega^\phi \times \Omega(\mathcal{Y})$, muni de la σ -algèbre « produit » de \mathcal{R}^ϕ et de ${}_c\mathcal{B}(\mathcal{Y}; \mathcal{G})$; d'ailleurs, compte tenu de (4,1), on peut étendre (4,7) au cas où $\omega \in {}_c\mathcal{B}$, et considérer $T(\omega; \pi)$ comme une loi de probabilité sur $\Omega \times \Omega(\mathcal{Y}; \mathcal{G})$, muni de la σ -algèbre « produit » de ${}_c\mathcal{B}$

et de ${}_c\mathcal{B}(\mathcal{Y}; \mathcal{G})$. $T(\omega; \pi)$ est donc une loi pour le couple $\{R, S\}$. La loi de probabilité $l_1(\pi)$ de S seule est donnée par :

$$l_1(\pi) = \int_{\Omega^\phi} P(r; \pi) l(dr) = \int_{\Omega} P(r; \pi) l(dr). \tag{4,8}$$

Si $m(A)$ ($A \in \mathcal{B}$) est la répartition moyenne associée à R , et $m_1(C)$ ($C \in \mathcal{G}$) celle associée à S , on peut obtenir m_1 de la façon suivante, justifiée par (4,7) et (4,8) :

$$m_1(C) = E(n(S; C));$$

$$E(n(S; C)/R = \{X_j\}) = \sum_j p(X_j; C) = \int_{\mathfrak{X}} p(x; C) n(R; dx);$$

d'où :

$$m_1(C) = \int_{\mathfrak{X}} p(x; C) E\{n(R; dx)\}$$

$$= \int_{\mathfrak{X}} p(x; C) m(dx), \tag{4,9}$$

$p(x; C)$ étant ≥ 0 , on peut considérer que l'intégrale (4,9), finie ou non, a toujours un sens; et que l'égalité (4,9) est toujours valable.

REMARQUE (4,1). — La r. p. a. inductrice R étant par hypothèse presque sûrement finie, il en est nécessairement de même de la r. p. a. induite S ; en appelant $\Omega^\phi(\mathcal{Y})$ l'ensemble des r. p. finies sur \mathcal{Y} , on peut si l'on veut considérer $T(\omega; \pi)$ comme restreinte à $\Omega^\phi \times \Omega^\phi(\mathcal{Y})$, et $l_1(\pi)$ comme restreinte à $\Omega^\phi(\mathcal{Y})$.

Nous allons maintenant substituer à l'hypothèse restrictive (4,1), l'hypothèse plus large que $l(\omega)$ est la loi de probabilité d'une r. p. a. R sur \mathfrak{X} , σ -finie. Soit donc $\mathcal{M} = \{M_h\}$ une famille finie ou dénombrable de parties disjointes M_h de \mathfrak{X} , telles que : $M_h \in \mathcal{B}$, $\bigcup_h M_h = \mathfrak{X}$; et supposons que R est σ -finie, relativement au système \mathcal{M} ; si $\Omega(\mathcal{M})$ désigne l'ensemble des r. p. r sur \mathfrak{X} qui sont σ -finies relativement à \mathcal{M} , nous avons donc par hypothèse :

$$l(\Omega(\mathcal{M})) = Pr(R \in \Omega(\mathcal{M})) = 1. \tag{4,10}$$

Nous reportant au paragraphe 3, pour une r. p. $r \in \Omega(\mathcal{M})$, nous appelons $r_h = \rho_h(r)$ sa restriction à M_h ; et ${}_c\mathcal{B}(\mathcal{M})$ la restriction de ${}_c\mathcal{B}$ à $\Omega(\mathcal{M})$.

Enfin, nous désignerons par :

Ω_h^ϕ l'ensemble des r. p. finies sur M_h ;

\mathcal{R}_h^ϕ la σ -algèbre des parties de Ω_h^ϕ qui sont cylindriques.

Appelons \mathfrak{T} l'espace produit cartésien d'une infinité dénombrable d'espaces $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_h, \dots$, dont chacun est identique à $\Omega(\mathfrak{Y})$, et muni de la σ -algèbre ${}_c\mathcal{B}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{G})$; \mathfrak{T} est ainsi muni de la σ -algèbre « produit » Δ définie de la façon habituelle; un élément $t = \{s_1, \dots, s_h, \dots\}$ de \mathfrak{T} est une suite dénombrable ordonnée d'éléments s_h , où s_h est un élément de Ω_h , c'est-à-dire un élément de $\Omega(\mathfrak{Y})$, c'est-à-dire une r. p. sur \mathfrak{Y} .

Pour une $r \in \Omega(\mathcal{M})$ donnée, munissons Ω_h de la loi de probabilité $q_h(\pi_h) = P(r_h; \pi_h)$ sur ${}_c\mathcal{B}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{G})$, selon la définition (4,6), π_h désignant un sous-ensemble appartenant à ${}_c\mathcal{B}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{G})$.

La mesure-produit $q = q(r; e)$ des q_h , est une mesure de probabilité pour \mathfrak{T} , sur la σ -algèbre Δ ; dans la notation $q(r; e)$, e désigne un sous-ensemble de \mathfrak{T} , appartenant à Δ .

Soit maintenant $s = \Psi(t)$ l'application de \mathfrak{T} dans $\Omega(\mathfrak{Y})$ qui, à $t = \{s_1, s_2, \dots, s_h, \dots\} \in \mathfrak{T}$, fait correspondre dans $\Omega(\mathfrak{Y})$ la r. p. somme $s = \sum_h s_h$. Les résultats du paragraphe 2 nous permettent d'affirmer que Ψ induit sur $(\Omega(\mathfrak{Y}), {}_c\mathcal{B}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{G}))$ une mesure de probabilité $Q(r; \pi)$ ($\pi \subset \Omega(\mathfrak{Y})$, $\pi \in {}_c\mathcal{B}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{G})$).

Si $e = P$ est un pavé P de l'espace-produit \mathfrak{T} , $q(r; e) = q(r; P)$ est, comme fonction de r , mesurable — ${}_c\mathcal{B}$, et plus précisément mesurable — ${}_c\mathcal{B}(\mathcal{M})$; cela résulte immédiatement de la définition de q , et du fait que $P(r_h; \pi_h)$ est, en r_h , mesurable — \mathcal{R}_h^ϕ . Or la famille des pavés de \mathfrak{T} est une semi-algèbre de parties de \mathfrak{T} , qui engendre Δ . En vertu d'un théorème connu (cf. J. Neveu [1], III-2), $q(r; e)$ est en r mesurable — ${}_c\mathcal{B}(\mathcal{M})$, donc mesurable — ${}_c\mathcal{B}$, pour tout $e \in \Delta$. Or :

$$Q(r; \pi) = q(r; \Psi^{-1}(\pi));$$

pour tout $\pi \in {}_c\mathcal{B}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{G})$, nous savons (cf. paragraphe 3) que $\Psi^{-1}(\pi) \in \Delta$.

Donc $Q(r; \pi)$ est une probabilité de transition de :

$$(\Omega(\mathcal{M}), {}_c\mathcal{B}(\mathcal{M})) \quad \text{à} \quad (\Omega(\mathfrak{Y}), {}_c\mathcal{B}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{G}));$$

alors :

$$T(\omega; \pi) = \int_{\omega} Q(r; \pi) l(dr), \quad (4, 11)$$

où $\omega \in {}_c\mathcal{B}(\mathcal{M})$, $\pi \in {}_c\mathcal{B}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{G})$, est une loi de probabilité pour le couple $\{R, S\}$ dans l'espace-produit $\Omega(\mathcal{M}) \times \Omega(\mathfrak{Y})$ muni de la σ -algèbre « produit » de ${}_c\mathcal{B}(\mathcal{M})$ par ${}_c\mathcal{B}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{G})$. La loi $l_1(\pi)$ de S , sur $(\Omega(\mathfrak{Y}), {}_c\mathcal{B}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{G}))$, est donnée par :

$$l_1(\pi) = \int_{\Omega(\mathcal{M})} Q(r; \pi) l(dr). \quad (4, 12)$$

Compte tenu de (4,10), on peut naturellement si l'on veut considérer $T(\omega; \pi)$ comme une loi sur l'espace-produit $\Omega \times \Omega(\mathcal{Y})$, muni de la σ -algèbre « produit » de ${}_c\mathcal{B}$ par ${}_c\mathcal{B}(\mathcal{Y}; \mathcal{G})$.

Il est clair que la formule (4,9) reste valable.

Condition pour que la répartition induite soit σ -finie. — Pour que S soit σ -finie, d'après le Théorème (3,3), il est suffisant que la mesure $m_1(C)$ définie par (4,3) soit σ -finie; naturellement, cela n'est pas nécessaire.

Posons :

$$U_j = \begin{cases} 1 & \text{si } Y(X_j) \in C, \\ 0 & \text{si } Y(X_j) \notin C; \end{cases}$$

on a :

$$n(S; C) = \sum_j U_j.$$

Conditionnellement quand $R = \{X_k\}$, $n(S; C)$ est une somme de v. a. U_j mutuellement indépendantes; si on pose :

$$\mu(R; C) = \Pr(n(S; C) < + \infty / R = \{X_k\}),$$

puisque :

$$\Pr(U_j = 1 / R = \{X_k\}) = p(X_j; C),$$

on a :

$$\mu(R; C) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_j p(X_j; C) < + \infty, \\ 0 & \text{si } \sum_j p(X_j; C) = + \infty; \end{cases}$$

donc :

$$\Pr(n(S; C) < + \infty) = \int_{\Omega(\mathcal{M})} \mu(r; C) l(dr).$$

Si, pour la r. p. $r = \{x_j\}$, nous posons : $\mathcal{U}(r; C) = \sum_j p(x_j; C)$; si $\omega_{(C)}$

est l'ensemble des r telles que : $\mathcal{U}(r; C) < + \infty$, on remarque que : $C \subset C'$ entraîne que : $\omega_{(C)} \supset \omega_{(C')}$. Et :

THÉORÈME (4,1). — Pour que S soit σ -finie, il est nécessaire et suffisant qu'il existe une suite (C_h) de parties C_h de \mathcal{Y} , telles que pour tout h :

$$C_h \subset \mathcal{G}, \quad C_h \subset C_{h+1}, \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} C_h = \mathcal{Y},$$

et que :

$$l(\omega_{(C_h)}) = 1.$$

5. RÉPARTITIONS DE POISSON FINIES

(cf. R. Fortet [3]) :

Soit donnée une mesure $m(dx)$ sur $(\mathfrak{X}; \mathfrak{B})$, telle que :

$$0 < m(\mathfrak{X}) < + \infty. \quad (5,1)$$

Nous reprenons d'une façon générale des notations posées aux paragraphes précédents.

Pour chaque entier s fini et ≥ 0 ,

α) posons :

$$\Pi^s = e^{-m(\mathfrak{X})} \cdot \frac{m(\mathfrak{X})^s}{s!}; \quad (5,2)$$

β) considérons la mesure $p(dx)$ définie sur $(\mathfrak{X}; \mathfrak{B})$ par :

$$p(dx) = \frac{m(dx)}{m(\mathfrak{X})}; \quad (5,3)$$

γ) soit p^s la mesure sur $(\mathfrak{X}^s; \mathfrak{B}^s)$, définie comme mesure-produit à partir de $p(dx)$;

δ) soit enfin q^s la mesure sur $(\Omega^s; \mathfrak{R}^s)$, induite par λ_s à partir de p^s .

Soit maintenant ω un sous-ensemble quelconque de ${}_c\mathfrak{B}$, appartenant à Ω , à part cela quelconque; et posons :

$$l(\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} \Pi^s q^s(\omega \cap \Omega^s); \quad (5,4)$$

il est clair que $l(\omega)$ est la loi de probabilité sur $(\Omega; {}_c\mathfrak{B})$ d'une r. p. a. R, dont nous dirons qu'elle est la r. p. a. de Poisson définie sur $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ par $m(dx)$; R a évidemment la propriété que :

presque sûrement, $l(\Omega^\infty) = 0$, c'est-à-dire :

presque sûrement, $R \in \Omega^\phi$.

Répartitions de Poisson σ -finies. — Soit encore $m(dx)$ une mesure sur $(\mathfrak{X}; \mathfrak{B})$; mais au lieu de (5,1), nous allons faire l'hypothèse moins restrictive suivante :

la mesure $m(dx)$ est σ -finie par rapport à la σ -algèbre \mathfrak{B} .

Il est facile de vérifier que cette hypothèse équivaut à supposer que :

il existe au moins une suite, finie ou dénombrable, $\{M_h\}$ de parties M_h de \mathfrak{X} , deux à deux disjointes, telles que : $M_h \in \mathcal{B}$ pour tout h , $\bigcup_h M_h = \mathfrak{X}$,

et que :

ou bien — cas dégénéré — $m(M_h) = 0$ pour tout h , ce qui équivaut à : la mesure m est identiquement nulle;

ou bien — cas général — on a pour tout h :

$$0 < m(M_h) < + \infty. \tag{5,5}$$

Soit, pour chaque h , \mathcal{B}_h la σ -algèbre des parties e_h de M_h , telles que : $e_h \in \mathcal{B}$; \mathcal{B} est la σ -algèbre des parties e de \mathfrak{X} , telles que : pour tout h , $e \cap M_h \in \mathcal{B}_h$.

Pour chaque h , posons comme au paragraphe 3 : $\Omega_h = \Omega(M_h)$, ${}_c\mathcal{B}_h = {}_c\mathcal{B}(M_h; \mathcal{B}_h)$; définissons une r. p. a. R_h de Poisson comme ci-dessus, en faisant jouer :

à M_h , le rôle de \mathfrak{X} ; à \mathcal{B}_h , le rôle de \mathcal{B} ;

à $m(M_h)$, le rôle de $m(\mathfrak{X})$;

posons donc :

$$\Pi_h^s = e^{-m(M_h)} \frac{m(M_h)^s}{s!}; \tag{5,6}$$

$$p_h(dx) = \frac{m(dx)}{m(M_h)}, \tag{5,7}$$

où $p_h(dx)$ est une mesure sur (M_h, \mathcal{B}_h) . Soit enfin q_h^s la mesure sur $(\Omega^s(M_h), \mathcal{R}^s(M_h; \mathcal{B}_h))$ déduite de Π_h^s et $p_h(dx)$, comme ci-dessus q^s était déduite de Π^s et $p(dx)$. La formule :

$$l_h(\omega) = \sum_{s=0} \Pi_h^s q_h^s(\omega \cap \Omega^s(M_h)), \tag{5,8}$$

définit une mesure de probabilité sur $(\Omega_h, {}_c\mathcal{B}_h)$, pour les parties ω de Ω_h qui appartiennent à ${}_c\mathcal{B}_h$; et plus particulièrement : $l(\Omega^\infty(M_h; \mathcal{B}_h)) = 0$.

R_h est la r. p. a. de Poisson de loi (5,8); elle est presque sûrement finie : presque sûrement, $R_h \in \Omega^\phi(M_h; \mathcal{B}_h)$.

Soit maintenant \mathfrak{Z} l'espace-produit :

$$\mathfrak{Z} = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_h \times \dots$$

muni de la σ -algèbre Λ définie comme au paragraphe 3; définissons sur (\mathfrak{Z}, Λ) la mesure de probabilité λ produit des mesures l_h ; d'après le paragraphe 3 et en particulier d'après le Théorème (3,1), l'union R des R_h :

$$R = \bigcup_h R_h, \tag{5,9}$$

constitue une r. p. a. sur \mathfrak{X} , bien définie; il lui est associé une loi de probabilité $l(\omega)$ bien déterminée sur (Ω, \mathcal{B}) .

Si nous appelons $\mathcal{M} = \{M_h\}$ le système des M_h , il est clair que la r. p. a. R est σ -finie, relativement à \mathcal{M} .

Étudions la loi $l(\omega)$:

1^{er} cas : Supposons ω défini par :

$$\{n(r; A_1) = j_1; n(r; A_2) = j_2; \dots; n(r; A_k) = j_k\}, \quad (5, 10)$$

ou : a) les j_α sont des entiers ≥ 0 et finis;

b) les A_α appartiennent à \mathcal{B} , et sont *disjoints* ;

c) pour un certain h , on a : $A_\alpha \subset M_h$ pour tout α ($\alpha = 1, 2, \dots, k$).

Appelons r_h , comme au paragraphe 3, la restriction $\rho_h(r)$ de r à M_h ; alors (5,10) équivaut à :

$$\{n(r_h; A_1) = j_1; n(r_h; A_2) = j_2; \dots; n(r_h; A_k) = j_k\}; \quad (5, 11)$$

Soit ω_h la partie de Ω_h définie par (5,11); on a donc :

$$l(\omega) = l_h(\omega_h).$$

Notons que :

$$\Pi_h^s = e^{-m(M_h)} \frac{m(M_h)^s}{s!}. \quad (5, 12)$$

Posons :

$$\begin{aligned} \omega_h^s &= \omega_h \cap \Omega^s(M_h); \\ \sigma &= j_1 + j_2 + \dots + j_k. \end{aligned}$$

Si $s < \sigma$, ω_h^s est vide; si $s \geq \sigma$, ω_h^s se définit par :

$$\left\{ n(r_h; A_1) = j_1; \dots; n(r_h; A_k) = j_k; n\left(r_h; M_h - \bigcup_{\alpha=1}^k A_\alpha\right) = s - \sigma \right\}. \quad (5, 13)$$

On a donc :

$$q_h^s(\omega_h^s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < \sigma; \\ \frac{s!}{j_1! \dots j_k! (s - \sigma)!} \times \prod_{\alpha=1}^k \left(\frac{m(A_\alpha)}{m(M_h)} \right)^{j_\alpha} \\ \quad \times \left(1 - \frac{m(A_1) + \dots + m(A_k)}{m(M_h)} \right)^{s - \sigma} & \text{si } s \geq \sigma; \end{cases}$$

d'où :

$$l_h(\omega_h) = \prod_{\alpha=1}^k e^{-m(A_\alpha)} \cdot \frac{m(A_\alpha)^{j_\alpha}}{j_\alpha!}. \quad (5, 14)$$

2^e cas : Supposons encore ω défini par (5,10), avec les conditions a) et b), mais sans la restriction c). Posons :

$$A_x^h = A_x \cap M_h ;$$

et soit X la v. a. k -dimensionnelle $\{ n(R; A_1), n(R; A_2), \dots, n(R; A_k) \}$. Posons : $R_h = \rho_h(R)$, et soit X_h la v. a. k -dimensionnelle :

$$\{ n(R_h; A_1^h), n(R_h; A_2^h), \dots, n(R_h; A_k^h) \} ;$$

X et les X_h sont des v. a. à valeurs entières non-négatives, et on peut dire que :

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_h + \dots \\ &= \lim_{s \uparrow + \infty} (X_1 + X_2 + \dots + X_s) ; \end{aligned}$$

d'après le mode de construction de la loi de probabilité λ sur (\mathfrak{J}, Λ) , les X_h sont *mutuellement indépendantes*. D'après (5,14), chacune d'elle a sa loi donnée par :

$$\Pr (n(R_h; A_1^h) = j_1, \dots, n(R_h; A_k^h) = j_k) = \prod_{\alpha=1}^k e^{-m(A_\alpha^h)} \frac{m(A_\alpha^h)^{j_\alpha}}{j_\alpha !} ;$$

on en déduit évidemment :

$$l(\omega) = \prod_{\alpha=1}^k e^{-m(A_\alpha)} \frac{m(A_\alpha)^{j_\alpha}}{j_\alpha !} . \tag{5,15}$$

(5,15) détermine $l(\omega)$ pour les ω qui sont des ensembles cylindriques « élémentaires » du type (5,10); nous savons que tout ensemble cylindrique est une union dénombrable d'ensembles cylindriques de ce type élémentaire; donc (5,15) détermine complètement $l(\omega)$ sur ${}_c\mathfrak{B}$. Or, les M_h n'interviennent pas explicitement dans (5,15); la loi $l(\omega)$ est donc indépendante de la partition $\{ M_h \}$ de \mathfrak{X} que nous avons utilisée pour la construire, pourvu que ce soit une partition dénombrable, par rapport à laquelle la mesure $m(dx)$ possède la propriété (5,5).

Nous dirons donc que :

THÉORÈME (5,1). — La donnée sur $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ d'une mesure σ -finie quelconque $m(dx)$, détermine sur $(\Omega(\mathfrak{X}), {}_c\mathfrak{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}))$ une loi de probabilité unique $P(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, m)$, qui est l'extension unique à ${}_c\mathfrak{B}(\mathfrak{X}; \mathfrak{B})$ de la fonction d'ensemble $l(\omega)$ définie par (5,5) pour les ensembles $\omega \subset \Omega(\mathfrak{X})$ qui sont cylindriques du type (5,10); nous dirons que $P(\mathfrak{X}; \mathfrak{B}, m)$ est la mesure de

Poisson définie par m ; une répartition ponctuelle aléatoire R sur \mathfrak{X} , de loi $P(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, m)$, sera dite : répartition de Poisson sur \mathfrak{X} , de paramètre m . Une telle répartition de Poisson est σ -finie, relativement à tout système $\mathcal{M} = \{M_h\}$ de parties disjointes, de \mathfrak{X} , telles que $\bigcup_h M_h = \mathfrak{X}$, et que pour tout $h : M_h \in \mathfrak{B}, 0 < m(M_h) < +\infty$.

Propriétés d'une répartition de Poisson. — Soit R une r. p. a. de Poisson sur \mathfrak{X} , de loi $P(\mathfrak{X}; \mathfrak{B}, m)$. Nous voyons que :

Propriété 1 : Pour tout $A \in \mathfrak{B}$, tel que $m(A) < +\infty$, la v. a. $n(R; A)$ obéit à la loi de Poisson :

$$\Pr(n(R; A) = j) = e^{-m(A)} \frac{m(A)^j}{j!}; \quad (5,16)$$

on a en particulier :

$$E(n(R; A)) = m(A); \quad (5,17)$$

la mesure $m(dx)$ n'est autre que la répartition moyenne de la r. p. a. de Poisson.

Propriété 2 : Quels que soient les ensembles A_1, \dots, A_k , appartenant à \mathfrak{B} , disjoints, en nombre fini k , les k v. a. $n(R; A_j)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) sont mutuellement indépendantes.

On en déduit que : quelle que soit la famille \mathcal{F} d'ensembles A , disjoints et appartenant à \mathfrak{B} , les v. a. $\{n(R; A)\}$ sont mutuellement indépendantes (cf. J. Neveu [1], IV-4).

Propriété 3 : Si $A \in \mathfrak{B}$ et si : $0 < m(A) < +\infty$, conditionnellement quand $n(R; A) = k$ ($k > 0$), les k points X_1, \dots, X_k de R qui appartiennent à A , forment sur A une r. p. a. dont la loi (conditionnelle quand $n(R; A) = k$) est la suivante : X_1, \dots, X_k sont placés sur A au hasard, indépendamment les uns des autres, chacun selon la loi :

$$\Pr(X_j \in B \subset A; B \in \mathfrak{B}) = \frac{m(B)}{m(A)}. \quad (5,18)$$

Observons que la r. p. a. de Poisson R de loi $P(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, m)$ est la seule r. p. a. sur $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ à posséder les propriétés 1, 2, 3 ci-dessus.

Propriété 4 : Soit x_0 un point particulier quelconque de \mathfrak{X} ; posons :

$$X = n(R; \{x_0\}),$$

où $\{x_0\}$ désigne le sous-ensemble de \mathfrak{X} , constitué du seul élément x_0 ; rappelons que $\{x_0\} \in \mathfrak{B}$. Supposons qu'à tout $t > 0$ (t nombre réel), corresponde un ensemble $A_t \in \mathfrak{B}$, de telle façon que :

- $\alpha)$ $A_{t'} \subset A_{t''}$ si $0 < t' < t''$;
- $\beta)$ $\lim_{t \rightarrow +0} A_t = \{x_0\}$;
- $\gamma)$ $m(A_t) < +\infty$ pour tout t .

Et posons :

$$Y_t = n(\mathbf{R} ; A_t - \{x_0\}).$$

Notons que la v. a. X est indépendante de l'ensemble des $\{Y_t\}$.

D'autre part, presque sûrement :

- 1° Y_t est un entier fini et ≥ 0 ;
- 2° $Y_{t'} \leq Y_{t''}$ si $0 < t' < t''$;
- 3° $\lim_{t \rightarrow +0} Y_t = 0$;
- 4° il existe $T > 0$, tel que : $Y_t = 0$ pour $0 < t < T$, et $Y_t \geq 1$ pour $t > T$.

On a :

$$\Pr(T \geq \alpha) = \Pr(Y_t = 0 \text{ pour tout } t < \alpha);$$

soit : $0 < \beta < \alpha$; on a :

$$\Pr(Y_t = 0 \text{ pour tout } t \leq \beta) = \Pr(Y_\beta = 0) = e^{-m(A_\beta)};$$

d'où :

$$\Pr(T \geq \alpha) = \lim_{\beta \rightarrow \alpha - 0} e^{-m(A_\beta)}.$$

Soit :

THÉORÈME (5,2). — La variable aléatoire T étant définie comme ci-dessus, on a pour tout $\alpha > 0$:

$$\Pr(T \geq \alpha) = \lim_{\beta \rightarrow \alpha - 0} e^{-m(A_\beta)}. \quad (5,19)$$

T étant indépendante de $X = n(\mathbf{R}; \{x_0\})$, la loi (5,19) est aussi bien la loi *a priori* de T , que sa loi conditionnelle quand X à une valeur donnée; ainsi elle est la loi de T , conditionnelle quand x_0 est un point de \mathbf{R} , et aussi bien sa loi conditionnelle quand x_0 n'est pas un point de \mathbf{R} .

**6. FONCTIONNELLE CARACTÉRISTIQUE
D'UNE RÉPARTITION PONCTUELLE ALÉATOIRE
 σ -FINIE**

D'une façon générale, nous reprenons, avec la même signification, les notations des paragraphes précédents, en particulier du paragraphe 3. Soit donc l'espace \mathfrak{X} de points x , muni de sa σ -algèbre \mathfrak{B} . Nous désignerons par :

$$\mathfrak{V}_A = \mathfrak{V}(x; A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A, \end{cases} \quad (6,1)$$

l'indicateur de l'ensemble $A \in \mathfrak{B}$.

Soit $\mathcal{M} = \{M_h\}$ une partition, finie ou dénombrable, de \mathfrak{X} ; c'est-à-dire que les M_h sont des parties disjointes de \mathfrak{X} , telles que $\bigcup_h M_h = \mathfrak{X}$, et que pour chaque $h : M_h \in \mathfrak{B}$. Soit R une r. p. a. sur \mathfrak{X} , de loi de probabilité $l(dr)$. Par hypothèse, R est σ -finie, relativement au système \mathcal{M} . Nous utiliserons les notations Ω , $\Omega(\mathcal{M})$, ${}_c\mathfrak{B}$, ${}_c\mathfrak{B}(\mathcal{M})$ déjà introduites au paragraphe 3.

Soit $f = f(x)$ une fonction numérique, réelle ou complexe, de $x \in \mathfrak{X}$, mesurable $-\mathfrak{B}$. Posons :

$$I(f; r) = \int_{\mathfrak{X}} f(x)n(r; dx) = \sum_j f(x_j), \quad (6,2)$$

où $r = \{x_j\}$ est une r. p. sur \mathfrak{X} , constituée des points x_j .

Introduisons alors la notation :

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= E \left\{ \exp. \left(i \int_{\mathfrak{X}} f(x)n(R; dx) \right) \right\} = E(e^{iI(f;R)}) \\ &= \int_{\Omega} e^{i \int_{\mathfrak{X}} f(x)n(r; dx)} l(dr) = \int_{\Omega(\mathcal{M})} e^{i \int_{\mathfrak{X}} f(x)n(r; dx)} l(dr) \end{aligned} \quad (6,3)$$

$\Phi(f)$ ainsi définie, comme fonctionnelle de f , sera appelée la *fonctionnelle caractéristique* de la r. p. a. (σ -finie) R .

Mais bien sûr, la définition (6,3) de $\Phi(f)$ n'a de sens que pour les f d'une certaine classe. Pour le moment, nous nous bornerons à ce sujet à la remarque suivante :

Une partie A de \mathfrak{X} sera dite \mathcal{M} -bornée, si $A \in \mathfrak{B}$, et si A est contenue dans une union *finie* de M_h . Soit alors \mathfrak{E} l'ensemble des f , qui sont combinaisons

linéaires finies et à coefficients réels, de fonctions $\mathcal{U}_{A_j} (j = 1, 2, \dots, k)$, où les A_j sont \mathcal{M} -bornés; il s'agit donc des fonctions $f = f(x)$ de la forme :

$$f = \sum_{j=1}^k u_j \mathcal{U}_{A_j} \quad (k \text{ entier } \geq 0 \text{ et fini}); \tag{6,4}$$

\mathcal{H} est un espace vectoriel réel, dont l'élément nul est la fonction $\theta (= \theta(x))$ identiquement nulle sur \mathfrak{X} .

Comme précédemment, pour une r. p. r. sur \mathfrak{X} , nous désignerons par $r_h = \rho_h(r)$ sa restriction à M_h ; nous poserons : $R_h = \rho_h(R)$; nous considérons : l'espace \mathfrak{Z} d'éléments :

$$z = \{ r_1, r_2, \dots, r_h, \dots \};$$

l'application biunivoque $r = \Psi(z)$ de \mathfrak{Z} sur Ω ; l'e. a. $Z = \{ R_1, \dots, R_h, \dots \}$ à valeurs dans \mathfrak{Z} et lié à R par : $R = \Psi(Z)$ (cf. paragraphe 3).

Déterminer la loi $l(dr)$ de R équivaut à déterminer celle de Z sur $\Lambda(\mathcal{M})$; celle-ci est déterminée, si elle est déterminée sur chaque famille $\mathcal{F}(h_1, \dots, h_n)$; or cette détermination a évidemment lieu si on donne $\Phi(f)$ sur $f \in \mathcal{H}$:

THÉORÈME (6,1). — Pour une répartition ponctuelle aléatoire R , σ -finie relativement au système \mathcal{M} , la donnée de sa fonctionnelle caractéristique $\Phi(f)$ sur $f \in \mathcal{H}$, détermine la loi de probabilité de R ; et par conséquent détermine $\Phi(f)$ pour toute f , même extérieure à \mathcal{H} , pour laquelle $\Phi(f)$ a un sens.

Ceci justifie l'étude qui va suivre.

Soit donnée une fonctionnelle numérique complexe $\Phi(f)$ de $f \in \mathcal{H}$; pour qu'elle soit la fonctionnelle caractéristique sur \mathcal{H} d'une r. p. a. R σ -finie, il est évidemment nécessaire qu'elle satisfasse aux conditions suivantes :

Condition 1^o. — $\Phi(\theta) = 1$;

Condition 2^o. — Quel que soit l'entier fini n , quels que soient les n ensembles

\mathcal{M} -bornés A_1, A_2, \dots, A_n , la fonction $\Phi\left(\sum_{\alpha=1}^n u_\alpha \mathcal{U}_{A_\alpha}\right)$ de $u = \{u_1, \dots, u_n\}$

est la fonction caractéristique n -dimensionnelle d'une v. a. n dimensionnelle à valeurs entières, finies, non-négatives. Ceci implique en particulier que

$\Phi\left(\sum_{\alpha=1}^n u_\alpha \mathcal{U}_{A_\alpha}\right)$ est une fonction continue de u ; et est pour chaque α une

fonction périodique de u_α , de période 2π .

Or, soit donnée une fonctionnelle $\Phi(f)$ de $f \in \mathcal{H}$, satisfaisant sur \mathcal{H} aux conditions 1^o et 2^o précédentes. Soit ω un sous-ensemble de Ω , admettant une définition du type :

$$r \in \omega \iff \{n(r; A_1), n(r; A_2), \dots, n(r; A_k)\} \in J \subset \delta^k, \quad (6,5)$$

où k est un entier fini, et où les A_α sont des parties \mathcal{M} -bornées de \mathcal{X} .

Posons :

1^o $u = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, où les u_α sont des variables réelles ;

2^o $j = \{j_1, \dots, j_k\}$, où les j_α sont des entiers finis, ≥ 0 .

Soit $X = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ une v. a. k -dimensionnelle, de caractéristique $\Phi\left(\sum_{\alpha=1}^k u_\alpha \mathcal{V}_{A_\alpha}\right)$, et posons :

$$l(\omega) = \Pr(X \in J), \quad (6,6)$$

où $\Pr(X \in J)$ est dérivée de la caractéristique $\Phi\left(\sum_{\alpha=1}^k u_\alpha \mathcal{V}_{A_\alpha}\right)$; on peut noter que :

$$l(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{j \in J} \int_{-\pi}^{+\pi} \dots \int_{-\pi}^{+\pi} \Phi\left(\sum_{\alpha=1}^k u_\alpha \mathcal{V}_{A_\alpha}\right) e^{-i \sum_{\beta=1}^k u_\beta j_\beta} du_1 \dots du_k \quad (6,7)$$

La représentation (6,5) de ω n'est pas nécessairement unique; montrons que néanmoins (6,6) définit $l(\omega)$ de façon unique.

On peut supposer les A_α non-vides, ce qui ne restreint pas la généralité; soit $\{C_1, C_2, \dots, C_l\}$ une famille finie d'ensembles non-vides, \mathcal{M} -bornés et disjoints C_γ , tels que chaque A_α est une union de certains des C_γ : autrement dit, les C_γ constituent une représentation disjonctive des A_α . Introduisons les notations :

$$\mathcal{V}_A = \{\mathcal{V}_{A_1}, \dots, \mathcal{V}_{A_k}\}, \quad \mathcal{V}_C = \{\mathcal{V}_{C_1}, \dots, \mathcal{V}_{C_l}\}; \quad w = \{w_1, \dots, w_l\},$$

où les w_γ sont des variables réelles. Il y a une transformation linéaire S facile à préciser telle que :

$$\mathcal{V}_A = S \mathcal{V}_C; \quad (6,8)$$

soit : $Z = \{Z_1, \dots, Z_l\}$ une v. a. l -dimensionnelle, de caractéristique :

$$\mu(w) = E(iwZ) = \Phi(w \mathcal{V}_C); \quad (6,9)$$

l'ensemble ω défini par (6,5) peut aussi se définir par :

$$\{ n(r; C_1), \dots, n(r; C_l) \} \in H \subset \mathcal{E}^l, \quad r \in \Omega(\mathcal{L}), \quad (6, 10)$$

avec :

$$H = S^{-1}J; \quad (6,11)$$

car pour une r. p. r. donnée quelconque, le système :

$$x = \{ n(r; A_1), \dots, n(r; A_k) \},$$

et le système :

$$z = \{ n(r; C_1), \dots, n(r; C_l) \}$$

sont liés par la relation :

$$x = Sz.$$

Or posons :

$$I_1(\omega) = \Pr (Z \in H), \quad (6,12)$$

où $\Pr (Z \in H)$ est dérivée de la caractéristique (6,9). Si X^1 est la v. a. k -dimensionnelle définie par : $X^1 = SZ$, (6,12) équivaut à :

$$I_1(\omega) = \Pr (X^1 \in J);$$

or la caractéristique $\lambda(u) = E(e^{iuX^1})$ de X^1 est donnée par :

$$\begin{aligned} \lambda(u) &= E(e^{iuX^1}) = E(e^{iuSZ}) = \mu(uS) \\ &= \Phi(nS \cup C) = \Phi(u \cup A); \end{aligned}$$

ainsi X^1 a la même caractéristique que X ; de sorte que $I(\omega)$ défini par (6,12) coïncide avec $I(\omega)$ défini par (6,6).

Soient maintenant 2 représentations quelconques de ω , du type (6,5), soit (6,5) elle-même, et une autre représentation du même type :

$$\{ n(r; B_1), \dots, n(r; B_h) \} \in K \subset \mathcal{E}^h;$$

on peut supposer que les C_γ précédents constituent une représentation disjonctive des A_α , mais aussi une représentation disjonctive des B_β ; posons :

$$\cup_B = \{ \cup_{B_1}, \dots, \cup_{B_h} \}, \quad v = \{ v_1, v_2, \dots, v_h \},$$

où les v_β sont des variables réelles; soit $Y = \{ Y_1, \dots, Y_h \}$ une v. a. h -dimensionnelle, de caractéristique $\Phi(v \cup B)$; pour une r. p. r. quelconque, les deux conditions :

$$\{ n(r; A_1), \dots, n(r; A_k) \} \in J \quad \text{et} \quad \{ n(r; B_1), \dots, n(r; B_h) \} \in K,$$

équivalentes par hypothèse, sont toutes deux équivalentes à :

$$\{n(r; C_1), \dots, n(r; C)\} \in H;$$

par suite, $\Pr(X \in J) = \Pr(Z \in H) = \Pr(Y \in K)$, et $l(\omega)$ défini par (6,6) égale aussi bien $\Pr(Y \in K)$.

Nous pouvons conclure que, pour les ω du type (6,5), $\Phi(f)$ définit sans ambiguïté une fonction d'ensemble $l(\omega)$, ≥ 0 , et ≤ 1 . Soient maintenant ω_1 et ω_2 deux ensembles du type (6,5), définis respectivement par :

$$\{n(r; A_1), \dots, n(r; A_k)\} \in J \subset \varepsilon^k, \quad (6,13)$$

et par :

$$\{n(r; B_1), \dots, n(r; B_h)\} \in K \subset \varepsilon^h, \quad (6,14)$$

où les A_α et les B_β sont \mathcal{M} -bornés; soit $\{C_1, \dots, C_l\}$ une représentation disjonctive commune de $\{A_1, \dots, A_k\}$, et de $\{B_1, \dots, B_h\}$; comme ci-dessus, il existe deux parties H_1 et H_2 de ε^l , telles que :

$$\{n(r; A_1), \dots, n(r; A_k)\} \in J \text{ équivaut à } \{n(r; C_1), \dots, n(r; C_l)\} \in H_1;$$

et :

$$\{n(r; B_1), \dots, n(r; B_h)\} \in K \text{ équivaut à } \{n(r; C_1), \dots, n(r; C_l)\} \in H_2.$$

Supposons en outre que ω_1 et ω_2 sont disjoints; alors H_1 et H_2 sont disjoints; il en résulte évidemment que : $l(\omega_1 \cup \omega_2) = l(\omega_1) + l(\omega_2)$; d'où :

LEMME (6,1). — Si la fonctionnelle (f) de $f \in \mathcal{H}$ satisfait aux conditions 1° et 2°, elle définit sur la famille des parties ω de Ω , du type (3, 1, 5), une fonction d'ensemble $l(\omega) \geq 0$, ≤ 1 et additive.

Or, soit e n'importe quelle partie de \mathfrak{J} , appartenant à la famille $\mathcal{F}(h_1, \dots, h_n)$; l'ensemble $\omega = \Psi(e)$ est visiblement du type (6,5); si l'on pose :

$$\lambda(e) = l(\Psi(e)), \quad (6,15)$$

on peut dire que : la donnée sur \mathcal{H} , de la fonctionnelle $\Phi(f)$ satisfaisant aux conditions 1° et 2°, détermine pour les ensembles e des familles $\mathcal{F}(h_1, \dots, h_n)$, une fonction d'ensemble $\lambda(e) \geq 0$, ≤ 1 et additive.

7. CLASSES COMPACTES

Considérons l'espace \mathfrak{X} muni de la σ -algèbre \mathcal{B} . Une classe \mathcal{G} de parties de \mathfrak{X} est *compacte* (sous-entendu : pour \mathfrak{X} muni de la σ -algèbre \mathcal{B}), si : $C \in \mathcal{G}$ implique $C \in \mathcal{B}$, et si pour toute sous-famille \mathcal{G}' de \mathcal{G} , telle que :

$\bigcap_{C \in \mathcal{G}'} C = \phi$, il existe une sous-famille *finie* \mathcal{G}'' de \mathcal{G}' telle que : $\bigcap_{C \in \mathcal{G}''} C = \phi$.

Soit \mathcal{G} une classe compacte; soit s un entier fini ≥ 0 , et reportons-nous au paragraphe 1, dont nous reprenons les notations; soit \mathcal{X}^s muni de la σ -algèbre \mathcal{B}^s ; soit \mathcal{G}^s la famille des pavés P de \mathcal{X}^s , de la forme :

$$P = \prod_{j=1}^s C_j, \quad \text{avec : } C_j \in \mathcal{G} \quad (j = 1, \dots, s). \quad (7, 1)$$

Soit \mathcal{G}_Γ^s la famille des pavés-complets $\Gamma(P)$, où $P \in \mathcal{G}^s$. Nous dirons que \mathcal{G} est Γ^s -compacte, si \mathcal{G}_Γ^s est compacte, pour \mathcal{X}^s muni de la σ -algèbre \mathcal{B}_Γ^s .

Rappelons-nous que λ^s est une application biunivoque de la famille des sous-ensembles Γ -complets de \mathcal{X}^s , sur la famille des parties de Ω^s ; par suite, si \mathcal{G} est Γ^s -compacte, la famille $\mathcal{D}^s = \lambda_1(\mathcal{G}_\Gamma^s)$ est compacte, pour Ω^s munie de la σ -algèbre \mathcal{R}^s .

Nous désignerons par ${}_s\mathcal{D}^s$ la famille des sous-ensembles de Ω^s , qui sont intersection dénombrable d'ensemble de \mathcal{D}^s . On sait (cf. J. Neveu [1], exercice 1.6.1), que si \mathcal{D}^s est compacte pour Ω^s muni de la σ -algèbre \mathcal{R}^s , il en est de même de la classe plus large ${}_s\mathcal{D}^s$.

Nous dirons que \mathcal{G} est Γ^ϕ -compacte, si elle est Γ^s -compacte pour tout entier $s > 0$ est fini. Supposons que \mathcal{G} est Γ^ϕ -compacte, et désignons par :

$\alpha)$ \mathcal{D}^ϕ la classe des $\omega \subset \Omega^\phi$, tels que : $\omega \cap \Omega^s \in \mathcal{D}^s$, pour tout $s > 0$ et fini;

$\beta)$ ${}_s\mathcal{D}^\phi$ la classe des $\omega \subset \Omega^\phi$, tels que : $\omega \cap \Omega^s \in {}_s\mathcal{D}^s$, pour tout $s > 0$ et fini.

Pour chaque s , \mathcal{D}^s , ${}_s\mathcal{D}^s$ sont des classes compactes pour Ω^s muni de la σ -algèbre \mathcal{R}^s ; par suite, \mathcal{D}^ϕ , ${}_s\mathcal{D}^\phi$ sont des classes compactes pour Ω^ϕ , muni de la σ -algèbre \mathcal{R}^ϕ , et :

$$\mathcal{D}^\phi \subset {}_s\mathcal{D}^\phi \subset \mathcal{R}^\phi.$$

Les définitions et remarques précédentes s'appliquent à tout espace \mathcal{X} muni d'une σ -algèbre \mathcal{B} ; nous les utiliserons donc à propos d'autres espaces, en étendant par analogie le système de notations ci-dessus. En particulier remarquons que :

Soit M une partie quelconque de \mathcal{X} , telle que $M \in \mathcal{B}$; soient \mathcal{B}_M la restriction de \mathcal{B} à M ; et \mathcal{G}_M la famille des parties e de M , telles que : $e = e' \cap M$, où $e' \subset \mathcal{X}$ avec : $e' \in \mathcal{G}$.

Soient C_1, C_2, \dots, C_s s éléments de \mathcal{G}_M ; on a :

$$C_j = C'_j \cap M, \quad \text{avec : } C'_j \in \mathcal{G} \quad (j = 1, \dots, s);$$

$P = C_1 \times \dots \times C_s$ est un pavé de M^s ; $P' = C'_1 \times \dots \times C'_s$ est un pavé de \mathfrak{X}^s ; en considérant que M^s est une partie de \mathfrak{X}^s , on remarque que :

$$P = P' \cap M^s;$$

et que :

$$\Gamma(P) = (\Gamma(P')) \cap M^s;$$

il en résulte :

LEMME (7,1). — Si la classe \mathfrak{G} est Γ^s -compacte (Γ^Φ -compacte) pour \mathfrak{X} muni de la σ -algèbre \mathfrak{B} , la classe \mathfrak{G}_M est Γ^s -compacte (Γ^Φ -compacte) pour M munie de la σ -algèbre \mathfrak{B}_M .

8. CONDITION SUFFISANTE POUR QU'UNE FONCTIONNELLE SOIT UNE FONCTIONNELLE CARACTÉRISTIQUE

Replaçons-nous dans les conditions du paragraphe 6; soit donnée une fonctionnelle $\Phi(f)$ de $f \in \mathfrak{F}$, satisfaisant aux conditions 1^o et 2^o. Nous utilisons les notations du paragraphe 3. Soit \mathfrak{G} une classe de parties de \mathfrak{X} , qui est par hypothèse Γ^Φ -compacte pour \mathfrak{X} muni de la σ -algèbre \mathfrak{B} ; pour chaque h , soit \mathfrak{G}_h la classe des parties e de M_h , de la forme : $e = e' \cap M_h$, avec $e' \in \mathfrak{G}$. Nous désignerons par \mathfrak{D}_h^s la classe des parties de Ω_h^s , qui se déduit de \mathfrak{G}_h comme ci-dessus \mathfrak{D}^s était déduite de \mathfrak{G} ; et remarquons que : $\mathfrak{D}_h^s \subset \mathfrak{Q}_h^s$.

Pour tout entier n , tout système $\{h_1, \dots, h_n\}$ de n valeurs distinctes de h , et tout système $\{s_1, \dots, s_n\}$ de n entiers $s_j, \geq 0$ et finis, appelons :

$\mathfrak{D}\left(\begin{smallmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{smallmatrix}\right)$ la famille des parties ω de Ω , admettant une définition de la forme :

$r \in \omega$ équivaut à :

$$r_{h_1} \in \omega_{h_1}, \dots, r_{h_n} \in \omega_{h_n},$$

avec :

$$\omega_{h_j} \in \mathfrak{D}_{h_j}^{s_j} \quad \text{pour} \quad j = 1, \dots, n.$$

Appelons $\mathfrak{D}'\left(\begin{smallmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{smallmatrix}\right)$ la classe des parties e de \mathfrak{Z} , telles que :

$$\omega = \Psi(e) \in \mathfrak{D}\left(\begin{smallmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{smallmatrix}\right).$$

Il apparaît que $\mathcal{D}'\left(\begin{smallmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{smallmatrix}\right)$ est une classe compacte d'ensembles appartenant à la semi-algèbre $\mathcal{F}\left(\begin{smallmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{smallmatrix}\right)$.

Pour $e \in \mathcal{F}\left(\begin{smallmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{smallmatrix}\right)$, nous poserons selon (6,15) :

$$\lambda(e) = l(\Psi(e)). \tag{8,1}$$

La propriété $\mathcal{P}(\mathcal{G})$. — Nous dirons que la fonctionnelle $\Phi(f)$ de $f \in \mathcal{K}$ a la propriété $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ si :

- pour tout entier n fini et > 0 ;
- quelles que soient les n valeurs distinctes $\{h_1, \dots, h_n\}$ de h ;
- quelle que soit, pour chaque j ($j = 1, \dots, n$), la partition finie $\{A_\alpha^j; \alpha = 1, \dots, k_j\}$ de M_{h_j} , avec des $A_\alpha^j \subset M_{h_j}$, $A_\alpha^j \in \mathcal{B}_{h_j}$;
- quel que soit $\varepsilon > 0$;

il existe pour chaque j, k_j ensembles $C_\alpha^j (\alpha = 1, \dots, k_j)$ tels que :

$$\begin{aligned} a) \quad & C_\alpha^j \subset A_\alpha^j, \quad C_\alpha^j \in \mathcal{G}_{h_j} \quad (\alpha = 1, \dots, k_j; j = 1, \dots, n); \\ b) \quad & \left| \Phi\left(\sum_j \sum_\alpha u_\alpha^j \mathcal{U}_{A_\alpha^j} + \sum_j v^j \mathcal{U}_{M_{h_j}}\right) - \Phi\left(\sum_j \sum_\alpha u_\alpha^j \mathcal{U}_{C_\alpha^j} + \sum_j v^j \mathcal{U}_{M_{h_j}}\right) \right| < \varepsilon, \end{aligned} \tag{8,2}$$

uniformément par rapport aux variables réelles u_α^j et v^j , pour

$$|u_\alpha^j| \leq \pi, \quad |v^j| \leq \pi.$$

Supposons dorénavant que $\Phi(f)$ a la propriété $\mathcal{P}(\mathcal{G})$.

Soit e un ensemble de la semi-algèbre $\mathcal{F}\left(\begin{smallmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{smallmatrix}\right)$, donc de la forme (3,11) à laquelle nous nous reportons; pour chaque j , ω_{h_j} admet une définition de la forme :

$$\{n(r_{h_j}; A_1^j), \dots, n(r_{k_j}; A_{k_j}^j)\} \in J_{h_j} \subset \mathcal{E}^{k_j},$$

où $\{A_1^j, \dots, A_{k_j}^j\}$ est une partition finie de M_{h_j} ; et où tout élément $\{j_1, \dots, j_{k_j}\}$ de J_{h_j} satisfait à la condition :

$$j_1 + j_2 + \dots + j_{k_j} = s_j.$$

Alors, avec (3,1), $\lambda(e)$ dérive de :

$$\Phi\left(\sum_j \sum_\alpha u_\alpha^j \mathcal{U}_{A_\alpha^j} + \sum_j v^j \mathcal{U}_{M_{h_j}}\right),$$

comme une probabilité concernant une variable aléatoire (multidimensionnelle) dérive de la caractéristique adéquate.

Or, soient C_α^j des ensembles satisfaisant aux conditions suivantes :

$$C_\alpha^j \in \mathfrak{G}_{h_j}, \quad C_\alpha^j \subset A_\alpha^j \quad (\alpha = 1, \dots, k_j; j = 1, \dots, n);$$

et soit e' le sous-ensemble de \mathfrak{Z} défini par (8,11), si pour chaque j , on y prend comme ω_{h_j} , l'ensemble ω'_{h_j} défini par :

$$\{n(r_{h_j}; C_1^j), \dots, n(r_{h_j}; C_{k_j}^j)\} \in J_{h_j} \subset \varepsilon^{k_j} \quad \text{et} \quad n(r_{h_j}; M_{h_j}) = s_j.$$

Alors il apparaît que :

a) $e' \subset e$;

b) $e' \subset \mathfrak{D}'\left(\begin{smallmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{smallmatrix}\right)$.

Or d'après la propriété $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ et (8,2), on peut choisir les C_α^j de telle sorte que :

$$\lambda(e) - \lambda(e') < \varepsilon.$$

Avec la proposition (1,6,2) de J. Neveu [J], on en conclut que :

$\Phi(f)$ définit sur $\mathfrak{F}\left(\begin{smallmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{smallmatrix}\right)$ une fonction d'ensemble $\lambda\left(\begin{smallmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{smallmatrix}\right)(e)$ ($= \lambda(e)$ pour $e \in \mathfrak{F}\left(\begin{smallmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{smallmatrix}\right)$) complètement additive.

Maintenant, soit e une partie de \mathfrak{Z} , appartenant à $\mathfrak{F}(h_1, \dots, h_n)$, donc admettant une définition du type (3,7) à laquelle nous nous reportons; posons :

$$\omega_{h_j}^{s_j} = \omega_{h_j} \cap \Omega_{h_j}^{s_j};$$

appelons $e^{s_1 \dots s_n}$ l'ensemble e défini par (3,7), quand y prend $\omega_{h_j} = \omega_{h_j}^{s_j}$; on a :

$$e^{s_1 \dots s_n} \in \mathfrak{F}\left(\begin{smallmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{smallmatrix}\right),$$

et :

$$e = \bigcup_{s_1, \dots, s_n} e^{s_1 \dots s_n},$$

où d'ailleurs les e^{s_1, \dots, s_n} sont disjoints.

D'abord, on déduit facilement des conditions 1^o et 2^o que :

$$\lambda(e) = \sum_{s_1, \dots, s_n} \lambda\left(\begin{smallmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ h_1 & \dots & h_n \end{smallmatrix}\right)(e^{s_1, \dots, s_n}). \quad (8,4)$$

D'autre part, soit $\mathcal{D}^\Phi(h_1, \dots, h_n)$ la famille des parties ω de Ω , admettant une définition de la forme :

$r \in \omega$ équivaut à : $r_{h_1} \in \omega_{h_1}, \dots, r_{h_n} \in \omega_{h_n}$, avec : $\omega_{h_j} \subset \mathcal{D}_{h_j}^\Phi$ pour $j = 1, \dots, n$. Et soit $\mathcal{D}'^\Phi(h_1, \dots, h_n)$ la famille des parties e de \mathcal{Z} telles que : $\Psi(e) \in \mathcal{D}^\Phi(h_1, \dots, h_n)$; tandis que ${}_\delta\mathcal{D}'^\Phi(h_1, \dots, h_n)$ désignera la classe des parties de \mathcal{Z} qui sont intersections dénombrables d'ensembles $\mathcal{D}^\Phi(h_1, \dots, h_n)$.

De l'additivité complète des $\lambda\left(\begin{smallmatrix} s_1, \dots, s_n \\ h_1, \dots, h_n \end{smallmatrix}\right)(e)$ résulte que $\lambda(e)$ est complètement additive sur la semi-algèbre $\mathcal{F}(h_1, \dots, h_n)$.

De la propriété d'approximation (8,3) et de (8,4), on déduit que pour tout $e \in \mathcal{F}(h_1, \dots, h_n)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver

$$e' \in \mathcal{D}^\Phi(h_1, \dots, h_n) \subset \mathcal{F}(h_1, \dots, h_n)$$

tel que :

$$e' \subset e \quad \text{et} : \quad \lambda(e) - \lambda(e') < \varepsilon. \tag{8,5}$$

D'après la proposition (1,6,1) de J. Neveu [I], $\lambda(e)$ s'étend donc de façon unique en une loi de probabilité $\lambda(h_1, \dots, h_n/e)$ sur la σ -algèbre $\mathcal{R}(h_1, \dots, h_n)$. En outre, d'après l'exercice (1,6,1) de J. Neveu [I], ${}_\delta\mathcal{D}(h_1, \dots, h_n) \subset \mathcal{R}^\Phi(h_1, \dots, h_n)$ est une classe compacte, telle que, pour tout $e \in \mathcal{R}(h_1, \dots, h_n)$, et pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $e' \in {}_\delta\mathcal{D}^\Phi(h_1, \dots, h_n)$ tel que :

$$e' \subset e \quad \text{et} : \quad \lambda(h_1, \dots, h_n/e) - \lambda(h_1, \dots, h_n/e') < \varepsilon. \tag{8,6}$$

Il suffit alors d'appliquer deux théorèmes classiques (cf. J. Neveu [I]) propositions (3,3,3) et théorème de la p. 78), pour constater que la famille des lois $\lambda(h_1, \dots, h_n/e)$ définit sur $(\mathcal{Z}(\mathcal{M}), \Lambda(\mathcal{M}))$ une loi de probabilité $\lambda(e)$, à laquelle correspond par (8,1), une loi de probabilité $l(\omega)$ sur $(\Omega(\mathcal{M}), {}_c\mathcal{B}(\mathcal{M}))$:

THÉORÈME (8,1). — Pour qu'une fonctionnelle $\Phi(f)$ de $f \in \mathcal{H}$, soit la fonctionnelle caractéristique d'une répartition ponctuelle aléatoire R , σ -finie relativement au système \mathcal{M} , il suffit que $\Phi(f)$ satisfasse aux conditions 1° et 2°, et qu'elle possède la propriété $\mathcal{F}(\mathcal{G})$, relativement à une classe \mathcal{G} de parties de \mathcal{X} , Γ^Φ -compacte; alors $\Phi(f)$ détermine complètement la loi de probabilité $l(\omega)$ de R sur $(\Omega(\mathcal{M}), {}_c\mathcal{B}(\mathcal{M}))$.

COMMENTAIRE (8,1). — Nous avons donné de la propriété $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ une expression assez compliquée; $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ constitue en fait une propriété de continuité de $\Phi(f)$, et on pourrait sans doute, dans cette direction, déterminer une autre expression de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$; mais nous verrons au paragraphe 10 que l'expression $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ adoptée ci-dessus peut être assez maniable.

9. EXTENSION DE LA DÉFINITION DE LA FONCTIONNELLE CARACTÉRISTIQUE

Soit $\{z_j\}$ une famille finie ou dénombrable de nombres complexes z_j , tels que :

$$|z_j| \leq 1. \quad (9,1)$$

Soit p une permutation quelconque des indices j , c'est-à-dire une application biunivoque quelconque de \mathcal{E} sur \mathcal{E} ; nous dirons que le produit :

$$u = \prod_j z_j$$

converge *absolument* si quelle que soit p , $\prod_{j=1}^n z_{p(j)}$ converge lorsque $n \rightarrow +\infty$, vers une limite indépendante de p . Posons :

$$z_j = e^{ia_j - b_j} = 1 + h_j \quad (9,2)$$

avec a_j et b_j réels; par hypothèse, $b_j \geq 0$. Il est facile de vérifier que :

LEMME (9,1). — Sous l'hypothèse (9,1), pour que le produit $\prod_j z_j$ converge absolument, il faut et il suffit que :

ou bien
$$\sum_j b_j = +\infty;$$

ou bien
$$\sum_j b_j < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_j |h_j| < +\infty.$$

Maintenant, soient $\{Z_j\}$ une famille finie ou dénombrable de v. a. complexes Z_j , telles que :

$$|Z_j| \leq 1; \quad (9,3)$$

alors :

LEMME (9,2). — Si les Z_j sont mutuellement indépendantes, et si presque sûrement le produit $\prod_j Z_j$ converge absolument, alors le produit $\prod_j E(Z_j)$ converge absolument.

Revenons à la r. p. a. $R = \{ X_j \}$; ne faisons plus l'hypothèse que R est σ -finie; soit :

$$f(x) = a(x) + ib(x)$$

une fonction mesurable — \mathfrak{B} de $x \in \mathfrak{X}$, dont nous distinguons la partie réelle $a(x)$ et la partie imaginaire $b(x)$. Demandons-nous à quelles conditions doit satisfaire f pour que :

$$\Phi(f) = E \{ \exp (iI(f; R)) \} = E \left\{ \exp \left(i \int_{\mathfrak{X}} f(x)n(R; dx) \right) \right\} \quad (9,4)$$

ait un sens.

Il faut d'abord pour cela que la v. a. :

$$\begin{aligned} U = \exp (iI(f; R)) &= \exp \left(i \int_{\mathfrak{X}} f(x)n(R; dx) \right) = \exp \left(i \sum_j f(X_j) \right) \\ &= \prod_j e^{if(X_j)} \end{aligned} \quad (9,5)$$

ait un sens, il faut en outre que $E(U)$ existe; pour éviter toute difficulté sur ce deuxième point, il suffit évidemment d'imposer à $f(x)$ la condition :

$$b(x) \geq 0; \quad (9,6)$$

Supposant (9,6) satisfaite, puisque R est le système *non* ordonné des X_j , la seule définition admissible d'un sens pour U est que presque sûrement le produit $\prod_j e^{if(X_j)}$ converge absolument.

DÉFINITION (9,1). — Appelons $\mathfrak{K}_e(R)$ l'ensemble des fonctions f qui satisfont à (9,6), et telles que presque sûrement le produit $\prod_j e^{if(X_j)}$ converge absolument; c'est-à-dire telles que presque sûrement :

ou bien
$$\sum_j b(X_j) = + \infty;$$

ou bien
$$\sum_j b(X_j) < + \infty, \quad \text{et} \quad \sum_j |h(X_j)| < + \infty,$$

où l'on a posé :

$$e^{if(x)} = 1 + h(x). \quad (9,7)$$

REMARQUES (9,1). — 1° Désignant par $m(dx)$ la répartition moyenne associée à R , si on a :

$$\int_{\mathfrak{X}} |h(x)| m(dx) < + \infty, \quad (9,8)$$

cela implique que $f \in \mathfrak{H}_e(\mathfrak{R})$; notons que (9,8) a lieu en particulier si :

$$\int_{\mathfrak{X}} |f(x)| m(dx) < + \infty, \quad (9,9)$$

autrement dit : $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}; m) \subset \mathfrak{H}_e(\mathfrak{R})$.

2° Si $f \in \mathfrak{H}_e(\mathfrak{R})$, et si g est une fonction telle que, en posant :

$$g(x) - f(x) = 2\pi k(x),$$

$k(x)$ est pour tout x un entier réel, alors : $g \in \mathfrak{H}_e(\mathfrak{R})$.

Ceci dit, nous pouvons énoncer que :

La fonctionnelle caractéristique $\Phi(f)$ de la r. p. a. R est définie pour toute $f \in \mathfrak{H}_e(\mathfrak{R})$.

Seconde fonctionnelle caractéristique. — Pour $f \in \mathfrak{H}_e(\mathfrak{R})$, posant

$$e^{if(x)} - 1 = h(x),$$

nous appellerons seconde fonctionnelle caractéristique de R , et nous désignerons par $\Psi(h)$, la fonctionnelle de h définie par :

$$\Psi(h) = \log \Phi(f). \quad (9,10)$$

On notera que : $b(x) \geq 0$, implique que le nombre complexe $h(x)$ est, dans le plan complexe, dans (ou sur) le cercle de centre -1 et de rayon 1. Maintenant, il est à peu près évident que :

THÉORÈME (9,1). — Si R est σ -finie, on a : $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}_e(\mathfrak{R})$.

Si par contre R n'est pas σ -finie, il n'est pas assuré que $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}_e(\mathfrak{R})$.

10. FONCTIONNELLE CARACTÉRISTIQUE DE LA RÉPARTITION DE POISSON

Reportons-nous au paragraphe 5. Soit R une r. p. a. de Poisson sur \mathfrak{X} , de loi $P(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, m)$. Soit $f \in \mathfrak{H}$; posons :

$$L_h = \bigcup_{j=1}^h M_j;$$

soit h tel que $f(x) \equiv 0$ sur L_h , et que $m(L_h) > 0$. Calculons d'abord :

$$E \{ \exp (iI(f; R)) / n(R; L_h) = s \};$$

utilisant la propriété 3 des répartitions de Poisson, on trouve immédiatement :

$$E \{ \exp (iI(f; R)) / n(R; L_h) = s \} = \left(\frac{1}{m(L_h)} \int_{L_h} e^{if(x)} m(dx) \right)^s;$$

avec la propriété 1 des répartitions de Poisson, il vient alors :

$$\begin{aligned} \Phi(f) = E \{ \exp (iI(f; R)) \} &= \sum_{s=0}^{\infty} e^{-m(L_h)} \frac{m(L_h)^s}{s!} \left(\frac{1}{m(L_h)} \int_{L_h} e^{if(x)} m(dx) \right)^s \\ &= \exp \left(\int_{L_h} (e^{if(x)} - 1) m(dx) \right), \end{aligned} \tag{10, 1}$$

qu'on peut écrire aussi bien :

$$\Phi(f) = \exp \left(\int_{\mathfrak{X}} (e^{if(x)} - 1) m(dx) \right). \tag{10, 2}$$

Vérification de la propriété $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$. — Il est naturel de nous demander si la fonctionnelle caractéristique $\Phi(f)$ d'une r. p. a. de Poisson, dont nous avons une expression explicite (10,2) pour $f \in \mathfrak{E}$, possède la propriété $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$.

Supposons que \mathfrak{X} est un espace métrique, complet, séparable, que \mathfrak{B} est la σ -algèbre des Boréliens de \mathfrak{X} ; prenons comme classe \mathfrak{G} la classe des compacts de \mathfrak{X} ; c'est évidemment une classe Γ^Φ -compacte; reprenons les termes de (8,2); et d'abord :

$$N_1 = \Phi \left(\sum_j \sum_\alpha u_\alpha^j \mathfrak{U}_{A_\alpha^j} + \sum_j v^j \mathfrak{U}_{M_{h_j}} \right),$$

où les $A_\alpha^j (\alpha = 1, 2, \dots, k_j)$ forment une partition de M_{h_j} ; d'après (10,2), N_1 peut s'écrire :

$$N_1 = \sum_j \sum_\alpha \int_{A_\alpha^j} (e^{i(u_\alpha^j + v^j)} - 1) m(dx);$$

soient $C_\alpha^j (\alpha = 1, \dots, k_j; j = 1, \dots, n)$ des ensembles tels que :

$$C_\alpha^j \subset A_\alpha^j \quad \text{pour tout } j, \alpha;$$

alors :

$$N_2 = \Phi \left(\sum_j \sum_\alpha u_\alpha^j \mathfrak{U}_{C_\alpha^j} + \sum_j v^j \mathfrak{U}_{M_{h_j}} \right)$$

peut s'écrire :

$$N_2 = \sum_j \sum_\alpha \int_{C_\alpha^j} (e^{i(u_\alpha^j + v^j)} - 1) m(dx) + \sum_j \int_{M_{h_j} - \bigcup_\alpha C_\alpha^j} (e^{iv^j} - 1) m(dx);$$

pour la différence Δ entre N_1 et N_2 , on en tire la limitation :

$$|\Delta| \leq 2 \cdot \sum_{j,\alpha} m(A_\alpha^j - C_\alpha^j) + 2 \sum_j m\left(M_{h_j} - \bigcup_\alpha C_\alpha^j\right);$$

mais :

$$m\left(M_{h_j} - \bigcup_\alpha C_\alpha^j\right) = \sum_\alpha m(A_\alpha^j - C_\alpha^j);$$

d'où finalement :

$$|\Delta| \leq 4 \sum_{j,\alpha} m(A_\alpha^j - C_\alpha^j);$$

or il est connu (cf. J. Neveu [I], proposition (11,7,3), que, quels que soient les A_α^j donnés, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver des C_α^j compacts, tels que : $C_\alpha^j \subset A_\alpha^j$, et que :

$$m(A_\alpha^j - C_\alpha^j) < \varepsilon;$$

les C_α^j , étant compacts et $\subset A_\alpha^j$, donc $\subset M_{h_j}$, appartiennent à \mathfrak{G}_{h_j} ; et $\Phi(f)$ possède bien la propriété $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$.

Extensions de la représentation (10,2). — Nous reportant aux définitions et notations du paragraphe 9, posons :

$$f(x) = a(x) + ib(x) \tag{10,3}$$

et :

$$e^{if(x)} - 1 = h(x);$$

notons que (10,2) équivaut à dire que la seconde fonctionnelle caractéristique $\Psi(h)$ est donnée par :

$$\Psi(h) = \int_{\mathfrak{X}} h(x) m(dx). \tag{10,4}$$

Commençons par observer que, en vertu de la propriété 2 des r. p. a. de Poisson (cf. paragraphe 5) et de théorèmes classiques, si $g(x)$ est une fonction mesurable — \mathfrak{B} quelconque, la probabilité pour que la série $\sum_j g(X_j)$ soit absolument convergente ne peut valoir que 0 ou 1.

Supposons que la fonction f de (10,3) satisfasse aux conditions :

- a) $b(x) \geq 0$;
- b) il existe un h tel que : $f(x) \equiv 0$ pour $x \in L_h$.

Alors évidemment $f \in \mathcal{E}_e(\mathbb{R})$, bien qu'on n'ait pas forcément $f \in \mathcal{E}$; mais le raisonnement qui a conduit à (10,2) reste parfaitement valable; donc (10,2) s'applique, en se réduisant d'ailleurs à :

$$\Phi(f) = \exp \left(\int_{L_h} (e^{if(x)} - 1)m(dx) \right). \quad (10,5)$$

Soit $g(x)$ une fonction réelle et ≥ 0 de $x \in \mathfrak{X}$, mesurable - \mathfrak{B} ; soit N une partie de \mathfrak{X} , telle que $N \in \mathfrak{B}$, et que : $0 < m(N) < + \infty$, à part cela quelconque; enfin soit Z_N la v. a. définie par :

$$Z_N = \sum_{X_j \in N} g(X_j) = \int_N g(x)n(\mathbb{R}; dx);$$

on peut supposer que N est l'un des L_h ; alors, en considérant la fonction :

$$g_N(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in N; \\ 0 & \text{si } x \notin N, \end{cases}$$

(10,5) donne pour la caractéristique $E(e^{iuZ_N})$ (u réel) de Z_N la formule :

$$\log E(e^{iuZ_N}) = \int_N (e^{iug(x)} - 1)m(dx); \quad (10,6)$$

d'où l'on déduit que Z_N a pour espérance mathématique :

$$E(Z_N) = \int_N g(x)m(dx), \quad (10,7)$$

et pour variance :

$$\mathcal{V}(Z_N) = \int_N g(x)^2 m(dx). \quad (10,8)$$

Supposons en outre que $g(x)$ admet, quand x varie dans \mathfrak{X} , une borne supérieure finie G ; il vient :

$$\mathcal{V}(Z_N) \leq G \cdot E(Z_N). \quad (10,9)$$

Compte tenu de la propriété 2 des r. p. a. de Poisson (cf. paragraphe 5), il est facile d'en déduire que :

LEMME (10,1). — Si $h(x)$ est une fonction complexe, bornée et mesurable — \mathcal{B} de $x \in \mathfrak{X}$, pour que presque sûrement la série $\sum_j h(X_j)$ converge absolument, il est nécessaire et suffisant que l'intégrale :

$$\int_{\mathfrak{X}} h(x)m(dx) \quad (10,10)$$

soit absolument convergente.

Supposons maintenant que la fonction f appartient à $\mathcal{H}_e(\mathbb{R})$, et que l'événement B que la série $\sum_j b(X_j)$ converge, est de probabilité 1; alors d'après (9,5), il est presque sûr que $\sum_j h(X_j)$ converge absolument; rappelons que :

$$h(x) = - (1 - e^{-b(x)} \cos a(x)) + ie^{-b(x)} \sin a(x); \quad (10,11)$$

$|h(x)|$ est borné supérieurement par 2. Le Lemme (10,1) montre que l'intégrale :

$$\Psi(h) = \int_{\mathfrak{X}} h(x)m(dx) \quad (10,12)$$

converge absolument, il en résulte immédiatement que (10,2) est valable.

Supposons maintenant que l'événement B est de probabilité nulle. D'après (10,5) et (10,11) on a :

$$\begin{aligned} E \left(e^{i \sum_{X_j \in L_h} a(X_j) - \sum_{X_j \in L_h} b(X_j)} \right) &= \exp \left\{ \int_{L_h} (1 - e^{-b(x)} \cos a(x))m(dx) \right. \\ &\quad \left. + i \int_{L_h} e^{-b(x)} \sin a(x)m(dx) \right\}, \end{aligned}$$

donc :

$$- \int_{L_h} (1 - e^{-b(x)} \cos a(x))m dx \leq E \left(e^{-\sum_{X_j \in L_h} b(X_j)} \right);$$

comme :

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} E \left(e^{-\sum_{X_j \in L_h} b(X_j)} \right) = 0,$$

on voit que l'intégrale :

$$\int_{\mathfrak{X}} (1 - e^{-b(x)} \cos a(x))m(dx), \quad (10,13)$$

où l'intégrant est ≥ 0 , peut être considérée comme ayant un sens, et de valeur $+\infty$. Or dans le cas considéré, $\Phi(f) = 0$. On peut considérer que la formule (10,2) est encore valable.

THÉORÈME (10,1). — R étant une répartition ponctuelle aléatoire de Poisson, de loi $P(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, m)$, pour toute fonction $f(x) \in \mathcal{H}_e(\mathbb{R})$, sa fonctionnelle caractéristique est donnée par la formule :

$$\log \Phi(f) = \int_{\mathfrak{X}} (e^{if(x)} - 1)m(dx) \tag{10,14}$$

Avec la notation $h(x)$ et $\Psi(h)$ désignant la deuxième fonctionnelle caractéristique, (10,14) s'écrit :

$$\Psi(h) = \int_{\mathfrak{X}} h(x)m(dx). \tag{10,15}$$

On obtient facilement le théorème suivant :

THÉORÈME (10,2). — Soit $\{R_k\}$ une suite finie ou dénombrable de répartitions ponctuelles aléatoires de Poisson sur le même espace $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$, de lois respectives $P(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, m_k)$ et mutuellement indépendantes; si la mesure : $m = \sum_k m_k$ est σ -finie, la répartition ponctuelle aléatoire somme $R = \sum_k R_k$, est une répartition de Poisson, de loi $P(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, m)$.

11. FONCTIONNELLES CARACTÉRISTIQUES DES RÉPARTITIONS INDUITES

Reportons-nous au paragraphe 4, dont nous reprenons les notations; soit $R = \{X_j\}$ une r. p. a. sur $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$, de fonctionnelle caractéristique $\Phi(f)$ pour $f \in \mathcal{H}_e(\mathbb{R})$. Soit $S = \{Y_j\} = \{Y(X_j)\}$ une r. p. a. sur $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{G})$ induite par R à l'aide de la probabilité de transition $p(x; dy)$. Soit à calculer la fonctionnelle caractéristique $\Phi_1(f_1)$ de S , où $f_1(y)$ est une fonction de $y \in \mathfrak{Y}$, mesurable - \mathfrak{G} et appartenant à $\mathcal{H}_e(\mathbb{S})$.

Posons :

$$f_1(y) = a_1(y) + ib_1(y), \quad h_1(y) = e^{if_1(y)} - 1;$$

$$e^{if(x)} = \int_{\mathfrak{Y}} e^{if_1(y)} p(x; dy), \quad h(x) = e^{if(x)} - 1 = \int_{\mathfrak{Y}} h_1(y) p(x; dy) \tag{11,1}$$

$$f(x) = a(x) + ib(x).$$

L'hypothèse que $f_1(y) \in \mathcal{H}_e(S)$, implique que $b_1(y) \geq 0$ et que presque sûrement, on a :

ou bien
$$\sum_j b_1(Y(X_j)) = +\infty,$$

ou bien
$$\sum_j b(Y(X_j)) < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_j |h_1(Y(X_j))| < +\infty;$$

elle implique aussi que : $b(x) \geq 0$.

Or, plaçons-nous conditionnellement dans l'hypothèse $R = r = \{x_j\}$; les v. a. $b_1(Y(x_j))$ sont mutuellement indépendants; de même les v. a. $h_1(Y(x_j))$; par suite les probabilités :

$$P(r) = \Pr \left(\sum_j b_1(Y(X_j)) < +\infty / R = r = \{x_j\} \right)$$

et

$$Q(r) = \Pr \left(\sum_j h_1(Y(X_j)) < +\infty / R = r = \{x_j\} \right)$$

ne peuvent valoir que 0 ou 1. Soit alors les ensembles suivants :

$\omega_1 =$ ensemble des r telles que $P(r) = 0$;

$\omega_2 =$ ensemble des r telles que $P(r) = 1$ et $Q(r) = 1$;

$\omega_3 =$ ensemble des r telles que $P(r) = 1$ et $Q(r) = 0$.

Ce qui précède signifie que $\Pr(R \in \omega_3) = 0$.

Si $R = r = \{x_j\} \in \omega_1$, on a conditionnellement presque sûrement :

$$\begin{aligned} \left| \exp \left\{ i \sum_j f_1(Y(x_j)) \right\} \right| &= \left| \prod_j e^{if_1(Y(x_j))} \right| = \prod_j \left| e^{if_1(Y(x_j))} \right| \\ &= e^{-\sum_j b_1(Y(x_j))} = 0; \end{aligned}$$

comme les v. a. $e^{if_1(Y(x_j))}$ sont, conditionnellement, mutuellement indépendantes et de module ≤ 1 , on a alors :

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \left\{ \exp i \sum_j f_1(Y(X_j)) / R = r = \{x_j\} \right\} \right| &= \left| \prod_j \mathbb{E} \left\{ e^{if_1(Y(X_j))} / R = r = \{x_j\} \right\} \right| \\ &= \left| \prod_j \int e^{if_1(y)} p(x_j; dy) \right| = \left| \prod_j e^{if(x_j)} \right| \\ &= e^{-\sum_j b(x_j)} = 0. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $R = r = \{x_j\} \in \omega_2$; conditionnellement presque sûrement le produit :

$$\exp \left\{ i \sum_j f_1(Y(x_j)) \right\} = \prod_j e^{if_1(Y(x_j))}$$

converge absolument. Il en résulte que le produit :

$$\prod_j E(e^{if_1(Y(x_j))} / R = r = \{x_j\}) = \prod_j e^{if(x_j)}$$

converge absolument; c'est-à-dire, compte tenu de ce que :

$$|e^{if(x_j)}| = e^{-b(x_j)} \leq 1,$$

ou bien $\sum_j b(x_j) = +\infty,$

ou bien $\sum_j b(x_j) < +\infty,$ et $\sum_j |h(x_j)| < +\infty,$

On conclut de cet ensemble de remarques que $f(x)$ définie par (11,2) appartient à $\mathcal{H}_e(R)$; que presque sûrement :

$$E \{ \exp(iI(f_1; S)) / R \} = \exp(iI(f; R)),$$

et par conséquent que :

$$\Phi_1(f_1) = \Phi(f); \tag{11,2}$$

ce qu'on peut écrire encore, en utilisant les secondes fonctionnelles caractéristiques $\Psi_1(h_1)$ et $\Psi(h)$ de S et R respectivement :

$$\Psi_1(h_1) = \Psi(h). \tag{11,3}$$

THÉORÈME (11,1). — Pour toute fonction $f_1(y) \in \mathcal{H}_e(S)$, la fonction $f(x)$ définie par :

$$e^{if(x)} = \int e^{if_1(y)} p(x; dy)$$

appartient à $\mathcal{H}_e(R)$; et la fonctionnelle caractéristique $\Phi_1(f_1)$ de S se calcule à partir de la fonctionnelle caractéristique Φ de R par :

$$\Phi_1(f_1) = \Phi(f),$$

où $f_1(y)$ et $f(y)$ sont liées par (11,1); de façon équivalente, la seconde fonctionnelle caractéristique $\Psi_1(h_1)$ de S se déduit de la seconde fonctionnelle caractéristique $\Psi(h)$ de R, par :

$$\Psi_1(h_1) = \Psi(h),$$

où :

$$h(x) = \int h_1(y)p(x; dy). \quad (11,4)$$

APPLICATION (11,1). — Supposons que la répartition inductrice R soit une r. p. a. de Poisson de loi $P(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, m)$, de sorte que $\Psi(h)$ est donnée par (10,15); il vient alors d'après (11,4) :

$$\begin{aligned} \Psi_1(h_1) &= \int_{\mathfrak{X}} \left(\int_{\mathfrak{Y}} h_1(y)p(x; dy) \right) m(dx) \\ &= \int_{\mathfrak{Y}} h_1(y) \left(\int_{\mathfrak{X}} p(x; dy)m(dx) \right); \end{aligned}$$

en appelant $m_1(dy)$ la répartition moyenne associée à S et en se reportant à (4,9), il vient donc :

$$\Psi_1(h_1) = \int_{\mathfrak{Y}} h_1(y)m_1(dy); \quad (11,5)$$

d'où :

THÉORÈME (11,2). — Si la répartition inductrice R est une répartition de Poisson de loi $P(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, m)$, et si la répartition induite S est σ -finie, S est une répartition de Poisson de loi $P(\mathfrak{Y}, \mathfrak{G}, m_1)$, où m_1 est liée à m par la formule (4,9).

REMARQUE (11,1). — Le Théorème (11,1) ne suppose pas que S est σ -finie; le Théorème (4,1) donne une condition nécessaire et suffisante pour que S soit σ -finie; si S est σ -finie, d'après le Théorème (9,1), nous pouvons affirmer que $\mathcal{H}_e(S)$ contient toutes les combinaisons linéaires réelles finies de fonctions du type $\mathcal{U}(y; C)$, où $C \in \mathfrak{G}$ est contenu dans un des C_k du Théorème (4,1).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. FORTET, Lois de probabilité des répartitions ponctuelles aléatoires. *C. R.*, t. 265, série A, 1967, p. 515.
- [2] R. FORTET, Lois de probabilité des répartitions ponctuelles aléatoires. *Zastosowania Matematyki*, 1968.
- [3] R. FORTET, Répartitions de Poisson; fonctionnelles caractéristiques des répartitions ponctuelles aléatoires. *C. R.*, t. 265, série A, 1967, p. 544.
- [4] T. E. HARRIS, *Theory of branching processes*. Springer édit., Göttingen, 1963.
- [5] J. NEVEU, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*. Masson édit., Paris, 1964.