

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN BRETAGNOLLE

DIDIER DACUNHA-CASTELLE

## **Théorèmes limites à distance finie pour les marches aléatoires**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 4, n° 1 (1968), p. 25-73

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1968\\_\\_4\\_1\\_25\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1968__4_1_25_0)

© Gauthier-Villars, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## **Théorèmes limites à distance finie pour les marches aléatoires**

par

**Jean BRETAGNOLLE et Didier DACUNHA-CASTELLE**

Chaire de Calcul des Probabilités (\*).  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre-Curie, Paris 5<sup>e</sup>.

---

### **INTRODUCTION**

Nous nous sommes proposés dans cet article de développer un certain nombre de résultats exposés en 1963-1964 dans les notes [13], [14], [15], [16].

Le résultat essentiel est la démonstration d'un théorème de convergence faible pour une suite  $C_n F^{*n}$ , où  $C_n$  est une suite de réels,  $C_n \rightarrow +\infty$ , et  $F$  une loi de probabilité. Ce théorème a été l'objet, en 1965, d'une autre démonstration par Ch. Stone [11]. Cependant, la méthode que nous présentons ici nous paraît intéressante en ce qu'elle donne une démonstration globale de tous les théorèmes limites et qu'elle s'applique à d'autres problèmes. C'est le cas du chapitre III où nous étudions des marches non stationnaires du type :

$$S_n^{(a)} = \sum_1^n a_k X_k.$$

Nous avons essayé de généraliser les théorèmes limites classiques par une version bien adaptée du lemme de Borel-Cantelli, et nous donnons pour terminer quelques applications du cas non stationnaire à des problèmes de partition et aux processus stables.

---

(\*) Équipe de Recherche N° 1 « Processus stochastiques et applications » dépendant de la Section N° 2 « Théories Physiques et Probabilités » associée au C. N. R. S.

## CHAPITRE PREMIER

NOTATIONS.  
CLASSIFICATIONS DES MARCHES ALÉATOIRES

## I. — Notations générales.

$F$  : loi de  $X_k$

$F^{*n}$  loi de  $S_n$  ( $*n$  :  $n$ ème convoluée d'une mesure)

$\varphi(t)$  fonction caractéristique de  $X_k$

$\varphi(t) = E \exp itX_k$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$  espace sur lequel sont définies les  $X_k$  (par exemple)

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) = \bigotimes_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R}, \mathcal{B}, dF)$$

II. — Classification des marches  
suivant l'espace d'états et la forme de la loi.

On dit que  $x$  est une valeur possible de  $S_n$  si pour tout ouvert  $G(x)$  contenant  $x$  il existe un entier  $n(G)$  tel que  $P(S_{n(G)} \in G) > 0$ .

Le support de  $S_n$  est le sous-groupe fermé engendré par l'ensemble des états possibles.

1<sup>er</sup> cas : Support  $S_n$  est discret : c'est alors un sous-groupe de  $Z^p$  (à un isomorphisme près).

Dans le cas où la marche est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , ce sous-groupe a la forme  $a + Zd$  où  $d$  est PGCD des différences des valeurs possibles de  $S_n$ .

2<sup>e</sup> cas : Support de  $S_n$  est  $\mathbb{R}^p$ .

3<sup>e</sup> cas : Le support de  $S_n$  est de type  $\mathbb{R}^k Z^{p-k}$ ,  $p \geq 1$ .

Ce cas est dit mixte.

Les lois  $F$  sont du type suivant (sur  $\mathbb{R}$ ) :

a) le support de la mesure  $F$  est discret.

$\alpha$ ) Il est du type  $a + Zd$ ,  $a, d \in \mathbb{Z}$ .

$\beta$ ) Il est de type  $\alpha + Z\beta$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  non rationnellement dépendants ;

b) le support de la mesure  $F$  n'est pas des types précédents (cas noté  $\gamma$ ).

Le cas  $\alpha$ ) donne pour  $S_n$  le 1<sup>er</sup> cas. On dira que les variables sont à valeurs entières de pas  $d$ .

Le cas  $\beta$ ) donne pour  $S_n$  le 2° cas. On dira que l'on est dans le cas latticiel (non entier).

Sur  $R^p$  nous ne ferons pas une classification détaillée.

On notera  $F \in (Z)$  le cas ( $\alpha$ )

$F \in (LR)$  le cas ( $\beta$ )

$F \in (R)$  le cas ( $\gamma$ ).

Dans le cas où  $F$  a une partie absolument continue non nulle par rapport à la mesure de Lebesgue on notera  $F \in (AC)$  (donc on est dans le cas  $\gamma$ ).

Donnons maintenant quelques propriétés de la fonction caractéristique :

$F \in (R)$  équivaut à  $|\varphi(t)| \neq 1, t \neq 0$

$F \in (Z)$  et  $F$  est de pas  $d$  équivaut à

$$\left| \varphi \left( 2h\pi + \frac{2k\pi}{d} \right) \right| = 1, \quad 0 \leq k \leq d-1, \quad h \in Z.$$

L'hypothèse  $\overline{\lim}_{|t| \rightarrow \infty} |\varphi(t)| < 1$  (dite de Cramer) sera notée  $F \in (C)$  (où  $\varphi \in (C)$ ). (AC) implique (C).

De manière générale on appelle  $\lambda$  la mesure invariante par translation sur support de  $S_n$  (mesure de Lebesgue, mesure de Dirac en chaque point ou produits de telles mesures).

### III. — Récurrence et transience.

On dit que  $S_n$  est récurrente si pour tout ouvert  $G$  de  $R^p$ ,  $G \neq \emptyset$  et  $G$  contenant au moins une valeur possible de  $S_n$ ; on a :

$$P \left\{ \overline{\lim}_n 1_G(S_n) = 1 \right\} = 1$$

On dit que la marche est transiente si :

$$P \left( \overline{\lim}_n 1_G(S_n) = 1 \right) = 0$$

PROPOSITION : Toute marche est soit transiente, soit récurrente. Une condition nécessaire et suffisante de récurrence est :

$$\lim_{z \uparrow 1} \int_{|t| < \theta} \operatorname{Re} \frac{dt}{1 - z\varphi(t)} = \infty$$

pour un certain  $\theta$ ,  $0 < \theta [4]$ .

#### IV. — Lois stables et domaines d'attraction.

##### 1° Lois stables.

On appelle loi stable dans  $\mathbf{R}^p$  les limites de sommes  $\frac{X_1 + \dots + X_n}{B_n} - A_n$  où les  $X_i$  sont des variables aléatoires indépendantes équidistribuées de loi  $F$  et où  $A_n$  et  $B_n$  sont deux suites de vecteurs constants de  $\mathbf{R}^p$ .

Soit  $Z$  une loi stable sur  $\mathbf{R}^p$  de fonction caractéristique  $z(t)$ . On a (cf. [17]) la représentation suivante :

$$\begin{aligned} \log z(t) &= -|t|^\alpha \left( C_1 \left( \frac{t}{|t|} \right) + i C_2 \left( \frac{t}{|t|} \right) \right) + i\gamma' t \\ &= -C(\theta) |t|^\alpha + i\gamma' t \end{aligned}$$

avec  $\theta \in S^p$  (sphère unité de  $\mathbf{R}^p$ ),  $|t|$  désignant la norme de  $t$ ,  $0 < \alpha < 2$  ; et pour  $C_1$  et  $C_2$  les représentations :

$$\begin{aligned} C_1(\theta) &= \gamma \int_{S^p} |\cos \langle \theta, u \rangle|^\alpha d\mu(u) \\ \alpha \neq 1 \quad C_2(\theta) &= -\gamma \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \int_{S^p} |\cos \langle \theta, u \rangle|^\alpha d\mu(u) \\ \alpha = 1 \quad C_2(\theta) &= \frac{2}{\pi} \int_{S^p} |\cos \langle \theta, u \rangle| \log \theta d\mu(u) \end{aligned}$$

où  $\mu$  est une mesure positive portée par  $S^p$ .

$\alpha$  s'appelle l'indice de  $Z$ .  $Z$  est donc caractérisé par les données de  $(\alpha, \gamma, \gamma', \mu)$ .

Les lois  $Z$  sont absolument continues, de densité  $q$ , et on posera  $\bar{q} = q(0)$

$$\bar{q} = \int_{\mathbf{R}^p} z(t) dt.$$

(On supposera de plus dans la suite que les lois  $Z$  ne sont pas concentrées sur un sous-espace de dimension  $< p$ . On trouve dans [9] les conditions pour qu'il en soit ainsi).

##### 2° Domaines d'attraction $\mathcal{D}(\alpha)$ .

Si  $F^{*n}(B_n x - A_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$

on dit que  $F$  appartient au domaine d'attraction de  $Z$  (satisfait au théorème de limite centrale vers  $Z$ ).

Nous appelons domaine d'attraction  $\mathcal{D}(\alpha)$  l'ensemble des lois  $F$  qui satisfont à un théorème de limite centrale vers une loi stable  $Z$ , avec  $A_n \equiv 0$ , et de plus nous supposerons (ce qui est loisible)  $\gamma' = 0$ . Remarquons tout de suite que les théorèmes limites démontrés dans la suite pour  $F \in \mathcal{D}(\alpha)$ , sont valables sans la restriction  $A_n \neq 0$ . Nous avons fait la restriction  $\mathcal{D}(\alpha)$ , pour simplifier les notations et parce que toutes les marches récurrentes dont la loi est dans les domaines d'attraction de  $Z$  sont dans  $\mathcal{D}(\alpha)$ .

REMARQUE : Dans le cas  $\alpha = 1$ , il est facile de vérifier que :

$$F \in \mathcal{D}(\alpha) \Rightarrow Z \text{ est une loi symétrique ([5]).}$$

Nous poserons :

$$-\log \varphi(t) = |t|^\alpha \chi(t),$$

La fonction  $\chi(|t|\theta)$  définie sur la sphère de rayon  $|t|$ , a les propriétés suivantes si  $F \in \mathcal{D}(\alpha)$  :

1° A  $\theta$  fixé  $\chi(|t|\theta)$  est à variation lente, cf. [4, appendice], en particulier les parties imaginaires et réelles sont à variation lente (pour  $t \rightarrow 0$ ). De plus, on a le lemme suivant, qui résulte aisément du théorème de limite centrale :

LEMME II-1.

$$\lim_{|t| \rightarrow 0} \frac{\chi(|t|\theta)}{\chi(|t|\theta')} = \frac{C(\theta)}{C(\theta')}$$

uniformément sur  $S^p$  ; et l'on a un résultat analogue pour les parties réelles (cf. [9]) et imaginaires.

### 3° Domaines d'attraction normale.

Si  $F \in \mathcal{D}(\alpha)$ , on dit que  $F \in \mathcal{D}\mathcal{N}(\alpha)$ , domaine d'attraction normale si on peut choisir  $B_n = Cn^{1/\alpha}$ .

Le théorème de limite centrale donne alors :

LEMME I-2. — Si  $F \in \mathcal{D}(\alpha)$

$$\lim_{|t| \rightarrow 0} \chi(|t|\theta) = C(\theta)$$

uniformément pour  $\theta \in S^p$ .

## CHAPITRE II

THÉORÈMES LIMITES A DISTANCE FINIE  
ET APPLICATIONSI. — Approximation monotone dans  $\hat{H}$ .

On dira qu'une fonction réelle  $h(x)$  est de la classe  $(\hat{H})$  si :

$$1^\circ \quad h(x) \in L_1; \quad \|h\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx < \infty$$

$$2^\circ \quad \hat{h}(x) = \int e^{itx} h(t) dt$$

est à support compact (autrement dit  $h$  est une fonction sommable prolongeable dans  $\mathbb{C}$  en fonction entière exponentielle d'ordre 1). Il est clair que  $(\hat{H})$  est une algèbre pour la convolution et aussi pour la multiplication. Un couple  $f_\varepsilon^+, f_\varepsilon^-$  sera dit une approximation monotone, au sens de  $\hat{H}$ , à  $\varepsilon$  près, de la fonction  $f$  si :

$$1^\circ \quad f_\varepsilon^+, f_\varepsilon^- \in H$$

$$2^\circ \quad f_\varepsilon^- \leq f \leq f_\varepsilon^+$$

$$3^\circ \quad \|f_\varepsilon^+ - f_\varepsilon^-\|_1 \leq \varepsilon$$

THÉORÈME II-1. — Si  $f \in K(\mathbb{R})$ , fonctions continues à support compact,  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe une approximation monotone de  $f$  à  $\varepsilon$  près.

*Démonstration* : Soit  $\bar{f}$  le support de  $f$ . On peut sans restreindre la généralité supposer  $\bar{f} = (-1, 1)$  et  $\|f\|_\infty \leq 1$ .

On posera :

$$g(x) = \frac{1 - \cos x}{\pi x^2}$$

$$g_c(x) = c^{-1} g(xc^{-1}), \quad c > 0.$$

Soit  $a, \eta, T$  3 nombres  $> 0$ . On pose :

$$f_\varepsilon^\pm = (f * g_a \pm \eta) T g_T$$

$\hat{g}$  étant à support compact,  $f_\varepsilon^\pm \in (\hat{H})$  puisque  $(H)$  est une algèbre pour la convolution et la multiplication.

Posons  $\omega_f(a) = \| f * g_a - f \|_\infty$

Soit  $\varepsilon' > 0$  donné.

Choisissons  $b > 0$  tel que

$$\sup_x \sup_{|y| < b} |f(x+y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon'}{2}$$

(module de continuité uniforme). On a :

$$g_a(y) \rightarrow 0$$

uniformément sur le complémentaire de tout voisinage de 0 (pour  $a \rightarrow 0$ ) ;  
donc d'après le théorème de Lebesgue, on a :

$$\int_{b < |y|} g_a(y) dy \leq \frac{\varepsilon'}{4} \quad \text{pour} \quad a < A(\varepsilon')$$

En particulier  $\lim_{a \rightarrow 0} \omega_f(a) = 0$  puisque :

$$\omega_f(a) \leq \frac{\varepsilon'}{2} + 2 \| f \|_\infty \int_{b < |y|} g_a(y) dy$$

Choisisant  $a$  tel que :

$$\begin{aligned} \omega_f(a) &\leq (4\pi)^{-6} \varepsilon^6 \cap 10^{-3} \\ \Gamma &= (\omega_f(a))^{-1/2} \\ \eta &= (\omega_f(a))^{2/3}, \end{aligned}$$

il vient

$$\| f_\varepsilon^+ - f_\varepsilon^- \|_1 = 4\pi\Gamma \| g_\Gamma \|_1 \leq 4\pi\omega_f(a)^{1/6} \leq \varepsilon$$

De plus :

$$\begin{aligned} f_\varepsilon^+ - f &= (f * g_a + \eta)2\pi\Gamma g_\Gamma - f \\ &= 2\pi\Gamma g_\Gamma (f * g_a - f) - f(1 - 2\pi\Gamma g_\Gamma) + 2\pi\Gamma g_\Gamma \end{aligned}$$

Si  $x \in \bar{f}^c$ , on a :

$$f_\varepsilon^+ - f \geq 2\pi\eta\Gamma g_\Gamma - \omega_f(a)2\pi\Gamma g_\Gamma \geq 0 \quad \text{puisque} \quad \eta \geq \omega_f(a).$$

Pour  $x \in \bar{f}$ , on a :

$$2\pi u g_u > 1 - \frac{1}{u^2}$$

d'où :

$$\Gamma^2(f_\varepsilon^+ - f) \geq \eta(\Gamma^2 - 1) - \omega_f(a)\Gamma^2 - \| f \|_\infty \geq 0$$

puisque du signe de  $\eta\Gamma^2 \rightarrow \infty$ .



De même pour :

$$T^2(f_\varepsilon^- - f) \leq -\eta(1 - T^2) + \omega_f(a)T^2 + \|f\|_\infty \leq 0$$

Si  $f \in K(\mathbb{R}^p)$  la même démonstration vaut en utilisant la fonction

$$g^p(x) = \prod_{i=1}^p g(x_i),$$

puisque  $\widehat{K}$  est encore une algèbre pour la convolution et pour la multiplication, la démonstration n'utilisant que cette propriété et la convergence vers  $\delta$  de  $g_\alpha(x)$ .

COROLLAIRE II-1. — Soit une suite  $\mu_n$  de mesures positives bornées telles que si  $f \in \widehat{H}$  on ait :

$$\lim_n \mu_n(f) = \lambda(f),$$

alors  $\mu_n \rightarrow \lambda$  (mesure de Lebesgue).

En effet  $\forall \varepsilon > 0$ , on a pour  $f \in K(\mathbb{R}^p)$  :

$$\begin{aligned} \mu_n f_\varepsilon^- &\leq \mu_n f \leq \mu_n f^+ \\ \mu_n f_\varepsilon^+ - \mu_n f_\varepsilon^- &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

pour  $n$  assez grand puisque :

$$|\mu_n f_\varepsilon^+ - \mu_n f_\varepsilon^-| \leq |\mu_n f_\varepsilon^+ - \lambda f_\varepsilon^+| + |\mu_n f_\varepsilon^- - \lambda f_\varepsilon^-| + |\lambda f_\varepsilon^+ - \lambda f_\varepsilon^-|$$

d'où :

$$\lambda f - 4\varepsilon \leq \mu_n f \leq \lambda f + 4\varepsilon$$

pour  $n$  assez grand puisque :

$$|\lambda f_\varepsilon^- - \lambda f| \leq \lambda f_\varepsilon^+ - \lambda f_\varepsilon^- \leq \varepsilon.$$

Rappelons que la convergence faible entraînant la convergence sur les fonctions intégrables au sens de Riemann à support compact, on a aussi convergence sur les fonctions indicatrices de pavés.

*Notations* : Si on considère une suite de mesures, nous notons  $\mu_n \rightarrow \mu$  la convergence faible (ou vague), c'est la convergence sur  $K(\mathbb{R})$  par  $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$  la convergence en loi (ou étroite) c'est-à-dire la convergence sur les fonctions continues bornées.

## II. — Le théorème limite à distance finie.

Ce théorème a été démontré dans [8] sous les hypothèses de théorème local et depuis la parution de notre démonstration [13] dans [11] par une autre méthode et de manière tout à fait indépendante.

1° **Théorème II-2** : Soit  $F \in \mathcal{D}(\alpha)$  une loi de  $\mathbf{R}^p$  :

$$(F^{*n}(\mathbf{B}_n x) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z, \quad \text{loi stable d'indice } \alpha)$$

a) si  $F$  est non latticielle :

$$\mathbf{B}_n F_x^{*n} \rightarrow \bar{q}\lambda$$

uniformément pour  $x \in \mathbf{K}$ , compact de  $\mathbf{R}^p$ .

b) si  $F$  est à valeurs entières, de PGCD  $d$  :

$$\frac{1}{d} \mathbf{B}_n^p \sum_{h=1}^d F_x^{*(n+h)} \rightarrow \bar{q}\lambda$$

uniformément pour  $x \in \mathbf{K}$ , compact de  $\mathbf{Z}^d$ .

c) si  $F$  est latticielle,  $p = 1$ , on a :

$$\frac{1}{n} \sum_1^n \mathbf{B}_k^p F_x^{+k} \rightarrow \bar{q}\lambda$$

la convergence est uniforme pour  $x \in \mathbf{K}$  compact de  $\mathbf{R}^p$ .

*Démonstration* : a) D'après le corollaire (I-4), il suffit de démontrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall f \in \hat{\mathbf{H}},$$

on a :

$$|\mathbf{B}_n^p E f(\mathbf{S}_n + x) - \bar{q}\lambda(f)| \leq \varepsilon$$

pour  $n > N(\varepsilon, f)$ .

Soit  $\varphi(t) = \exp - |t|^\alpha \chi(t)$ , choisissons  $\mathbf{B}(\varepsilon)$ , tel que :

$$1^\circ \quad \int_{\mathbf{B} < |t|} \exp - |t|^\alpha C(\theta) dt \leq \frac{\varepsilon}{2(|\lambda(f)| + 1)}$$

$$2^\circ \quad \sum_1^\infty 2^s \mathbf{B} \exp - 2^s \rho^s \mathbf{B}^\alpha \leq \frac{\varepsilon}{2} \| \hat{f} \|_\infty$$

où  $\rho$  est tel que pour  $|t| < c$  :

$$\frac{\operatorname{Re} \chi(t)}{\operatorname{Re} \chi\left(\frac{t}{2}\right)} > \rho \quad (\text{l'existence de } c > 0 \text{ résulte de lemme I-1}).$$

On a par le théorème d'inversion :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_n^p \mathbf{E}f(\mathbf{S}_n + x) &= \mathbf{B}_n^p \int_{\mathbf{R}^p} \hat{f}(-t) e^{itx} \varphi^n(-t) dt \\ &= \mathbf{I}_1(n, \mathbf{B}) + \mathbf{I}_2(n, \mathbf{B}) + \mathbf{I}_3(n) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1(n, \mathbf{B}) &= \mathbf{B}_n^p \int_{\|t\| < a\mathbf{B}_n^{-1}} \hat{f}(-t) \varphi^n(t) e^{itx} dx \\ \mathbf{I}_2(n, \mathbf{B}) &= \mathbf{B}_n^p \int_{a\mathbf{B}_n^{-1} < \|t\| < \varepsilon_0} \hat{f}(-t) \varphi^n(t) e^{itx} dt \\ \mathbf{I}_3(n) &= \mathbf{B}_n^p \int_{\|t\| > \varepsilon_0} \hat{f}(-t) \varphi^n(t) e^{itx} dt \end{aligned}$$

D'après le théorème de Lebesgue, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{I}_1(n, \mathbf{B}) = \hat{f}(0) \int_{\|t\| < \mathbf{B}} \exp - |t|^{\alpha} \mathbf{C}(\theta) dt$$

puisque :

$$\hat{f}\left(-\frac{t}{\mathbf{B}_n}\right) \varphi^n\left(\frac{t}{\mathbf{B}_n}\right) e^{it \frac{x}{\mathbf{B}_n}} \rightarrow \exp - |t|^{\alpha} \mathbf{C}(\theta),$$

uniformément en  $x$ , pour  $x = o(\mathbf{B}_n)$  (pour  $x \sim a\mathbf{B}_n$ , on retrouve le théorème de limite centrale), d'où par choix de  $\mathbf{B}$  :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{I}_1(n, \mathbf{B}) - \bar{q}\lambda(f)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{I}_2(n, \mathbf{B})| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

d'après le lemme (6-1) de [9].

Enfin posant  $\rho(\varepsilon_0, f) = \sup_{|t| > \varepsilon_0, t \in \text{support } \hat{f}} |\varphi(t)|$ , on a :

$$|\mathbf{I}_3(n)| \leq \rho^n \mathbf{B}_n \| \hat{f} \|_1$$

d'où

$$\lim |\mathbf{I}_3(n)| = 0$$

C. Q. F. D.

b) La démonstration de (B) est celle du théorème de limite locale classique. Pour démontrer c) (cf. [10]) ; supposons d'abord  $f \in \hat{\mathbf{H}}$  on a en supposant

que (ce qui ne restreint pas la généralité) support  $\bar{F} = a + hZ$ ,  $a$  irrationnel :

$$\begin{aligned}
 Ef(S_n + x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \varphi^n(t) \hat{f}(-t) dt \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2k+1}^{2(k+1)\pi} \varphi_1^n(u) \exp i(x + na)(u + 2k\pi) \times \hat{f}(-u - 2k\pi) du
 \end{aligned}$$

où  $\varphi_1(u) = e^{iau} \varphi(u)$

est une fonction périodique de période  $2\pi$ .

$Ef(S_n + x)$  convergeant uniformément vers 0, de par les propriétés de  $\hat{f}$ , on peut intervertir les signes  $\Sigma$  et  $\int$ , et effectuer le découpage de la partie 1° de ce théorème.

$$I_1(n) = B_n \int_{|u| < B/B_n} \Phi(u) du$$

où  $\Phi(u) = \varphi_1^n(u) \exp [i(u + 2k\pi)(x + na)] \hat{f}(-2k\pi - u)$ .

La convergence uniforme et le théorème de Lebesgue donnent :

$$I_1(n) = \bar{q} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{|u| < B} \exp -|u|^\alpha C(\theta) \hat{f}(-2k\pi) e^{i2k\pi(x+na)}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 |I_1(n) - \bar{q} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(-2k\pi) \exp 2k\pi i(x + na)| \\
 \leq \frac{\varepsilon}{2} \left| \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(-2k\pi) \exp 2k\pi i(x + na) \right|
 \end{aligned}$$

(bien entendu, la somme en  $k$  est en fait étendue au seul support de  $\hat{f}$ , c'est donc une somme finie).

On a donc :

$$I_1(n, B) \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(2k\pi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} M$$

La formule de Poisson, applicable à  $\hat{f}$  puisque  $f \in \hat{H}$  donne

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(-2k\pi) e^{i2k\pi a n} e^{2k\pi i x} = \sum_{-\infty}^{\infty} f(k + x - na) (< \infty).$$

La fonction  $f$  étant intégrable au sens de Riemann la suite  $k + x - na$  étant équirépartie puisque  $x$  est irrationnel, on a d'après le théorème de Weyl sur les suites équiréparties :

$$\left| \frac{I_1(1, B) + \dots + I(n, B)}{n} - \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k + x - la) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} M.$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k + x - la) = \lambda(f).$$

L'évaluation de  $I_2$  et  $I_3$  se fait sur l'expression directe de  $Ef(S_n + x)$  comme au théorème 1, de la manière suivante :

$$|I_2(n)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{h=1}^{\infty} \sup_{0 \leq u < 2\pi} |\hat{f}(u + 2k\pi)| \leq M_1 \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|I_3(n)| \leq B_n \| \hat{f} \|_1 \rho(\varepsilon_0, f)^n$$

d'où :

$$\lim |I_3(n)| = 0$$

REMARQUES : Si  $F \in (C)$ , on a convergence sur  $\hat{L}_1$ , si  $F$  a une densité dans  $L^p$ ,  $p > 1$ , on a convergence sur  $L^1$  c'est le théorème de limite locale ; il est d'ailleurs facile de vérifier que la convergence sur  $L_1$  entraîne l'existence d'une densité de  $p^e$  puissance sommable (pour  $n$  assez grand).

## 2° Étude de $F^{*n}(f_n)$

Pour les applications il est utile d'avoir une approximation de  $Ef_n(S_n + x_n)$  pour une suite d'indicateurs d'intervalles.

THÉORÈME II-3 : Si  $F \in \mathcal{D}(\alpha)$ , si :

$$I_n = (a_n - b_n, a_n + b_n)$$

$$\lim P(S_n \in I_n + x_n) \frac{B_n^p}{\lambda(I_n)} = 1$$

uniformément en  $x_n$ , sous les conditions suivantes :

- a)  $\lambda(I_n) = o(B_n)$
- b)  $x_n = o(B_n), \quad a_n = o(B_n)$
- c)  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \lambda(I_n) > a > 0$

ou  $\varphi \in (C)$ .

Si dans b) on remplace  $\circ$  par 0 il suffit de remplacer le 2<sup>e</sup> membre par 0(1).

*Démonstration* : Soit B défini par :

$$\int_{|t|>B} \exp - |t|^\alpha C(\theta) dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} 2^s B \exp - 2^{2s} \rho^s B^\alpha \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Effectuons le découpage du théorème I-1 pour évaluer  $Ef(S_n + x)$ .

$$|I_1(n, B)| \leq \left| \int_{|t|<B} \hat{f}_n(-t/B_n) / \hat{f}_n(0) \left[ \varphi^n\left(\frac{t}{B_n}\right) - \exp - |t|^\alpha \right] dt \right|$$

alors si  $|t| < A$ , on a, pour  $n \rightarrow \infty$  :

$$\frac{\hat{f}_n(t/B_n)}{\hat{f}_n(0)} \rightarrow 1$$

uniformément en  $t$  d'après le théorème de Lebesgue.

$$\lim I_1(n) = 0$$

On a :

$$I_2(n) \leq \frac{\varepsilon \|\hat{f}_n\|_\infty}{2 \hat{f}_n(0)}$$

$$I_3(n) \leq \rho^n(\varepsilon, n) B_n \frac{\|\hat{f}_n\|_1}{\hat{f}_n(0)}$$

où

$$\rho(\varepsilon, n) = \sup_{|t|>\varepsilon, t \in \text{support } \hat{f}_n} |\varphi(t)|$$

Soit  $\varepsilon$  fixé,  $g^\pm$  approchant  $1_{[-1,1]}$  à  $\varepsilon$  près dans  $\hat{H}$ .

Alors  $g^\pm\left(\frac{x - a_n}{b_n}\right)$  approche  $1_n$  à  $2\varepsilon b_n$  près si :

$$I_n = [a_n - b_n, a_n + b_n] \quad \text{puisque} \quad \left\| g^+\left(\frac{x}{b_n}\right) - g^-\left(\frac{x}{b_n}\right) \right\|_1 \leq 2\varepsilon b_n$$

Posons :

$$g_n^\pm(x) = g^\pm\left(\frac{x - a_n}{b_n}\right)$$

Supposons avoir montré que :

$$\frac{E g_n^\pm(S_n + y_n) B_n^p}{\lambda(I_n)} \rightarrow 1$$

uniformément en  $y_n$ , alors on aura :

$$\left| \frac{P(S_n \in I_n + y_n) B_n^p}{\lambda(I_n)} - 1 \right| \leq \frac{2\epsilon b_n}{\lambda(I_n)} \leq 2\epsilon$$

d'où le théorème.

On remarque que :

$$\frac{\lambda(g_n^\pm)}{\lambda(I_n^\pm)} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty) \quad (\text{propriétés de } g^\pm).$$

La première condition de convergence s'écrit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g^\pm \left( \frac{tb_n}{B_n} \right) e^{ia_n t/B_n} e^{iy_n t/B_n} b_n}{\hat{g}_n^\pm(0) b_n} \rightarrow 1$$

elle est vérifiée si  $a_n, y_n, b_n = o(B_n)$ .

On a :

$$\| \hat{g}_n \|_\infty = b_n \| \hat{g} \|_\infty \quad \text{d'où la 2}^\text{e} \text{ condition.}$$

Enfin :

$$\| \hat{g}_n \|_1 = \| \hat{g} \|_1.$$

Si  $b_n < M$  on en déduit la 3<sup>e</sup> condition.

$$\sup_{t > \epsilon_0, t \in \text{support } \hat{g}_n} |\varphi(t)| = \rho(\epsilon, b_n^{-1}).$$

Il suffit donc d'avoir :

$$\lim_n B_n \rho^n(\epsilon, b_n^{-1}) = 0$$

ce qui est vérifié sous la condition (C).

### 3° Réciproques du théorème (II-2).

THÉORÈME II-4 : Si  $B_n F^{*n} \rightarrow \lambda$ , et  $n^{-1/2} B_n \rightarrow C, C > 0$ , alors :

$$\int x^2 dF = C^2, \quad \int x dF = 0.$$

*Démonstration* : Supposons que  $B_n F^{*n} \rightarrow \lambda$ .

Alors si  $g \in \hat{K}$  :

$$B_n \int g(x) dF^{*n}(x) \rightarrow \hat{g}(0).$$

En effet on a alors  $\hat{g} \in K$  donc  $\hat{g} \in L^1$  :

$$B_n \int g(x) dF^{*n}(x) = B_n \int \varphi^n(t) \hat{g}(-t) dt.$$

Soit  $\varepsilon > 0$  fixé et  $V$  un voisinage de 0 tel que :

$$\sup_{t \in V} |\hat{g}(-t) - \hat{g}(0)| < \frac{\varepsilon}{2}; \quad \lambda(V) < 1.$$

On a :

$$B_n \int_{V^c} \varphi^n(t) \hat{g}(-t) dt \leq \sqrt{n} \rho^n \|\hat{g}\|_\infty$$

où

$$\rho = \sup_{t \in V^c \cap \text{support } \hat{g}} |\varphi(t)|$$

donc  $\rho < 1$  et  $\sqrt{n} \rho^n \rightarrow 0$ .

Pour  $n$  assez grand on a donc :

$$\left| B_n \int g(x) dF^{*n}(x) - \hat{g}(0) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + B_n \left| \int_V \varphi^n(t) (\hat{g}(-t) - \hat{g}(0)) dt \right|$$

Si  $V$  est assez petit (et on peut toujours le choisir de cette manière), on a sur  $V$  :

$$|\varphi(t)| \leq \exp -\delta^2 \frac{t^2}{2}, \quad t \in V, \quad \delta \text{ convenable.}$$

(L'existence de  $\delta$  est immédiate si  $\int x^2 dF = \infty$  et on prendra

$$\delta^2 = \frac{1}{2} \int x^2 dF$$

dans l'autre cas). On a donc :

$$B_n \left| \int_V \varphi^n(t) (\hat{g}(t) - g(0)) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 \int \sqrt{n} e^{-\delta^2/2 t^2 n} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\delta}}$$

D'où le résultat puisque  $\varepsilon$  est arbitraire.

Soit  $\varepsilon > 0$ . On a donc pour  $n$  assez grand ( $n > N(\varepsilon)$ ) :

$$1 - \varepsilon \leq C \sqrt{n} \int_V \varphi^n(t) dt < 1 + \varepsilon$$

où  $V$  est un voisinage de 0.



Soit :

$$\frac{1 - \varepsilon}{C} \leq \lim_{z \uparrow 1} \int_V \frac{\sqrt{1 - z} \operatorname{Re} (1 - z\varphi(t)) dt}{(1 - z \operatorname{Re} \varphi(t))^2 + z^2 (\operatorname{Im} \varphi(t))^2}$$

Si  $\int x^2 dF(x) = \infty$ , pour tout  $M > 0$ , il existe un voisinage  $V_M$  de 0 où  $1 - \operatorname{Re} \varphi(t) \geq Mt^2$ . On a (en remplaçant éventuellement dans ce qui précède  $V$  par  $V \cap V_M$ ) :

$$\frac{1 - \varepsilon}{C} \leq \lim_{z \uparrow 1} \int_V \frac{\sqrt{1 - z} dt}{(1 - z) + zMt^2} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1 + Mu^2} = \frac{1}{\sqrt{M}}$$

ce qui est absurde.

Donc  $\mu_2 = \int x^2 dF < \infty$ . Si  $\int x dF(x) = a \neq 0$ , il existe un voisinage  $V_a$  de 0 où :

$$\frac{\mu_2}{4} \leq \frac{1 - \operatorname{Re} \varphi(t)}{t^2} \leq \mu_2 \quad \text{et} \quad \frac{a}{2} \leq \left| \frac{\operatorname{Im} \varphi(t)}{t} \right|$$

Donc (en remplaçant éventuellement  $V$  par  $V \cap V_a$ ) on aurait :

$$\frac{1 - \varepsilon}{C} \leq \lim_{z \uparrow 1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 + z\mu_2 v^2) dv}{\left(1 + z\mu_2 \frac{v^2}{4}\right)^2 + \frac{a^2 z^2 v^2}{1 - z}} = 0$$

d'après le théorème de Lebesgue, et donc  $a = 0$ . Le théorème en découle, la valeur de  $\mu_2$  étant imposée par le théorème direct.

Nous faisons la conjecture suivante :

Si

$$n^{1/\alpha} \mathbf{L}(n) F^{*n} \rightarrow \lambda \quad \text{alors} \quad F \in \mathcal{D}(\alpha).$$

L'intérêt de cette conjecture provient de ceci pour qu'il y ait un théorème limite centrale pour les temps d'occupation d'un ensemble par une marche aléatoire il faut et il suffit que :

$$F^{*n}(\mathbf{I}) = \frac{1}{n^{1/\alpha} \mathbf{L}(n)} + o\left(\frac{1}{n^{1/\alpha} \mathbf{L}(n)}\right).$$

Cette conjecture est donc équivalente à celle-ci : les théorèmes limite centrale pour  $S_n$  sont équivalentes aux théorèmes limite centrale pour  $N_n(\mathbf{I})$  durée d'occupation de l'intervalle  $\mathbf{I}$  (pour  $1 \leq k \leq n$ ) ; cf. [2].

Le résultat est une simple application du théorème de Karamata sous l'hypothèse supplémentaire suivante ( $\mathcal{M}$ ).

$\mathcal{M}$  :  $\varphi(t)$  est monotone dans un voisinage de 0 (on a vu dans les préliminaires que si  $\varphi \in \mathcal{D}(\alpha)$  il en est ainsi).

En effet on sait que si  $\mu$  est mesure positive telle que :

$$T^{1/\alpha}L(T) \int_0^\infty e^{-uT} d\mu(u) \rightarrow 1(T \rightarrow \infty)$$

alors :

$$\frac{\mu(0, V)}{V^{1-1/\alpha}L(1/v)} \rightarrow 1(v \rightarrow 0).$$

Posant  $\mu_\varphi(v) = \lambda \{ t ; 1 - \varphi(t) < v^\alpha \}$  on a puisque :

$$B_n \int_V \varphi^n(t) dt \rightarrow 1$$

(même démonstration que dans le théorème précédent,  $V$  voisinage convenable de 0) ;

$$\int_{\varphi^{-1}(V)} t^n d\mu_\varphi(t) = \frac{1}{B_n} + o\left(\frac{1}{B_n}\right)$$

Le résultat qui suit est intéressant en lui-même et montre que  $\mathcal{D}(\alpha) \subset \mathcal{M}$ ,  $1 < \alpha \leq 2$ .

Soit  $\varphi(t) \in \mathcal{D}(\alpha)$ ,  $\alpha > 1$  ;  $\varphi$  est alors dérivable ; nous allons montrer que  $\varphi'$  est aussi une fonction à croissance régulière et qu'il y a un théorème pour les dérivées, et donc que  $\varphi \in \mathcal{M}$ .

PROPOSITION II-1. — Si

$$1 < \alpha \leq 2 ; F \in \mathcal{D}(\alpha) \quad \text{et} \quad -\log \varphi(t) = t^\alpha L(t^{-1})$$

Alors on a :

$$1^\circ \quad \text{Re } \varphi'(t) = -\alpha t^{\alpha-1} L(t^{-1}) + o(t^{\alpha-1} L(t^{-1}))$$

$$\begin{aligned} \text{Im } \varphi'(t) &= o(\text{Re } \varphi'(t)) && \text{pour } \alpha = 2 \\ &= o(\text{Re } \varphi'(t)) && \text{pour } 1 < \alpha < 2 \end{aligned}$$

$$\text{ou} \quad = O(\text{Re } \varphi'(t))$$

(la condition pour avoir  $o(\text{Re } \varphi'(t))$  étant donnée plus loin).

$$2^\circ \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \varphi^n\left(\frac{t}{B_n}\right) = \frac{t}{dt} z(t)$$

Autrement dit, dans le théorème limite centrale la convergence des fonctions entraîne celle des dérivées.

*Démonstration* : Le cas  $\int x^2 dF < \infty$  est trivial.

On suppose donc

$$\int x^2 dF = \infty \quad , \quad \int x dF = 0$$

On posera

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_{|u|>x} dF(u) \\ G(x) &= - \int_x^\infty dH(x) \end{aligned}$$

Étudions d'abord le cas  $1 < \alpha < 2$ . On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \varphi(t) &= - \int_0^\infty \cos tx dH(x) \\ (\operatorname{Re} \varphi(t))' &= \int_0^\infty x \sin tx dH(x) \\ &= - t \int_0^\infty \cos tx G(x) dx \end{aligned}$$

La dernière intégrale étant semi-convergente puisque  $G(x) \downarrow 0$ .

$$\begin{aligned} - \frac{\operatorname{Re} \varphi'(t)}{G(1/t)} &= \int_0^\infty \cos u \frac{G(u/t)}{G(1/t)} du \\ &= \int_0^{2l\pi} + \int_{2l\pi}^\pi \end{aligned}$$

puisque  $G(u) \downarrow 0$ , on a :

$$\int_{2l\pi}^\infty \leq 0 \left( \frac{G(2l\pi/t)}{G(1/t)} \right)$$

Comme  $F \in \mathcal{D}(\alpha)$ , on a :

$$H(u) = u^{-\alpha} L(u) \quad (\text{cf. [5], p. 175})$$

d'où

$$G(x) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} x^{1-\alpha} L(x) + o(x^{1-\alpha} L(x))$$

et d'après le théorème de Lebesgue :

$$\int_0^{2l\pi} \cos u \frac{G(u/t)}{G(1/t)} dt \xrightarrow{(t \rightarrow 0)} \int_0^{2l} \frac{\cos u}{u^{\alpha-1}} du$$

et :

$$O\left(\frac{G(2l\pi/t)}{G(1/t)}\right) = O((2l\pi)^{1-\alpha})$$

d'où le résultat, en faisant tendre 1 vers + ∞, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} \varphi'(t)}{\frac{\alpha}{\alpha - 1} t^{\alpha-1} L(1/t)} = \int_0^\infty \frac{\cos u}{u^{1-\alpha}} du.$$

Si l'on pose :

$$H^+(x) = \int_{u > x} dF, \quad x \geq 0$$

$$H^-(x) = \int_{u < -x} dF, \quad x \geq 0$$

alors si  $1 < \alpha < 2$ , et  $F \in \mathcal{D}(\alpha)$ , on a (cf. [5], p. 175).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{H^-(x)}{H^+(x)} = C \geq 0$$

On peut alors en écrivant :

$$\operatorname{Im} \varphi(t) = \int_0^\infty \sin tx (dH^+(x) - dH^-(x))$$

refaire le raisonnement fait sur  $\operatorname{Re} \varphi(t)$ . A ceci près que si  $C = 1$ , on obtient :

$$\operatorname{Im} \varphi(t) = o(t^{\alpha-1} L(t^{-1}))$$

(au lieu de 0 dans le cas  $C \neq 1$ )

(Remarquons tout de suite que dans le cas  $\alpha = 2$ , on obtient  $\circ$ ).

Si l'on a :

$$\lim_n \varphi^n\left(\frac{t}{B_n}\right) = z(t)$$

on a :

$$\lim_n L\left(\frac{t}{B_n}\right) \frac{n}{B_n^\alpha} = 1$$

d'où

$$\lim_n \frac{d}{dt} \left( \varphi^n\left(\frac{t}{B_n}\right) \right) = \lim_n -\frac{n}{B_n^{1-\alpha}} + \frac{\alpha}{B_n} L\left(\frac{t}{B_n}\right) \times \varphi^{n-1}\left(\frac{t}{B_n}\right) = \frac{d}{dt} z(t).$$

Le cas  $\alpha = 2$ .

Le cas  $\alpha = 2$  se démontre de la même manière en remarquant cependant que la fonction de queue a une forme particulière.

On a :

$$H(x) = \frac{\varepsilon(x)}{x^2} \exp \int_{\alpha}^x \frac{\varepsilon(u)}{u} du$$

où  $\alpha$  est défini par  $\int_0^{\alpha} yH(y)dy = 1$ .

De plus  $\exp \int_{\alpha}^x \frac{\varepsilon(u)}{u} du$  est une fonction à croissance lente, et :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} L(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \int_{\alpha}^x \frac{\varepsilon(u)}{u} du = \infty.$$

### III. — Marches aléatoires et lemme de Borel-Cantelli.

#### 1° Critères généraux et transience.

Soit une marche aléatoire stationnaire de loi  $F$ , de fonction caractéristique :

$$\varphi(t) = \exp - \psi(t).$$

THÉORÈME II-5 : a) si  $F$  satisfait (C), on a :

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dt}{[\operatorname{Re} \psi(t)]^{\alpha-1} L(1/\operatorname{Re} \psi(t))} < \infty$$

$$\Rightarrow \overline{\lim} \left\{ n^{\alpha} |S_n| < \frac{1}{L(n)} \right\} = \emptyset \quad \text{p. s.}$$

si  $L$  est à variation lente.

b) si :

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dt}{[\operatorname{Re} \psi(t)]^{\alpha-1} L(1/\operatorname{Re} \psi(t))} < \infty$$

alors  $S_{g(n)}$  est transiente, avec

$$g(n) = \int_1^n u^{\alpha} L(u) du.$$

*Démonstration* : Lemme abélien :

$\alpha$ ) si  $G(n) = n^\alpha L(n)$ ,  $G(n) \uparrow$ , où  $L(n)$  est à variation lente :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{G(n)} \rho^n = O\left(\frac{(-\log \rho)^{\alpha-1}}{L(1/\log \rho)}\right) \quad \text{pour } \rho \uparrow 1.$$

En effet :

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{G(x)} \rho^x \leq \sum_2^{\infty} \frac{1}{G(u)} \rho^u \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{G(x)} \rho^x$$

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^\alpha L(x)} \rho^x dx = - \int_a^{\infty} \frac{e^{-u}}{\left(\frac{-u}{-\log \rho}\right)^\alpha L\left(\frac{-u}{-\log \rho}\right)} \frac{du}{\log \rho}$$

Si

$$\rho \uparrow 1, \frac{L(u/\log \rho)}{L(1/\log \rho)} \rightarrow 1$$

d'où le résultat en appliquant le théorème de Lebesgue.

$\beta$ ) Si

$$g(n) = \left[ \int_1^n u^\alpha L(u) du \right]$$

on a :

$$\sum_1^{\infty} \rho^{g(n)} = O\left(-\frac{1}{\log^{1-\alpha} L(-1/\log \rho)}\right)$$

même démonstration.

a) Considérons l'intervalle  $\left(\frac{1}{G_n}, \frac{1}{G_n}\right) = I_n$ .

Soit  $f^+$  approchant à  $\varepsilon$  près  $1_{I_0}$ .

$$I_0 = (-1, 1)$$

$$h_n^+ = f^+(G_n x)$$

approche à  $G_n^{-1} \varepsilon$  près  $1_{I_n}$ .

$$E h_n^+(S_n) \geq P(S_n \in I_n)$$

donc d'après le lemme de Borel-Cantelli si :

$$\sum_1^{\infty} E h_n^+(S_n) < \infty \quad \text{alors} \quad \overline{\lim}_n (S_n \in I_n) = \emptyset \quad \text{p. s.}$$

Soit  $a > 0$  fixé, on a :

$$Eh_n^+(S_n) = \int \varphi^n(t) \frac{1}{G_n} f^+\left(\frac{t}{G_n}\right) dt$$

Comme  $f^+$  est à support compact, si la condition (C) est réalisée, on a :

$$\int_{|t|>a} \frac{1}{G_n} f^+\left(\frac{t}{G_n}\right) \varphi^n(t) dt \leq \rho^n(a) \|f^+\|_1$$

et :

$$\int_{|t|\leq a} \frac{1}{G(n)} f^+\left(\frac{1}{G_n}\right) \varphi^n(t) dt = \int_{u<aG(n)} \varphi^n\left(\frac{t}{G_n}\right) \hat{f}(u) du$$

d'où :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{|t|\leq a} \frac{1}{G(n)} f^+\left(\frac{t}{G_n}\right) \varphi^n(t) dt \right| \\ & \leq \int_{|t|<aG(n)} e^{-n\operatorname{Re}\psi\left(\frac{t}{G_n}\right)} |f^+(u)| du \leq \|f^+\|_\infty \int_{|u|<a} \frac{1}{G(n)} \varphi(t)^n dt \end{aligned}$$

d'où le résultat par le lemme.

Démontrons maintenant *b*).

Il suffit là encore de montrer que pour  $h^+ > 0$ ,  $h^+ \in \hat{K}$ , on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} Eh^+(S_{g(n)}) < \infty$$

on a :

$$\begin{aligned} Eh^+(S_{g(n)}) & \leq \left| \int_{|t|<a} \varphi(t)^{g(n)} h^+(t) dt \right| + \rho^n(a, h^+) \|h^+\|_1 \\ & \left| \int_{|t|<a} \varphi(t)^{g(n)} h^+(t) dt \right| \leq \|h^+\|_\infty \int_{|t|<a} \varphi(t)^{|g(n)|} dt \end{aligned}$$

d'où le résultat d'après le lemme.

## 2° Sur le lemme de Borel-Cantelli.

Nous démontrons ici une version simple du lemme de Borel-Cantelli, assez voisine du lemme de Chung-Erdos [9] mais qui s'applique plus aisément que celui-ci dans les problèmes de marches.

$\mathcal{B}_n$  désignant une suite croissante de  $\sigma$ -algèbres avec :

$(\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n) = \mathcal{B}$ ,  $(B_i)$ ,  $i = 1, \dots, n, \dots$ , une suite d'événements  $\mathcal{B}_n$ -mesurables.

Posons

$$N_n = \sum_{i=1}^n 1_{B_i}$$

LEMME II-2 : Posons :

$$Y_n^{(k)} = \frac{N_n}{E^{\mathcal{B}^k} N_n}$$

si

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E^{\mathcal{B}^k} N_n &= \infty \quad \text{p. s.} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E^{\mathcal{B}^k} Y_n^2 &\leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n = \Omega \quad \text{p. s.}$$

Remarquons que si  $M = 1$ , pour un  $k$  fixé et par ailleurs quelconque, le lemme est une simple conséquence de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev et on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{E^{\mathcal{B}^k} N_n} = 1 \quad (\text{en probabilité}).$$

*Démonstration* : On a,  $X$  et  $Y$  étant des variables aléatoires de  $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  :

$$E^{\mathcal{B}}(X + \lambda Y)^2 \geq 0$$

soit :

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{B}} X^2 + 2\lambda E^{\mathcal{B}} XY + \lambda^2 E^{\mathcal{B}} Y^2 &\geq 0 \\ (E^{\mathcal{B}} XY)^2 &\leq E^{\mathcal{B}} X^2 E^{\mathcal{B}} Y^2 \end{aligned}$$

inégalité de Schwarz conditionnelle.

On a :

$$\begin{aligned} Y_n &\geq 0 \quad \text{p. s.} \\ E^{\mathcal{B}^k} Y_n &= 1 \quad \text{p. s.} \end{aligned}$$

et par hypothèse :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E^{\mathcal{B}^k} Y_n^2 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{E^{\mathcal{B}^k} N_n^2}{(E^{\mathcal{B}^k} N_n)^2} \leq M \quad \text{p. s.}$$

Posons :

$$\begin{aligned} C_n &= \left\{ Y_n \leq \frac{1}{2} \right\}; \quad D_n = \left\{ Y_n > \frac{1}{2} \right\} \\ 1 - E^{\mathcal{B}^k}(Y_n 1_{C_n}) &= E^{\mathcal{B}^k}(Y_n 1_{D_n}) \leq (E^{\mathcal{B}^k} Y_n^2)^{1/2} (E^{\mathcal{B}^k} 1_{D_n})^{1/2} \\ Y_n 1_{C_n} &\leq \frac{1}{2} \Rightarrow E^{\mathcal{B}^k}(Y_n 1_{C_n}) \leq \frac{1}{2} \quad \text{p. s.} \end{aligned}$$



d'où :

$$E^{\mathcal{B}_k} 1_{D_n} \geq \frac{1}{4[E^{\mathcal{B}_k} Y_n^2]}$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E^{\mathcal{B}_k} \{ 1_{D_n} \} \geq \frac{1}{4M}$$

$$E^{\mathcal{B}_k} \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} Y_n > \frac{1}{2} \right\} = E^{\mathcal{B}_k} \left( \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \left\{ Y_m > \frac{1}{2} \right\} \right)$$

or

$$E^{\mathcal{B}_k} \left\{ \bigcup_{m=n}^{\infty} Y_m > \frac{1}{2} \right\} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} E^{\mathcal{B}_k}(1_{D_n}) \geq \frac{1}{4M} \quad \text{p. s.}$$

et par la continuité de  $E^{\mathcal{B}_k}$  pour les suites monotones :

$$E^{\mathcal{B}_k} \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} Y_n > \frac{1}{2} \right\} \geq \frac{1}{4M} \quad \text{p. s.}$$

or

$$\left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} Y_n > \frac{1}{2} \right\} \subset \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} N_n = \infty \right\} \quad \text{p. s.}$$

Posons :

$$B_{\infty} = \overline{\lim}_n N_n = \infty$$

$B_{\infty}$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable.

Comme  $(\bigvee_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_k) = \mathcal{B}$ , on sait qu'il existe une suite d'éléments  $C_k \in \mathcal{B}_k$  (cylindres de  $\mathcal{B}$ ) tels que :

$$P(C_k \Delta B_{\infty}) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

soit :

$$P(C_k^c \cap B_{\infty}) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

$$P(C_k^c \cap B_{\infty}) = \int_{C_k^c} E^{\mathcal{B}_k} B_{\infty} dP_{\mathcal{B}_k}$$

$$\geq \frac{1}{4M} P(C_k^c), \quad \text{puisque } C_k \in \mathcal{B}_k$$

d'où

$$P(C_k^c) \rightarrow 0,$$

soit :

$$P(B_{\infty}) = 1$$

C. Q. F. D.

Ce résultat est facile à appliquer quand on a une estimation de  $E^{\mathcal{B}_k} B_n$ .

Définitions : a) On dit que la suite  $m_i$  est *surlinéaire* si  $\exists C > 0$  tel que .

$$m_j - m_i \geq C m_{j-i}$$

b) On dit que la suite  $m_i$  est *régulière divergente* si  $\exists C > 0$  et une sous-suite  $m'_i$  de  $m_i$  tels que :

$$\sum_{i=1}^{\infty} (m'_i)^{-1} = \infty$$

$$(m'_{i+1} - m'_i) > C > 0$$

Soit alors  $S_k$  une marche aléatoire (ou simplement un processus de Markov stationnaire),  $\mathcal{B}_k$  la suite  $\uparrow$  de  $\sigma$ -algèbres adaptées à  $S_k$ , et  $B_n$  un événement  $\mathcal{B}_n$ -mesurable : soit  $m_n$  et  $m_{i,j}$  2 suites de nombres  $> 0$ , tels que l'on ait  $\forall k \in \mathbb{N}^*$  fixé,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P^{S_k = x} B_n) m_n^{-1} = 1 \quad \text{p. s.}$$

$$\lim_{\substack{j-i \rightarrow \infty \\ i > k}} (P^{S_k = x} (B_j / B_i)) m_{i,j}^{-1} = 1 \quad \text{p. s.} \quad \forall x \in \mathbb{R}^p$$

LEMME II-3a : Si

- a)  $m_{i,j} = (m_j^\alpha - m_i^\alpha)^{p/\alpha}$ ;  $1 \leq \alpha \leq 2$ ,  $p = 1, 2$
- b)  $m_i^\alpha$  est surlinéaire

- c)  $\sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-1} = \infty$

alors :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} B_n = \Omega \quad \text{p. s.}$$

LEMME II-3b : La conclusion subsiste en remplaçant b) par b') :

b')  $m_n$  est régulière divergente et  $1 < \alpha \leq 2$ ,  $p = 1$ .

LEMME II-4 : La conclusion subsiste en remplaçant a) et b) par :

$$m_n^{-1} = ng(n), \quad g \text{ fonction } \geq 0, \text{ croissante}$$

$$m_{i,j}^{-1} = j^{1-1/\alpha} (j-i)^{1/\alpha} g(j), \quad 1 \leq \alpha \leq 2, \quad p = 1$$

Démonstration : Elle consiste à se ramener au lemme II-2.

Posant  $N_n = \sum_1^n 1_{B_i}$ , il est clair d'après c) que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E^{\mathcal{B}^k} N_n = \infty \quad \text{p. s.}$$

puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E^{\mathcal{B}^k} N_n = \int_{\mathbf{R}^p} \lim_n E^x N_n dG(S_k = x)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow E^x N_n = \infty \quad \text{p. s.,} \quad \forall x \in \mathbf{R}^p$$

Il faut donc montrer que l'on a :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E^{\mathcal{B}^k} \left( \frac{N_n}{E^{\mathcal{B}^k} N_n} \right)^2 \leq M, \quad \forall k \in \mathbf{N}^*$$

Il suffit de montrer que si  $x \in \mathbf{R}^p$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E^{(S_k=x)} \left( \sum_{j=k+1}^n 1_{B_j} \right)^2}{\left( E^{\mathcal{B}^k} \sum_{j=k+1}^n 1_{B_j} \right)^2} \leq M \quad \text{p. s.}$$

$\forall \varepsilon > 0$ , pour  $n > n_0(\varepsilon) \forall k$ , on a :

$$(1 - \varepsilon) \sum_{i=n_0+1}^n m_i^{-1} \leq P^x \sum_{j=n_0+1}^n 1_{B_j} \leq (1 + \varepsilon) \sum_{i=n_0+1}^n m_i^{-1} + n_0$$

où  $P^x$  désigne  $P^{(S_k=x)}$ .

Posons :

$$s_n = \sum_{i=n_0+1}^n m_i^{-1}$$

$$R_{ij}^x = P^x B_i B_j - P^x B_i P^x B_j$$

On a les inégalités suivantes, d'après a) et b) (resp. b' ou les conditions de II-4).

$$\sum_{\substack{k \leq i \leq n_0 \\ i < j \leq n}} R_{ij}^x \leq n_0^2$$

$$\sum_{\substack{k \leq i \leq n_0 \\ i \leq j - i \leq n_0 \\ j < n}} R_{ij}^x \leq n_0 n_1 + n_0 (1 - 2^{-\alpha})^{1/\alpha} (1 + 2\varepsilon) s_n$$

avec  $n_1 = \inf n, n > 2n_0, \frac{m_{n_1}}{m_{n_2}} > 2$

$$\sum_{\substack{n_0 < i < n \\ j-i \leq n_0 \\ k < j < n}} R_{ij}^x \leq n_0 s_n$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k < i < n} m_i^{-1} < s_n$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{k < i < n} m_i^{-2} \leq 0$$

Il reste à étudier la partie principale :

$$T_n^x = \sum_{\substack{i \geq n_0 \\ j-i \geq n_0 \\ k < i < j \leq n}} R_{ij}^x$$

Démontrons d'abord le lemme I-4a :

La suite  $m_j^\alpha$  est surlinéaire

$$R_{ij}^x \leq \frac{1 + \varepsilon}{m_i(m_j^\alpha - m_i^\alpha)^{1/\alpha}}$$

$$\leq \frac{1 + \varepsilon}{m_i m_{j-i}}$$

d'où  $T_n^x \leq (1 + \varepsilon)s_n^2 \forall \varepsilon > 0$  pour  $n$  assez grand. C. Q. F. D.

LEMME II-3b : Considérons la sous-suite  $m_{i'}$ , telle que  $m_{i'+1} - m_{i'} \geq C$ .

$$\left( \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{\left( \left( \frac{m_j}{m_{i'}} \right)^\alpha - 1 \right)^{1/\alpha}} - \frac{1}{\frac{m_j}{m_{i'}}} \right) \frac{1}{m_{i'}} \leq C(c, \alpha) \int_1^\infty \left( \frac{1}{(x^\alpha - 1)^{1/\alpha}} - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$\leq C' ; \text{ puisque } \alpha > 1.$$

Dans ce cas, on peut donc prendre  $M = 1$  et l'on a donc en outre :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{n'}}{EN_{n'}} = 1 \quad (\text{en probabilité})$$

ou

$$N_{n'} = \sum_{i'=1}^{n'} 1_{B_{i'}}$$

LEMME 1-4 : Il se démontre comme I-5b en utilisant l'inégalité :

$$\frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{\left(1 - \frac{i}{j}\right)^{1/\alpha}} < C < \infty.$$

### 3° Critères sur la vitesse de récurrence.

Les théorèmes qui suivent ont été démontrés par Chung-Erdos et Spitzer dans des cas particuliers (lois absolument continues, théorème de limite locale valable ou existence de moments d'ordre 5).

En fait il s'agit d'applications très simples du théorème précédent II-3 et du lemme II-4.

THÉORÈME II-6 : a) Sous-suites récurrentes.

Si  $F \in \mathcal{DN}(\alpha)$ , si  $G(n) \uparrow$  alors :

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{G(n)^{1/\alpha}} < \infty \Rightarrow S_{G(n)} \text{ transiente}$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{G(n)^{1/\alpha}} = \infty$$

et  $G_n^{1/\alpha}$  surlinéaire ou régulière divergente  $\Rightarrow S_{G(n)}$  récurrente.

b) vitesse de récurrence.

Si  $F \in \mathcal{DN}(\alpha)$  et (C), si  $G'(n) \uparrow$  alors :

$$P(\overline{\lim} n^{1-1/\alpha} G(n) S_n = 0) = 1 \quad (\text{resp. } 0)$$

si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nG(n)} = \infty \quad (\text{resp. } < \infty)$$

Démonstration : D'après le théorème II-3, on a :

$$P(S_{G(j)} \in I / S_{G(n)} \in I) = P(S_{G(j)} - S_{G(i)} \in I) + o(P(S_{G(j)} - S_{G(i)} \in I))$$

$$= \frac{1}{(G(j) - G(i))^{1/\alpha}} + 0_{(j-i)} \left( \frac{1}{(G(j) - G(i))^{1/\alpha}} \right)$$

la transience résulte du lemme de Borel-Cantelli, la récurrence, si  $G(j)^{1/\alpha}$  est surlinéaire ou régulière divergente, du lemme (II-3).

Pour ce qui est de la 2<sup>e</sup> partie le théorème (II-2) montre, en désignant par  $I_n$  l'intervalle  $\left(-\frac{\varepsilon}{n^{1-1/\alpha}G(n)}, \frac{\varepsilon}{n^{1-1/\alpha}G(n)}\right)$  que sous la condition (C) :

$$P \{ (S_n + x_n)I_n \} = \frac{\bar{q} |I_n|}{n^{1/\alpha}} + o\left(\frac{|I_n|}{n^{1/\alpha}}\right) + u_n$$

où  $u_n$  est une série géométrique.

La transience résulte donc du lemme de Borel-Cantelli. Pour ce qui est de la récurrence, le même théorème montre, que puisque  $x_i \in I_1, \forall i$ , on a (uniformément) :

$$P(S_j \in I_j / S_i \in I_i) = \frac{1}{j^{1-1/\alpha}(j-i)^{1/\alpha}G(j)} + o\left(\frac{1}{j^{1-1/\alpha}(j-i)^{1/\alpha}G(j)}\right)$$

on peut donc appliquer le lemme (II-4).

**4° Remarques sur les théorèmes limites classiques.**

Le théorème II-3 étend le domaine de validité des théorèmes classiques (Feller [3], Kallianpur et Robbins [8]). Soit  $M_0$  la loi de Mittag-Leffler donnée par ses moments :

$$m_r = \frac{\Gamma(r-1)}{\Gamma(1+r(1-v))}$$

et  $\tau_n$  désignant l'instant de  $n^e$  retour dans un intervalle  $I_n$ , on a par exemple le théorème suivant (I contenant une valeur possible de  $S_n$ ).

THÉORÈME II-7 : Si  $F \in (\mathcal{D})$ , si  $F \in \mathcal{D}(\alpha), \alpha \geq 1$ , si  $S_n$  est récurrente

$$(B_n = n^{1/\alpha}L(n)),$$

si  $f$  est continue à support compact (et

$$\int f dx = \bar{f} \neq 0) \quad v = 1 - 1/\alpha,$$

alors :

$$\alpha) \frac{1}{C_n} \sum_1^n f(S_k) \xrightarrow{\text{loi}} \bar{f} (\alpha \sin \pi/\alpha)^{-1} M_v, \quad C_n = \begin{cases} n^v L^{-1}(n) & 1 < \alpha \\ \log n L^{-1}(n) & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\beta) \frac{\tau_n(I)}{D_n} \xrightarrow{\text{loi}} |I|^{-1/v} Z_v (\alpha \sin \pi/\alpha \sin \pi/2\alpha)^{1/v}, \quad D_n = n^{1/v} L_1(n) \quad \alpha > 1$$

où  $L_1$  fonction à variation lente est définie dans la démonstration.

γ) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$a) \quad \int x^2 dF < +\infty$$

$$b) \quad \frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}} \text{loi normale}$$

$$c) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n f(S_k) \xrightarrow{\text{loi}} f 2^{-1} M_{1/2}.$$

Indiquons simplement la méthode de démonstration.

Une modification simple de la démonstration de Robbins-Kallianpur (évaluation directe des moments) due à la présence d'une fonction  $L(n)$  à variation lente montre que sous les hypothèses du théorème :

$$\frac{N_n(I)}{|I| n^\nu L^{-1}(n)} \alpha \sin \pi/\alpha \xrightarrow{\text{loi}} M_\nu$$

Associons à la fonction  $L(n)$  la fonction  $L_1(k)$  définie par :  $L_1(k) = L^\nu(n_k)$  où  $n_k = [\text{plus petite solution de } y^\nu L^{-1}(y) = k]$ .

Si alors  $n(k, x)$  est une suite d'entiers telle que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{kx^{-1}}{n(k, x)^\nu L^{-1}(n(k, x))} = 1, \quad \text{alors} \quad \lim_k \frac{n(k, x)}{k^{1/\nu} L_1(k)} x^{1/\nu} = 1,$$

et  $L_1$  est à variation lente : il suffit de vérifier que :

$$\lim_k \frac{L(n(k, x))}{L(n_k)} = 1 \quad \text{pour tout} \quad x > 0,$$

or  $\frac{n(k, x)}{n_k}$  reste bornée pour tout  $x > 0$ .

La partie β) (due à Feller) dans le cas où  $F \in \mathbb{Z}$  est une application des relations de renouvellements. On déduit alors de ceci et de

$$P \{ N_n < k \} = P \{ \tau_k > n \}$$

que :

$$\frac{N_n}{n^\nu L^{-1}(n)} \xrightarrow{\text{loi}} C(\nu) M_\nu \quad \text{entraîne} \quad \frac{\tau_k}{k^{1/\nu} L_1(k)} \xrightarrow{\text{loi}} (C(\nu))^{-1/\nu} M_\nu^{-1/\nu}$$

car

$$\lim_k P \left\{ \frac{N_{n(k, x)}}{n(k, x)^\nu L^{-1}(n(k, x))} < x \right\} = \lim_k P \left\{ \frac{\tau_k x^{1/\nu}}{k^{1/\nu} L_1(k)} > 1 \right\}$$

L'application du théorème de Feller au cas «  $F \in \mathcal{Z}$  et  $F \in \mathcal{DN}(\alpha)$  » montre par ailleurs  $\beta$ ) et donc l'identité en loi :

$$[Z_{v(\alpha \sin \pi/\alpha \sin \pi/2\alpha)} 1/v]^{-v} = M_v$$

(formule de Skohorod) d'où  $\alpha$ ) et  $\beta$ ).

### CHAPITRE III

## ÉTUDE DES MARCHES $S_n^{(a)} = \sum_{k=1}^n a_k Y_k$

### ET APPLICATIONS

Nous nous sommes proposés de montrer que le comportement de

$$S_n^{(a)} = \sum_{k=1}^n a_k Y_k,$$

où  $(a_k) = a$  est une suite de constantes réelles et où  $Y_k$  est une suite de variables aléatoires indépendantes,  $Y_k \in \mathcal{DN}(\alpha)$ , ne dépend que de  $\alpha$ , à condition que les  $a_k$  ne décroissent pas trop vite (auquel cas  $S_n^{(a)}$  converge) ou ne croissent pas trop vite (auquel cas  $S_n^{(a)}$  n'a aucune régularité).

On posera :

$$\begin{aligned} F_a^{*n} &= F(a_1 x) * F(a_2 x) * \dots * F(a_n x) \\ \varphi(t) &= E \exp it Y_k \\ \Phi_a^n(t) &= \Pi_1^n \varphi(a_k t) \end{aligned}$$

On employera aussi les notations suivantes :

$$\begin{aligned} m_n &= \sup_{1 \leq k \leq n} |a_k| \\ \mu_n^\alpha &= \sum_{k=1}^n |a_k|^\alpha \end{aligned}$$

La condition  $\mu_n \rightarrow \infty$  est indispensable pour obtenir des théorèmes limites.



Si  $\mu_n \rightarrow C < \infty$ ,  $S_n^{(a)}$  peut converger ; d'autre part si l'on a :

$$\overline{\lim} \frac{m_n}{\mu_n} > C,$$

les  $\frac{a_k Y_k}{\mu_n}$  ne sont pas des variables aléatoires uniformément asymptotiquement négligeables. Il n'est pas possible dans ce cas, comme le montrent de nombreux contre-exemples de généraliser les théorèmes limites classiques.

Nous supposons donc toujours dans ce qui suit que la suite (a) vérifie l'hypothèse :

$$(H_1) \quad \boxed{\frac{m_n}{\mu_n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)}$$

et que F vérifie :

$$(H_2) \quad \boxed{F^{*n}(n^{1/\alpha}x) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z_\alpha}$$

$Z_\alpha$  loi stable d'indice  $\alpha$  ( $Z_\alpha$  symétrique).

### I. — Théorèmes limites.

THÉORÈME III-1 : *Sous les hypothèses (H<sub>1</sub>) et (H<sub>2</sub>) on a :*

a) *le théorème de limite centrale :*

$$F_a^{*n}(\mu_n x) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z_\alpha$$

b) *le théorème de limite locale :*

Si F admet une densité  $f$ , telle que  $f^{*m} \in L^p$  pour un  $m \geq 1$ , un  $p > 1$  alors :

$$f_a^{*n}(x) - q\left(\frac{x}{\mu_n}\right) \rightarrow 0$$

uniformément pour  $x \in \mathbb{R}^p$ .

c) *le théorème limite à distance finie.*

Si  $\varphi$  vérifie (C) :

$$\mu_n^p F_a^{*n}(x) \rightarrow \bar{q}\lambda.$$

*Démonstration :* a) On a :

$$- \log \varphi(t) = |t|^\alpha \chi(t)$$

et

$$\lim_{|t| \rightarrow 0} \chi(|t| \theta) = C(\theta)$$

uniformément en  $\theta \in S^p$ .

Il faut montrer que :

$$\Phi_a^n\left(\frac{t}{\mu_n}\right) \rightarrow \exp - C(\theta) |t|^\alpha \quad \text{pour} \quad |t| \leq a$$

avec :

$$\Phi_a^n\left(\frac{t}{\mu_n}\right) = \prod_{j=1}^n \varphi\left(\frac{s_j t}{\mu_n}\right)$$

Soit :

$$\varepsilon(\eta) < \sup_{|t| < \eta} |\chi(t) - C(\theta)|$$

Pour  $|t| \leq a$ , on a :

$$\frac{a_k t}{\mu_n} \leq \frac{a m_n}{\mu_n}$$

$$\varepsilon\left(a \frac{a_k}{\mu_n}\right) \leq \varepsilon\left(a \frac{m_n}{\mu_n}\right) = \varepsilon_1(n)$$

$$\left| \Phi_a^n\left(\frac{t}{\mu_n}\right) - \exp - |t|^\alpha C(\theta) \right|$$

$$= \exp - |t|^\alpha C(\theta) \left| 1 - \exp - \sum_{k=1}^n \frac{a_k^\alpha}{\mu_n^\alpha} \right| |t|^\alpha \left( \chi\left(\frac{a_k t}{\mu_n}\right) - 1 \right) \leq 0(\varepsilon_1(n))$$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_a^n\left(\frac{t}{\mu_n}\right) = \exp - |t|^\alpha C(\theta) \quad \text{d'où a).}$$

Posons alors  $\theta_n = \frac{1}{\sqrt{m_n \mu_n}}$

Comme  $\frac{m_n}{\mu_n} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) on a  $m_n \theta_n \rightarrow 0$ ,  $\mu_n \theta_n \rightarrow \infty$  ; et enfin

$$\mu_n \exp - \theta_n^\beta \mu_n^\beta \rightarrow 0$$

pour tout  $\beta > 0$ .

Pour démontrer *c*) d'après le corollaire II, il suffit de montrer que pour  $f \in \hat{H}$  on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n |Ef(S_n^a + x) - \bar{q}\lambda(f)| = 0$$

uniformément pour  $x \in K$  compact.

Soit  $\varepsilon > 0$  ; on sait (lemme I-1) qu'il existe  $c > 0$ ,  $\rho > 0$  tels que pour  $|t| < c$ , on ait :

$$\frac{\operatorname{Re} \chi(t)}{\operatorname{Re} \chi(t/2)} \geq \rho.$$

Soit  $f \in \hat{H}$  et  $B$  tel que l'on ait :

$$\int_{|t| > B} \exp(-|t|^\alpha \gamma) dt \leq \frac{\varepsilon}{2(|\lambda(f)| + 1)}$$

avec

$$\gamma = \inf_{S^p} C(\theta) > 0$$

et

$$\sum_{s=1}^{\infty} B^{2^s} \exp \frac{-B^{2^{2s}} \rho^{2^s}}{2^s} \leq \frac{\varepsilon}{2 \|\hat{f}\|_\infty}$$

La formule d'inversion donne :

$$\mu_n^p Ef(S_n + x) = \int_{\mathbb{R}^p} \hat{f}\left(-\frac{t}{\mu_n}\right) e^{itx/\mu_n} \Phi_a^n\left(\frac{t}{\mu_n}\right) dt$$

Posons :

$$I_1(n, B) = \int_{|t| < B} \left( \hat{f}\left(-\frac{t}{\mu_n}\right) e^{-itx/\mu_n} \Phi_a^n\left(\frac{t}{\mu_n}\right) - \hat{f}(0) \exp(-|t|^\alpha C(\theta)) \right) dt$$

$$I_2(B) = \int_{|t| > B} \exp(-|t|^\alpha C(\theta)) dt$$

$$I_3(B, n) = \int_{B < |t| < \theta_n \mu_n} \hat{f}\left(-\frac{t}{\mu_n}\right) e^{itx/\mu_n} \Phi_a^n\left(\frac{t}{\mu_n}\right) dt$$

$$I_4(n) = \int_{|t| > \theta_n \mu_n} \hat{f}\left(-\frac{t}{\mu_n}\right) e^{itx/\mu_n} \Phi_a^n\left(\frac{t}{\mu_n}\right) dt$$

Le choix de  $B$  montre que :

$$I_2(B) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

soit :

$$\left| \int \hat{f}(0) \exp(-t^\alpha A(\theta)) dt - \bar{q}\lambda(f) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

B étant fixé,  $\hat{f}$  borné, le théorème de Lebesgue entraîne :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1(n, B) = 0$$

Soit  $k$  défini par :

$$2^k B \leq \mu_n \theta_n < 2^{k+1} B (k \rightarrow \infty).$$

On a :

$$I_3(n, B) \leq \sum_{s=0}^{\infty} \int_{2^s B}^{2^{s+1} B} \left| \Phi_a^n \left( \frac{t}{\mu_n} \right) \right| dt \| \hat{f} \|_{\infty}$$

Choisissons  $n_1$  tel que si  $n > n_1$ , on ait :

$$\sup_{|t| < \theta_n \mu_n} \left| \frac{a_k t}{\mu_n} \right| < C,$$

ce qui est possible d'après les propriétés de  $\theta_n$ .

On a :

$$\begin{aligned} \left| \varphi \left( \frac{a_k t}{\mu_n} \right) \right| &= \exp \frac{-|t|^\alpha |a_k|^\alpha}{\mu_n^\alpha} \operatorname{Re} \chi \left( \frac{t a_k}{\mu_n} \right) \\ - \log \varphi \left( \frac{a_k t}{\mu_n} \right) &\leq -2^\alpha \rho \log \varphi \left( \frac{a_k t}{\mu_n} \right) \end{aligned}$$

et par itération :

$$\leq -2^{-as} \rho^s \log \varphi \left( \frac{a_k t}{2^s \mu_n} \right)$$

Si  $2^s B < t < 2^{s+1} B$ , on a :

$$|t| \leq B \frac{m_n}{\mu_n}$$

donc pour  $n > n_2(B)$ , on a :

$$- \log \varphi \left( \frac{a_k t}{2^s \mu_n} \right) \leq \frac{a_k^\alpha B^\alpha}{2^\alpha \mu_n^\alpha} \gamma$$

Soit

$$|\Phi_a^n(t)| \leq \exp - \frac{2^{as} \rho^s B^\alpha \gamma}{2^\alpha}$$

Soit

$$I_3(n, B) < \sum_1^{\infty} 2^s B \exp \left( \frac{-2^{as} \rho^s B^\alpha \gamma}{2^\alpha} \right) \| \hat{f} \|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

$n > n_1, n_2$  d'après le choix de B.

La condition (C) étant vérifiée, on a pour  $n$  assez grand ( $n > n_3$ )

$$\sup_{|t| > \theta_n} |\varphi(a_k t)| \leq \left| \varphi\left(\frac{a_k \theta_n}{2}\right) \right| \leq \exp - \left(\frac{a_k \theta_n}{4} d\right)$$

Soit

$$\begin{aligned} |I_4(n)| &\leq \mu_n^p \|\hat{f}\|_1 \prod_{k=1}^n \sup_{|t| > \theta_n} |\varphi(a_k t)| \\ &\leq \mu_n^p \|f\|_1 \exp\left(\frac{-\mu_n^\alpha \theta_n^\alpha}{4^\alpha} \gamma\right) \\ &\leq \|\hat{f}\|_1 \mu_n^p \exp(-\mu_n^{\alpha/2} \gamma') \end{aligned}$$

avec  $\gamma' = \gamma |a_1|^{-1/2} 4^{-\alpha}$  d'où  $\lim_n I_4(n) = 0$  donc  $\forall \varepsilon > 0$ , on a :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |E f(S_n + x) - \bar{q} \lambda(f)| \leq \varepsilon \quad \text{C. Q. F. D.}$$

b) supposons pour simplifier  $p = 1$  (ce qui ne modifie pas la démonstration).

Si  $f^{*m} \in L^r$ ,  $r > 1$ , alors on sait d'après [5], théorème 9-6, p.190 que  $\varphi^n \in L^1$  pour

$$n > \frac{m_r}{r-1} = 1.$$

Soit  $l_1 > 1$ ,  $l_1$  entier pair ; le produit de  $l_1$  fonctions de  $L^1$  est sommable d'après une propriété classique des espaces  $L^{2k}$  ; on peut donc appliquer la formule d'inversion pour  $n \geq l_1$  puisque :

$$\varphi(a_1 t) \dots \varphi(a_{l_1} t) \in L^1.$$

On a :

$$\left| \mu_n f_a^{*n}(x) - q\left(\frac{x}{\mu_n}\right) \right| = \left| \int \left( \exp - |t|^\alpha - \Phi_a^n\left(\frac{t}{\mu_n}\right) e^{itx/\mu_n} \right) dt \right|$$

$\varepsilon > 0$  étant donné, effectuons le même découpage que pour le théorème précédent, B étant choisi de manière analogue avec :

$$\lambda(f) = 0 \quad , \quad \|\hat{f}\|_\infty = 1$$

On a, par le théorème de Lebesgue :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1(B, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left( \exp - |t|^\alpha - e^{itx/\mu_n} \Phi_a^n\left(\frac{t}{\mu_n}\right) \right) dt$$

uniformément pour  $x \in \mathbb{R}$ .

Les évaluations de  $I_2(n)$  et  $I_3(n)$  sont celles du c). Enfin :

$$|I_4(n)| \leq \int_{|t| > \theta_n \mu_n} \left| \Phi_a^n \left( \frac{t}{\mu_n} \right) \right| dt \leq \|\Phi_a^{l_1}(t)\|_1 \mu_n \Pi_{k=l_1+1}^n \sup_{|t| > \theta_n} |\varphi(a_k t)|$$

d'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_4(n) = 0$  C. Q. F. D.

REMARQUE : Si  $m_n < M$ ,  $\forall n$ , la condition (C) n'est pas nécessaire pour énoncer le c). De manière plus générale il suffit d'avoir :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^p \varphi^n(m_n) = 0.$$

## II. — Transience et récurrence de $S_n^{(a)} = \sum_{k=1}^n a_k Y_k$ .

On suppose toujours  $(H_1)$  et  $(H_2)$  réalisées. De plus  $F \in (C)$  (Cette condition pouvant être supprimée si  $m_n < M$ ,  $\forall n$ ).

THÉORÈME IV-2 : Sous ces hypothèses :

1°  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^p} < \infty \Rightarrow S_n^{(a)}$  transiente.

2° Si :

$\alpha)$   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^p} = \infty$

$\beta)$   $\frac{\sup_{i < k < j} |a_k|}{(\mu_j^\alpha - \mu_i^\alpha)^{1/\alpha}} \rightarrow 0$

$\gamma)$   $\mu_n^\alpha$  est surlinéaire  $p = 1$ ,  $1 \leq \alpha \leq 2$  où  $\mu_n^p$  est régulière divergente  $p = 1$ ,  $1 \leq \alpha \leq 2$ , alors  $S_n^{(a)}$  est récurrente.

REMARQUES : a)  $a_n \uparrow \rightarrow \mu_n^\alpha$  surlinéaire.

b) Si  $p > 2$ , ou si  $\alpha < 1$  les conditions  $\alpha)$ ,  $\beta)$ ,  $\gamma)$  n'entraînent pas la récurrence.

Par exemple, considérons le mouvement brownien  $\xi_t$  à 3 dimensions, et la suite  $t_n = n^{1/3}$ . On a :

$$P(\xi_{t_n}(-1,1)) = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Les conditions  $\alpha, \beta, \gamma$ , sont réalisées pour :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_1^n (\xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}), \quad \xi_{t_0} = 0 \\ &= \sum_1^n (t_k - t_{k-1})^{1/2} X_k \end{aligned}$$

où les  $X_k$  sont indépendantes, et l'on sait par ailleurs que le processus  $\xi_t$  est transient (cf. [23]) c'est-à-dire que  $\forall T > 0$ .

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} 1_t(X_{t \vee T}) = 0 \quad \text{p. s.}$$

Ce même raisonnement vaut pour les processus stables sur la droite tels que  $\alpha < 1$ .

Nous faisons la conjecture suivante, si  $T_n = \sum_1^n X_k$  est transiente et

$S_n = \sum_1^n a_k X_k$  est divergente p. s. alors  $S_n$  est transiente.

Elle est vérifiée si la loi de  $X_k$  est une loi stable.

REMARQUE : Par contre  $\sum_1^n X_k$  récurrente et  $\sum_1^\infty \frac{1}{\mu_n} = \infty$ ,  $p = 1$ ,  $\alpha = 2$

n'entraîne pas nécessairement la récurrence.

Il est possible de construire un contre exemple.

*Démonstration du théorème IV-2 :*

1° Soit  $I$  un intervalle d'après le théorème (IV-1) on a :

$$P(S_n \in I) = \frac{\bar{q}(I)}{\mu_n} + o\left(\frac{1}{\mu_n}\right)$$

d'où le 1° par application du lemme de Borel-Cantelli.

2° Pour appliquer les lemmes (I-5a) (I-5b), il faut évoluer  $P(S_j \in I / S_i \in I)$ .

Si

$$\frac{\sup_{i \leq k \leq j} a_k}{(\mu_j^\alpha - \mu_i^\alpha)^{1/\alpha}} \rightarrow 0,$$

la méthode du théorème d'approximation vaut pour  $j - 1 \rightarrow \infty$ , en posant :

$$\theta_{j-i} = \frac{1}{\sup_{i \leq k \leq j} a_k (\mu_j^\alpha - \mu_i^\alpha)^{1/\alpha}}$$

et on déduit le 2° des lemmes (I-5).

REMARQUE : Si  $a_k \uparrow$ , l'hypothèse  $\frac{a_j^\alpha}{\mu_j^\alpha - \mu_i^\alpha} \rightarrow 0$  est vérifiée sous la condition (F) suivante, facile à vérifier et qui s'applique aux suites à croissance régulière.

(F) : il existe  $\gamma > 0, \rho > 0, n_0 \geq 1$ , tels que :

$$\frac{\mu_{\lfloor \rho n \rfloor}}{\mu_n} \geq \gamma > 0, \quad \forall n > n_0.$$

En effet on a plus précisément :

$$\frac{a_j^\alpha}{\mu_j^\alpha - \mu_i^\alpha} \leq \frac{c}{j-i}, \quad \text{pour } c > 0$$

inégalité utile dans certaines applications.

Supposons d'abord  $j - i \leq \frac{1 - \rho}{2\rho} i$

$$\begin{aligned} \mu_i^\alpha &\geq \gamma^\alpha \mu_{\lfloor 2/\rho \rfloor}^\alpha \\ &\geq \gamma^\alpha \mu^\alpha \left[ \frac{2_{j\rho}}{1 + \rho} \right] \\ \mu^\alpha \left[ \frac{2_{j\rho}}{1 + \rho} \right] &\geq \mu_j^\alpha + a_j^\alpha \frac{1 - \rho}{1 + \rho} j \end{aligned}$$

La fonction (de  $i$ )  $\mu_i^\alpha$  est convexe puisque  $a_n \uparrow$  ; donc :

$$\mu_j^\alpha - \mu_i^\alpha \geq \frac{j-i}{i} \mu_i^\alpha$$

Soit :

$$\frac{a_j^\alpha}{\mu_j^\alpha - \mu_i^\alpha} < \frac{i}{j(j-i)} \frac{1}{(1-\rho)\gamma^\alpha}$$

Supposons maintenant  $j - i > \frac{1 - \rho}{2\rho} i$

$$\mu_i^\alpha \leq \frac{i}{j} \mu_j^\alpha$$



En effet :

$$\gamma^\alpha \left[ \mu_{[\rho j]}^\alpha + \sum_{[\rho j]+1}^j a_k^\alpha \right] \leq \mu_{[\rho j]}^\alpha$$

$$\sum_{[\rho j]+1}^j a_k^\alpha \leq \mu_{[\rho j]}^\alpha \frac{1 - \gamma^\alpha}{\gamma^\alpha}$$

enfin :

$$\sum_{1+[\rho j]}^j a_k^\alpha \leq j(1 - \rho)a_{[\rho j]}$$

soit :

$$\frac{\mu_j^\alpha}{a_j^\alpha} \geq c_1 j^{1/\alpha} \quad \text{d'où le résultat.}$$

### III. — Le cas entier et le cas mixte.

Il serait intéressant d'étendre les résultats précédents au cas où  $F$  est à valeurs entières. Cependant il se présente alors des difficultés arithmétiques que les coefficients soient entiers ou non.

Bien que le corollaire I-4 évite toutes les difficultés qui proviennent du comportement asymptotique de  $a_k t$ , le problème essentiel est d'obtenir des résultats sur la distribution, modulo  $Z\pi$  de  $a_k t$  lorsque  $t \rightarrow 0$ , il faut que la suite  $a_k t$  soit assez uniformément répartie. De manière précise, on peut obtenir des théorèmes limites lorsque la propriété (P) suivante est vérifiée par la suite  $a_k$ .

(P) : Soit  $K(n, t) = \{ \text{nombre de } k, 1 \leq k \leq n, |a_k t| > \varepsilon(n) \pmod{(Z\pi)} \}$   
 $\varepsilon(n)$  est une fonction telle que  $\exists b > 0, n\varepsilon(n) > n^b$ .

La propriété (P) est vraie si  $\exists c > 0$ , avec  $K(n, t) > cn$  pour tout  $t$ ,

$$\frac{a_n}{\sqrt{m_n \mu_n}} \leq t \leq a.$$

Nous avons exposé ici les résultats concernant le cas le plus simple  $a_n = n^\alpha$ . Les méthodes employées se transposent immédiatement au cas  $a_n = [n^\alpha]$ ,  $a_n = H(n)$ ,  $a_n = [H(n)]$  où  $H$  est une fonction concave.

De plus, nous exposerons les résultats dans le cas où  $\alpha = 2$ , et où  $d = 2$  ( $d = \text{PGCD}$  des différences de valeurs de  $F$ ), puisque nous avons en vue les applications au calcul du nombre de certaines partitions, cas où  $F$  est une variable de Bernoulli.

En montrant que (P) est satisfaite pour  $a_n = n^s$ , nous obtiendrons le théorème suivant :

THÉORÈME IV-3 : Si l'on considère les marches :

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha X_k,$$

si  $X_k \in \mathcal{DN}(2)$   $X_k$  étant à valeurs entières le PGCD des différences des valeurs étant 2 ; on a :

a)  $S_n$  est récurrente si  $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ .

$S_n$  est transiente si  $\alpha > \frac{1}{2}$ .

b) Si  $G(n)$  est le nombre d'entiers  $k, 1 \leq k \leq n$ , tels que  $[k^\alpha]$  soient impairs, le nombre  $P_n$  de partitions en 2 ensembles I et J tels que :

$$\sum_I [i^\alpha] = \sum_J [j^\alpha], 1 \leq \alpha \quad I + J = 1, 2, \dots, n, \quad \text{alors}$$

$P_n = 0$  si  $G(n)$  est impair,

$$P_n = \frac{2^{n+1}}{n^{\alpha+1/2}} \frac{2\alpha + 1}{2\pi} + o\left(\frac{2^{n+1}}{n^{\alpha+1/2}}\right) \quad \text{si } G_n \text{ est pair.}$$

c) Le nombre de solutions de l'inéquation :

$$\left| \sum_{k=1}^n \pm k^\alpha \right| \leq \varepsilon$$

est :

$$Q_n = \frac{2^n}{n^{\alpha+1/2}} \sqrt{\frac{2\alpha + 1}{2\pi}} \varepsilon + o\left(\frac{2^n}{n^{\alpha+1/2}}\right)$$

avec  $\alpha \geq -1/2, \alpha \notin \mathbb{Z}$ .

1<sup>er</sup> cas :  $a_n = n^\alpha, \alpha > 1, \alpha \notin \mathbb{Z}$ .

On appellera  $E_q^\alpha(k, \eta)$  le système d'inégalités suivant ( $\eta > 0, p \in \mathbb{Z}^+$ )

$$(k + i)^\alpha t \leq \eta \pmod{Z\pi} \quad \text{pour } i = 0, \dots, p.$$

On a donc si  $E_q^\alpha(k, \eta)$  est réalisé :

$$(k + i)^\alpha t = m_i \pi + \eta_i \quad \text{avec } m_i \in \mathbb{Z}, |\eta_i| < \eta.$$

On a :

$$(k+i)^{\alpha}t = k^{\alpha}t \left( 1 + \frac{\alpha_i}{k} + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-p+1)}{p!} \frac{i^p}{k^p} + \frac{\varepsilon_p^i}{k^p} \right)$$

avec 
$$\varepsilon_p^i = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad i = 1, \dots, p.$$

On appellera  $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$  la suite d'entiers tels que :

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i i^l = 0, \quad l = 0, \dots, p-1.$$

et tels que parmi les solutions du système homogène à coefficients entiers ci-dessus (dont le déterminant est non nul) on ait :

$$\sum_{i=0}^p \lambda_i i^p > 0 \quad \text{et minimal.}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^p \lambda_i (k+i)^{\alpha}t &= \left( \sum_{i=0}^p \lambda_i i^p \right) \frac{\alpha(\alpha-p+1)}{p!} k^{\alpha-p}t + O\left(\frac{1}{k}\right) \\ &= A_p k^{\alpha-p}t + O\left(\frac{1}{k}\right) \\ &= \sum_{i=0}^p \lambda_i m_i + \eta' \end{aligned}$$

avec 
$$\eta' \leq \sum_1^p |\lambda_i| \eta.$$

D'après le corollaire (I-4), il suffit de montrer que  $\forall f \in (\hat{H})$ , on a :

$$\lim_n \text{Ef}(S_n)\mu_n = \bar{q} \int f(x)dX$$

pour obtenir l'analogie du théorème (IV-1). On a :

$$\begin{aligned} \text{Ef}(S_n) &= \int \hat{f}(-t)\Phi_n^{\alpha}(t)dt \\ &= \int_{|t| < \theta_n} + \int_{\theta_n < |t| < \frac{\theta_0}{n^{\alpha}}} + \int_{\frac{\theta_0}{n^{\alpha}} < |t| < \frac{1}{n^{\gamma}}} + \int_{1/n^{\gamma} < |t| < a} \end{aligned}$$

(où  $\theta_0$  est une constante  $> 0$ , et  $a$  est défini par :

$$\begin{aligned} a &= \sup (|t|, t \in \bar{f}) \\ &= I_1(n) + I_2(n) + I_3(n) + I_4(n) \end{aligned}$$

L'évaluation de  $I_1(n)$  est celle de l'intégrale correspondante dans la démonstration du théorème (IV-1). On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n I_1(n) = \bar{q} \int f.$$

Évaluation de  $I_2(n)$ .

On a :

$$\theta_n = (a_n \mu_n)^{-1/2} = O((2\alpha + 1)^{1/4} n^{-(\alpha + 1/4)}).$$

L'inégalité  $\frac{1}{n^{1/4}} \leq a_k t \leq \frac{\theta_0}{2} < \frac{1}{2}$  est réalisée par :

$$k^\alpha \left( \frac{1}{n^{1/4}}, \frac{\theta_0}{2} \right) t^{-1} \quad \text{et} \quad t \in \left( \theta_n, \frac{\theta_0}{n^\alpha} \right).$$

Cette inéquation admet donc au moins  $\frac{n}{2}$  solutions, on a donc :

$$I_2 \leq \frac{1}{n^\alpha} e^{-O(n^{1/2})} = o\left(\frac{1}{\mu_n}\right)$$

Évaluation de  $I_3(n)$ .

Soit  $\gamma > 0$ , posons  $t = n^{-\lambda(t)}$ , on a  $\gamma < \lambda(t) < \alpha$  ( $\gamma$  sera choisi ultérieurement).

Soit

$$0 < a^\alpha < b^\alpha < \pi, \quad \text{et} \quad \rho = \sup_{t \in (a, b)} \varphi(t),$$

l'inéquation  $a^\alpha \leq k^\alpha t \leq b^\alpha$  admet au moins  $(b - a)n^{\gamma/\alpha}$  solutions d'où :

$$I_3(n) \leq \frac{1}{n^\alpha} \rho^{O(n^{\gamma/\alpha})} = o\left(\frac{1}{\mu_n}\right).$$

Évaluation de  $I_4(n)$ .

Supposons  $E_{p+1}^\alpha(k, \eta)$  réalisé avec  $k \geq \frac{n}{2}$  et  $p = [\alpha]$ . On a :

$$t = \left( \sum_0^{p+1} \lambda_i m_i \right) k^{p+1-\alpha} + \eta' k^{p+1-\alpha} A_{p+1}^{-1} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Comme  $p + 1 - \alpha > 0$ ,  $k > \frac{n}{2}$  et  $|t| < a$ , on a nécessairement pour  $n$  assez grand :

$$\sum_0^{p+1} \lambda_i m_i = 0.$$

Posons :

$$\eta = \frac{10^p}{n^\gamma} \quad \text{avec} \quad 1 + p - \alpha < 2\gamma < 1.$$

D'après l'inégalité précédente, on a :

$$|t| \leq C_n^{-\gamma} n^{1+p-\alpha} + 0\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{avec} \quad C < \sum_1^n |\lambda_i|,$$

ce qui est impossible. Car

$$t > \frac{10^p}{n^\gamma},$$

donc  $E_{p+1}^\alpha(k, \eta)$  étant impossible pour  $n$  assez grand :

$$k > \frac{n}{2}, \quad t > \frac{10^p}{n^\gamma}, \quad \eta < \frac{1}{n^\gamma}$$

on a :

$$I_4(n) \leq \exp - 0(n^{1-2\gamma}) \quad \text{et} \quad 1 - 2\gamma > 0$$

d'où 
$$I_4(n) = 0\left(\frac{1}{\mu_n}\right).$$

On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n E f(S_n) = \bar{q} \int f(x) dx$$

2<sup>e</sup> cas :  $a_n = n^\alpha$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ .

$$\begin{aligned} E f(S_n) &= \int_{|t| < \theta_n} \hat{f}(-t) \Phi_{-a}^n(t) dt + \int_{\theta_n < |t| < \frac{\theta_0}{a_n}} \hat{f}(-t) \Phi_a^n(t) dt \\ &\quad + \int_{\frac{\theta_0}{a_n} < |t| < a} \hat{f}(-t) \Phi_a^n(t) dt \\ &= I_1(n) + I_2(n) + I_3(n), \quad \text{avec} \quad f \in \hat{H}. \end{aligned}$$

$$0 < \theta_0 < \frac{1}{2}, \quad a = \sup t, \quad t \in \hat{f}.$$

L'évaluation de  $I_1(n)$  et  $I_2(n)$  est la même que dans le cas  $\alpha > 1$ . Si  $n2^{-1/\alpha} \leq k \leq n$ , il existe  $c'$  et  $c$  tels que :

$$cn^{-1} \leq ((k + 1)^\alpha - k^\alpha)t \leq cn^{\alpha-1}a$$

Soit en posant  $\varepsilon = 1 - \alpha$ , et puisque :

$$((k + 1)^\alpha - k^\alpha)t \rightarrow 0,$$

on a :

$$|I_3(n)| \leq e^{\frac{\theta_0^2 n^\varepsilon}{4}} = o\left(\frac{1}{\mu_n}\right).$$

Des évaluations identiques peuvent être faites pour :

$$E^{S_i}(f(S_j - S_i)).$$

3<sup>e</sup> cas :  $a_n = n^p, p \in \mathbb{Z}^+$ .

On a :

$$P(S_n = 0) = \int_{-\theta_n}^{2\pi - \theta_n} \Phi_a^n(t) dt$$

puisque  $\varphi(a_k t)$  est périodique, de période  $\leq 2\pi$ , si  $a_k \in \mathbb{Z}$ . On écrit :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} &= \int_{|t| < \theta_n \pmod{\pi}} + \int_{\theta_n < t < \frac{\theta_0}{a_n} \pmod{\pi}} + \int_{\frac{\theta_0}{a_n} < t < \frac{10^k}{n^p} \pmod{\pi}} \\ &+ \int_{t > \frac{10^k}{n^p} \pmod{\pi}} \\ &= I_1(n) + I_2(n) + I_3(n) + I_4(n). \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \mu_n I_1(n) &= \mu_n \int_{|t| < \theta_n} + \mu_n \int_{|\pi - t| < \theta_n} \\ &= \mu_n \left[ \frac{\bar{q}}{\mu_n} (1 + (-1)^{G(n)}) \right] + o\left(\frac{1}{\mu_n}\right) \mu_n \end{aligned}$$

avec  $G(n) =$  nombre de  $k$  impairs,  $1 \leq k \leq n$ .

En effet :

$$\int_{|\pi - t| < \theta_n} = \Pi_1^n \varphi(a_k \pi) \int_{|t| < \theta_n}$$

et l'évaluation de  $\int_{|t| < \theta_n}$  est celle de cas précédents.

De plus si  $G(n)$  est impair, il est clair que le support de  $F$  étant inclus dans  $2Z + 1$ , on a  $P(S_n = 0)$ .

Pour évaluer  $I_4(n)$ , prenons par exemple  $p = 2$ , on pose  $\eta = n^{-\gamma}$ , et on se restreint à  $t \in 10\eta, \pi - 10\eta$  (la majoration obtenue étant de par la périodicité, valable pour  $t \in \pi + 10\eta, 2\pi - 10\eta$ ).

Supposons  $E_2^2(k, \eta)$  vérifiée.

En multipliant les inéquations de  $E_2^2(k, \eta)$  par  $\lambda_i$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1 & k^2 t &\leq \eta & (\text{mod } \pi) \\ \lambda_1 &= -2 & k^2 t + 2kt + t &\leq \eta & (\text{mod } \pi) \\ \lambda_2 &= 1 & 4k^2 t + 4kt + t &\leq \eta & (\text{mod } \pi) \\ & & \Rightarrow \left| t - \frac{\pi}{2} \right| &\leq 2\eta & (\text{mod } \pi) \end{aligned}$$

puisque  $t > 10\eta$ .

On écrit alors  $E_2^1(k, \eta)$  et  $E_2^1(2k, \eta)$  on obtient les inégalités :

$$\begin{aligned} \left| 2kt + t - \frac{\pi}{2} \right| &\leq 2\eta + t \\ \left| 4kt + t - \frac{\pi}{2} \right| &\leq 2\eta + t \end{aligned}$$

qui sont incompatibles.

Une démonstration du même type vaut pour  $p$  quelconque, en écrivant

$$E_p^p(k) \quad \text{et} \quad E_p^p\left(\sum_{i=0}^{p-1} i^p \lambda_i k\right).$$

On obtient ainsi :

$$|I_4(n)| \leq 2\pi e^{-\frac{1}{n^{2\gamma}} \sum_0^p \lambda_i i^p} \leq O(e^{-n^\alpha}) = O\left(\frac{1}{\mu_n}\right).$$

La partie a) est démontrée d'après le lemme de Borel-Cantelli si  $\alpha > \frac{1}{2}$ , d'après le lemme I-4 si  $\alpha \leq \frac{1}{2}$  (car les évaluations faites valent aussi pour  $P(S_j - S_i = 0)$ , lorsque  $j - i \rightarrow \infty$ ).

Enfin b) et c) sont obtenus en prenant comme variables des variables de Bernouilli tels que  $p(Y = -1) = p(Y = 1) = \frac{1}{2}$ , (on est bien dans le cas  $d = 2$ ).

IV. — Théorèmes limites dans le cas non stationnaire.  
Applications aux processus stables.

1° Soit 
$$S_a^{(n)} = \sum_{k=1}^n a_k Y_k,$$

les hypothèses  $H_1$ ) et  $H_2$ ) étant toujours vérifiées respectivement par (a) et F loi des  $Y_k$ , on suppose de plus que  $F \in (C)$ . Il est possible d'obtenir par la méthode utilisée dans (III) des théorèmes limites pour

$$N_n(V) = \sum_1^n V(S_a^k)$$

où  $V$  est intégrable Riemann à support compact. Indiquons simplement le résultat suivant qui résulte lui, du lemme (I-4b).

Soit  $\mu_n$  tel que

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\mu_n} = \infty \quad \text{et} \quad \mu_{n+1} - \mu_n > C > 0,$$

alors si  $p = 1$  et  $\alpha > 1$ , on a :

$$\lim \frac{N_n(V)}{\bar{q} C_\alpha M_n} = 1, \quad \text{avec} \quad M_n = \sum_1^n \mu_k.$$

Par exemple, si  $\delta$  est la fonction indicatrice du point 0, on a :

$$\frac{\sum_1^n \delta\left(\sum_{i=1}^k \pm i\right)}{\sqrt{2\pi \log n}} \xrightarrow{Pr} 1$$

2° Applications aux processus stables.

En appliquant ces résultats au cas particuliers de processus stables  $\xi_{t_n}$ , considérés sur une suite d'instants  $t_n$ , alors on a :

THÉORÈME III-4 :  $\xi_{t_n}$  récurrente

$$\Leftrightarrow \sum_1^\infty \frac{1}{t_n^{p/\alpha}} = \infty$$

pour  $p = 1, 1 \leq \alpha \leq 2$   $p = 2, \alpha = 2$ .



L'application de la méthode des suites divergentes donne :

THÉORÈME : Si  $\alpha > 1$ ,  $p = 1$ , on a :

$$\frac{\int_0^T V(\xi(u))u^{-\beta} du}{\log T} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{Pr} \alpha \int V(x)dx$$

pour toute  $V \in L^1$ ,

$$\int V(x)dx \neq 0.$$

Posons :

$$S(T) = \frac{\int_0^T V(\xi(t)^\alpha)dt}{\log T}$$

Il suffit de montrer que :

$$\lim_T \frac{ES^2(T)}{(ES(T))^2} = 1$$

Soit :

$$E \int_0^T \int_0^T V(\xi(t)^\alpha)V(\xi(u)^\alpha)dtdu - E \int_0^T V(\xi(t)^\alpha)dt E \int_0^T V(\xi(u)^\alpha)du \leq 0 (\log T), \quad \text{si } \alpha > 1.$$

La démonstration est en tout point identique (les intégrales remplaçant les séries) à celles faites pour démontrer le lemme I-4b. Nous ne la reproduisons donc pas.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHUNG et ERDOS, *Annals A. M. S.*, 1947, p. 1003.
- [2] DARLING et KAC, *Trans. A. M. S.*, 1957, p. 444.
- [3] FELLER, *Trans. A. M. S.*, 1949, p. 98.
- [4] FELLER, *Probability theory*.
- [5] GNEDENKO et KOLMOGOROV, *Limit distributions for sums of independent random variables*.
- [6] GNEDENKO, *Wis. Zeit. Humboldt Univ. Berlin*, 1953, n° 4.
- [7] KAHANE J. P., *Séries de Taylor aléatoires gaussiennes (à paraître)*.
- [8] KALLIANPUR et ROBBINS, *Duke J.*, 1954, p. 285.
- [9] RACEVA, *Lvov. Gos. Univ. Uc. Zap. 29 Math. Mec.*, 1956, p. 5.

- [10] SHEPP, *Annals of Math. Stat.*, vol. **35**, n° 1, 1964.
- [11] STONE, *Annals of Math. Stat.*, vol. **36**, n° 2, 1965.
- [12] SKOHROD, *Dokl. Akad. Nauk*, n° 98, 1954, p. 731.
- [13] BRETAGNOLLE et DACUNHA-CASTELLE, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **258**, 1964, p. 4910.
- [14] BRETAGNOLLE et DACUNHA-CASTELLE, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **256**, 1963, p. 4584.
- [15] BRETAGNOLLE et DACUNHA-CASTELLE, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **258**, 1964, p. 57.
- [16] BRETAGNOLLE et DACUNHA-CASTELLE, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **258**, 1964, p. 422.

*Manuscrit reçu le 17 octobre 1967.*

---