ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN BRETAGNOLLE
DIDIER DACUNHA-CASTELLE

Sur une classe de marches aléatoires

Annales de l'I. H. P., section B, tome 3, nº 4 (1967), p. 403-431
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1967__3_4_403_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. III, n° 4, 1967, p. 403-431. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Sur une classe de marches aléatoires

par

Jean BRETAGNOLLE et Didier DACUNHA-CASTELLE
(Institut Henri Poincaré).

RÉSUMÉ. — Nous avons essayé d'étendre aux marches aléatoires sur R, ayant une partie absolument continue, certains résultats de Spitzer sur les marches sur Z, d'une part ; d'autre part nous avons démontré une forme générale du théorème de renouvellement, pour les densités et caractérisé les ensembles de récurrence des marches transientes ayant une espérance finie.

SUMMARY. — We try to extend to random walks in R (with an absolutely continuous part) some Spitzer's results about random walks in Z ; we study recurrent random walks and transient random walk with finite mean, in this later caser we have studied the sets of recurrence and a general form of renewal theorem for densities.

Nous nous sommes proposé d'étudier les marches aléatoires

$$S_n = \sum_1^n X_k,$$

où les X_k sont des variables aléatoires indépendantes, à valeur dans $\mathbb{R}^n$ et dont la loi a une partie absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$.

On sait que la théorie des marches aléatoires à valeur dans Z^n a trouvé une forme assez élaborée dans les travaux de Spitzer [*1*].

Le succès de cette théorie est dû à la non-utilisation de l'analyse harmonique (remplacée par les idées de la théorie du potentiel), qui introduit des hypothèses restrictives artificielles.

Il n'a pas été possible dans le cas de marches sur $\mathbb{R}^n$ de faire une théorie analogue et l'analyse harmonique reste, dans ce cas, un des outils principaux. Ces résultats sont donc limités.

L'introduction d'une partie absolument continue amène l'étude de certains noyaux-mesures, permet l'étude des processus-trace sur un borélien.

On peut faire l'étude dans le cadre de noyaux qui sont des distributions tempérées, les modifications sont mineures sauf en ce qui concerne l'étude des processus-trace (qui n'est pas faite).

Dans la première partie, nous avons construit une marche régularisée associée à S_n dont la loi a une densité de $\hat{L}_1$.

Dans la deuxième partie, nous étudions les marches transientes avec $E|X| < \infty$, en caractérisant les ensembles (non bornés) de récurrence.

Dans les troisième et quatrième parties nous avons étudié les marches récurrentes.

Presque tous les résultats s'étendent aux processus à accroissements indépendants.

PREMIÈRE PARTIE

NOTATIONS ET DÉFINITIONS

a) Soit X_k une suite de variables aléatoires, équidistribuées, indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On désignera par F la loi de X_k ainsi que la mesure image de P par X_k. On désigne par $\varphi(t)$ la transformée de Fourier de F, et on pose

$$\varphi(t) = R(t) + iI(t),$$

où R est la partie réelle de φ. On désigne par $K(\theta)$ la quantité :

$$K(\theta) = \sup_{|t|>\theta} |\varphi(t)| ; \qquad \theta \geqq 0.$$

On pose $\mu = EX_k$; $m_p = E|X_k|^p$, $\sigma^2 = m^2 - \mu^2$.

Enfin on pose

$$H(x) = \int_{|u|\geqq x} dF(u) ; \qquad 0 \leqq x.$$

La marche associée aux variables X_k est :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k ;$$

on pose

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} F^{*n} ; \qquad F^{*0} = \delta.$$

On dit que S_n est récurrente si :

$$\overline{\lim_n} \, (S_n \in I) = \Omega \text{ p. s. pour tout intervalle I ouvert ;}$$

si S_n n'est pas récurrente, elle est transiente et :

$$\overline{\lim_n} \, (S_n \in I) = \Phi \text{ p. s.}$$

La condition nécessaire et suffisante de récurrence s'écrit :

$$\lim_{z \uparrow 1} \int_{|t| < \theta} \mathrm{Re} \frac{dt}{1 - z\varphi(t)} = \infty$$

pour un certain $\theta > 0$ (cf. [*1*]).

Enfin λ désigne la mesure de Lebesgue, et [G] la variation totale d'une mesure G.

b) Donnons une construction concernant les lois ayant une partie absolument continue F_1, $F_1 \not\equiv 0$.

Il existe un ensemble borélien A et des nombres $\alpha_0 > 0$ et ρ, $0 \leqq \rho < 1$ tels que :

$$\frac{dF_1}{dy} \leqq \alpha_0 \qquad \text{pour} \qquad y \in A$$

$$\int_A \frac{dF_1}{dy} dy = 1 - \rho$$

En effet $[F_1] > 0$. Posons $A_\alpha = \left\{ x,\ \alpha < \frac{dF}{dx} \leqq \alpha + 1 \right\}$

$$[F_1] = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \int_{A_\alpha} \frac{dF_1}{dx} dx \leqq \sum_{0}^{\infty} (\alpha + 1) \frac{dF_1}{dx} dx > 0.$$

Définissons alors la mesure absolument continue F_2 par :

$$\frac{dF_2}{dx} = 1_A \frac{dF_1}{dx}$$

Posons enfin :

$$F_a = \left(\frac{dF_2}{dx}\right)^{*2}$$

$$[F_a] = 1 - \rho' > 0 ; \qquad \rho' = \rho^2$$

Définissons par récurrence $F_a^{(n)}$;

$$F_a^{(n)} = F^{*2} * F_a^{(n-1)} + (F^{*2n-2} - F_a^{(n-1)}) * F_a$$

C'est-à-dire que si l'on pose :

$$F^{*2} = F_a + F_b^{*2}$$

on a

$$F_a^{(n)} = F^{*2} * F_a^{(n-1)} + F^{*2n-2} * F_a$$

et donc

$$[F_a^{(n)}] = 1 - \rho'^n$$

La convolution d'une mesure quelconque par une mesure absolument continue F_a de dérivée bornée par α_0 est une mesure du même type que F_a. Donc $F_a^{(n)}$ a les mêmes propriétés que F_a.

Posant :

$$\| f \|_{p,\theta} = \left(\int_{|t|>\theta} | f(t) |^p dt \right)^{1/p} ; \qquad p \geqq 1$$

et désignant par $\varphi_a^{(n)}$ la transformée de Fourier de $F_a^{(n)}$ on a :

$$\| \varphi_a^{(n)} \|_{1,\theta} \leqq n\beta(\theta)^{n-1}\alpha_0 \tag{1-1}$$

avec

$$\beta(\theta) = \max (K^2(\theta), \rho').$$

En effet :

$$\varphi_a^{(n)}(t) = \varphi^2(t)\varphi_a^{(n-1)}(t) + \varphi_a(t)(\varphi^{2n}(t) - \varphi_a^{(n-1)}(t))$$

$$\| \varphi_a^{(n)} \|_{1,\theta} \leqq K^2(\theta) \| \varphi_a^{(n-1)} \|_{1,\theta} + \rho'^n \| \varphi_a \|_{1,\theta}$$

$$\| \varphi_a \|_{1,\theta} \leqq \int \left(1_A \frac{dF_1}{dx} * 1_A \frac{dF_1}{dx} \right) dx \leqq \alpha_0$$

puisque

$$1_A \frac{dF_1}{dx} \in L^2(R^p, dx),$$

d'où

$$\| \varphi_a^2 \|_{1,\theta} \leqq \alpha_0 K^2(\theta) + \alpha_0 \rho,$$

et le résultat par récurrence. Nous employerons systématiquement l'opération de régularisation qui consiste à remplacer la marche S_n par la marche de (sous) variables aléatoires indépendantes X_k de la loi $F_a^{(k)}$ (la mesure image de P par $\sum_1^n X_k$ est de masse totale $\geqq 1 - \rho'^n$ d'où l'expression de (sous) variables).

DEUXIÈME PARTIE

ENSEMBLE DE RÉCURRENCE DANS LE CAS TRANSIENT, A UNE DIMENSION

Sauf certaines remarques sur les autres cas, on supposera que X_k est à valeurs dans R. Le cas qui nous intéresse essentiellement dans cette partie est le cas où la loi des X_k est telle que $\mu = EX_k$ existe, $\mu \neq 0$; S_n est donc transiente. Notre but sera de caractériser les ensembles de récurrence. A cette fin, on est d'abord conduit à démontrer une version renforcée du théorème de récurrence classique de Smith [*8*] ; avec une technique assez voisine de celle de Feller [2], mais fondée sur la loi des grands nombres. Le théorème 1 étant un théorème démontré par Ch. Stone [7] sous l'hypothèse $EX_k^2 < \infty$. Remarquons enfin que si F a une densité $f(x)$, $f \in L^p$, $f(x) \to 0$ $(x \to \infty)$, la démonstration donne très simplement le théorème de Smith [*8*], la mesure V étant alors identiquement nulle. Nous démontrerons essentiellement les deux résultats suivants.

THÉORÈME II-1 : *Si* F *a une partie absolument continue non nulle, si* $E|X_k| < \infty$, $\mu > 0$, *il existe une mesure bornée positive* V *et une fonction continue* $g(x)$ *telles que :*

$$\underline{U = V + g\lambda;}$$

$$\underline{\lim_{x \to \infty} g(x) = \frac{1}{\mu}, \qquad \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0.}$$

THÉORÈME II-2 : *Sous les hypothèses du théorème 1 ; si* A *désigne un ensemble borélien, les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

1) $\underline{P(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n \in A) = 1}$ (A récurrent)

2) $\underline{\lambda(A \cap (0, \infty)) = \infty}$

3) $\underline{U(A \cap (0, \infty)) = \infty}$

Posant

$$U_2 = \sum_{n\geq 0} F^{*2n} = \sum_{n=1}^{\infty} F_b^{*2n} + \sum_{0}^{\infty} F_a^{(n)} \qquad F_a^{(0)} = \delta$$

on a :

$$U = (\delta + F) * U_2$$

Supposons avoir démontré que $U_2 = V + g\lambda$ avec

$$[V] < \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = \frac{1}{x}, \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0,$$

g continue.

On a alors :

$$U = V + F * V + g\lambda * (\delta + F)$$
$$= W + g'\lambda$$

avec $$[W] = [V + F * V] < \infty$$

et $$g' = g * (\delta + F)$$

$$\lim_{x\to\infty} g'(x) = \frac{2}{\mu},$$

puisque g étant bornée on peut appliquer le théorème de Lebesgue au produit $g * (\delta + F)$.

De même $\lim_{x\to-\infty} g'(x) = 0$.

Il suffit donc de démontrer le théorème 1 pour la marche

$$S_n^{(2)} = (X_1 + X_2) + \ldots + (X_{2n-1} + X_{2n}) + \ldots$$

Utilisant la décomposition de F^{*2} vue dans la première partie on se ramène à la proposition suivante :

Proposition : Sous les hypothèses : $E|X_k| < \infty$, $EX_k = 1$, $F = F_b + q\lambda$ où F_b est une mesure positive, $[F_b] = \rho < 1$ et q une fonction positive

$q \in L^1(R^p, dx)$, la transformée de Fourier φ_a de q étant aussi dans $L^1(R, dx)$, on a :

$$U = V + g\lambda \,; \qquad U = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}$$

où V est une mesure positive de variation totale $\dfrac{1}{1-\rho}$ et g une fonction continue telle que $g \geqq 0$.

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$$

Démonstration : On pose

$$V = \sum_{1}^{\infty} F_b^{*n} \quad \text{d'où} \quad [V] = \frac{1}{1-\rho}$$

et

$$\varphi_a^{(n)}(t) = \varphi^n(t) - \varphi_b^n(t)$$

On a vu dans la première partie que $\varphi_a^{(n)} \in L^1$, on peut donc poser

$$\Pi g(x) = \lim_{z \uparrow 1} \mathrm{Re} \int e^{-itx} \sum_{1}^{\infty} z^n \varphi_a^{(n)}(t) dt \tag{2-1}$$

$$= \lim_{z \uparrow 1} A(\theta, x, z) - B(\theta, x, z) + C(\theta, x, z) \,; \qquad \theta > 0.$$

$$A(\theta, x, z) = \mathrm{Re} \int_0^{\theta} e^{-itx} \frac{z\varphi(t)}{1 - z\varphi(t)} dt \tag{2-2}$$

$$B(\theta, x, z) = \mathrm{Re} \int_0^{\theta} e^{-itx} \frac{z\varphi_b(t)}{1 - z\varphi_b(t)} dt \tag{2-3}$$

$$C(\theta, x, z) = \mathrm{Re} \int_{\theta}^{\infty} e^{-itx} \sum_{n \geqq 1} z^n \varphi_a^{(n)}(t) dt \tag{2-4}$$

Étude de B : Comme $\| \varphi_b \| = \rho < 1$ on a :

$$\lim_{z \uparrow 1} B(\theta, x, z) = \int_0^{\theta} \frac{e^{itx} \varphi_b(t)}{1 - \varphi_b(t)} dt$$

et par le lemme de Riemann-Lebesgue $\lim\limits_{|x|\to\infty} \lim\limits_{z\uparrow 1} B(\theta, x, z) = 0.$

Étude de C : puisque

$$\| \varphi_a^{(n)} \|_{1,\theta} \leqq n\beta(\theta)^{n-1}\alpha_0$$

d'après (1-1) la série de terme général $z^n\varphi_a^{(n)}$ converge dans $L^1([\theta, \infty[, dt)$ et d'après le lemme de Riemann-Lebesgue on a :

$$\lim_{|x|\to\infty} \lim_{z\uparrow 1} C(\theta, x, z) = 0$$

Étude de A : $A = a - b + c.$

$$a(\theta, x, z) = z \int_0^\theta \cos tx \frac{R(t)(1 - zR(t))}{|1 - z\varphi(t)|^2} dt \tag{2-5}$$

$$b(\theta, x, z) = z^2 \int_0^\theta \cos tx \frac{I^2(t)}{|1 - z\varphi(t)|^2} dt \tag{2-6}$$

$$c(\theta, x, z) = z^2 \int_0^\theta \frac{\sin txI(t)}{|1 - z\varphi(t)|^2} dt \tag{2-7}$$

$I^2|1 - z\varphi|^{-2}$ étant borné on peut appliquer le théorème de Lebesgue et le lemme de Riemann-Lebesgue :

$$\lim_{|x|\to\infty} \lim_{z\uparrow 1} b(\theta, x, z) = 0.$$

Écrivons $a = a_1 + a_2$

$$a_1(\theta, x, z) = \int_0^\theta \cos tx \frac{R(t)(1 - z)}{|1 - z\varphi(t)|^2} dt$$

$$= \int_0^{\theta/1-z} \frac{\cos ux(1 - z)R(ux(1 - z))}{\left(1 + z\dfrac{1 - R(u(1 - z))}{1 - z}\right)^2 + \dfrac{z^2I^2(u(1-z))}{(1 - z)^2}} du \tag{2-8}$$

Comme $E|X| < \infty$, φ est dérivable, et l'on a :

$$\lim_{t\to 0} I'(t) = EX = 1 \tag{2-9}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1 - R(t)}{t} = 0$$

Pour $\theta < \theta_0$ convenable, il existe des constantes k et K telles que :

$$ku^2 \leqq \frac{\mathrm{I}^2(u(1-z))}{(1-z)^2} \leqq \mathrm{K}u^2 \qquad 0 < u < \frac{\theta}{1-z}$$

et de plus

$$0 \leqq \frac{1 - \mathrm{R}((1-z)u)}{1-z}$$

On peut donc appliquer le théorème de Lebesgue à a_1 :

$$\lim_{z \uparrow 1} a_1(\theta, x, z) = \int_0^\infty \mathrm{R}(0) \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}$$

De plus

$$\begin{aligned}\int \frac{1-\mathrm{R}(t)}{t^2} dt &= \lim_{\varepsilon \uparrow 1} \int_\varepsilon^1 \frac{1-\mathrm{R}(t)}{t^2} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \uparrow 1} \int_{-\infty}^{\infty} x d\mathrm{F}(x) \int_{\varepsilon x}^{x} \frac{1-\cos u}{u^2} du \\ &\leqq \pi \mathrm{E}|\mathrm{X}|\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{|x| \to \infty} \lim_{z \uparrow 1} \int_0^\theta \cos tx \frac{\mathrm{R}(t)(1-\mathrm{R}(t))dt}{|1 - z\varphi(t)|^2} = \lim_{|x| \to \infty} \lim_{z \uparrow 1} a_2(\theta, x, z)$$

La partie intéressante est l'étude de $c(\theta, x, z)$.

On a dans $\mathrm{L}^1[[0, \theta], dt]$:

$$\lim_{z \uparrow 1} z \frac{\sin tx\mathrm{I}(t)}{|1 - z\varphi(t)|^2} = \frac{\sin tx\mathrm{I}(t)}{|1 - \varphi(t)|^2}$$

puisque le terme de droite est borné.

Soit

$$c(\theta, x) = \lim_{z \uparrow 1} c(\theta, x, z)$$
$$c(\theta, x) = -c(\theta, -x)$$

Des inégalités

$$0 \leqq \underline{\lim}_{x \to -\infty} \Pi g(x) = \underline{\lim}_{x \to -\infty} -c(\theta, |x|) + \frac{\pi}{2} \tag{2-10}$$

$$0 \leqq \underline{\lim}_{x \to -\infty} \Pi g(x) = \underline{\lim}_{x \to -\infty} c(\theta, |x|) + \frac{\pi}{2} \tag{2-11}$$

qui se déduisent des égalités précédentes et de ce que $g \geq 0$, on déduit immédiatement que :

$$\lim_{x \to \infty} g(|x|) + g(-|x|) = 1 \tag{2-12}$$

et que

$$0 \leqq \underline{\lim}\, g(x) \leqq \overline{\lim}\, g(x) \leqq 1\,;$$

d'où

$$\overline{\lim}\, |\, c(\theta, x)\,| \leqq \frac{\pi}{2}$$

pour tout θ, $0 < \theta < \theta_0$.

Soit α un nombre réel, $|\,\alpha\,| \leqq 1$.

De $\sin tx = \sin \alpha t \cos (x - \alpha)t + \cos t\alpha \sin t(x - \alpha)$ on déduit :

$$c(\theta, x) - c(\theta, x - \alpha) = \int_0^\theta \frac{\mathrm{I}(t) \sin \alpha t}{|\,1 - \varphi(t)\,|^2} \cos t(x - \alpha)dt - \int_0^\theta \frac{(1 - \cos t\alpha)\mathrm{I}(t)}{|\,1 - \varphi(t)\,|^2} \sin t(x - \alpha)dt$$

On a d'après (2-9) :

$$c(\theta, x) - c(\theta, x - \alpha) = 0(\theta + \theta^2)$$

soit

$$\lim_{\theta \to 0} \lim_{|x| \to \infty} |\, c(\theta, x) - c(\theta, x - \alpha) = 0 \tag{2-13}$$

d'où

$$\lim_{|x| \to \infty} |\, g(x) - g(x - \alpha)\,| = 0 \text{ uniformément pour } |\,\alpha\,| \leqq 1 \tag{2-14}$$

Supposons alors qu'il existe une suite x_k, $x_k \to -\infty$; on peut supposer de plus $x_k < x_{k-1} - 2$, telle que $g(x_k) \geqq \gamma > 0$.

On a donc pour $k > k_0$:

$$g(x) \geqq \frac{1}{2}\gamma \quad \text{pour} \quad x \in (x_k - 1, x_k + 1) \quad \text{d'après (2-13).}$$

Posant :

$$\mathrm{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (x_k - 1, x_k + 1),$$

on a $\lambda(\mathrm{A}) = \infty$; supposons avoir montré que $\mathrm{P}\,(\underline{\lim}\, \mathrm{S}_n = -\infty) = \frac{\gamma}{2} > 0$; d'après la loi des grands nombres [*4*], on a :

$$\frac{\mathrm{S}_n}{n} \to 1 \text{ p. s.,} \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{P}\,(\underline{\lim}\, \mathrm{S}_n \leqq 0) = 0\,;$$

d'où une contradiction, donc $\overline{\lim\limits_{x \to -\infty}}\, g(x) = 0$.

Pour montrer que P $(\underline{\lim}\, S_n = -\infty) = \frac{\gamma}{2} > 0$ nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME II-1 : Si $\nu(A)$ est le temps d'entrée de S_n dans A, on a :

$$U(A) \leqq P(\nu_A < \infty)(1 + \sup_{y \in A} U(A - y)) \tag{2-15}$$

(avec égalité dans le cas $U(A) = \infty$).

En effet

$$(\nu_A > m) = \bigcap_{k=1}^{m} (S_k \in A)$$

$$U(A) = E \sum_{n \geqq 1} 1_A(S_n)$$

$$= \sum_{l > 1} P\left(\sum_{n=1}^{\infty} 1_A(S_n) \geqq l \right)$$

$$= \sum_{l > 1} \sum_{m \geqq 1} P(\nu_A = m) \int_A P\left(\sum_{n > m} 1_{A-y}(S_n - S_m) \geqq l - 1 \right) Q_m(dy)$$

où Q_m est la loi de $E^{\{\nu_A = m\}} S_m$.

Le lemme résulte alors de :

$$\sup_y \sum_{l \geqq 1} P\left(\sum_{n > m} 1_{A-y}(S_n - S_m) \geqq l - 1 \right) \leqq 1 + \sup_{y \in A} U(A - y)$$

Posons alors :

$$I_k = [-\infty, k[\cap A \; ; \qquad \lambda(I_k) = \infty.$$

Il existe d'après la définition de A une suite d'ensembles bornés disjoints A_j tels que $A = \sum_{j=1}^{\infty} A_j, \quad \lambda(A_j) = 2$

$$I_k = [k, -\infty] \cap \sum_{j=1}^{\infty} A_j = \sum_{j=1}^{\infty} B_j^k \; ; \qquad \lambda(B_j^k) \leqq 2 \quad \text{pour} \quad 1 \leqq j.$$

Comme les ensembles A_j sont bornés, S_n ne peut être récurrente dans aucun ensemble A_j, donc :

$$\overline{\lim_n}\,(S_n \in I_k) = \overline{\lim_j}\,(\nu(B_j^k) < \infty)$$

d'où

$$P\,\overline{\lim}\,(S_n \in I_k) \geqq \overline{\lim_j}\,P(\nu(B_j^k < \infty)) \tag{2-16}$$

$$\geqq \overline{\lim_j}\,\frac{U(B_j^k)}{1 + \sup\limits_{y \in B_j^k} U(B_j^k - y)} \geqq \frac{\gamma/2}{1 + U(-2, +2)}$$

$$U(B_j^k) = V(B_j^k) + \int_{B_j^k} g(x)dx.$$

Comme $g(x) \geqq \frac{\gamma}{2}$, pour $x \in B_j^k$, et donc :

$$P\,\overline{\lim_n}\,(S_n \in I_k) \qquad \geqq K\,; \qquad K = \frac{\gamma}{2(1 + U(-2,2))}$$

soit

$$P\,(\underline{\lim_n}\,S_n < -k) \;\geqq K.$$

d'où

$$P\,(\underline{\lim_n}\,S_n = -\infty) \geqq K\,; \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Démontrons le théorème 2.

Si $\lambda(A \cap (0, \infty)) < \infty$, comme

$$U = V + g\lambda\,; \lim_{x \to \infty} g(x) = 1 \qquad \text{on a} \qquad U(A \cap (0, \infty)) < \infty,$$

donc $A \cap (0, \infty)$ est transient d'après le lemme de Borel-Cantelli, quand à $A \cap (-\infty, 0)$ il est transient d'après la loi des grands nombres.

Si $\lambda(A \cap (0, \infty)) = \infty$, on a :

$$U((A \cap 0, \infty)) = \infty \qquad \text{puisque} \qquad \lim_{x \to \infty} g(x) = 1\,;$$

il existe une suite d'ensembles A_k disjoints, tels que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = A, \qquad \lambda(A_k) \uparrow \infty \qquad (k \to \infty)$$

On a :

$$\lim_k \frac{U(A_k)}{\lambda(A_k)} = 1$$

d'après le théorème 1, et comme dans (2-16)

$$P\,(\overline{\lim_n}\, S_n \in A) \geqq \overline{\lim_k}\, P(\nu_{A_k} < \infty)$$
$$= 1 \text{ d'après (2-15) ; C. Q. F. D.}$$

Remarque sur les ensembles transients dans le cas $E\,|\,X\,| = \infty$.

Dans ce cas il y a en général des ensembles transients de potentiel U infini. Nous allons le montrer dans le cas suivant : on suppose $X_k \geqq 0$, de loi absolument continue et satisfaisant la condition de régularité :

$$\lim_{M\to\infty} \frac{P\left(X_k \in \left(u, u + \frac{M}{2}\right)\right)}{P(X_k \in (u, u + M))} \geqq \alpha > 0 \text{ uniformément en } u > 0,$$

(par exemple $f(X) = \frac{1}{X^p}$, $0 < p < 1$)

Proposition : Sous ces hypothèses, il existe un ensemble A transient tel que $U(A) = \infty$.

En effet d'après le théorème de renouvellement classique [2] on a :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{U(T, T + M)}{U\left(0, \frac{M}{2}\right)} = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad M > M_0, U\left(0, \frac{M_0}{2}\right) > 0.$$

D'après l'égalité vue au lemme 1 :

$$U(A) = \sum_{l>1}\sum_{m\geqq 1} P(\nu_A = m) \int_A P\left(\sum_{n\geqq m} 1_{A-y}(S_n - S_m) \geqq l - 1\right) Q_m(dy)$$

on a :

$$\sum_m P(\nu_A = m) \operatorname*{Inf}_m Q_m\left(T, T + \frac{M}{2}\right)\left(1 + \operatorname*{Inf}_{y\in\left(T, T+\frac{M}{2}\right)} U(A - y)\right) \leqq U(A)$$

avec $Q_m(T, T + M) = 1$ si $A = (T, T + M)$, et :

$$Q_m\left(T, T + \frac{M}{2}\right) = \frac{\int_{z<T}\int_{y\in\left(T, T+\frac{M}{2}\right)} F^{*m-1}(dz)F(-z + dy)}{\int_{z<T}\int_{y\in(T, T+M)} F^{*m-1}(dz)F(-z + dy)}$$

Par hypothèse pour M assez grand :

$$Q_m\left(T, T + \frac{M}{2}\right) \geqq \alpha$$

d'où

$$P(\nu_A < \infty) \leqq \frac{U(T, T + M)}{\alpha[1 + \inf\limits_{y \in \left(T, T + \frac{M}{2}\right)} U(T - y, T - y + M)]}$$

$$\leqq \frac{1}{\alpha} \frac{U(T, T + M)}{U(0, M/2)} \tag{2-17}$$

Posons alors :

$$T_k = U^{-1}(k)$$

alors $T_{k+1} - T_k \to \infty$.

Soit

$$M_k = T_{k+1} - T_k = U^{-1}(K + 1) - U^{-1}(k)$$

(en posant $U(t) = U(0, t)$; $T_k = \inf(t, U(t) = k)$) comme $U(t + a) - U(a) \to 0$ pour $a \to \infty$, $M_k \to \infty$).

Choisissons une sous-suite M_{k_l} telle que :

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{U(M_{k_l})} < \infty$$

Posons

$$A_l = T_{k_l}, T_{k_l} + 1 \quad , \quad A = \sum_{l=1}^{\infty} A_l.$$

Alors :

$$\sum_{l=1}^{\infty} P(\nu_{A_l} < \infty) \leqq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{U(A_l)}{U(M_{k_l})} \leqq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{U(M_{k_l})}$$

Donc A est transient et $\lambda(A) = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda(A_l) = \infty$.

Enfin une étude analogue à celle que nous avons faite dans le cas où X_k est à valeurs dans R peut-être faite dans le cas où X_k est à valeurs dans R^p ; le cas $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 1$ disparaissant pour $p > 1$; on a $\lim\limits_{|x| \to \infty} g(x) = 0$.

TROISIÈME PARTIE

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE MARCHES RÉCURRENTES

Nous étudions dans ce paragraphe les propriétés générales des marches récurrentes en ce qui concerne la récurrence dans les ensembles boréliens et non seulement les intervalles, et les applications des théorèmes ergodiques au processus S_{τ_n} des passages successifs dans un borélien.

THÉORÈME III-1 : *Si* S_n *est récurrente (dans tout ouvert non vide), si* A *est un ensemble mesurable* $\lambda(A) > 0$ *alors :*

$$\lambda\{x, \overline{\lim_{n\to\infty}}\, 1_A(S_n - x) = 0\} = 0$$

Autrement dit, presque sûrement, $S_n - x$ est récurrente pour presque tout x, dans tout borélien de mesure de Lebesgue strictement positive.

Soit A et B 2 ensembles boréliens $0 < \lambda(A), \lambda(B) < \infty$; il existe alors un ouvert G(A, B) et $\theta > 0$ tels que :

$$\int_B 1_A(u + x)dx \geqq \theta 1_{G(A,B)}(u)$$

La fonction

$$h(x) = \int 1_A(u + x)1_B(x)dx$$

est continue (continuité de la translation sur L_1). Elle ne peut être identiquement nulle. En effet d'après un lemme classique (cf. 9) il existe 2 intervalles non vides et égaux, U, V tels que :

$$\lambda(B \cap U) \geqq \frac{3}{4}\lambda(U)$$

$$\lambda(A \cap V) \geqq \frac{3}{4}\lambda(V)$$

en amenant par translation le milieu de U sur celui de V, il vient en ce point z :

$$\int_V 1_A(z + y)1_B(y)dy \geqq \frac{1}{2}\lambda(U) > 0 ;$$

Donc la fonction $h(x)$ est strictement positive sur un ouvert $G(A, B)$.

Soit S_n une marche récurrente dans les ouverts. Comme l'ensemble des ouverts admet une base dénombrable, il existe un ensemble $N \subset \Omega$ tel que $P(N) = 0$, et si $\omega \in N^c$, on a :

$$\forall G \text{ ouvert} : \overline{\lim_{n \to \infty}}\, 1_G(S_n(\omega)) = 1.$$

Soit $\omega \in N^c$, posons :

$$B_M(\omega) = \left\{ x, \sum_{n=1}^{\infty} 1_A(S_n(\omega) - x) < \infty \right\}$$

$B_M(\omega)$ est mesurable, en effet :

$$\left\{ (\omega, x), \sum_{n=1}^{\infty} 1_A(S_n(\omega) - x) < M \right\}$$

est un ensemble mesurable dans $(R^\infty \times R, \otimes_1^\infty \mathscr{B} \otimes \mathscr{B})$.

Soit
$$B(\omega) = U_M B_M(\omega)$$
$$\lambda(B) = \lim_{M \to \infty} \uparrow \lambda(B_M)$$

Supposons $\lambda(B) > 0$, et $\lambda(B) < \infty$ (Si $\lambda(B) = \infty$, on remplacera B par $B \cap K$ où K est un compact tel que $0 < \lambda(B \cap K) < \infty$) pour M assez grand, on a :

$$\lambda(B_M) > 0$$

D'après ce qui précède on a :

$$\int 1_A(S_n(\omega) - x) 1_{B_M}(x)dx \geqq \theta 1_{G(A,B_M)}(S_n(\omega))$$

Soit :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int 1_A(S_n(\omega) - x) 1_{B_M}(x)dx \geqq \theta \sum_{n=1}^{\infty} 1_G(S_n(\omega)) \geqq \infty$$

puisque S_n est récurrente dans tout ouvert.

On a par définition de $B_M(\omega)$, si $x \in B_M$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1_A(S_n(\omega) - x) < M$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int 1_A(S_n(\omega) - x) 1_{B_M}(x) dx < M\lambda(B_M)$$

ce qui est absurde ; d'où :

$$\lambda(B_M) = 0 \qquad \forall M$$

soit

$$\lambda(B) = 0 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Dans ce qui suit nous supposerons que F a une partie AC non nulle ; en fait il suffit pour avoir les mêmes résultats de supposer qu'il existe n tel que F^{*n} ait cette propriété.

THÉORÈME III-2 : *Si* S_n *est récurrente si* F *a une partie* AC *non nulle, alors* S_n *est récurrente dans tout ensemble mesurable de mesure de Lebesgue strictement positive.*

En effet, appliquons le théorème précédent au processus

$$S_n^{(k)}(\theta_k\omega) = S_{n+k}(\omega) - S_k(\omega)$$

défini sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, par $\theta_k\omega = (x_k, x_{k+1}, \ldots)$.

Si

$$\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots)$$

Soit

$$B_k(\theta_k(\omega)) = \left\{ x, \sum_{n=1}^{\infty} 1_A[S_n^{(k)}(\theta_k(\omega)) - x] < \infty \right\}.$$

D'après ce qui précède on a :

$$\lambda B_k(\theta_k(\omega)) = 0$$

d'où

$$P\left\{ \omega, \sum_{n=1}^{\infty} 1_A(S_n(\omega)) = \infty \right\}$$

$$= EE^{S_k}\left\{ \sum_{n=k+1}^{\infty} 1_A(S_n(\omega) = \infty \right\}$$

$$= F^{*k}(B_k^c)$$

Soit $1 - \rho$ la masse de la partie AC de dF ; $0 \leqq \rho < 1$.

Puisque d'après ce qui précède $\lambda(B_k) = 0$, on a :

$$F^{*k}(B_k^c) \leqq \rho^k$$

(ρ^k étant la masse de la partie non AC de F^{*k}), soit :

$$F^{*k}(B_k^c) \leqq 1 - \rho^k \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Applications : Considérons le processus de Markov $S_{\tau_n(\omega)}(\omega)$ où

$$\tau_1 = \inf \{ k, S_k \in A \},$$

A borélien, $0 < \lambda(A) < \infty$; $\tau_n = \inf\limits_{k > \tau_{n-1}} \{ k, S_k \in A \}$.

S_n est récurrente dans tout borélien $B \subset A$ d'après ce qui précède. On peut donc appliquer à S_{τ_n} le théorème de Harris [*10*] puisque l'opérateur θ_{τ_1}, de translation, associé à τ_1 n'a pas de partie conservative (cf. [*4*]). Il existe pour S_{τ_n} une mesure invariante unique Q telle que λ soit absolument continue par rapport à Q. Si $\mathscr{I}$ désigne la σ-algèbre des événements invariants de θ_{τ_1}, si f et $g \in L^1(A, Q)$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_1^n f(S_{\tau_n})}{\sum_1^n g(S_{\tau_n})} = \frac{E^{\mathscr{I}} f}{E^{\mathscr{I}} g} \text{ Q p. s. (donc } \lambda \text{ p. s.)}$$

avec

$$\int \frac{E^{\mathscr{I}} f}{E^{\mathscr{I}} g} g dQ = \int f dQ \tag{3-1}$$

Mais f et $g \in L'(R, \lambda)$ on sait d'après le théorème de Birkhoff [*4*] que puisque $\lim\limits_n \tau_n(\omega) = \infty$ p. s. :

$$\lim_n \frac{\sum_1^{\tau_n} f(S_n)}{\sum_1^{\tau_n} g(S_n)} = \frac{\int f d\lambda}{\int g d\lambda} P^\lambda \text{ p. s.}$$

(à l'opérateur de translation θ est associé la σ-algèbre triviale. Si f et $g \in L'(A, Q)$, f et $g \in L'(R, \lambda)$ on en déduit :

$$\frac{E^{\mathscr{I}} f}{E^{\mathscr{I}} g} = \frac{\int f d}{\int g d}$$

et d'après (3-1) :

$$\frac{\int f d}{\int g d} \int g dQ = \int f dQ \ P^{\lambda} \text{ p. s.}$$

en intégrant par rapport à Q. D'où $Q = 1_A \lambda$ et $\mathscr{I} = \Omega, \varphi$.

On peut résumer ces résultats dans la proposition suivante.

PROPOSITION : *Si* F *a une partie absolument continue,* $S_{\tau_n(\omega)}$ *est équidistribuée p. s. Le processus* S_{τ_n} *admet la mesure* $1_A\lambda$ *comme unique mesure invariante.*

Dans le chapitre suivant, nous préciserons le comportement de la suite S_{τ_n} lorsque A varie.

QUATRIÈME PARTIE

ÉTUDE DES MARCHES RÉCURRENTES

L'étude de la quantité

$$V(x, y, A) = \sum_{n=0}^{\infty} 1_A(S_n + x) - 1_A(S_n + y)$$

est naturelle si l'on veut étudier la discrépance de la suite équidistribuée S_{τ_n}. Par ailleurs, Spitzer a introduit le noyau $V(0, y, A)$ comme noyau d'une théorie des marches récurrentes à valeurs entières. A peu près simultanément avec notre travail [*5*], C. Herz [*3*] a étudié le noyau V pour des marches à valeur dans R. En fait, les techniques de la théorie du potentiel ne lui ont pas suffit dans son travail et comme dans le notre il s'est heurté à des limitations artificielles dues à l'analyse harmonique. Nous nous sommes intéressés au cas où V est un noyau-mesure. Moyennant des modifications mineures on peut étudier le cas où V est une distribution tempérée, mais on obtient, bien entendu, des résultats moins précis dans ce cas.

a) **Étude de** V(x, y, A).

On fait sur F l'hypothèse (B) suivante :

$$(\mathrm{B}) : \lim_{z\uparrow 1} \int_0^\theta \frac{t\mathrm{I}(t)}{|1 - z\varphi(t)|^2}\, dt < \infty \text{ pour un certain } \theta > 0.$$

On ne connaît pas de loi ne vérifiant pas (B). Si $p \geqq 2$ (B) est toujours vérifiée. Nous indiquerons à la fin de cette partie des résultats montrant que (B) est vérifiée pour les classes de lois les plus classiques. Pour ce qui concerne R^2 les démonstrations des théorèmes sont bien plus faciles que dans R, nous indiquerons seulement les résultats.

THÉORÈME IV-1 :

$$\mathrm{V}(x, y) = \lim_{z\uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{F}^{*n} * (\delta_x - \delta_y) z^n$$

(où δ_x est la masse unité en x) existe et définit une mesure tempérée sous les hypothèses :

1° F *a une partie absolument continue*
2° F *satisfait* B (ou $p = 2$)
De plus on peut écrire :

$$\mathrm{V}(x, y) = \mathrm{W}(x, y) + g(x, y)\lambda \tag{4-1}$$

où W *est une mesure bornée, g une fonction continue à croissance lente.*

Démonstration : $\dfrac{e^{itx} - e^{ity}}{1 - z\varphi(t)}$ définit pour tout z ; $0 \leqq z < 1$ une distribution tempérée puisque c'est une fonction localement sommable sur R (comme $\lim\limits_{|t|\to\infty} \varphi(t) < 1$).

$$\mathrm{V}^z(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{F}^{*n} * (\delta_x - \delta_y) z^n$$

définit donc une distribution tempérée.

Posons

$$S^z(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_a^{(n)} * (\delta_x - \delta_y) z^n \tag{4-2}$$

où $F_a^{(n)}$ a été définie dans la première partie.

D'autre part

$$V^z = (\delta + F) * V_2^z$$

avec

$$V_2^z = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*2n} * (\delta_x - \delta_y)$$

En faisant un raisonnement analogue à celui de la deuxième partie (théorème II-1), on voit qu'il suffit de démontrer le théorème pour V_2^z. On sait, d'après la première partie que :

$$V_2^z - S^z = \sum_{n=0}^{\infty} (F^{*2n} - F_a^{(n)}) * (\delta_x - \delta_y) z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} F_b^{*2n} z^n$$

donc

$$[W_2^z] = [V_2^z] - S^z < \frac{2}{1 - \rho'} \qquad 0 < z \leqq 1$$

d'où $W_2^z \to W_2 (z \to 1)$ (convergence faible de mesure)

et

$$[W] < \frac{2}{1 - \rho'}.$$

Il suffit donc d'étudier S^z. Comme $\varphi_a^{(n)}(t) \in L^1(R, dx)$ et que la série

$$\sum_{1}^{\infty} \varphi_a^n(t)(e^{itx} - e^{ity}) z^n$$

converge dans $L^1(R, dx)$ on peut appliquer la formule d'inversion de Fourier et écrire :

$$g^z(x, y, u) = \int e^{-itu} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_a^n(t)(e^{itx} - e^{ity}) z^n \right) dt \tag{4-3}$$

avec

$$g^z(x, y, u) = \frac{dS^z}{d\lambda}(u).$$

D'après (1-1) on a : pour tout $\theta > 0$.

$$\| \varphi_a^{(n)} \|_{1,\theta} \leqq n\beta(\theta)^{n-1} \| \varphi_a \|_{1,\theta}.$$

Soit f_m une suite de fonctions de K(R) (ou de $\mathscr{S}$, nous aurons à utiliser des fonctions des deux espaces ainsi que plus tard $\hat{f}(-t) = \exp -iut$) $f_m \to 0 (m \to \infty)$ pour la topologie de K(R) (ou de $\mathscr{S}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{|t|>\theta} \hat{f}_m(-t)(e^{itx} - e^{ity})\varphi_a^n(t)z^n dt \right|$$
$$\leqq \sum_0^{\infty} z^n \| \hat{f}_m \|_\infty n\beta(\theta)^{n-1} \| \varphi_a \|_{1,\theta}$$

où $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f.

Comme $\| \hat{f}_m \|_\infty \to 0$ (puisque $f_m \to 0$ dans K(R) (ou dans $\mathscr{S}$)) on a :

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{z\uparrow 1} \sum_0^{\infty} z^n \| \hat{f}_m \|_\infty n\beta(\theta)^{n-1} \| \varphi_a \|_{1,\theta} = 0.$$

De plus $|\varphi_a^n(t) - \varphi^{2n}(t)| = |\varphi_b^{2n}(t)| \leqq \rho'^n$ d'après la première partie. Donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| z^n \int_{|t|<\theta} (e^{itx} - e^{ity})(\varphi_a^n(t) - \varphi^{2n}(t))\hat{f}(t)dt \right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} 4z^n\rho'^n \| \hat{f} \|_\infty$$

donc

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{z\uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} z^n\rho'^n \| \hat{f}_m \|_\infty = 0$$

Il reste à étudier :

$$\begin{aligned} A(\theta, z, m) &= \mathrm{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{|t|<\theta} z^n\varphi^{2n}(t)\hat{f}_m(-t)(e^{itx} - e^{ity})dt. \\ &= \mathrm{Re} \int_{|t|<\theta} \hat{f}_m(-t)\psi(t)\frac{e^{itx} - e^{ity}}{1 - z\psi(t)}dt \qquad (4\text{-}4) \end{aligned}$$

avec $\psi = \varphi^2$.

Pour $|t| \to 0$ on a

$$\operatorname{Im} \hat{f}_m(-t) = 0(t\hat{f}'_m(0))$$
$$\operatorname{Re} \hat{f}_m(t) = \hat{f}_m(0) + 0(t^2\hat{f}''(0))$$

Posons $N(t, m) = (e^{itx} - e^{ity})\hat{f}_m(-t)\psi(t)$
On a en posant $\psi(t) = R(t) + iI(t)$

$$\begin{aligned} N(t, m) = [(1 - zR(t))R(t) - zI^2]\Big[2\frac{\sin t(x-y)}{2}\frac{\sin t(x+y)}{2}\operatorname{Re}\hat{f}(-t) \\ + 2\frac{\sin t(x-y)}{2}\frac{\cos t(x+y)}{2}\operatorname{Im}\hat{f}(-t)\Big] \\ + zI(t)\Big[2\operatorname{Re}\hat{f}(-t)\frac{\sin t(x+y)}{2}\frac{\cos t(x+y)}{2} \\ + 2\operatorname{Im}\hat{f}(-t)\frac{\sin t(x-y)}{2}\frac{\sin t(x+y)}{2}\Big] \end{aligned} \tag{4-5}$$

x et y étant fixés $\sin(x \pm y)t = 0(t)$.

$$N(t, m) = (1 - zR(t))0(t^2)\varepsilon(m) + zI(t)\varepsilon(m)$$

où $\varepsilon(m)$ est une fonction tendant vers 0 pour $m \to \infty$.

(Puisque si $f_m \to 0$ dans K(R) (ou $\mathscr{S}$), $\hat{f}_m^{(p)}(0) \to 0$).

D'après une propriété classique des fonctions caractéristiques pour $\theta < \theta_0$ convenable, on a :

$$1 - R(t) \geqq Ct^2 \qquad 0 \leqq |t| < \theta$$

où C est une constante dépendant de ψ.

Donc d'après l'hypothèse (B) :

$$\lim_{z \uparrow 1} \int_{|t|<\theta} \frac{N(t, m)}{|1 - z\varphi(t)|^2} dt$$

existe et de plus :

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{z\uparrow 1} \int \frac{N(t, m)}{|1 - z\varphi(t)|^2} dt = 0$$

Donc

$$\sum_1^\infty z^n \varphi_a^n(t)(e^{itx} - e^{ity})$$

converge au sens de $\mathscr{S}'$ et de plus la limite est une forme continue sur K(R) c'est donc une mesure tempérée absolument continue.

Enfin en remplaçant $\hat{f}_m(-t)$ par e^{itu} dans les calculs précédents, on voit aisément que : $\lim_{z\uparrow 1} g^z(x, y, u)$ existe et est une fonction continue de u.

La distribution tempérée transformée de Fourier de

$$\sum_1^\infty z^n \varphi_a^n(t)(e^{itx} - e^{ity})$$

est donc la fonction g. C. Q. F. D.

Remarque : Si $\hat{f}(0) = 0$, $\lim \mathrm{V}^z(x, y, f)$ existe et définit toujours une forme linéaire continue sur les fonctions d'intégrale nulle de K(R) et de $\mathscr{S}$.

Application : Si l'on considère le processus de Markov S_{τ_n} introduit dans la troisième partie, on a vu que la suite S_{τ_n} était équirépartie, on a :

$$\mathrm{D}_m = \sum_{n=1}^m 1_{\mathrm{I}}(\mathrm{S}_{\tau_n}) - 1_{\mathrm{I}'}(\mathrm{S}_{\tau_n})$$

pour $\mathrm{I}, \mathrm{I}' \neq \varphi$, $\lambda(\mathrm{I}) = \lambda(\mathrm{I}')$, on a donc $\lim_{m\to\infty} \mathrm{ED}_m < \infty$.

b) **Comportement de V à l'∞.**

On a le théorème (de renouvellement) suivant :

THÉORÈME IV-2 : *Sous les hypothèses du théorème IV-1, si de plus* $\mathrm{EX}_k^2 < \infty$ *on a :*

$$\underline{\lim_{x\to\pm\infty} g(0, x + y, u) - g(0, x, u) = \pm \frac{y}{\sigma^2}} \tag{4-6}$$

et

$$\underline{\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{V}(0, x + y) - \mathrm{V}(0, x) = \pm \frac{y}{\sigma^2}} \tag{4-7}$$

Démonstration : De ce que $(\delta + \mathrm{F}) * \lambda = 2\lambda$ et

$$\lim_{|x|\to\infty} \sum_{n=1}^\infty \mathrm{F}_b^{*n} * (\delta_{x+y} - \delta_x) = 0$$

puisque $\sum_{n=1}^\infty [\mathrm{F}_b^{*2n}] < \infty$, on déduit qu'il suffit de montrer que :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \lim_{z\uparrow 1} (\mathrm{S}^z(0, x + y) - \mathrm{S}^z(0, \mathrm{x}) = \pm \frac{y^\lambda}{2\sigma^2} \tag{4-8}$$

pour avoir (4-7), toutes ces limites étant entendues au sens de la convergence faible des mesures ; (4-6) entraîne évidemment (4-8).

On a vu que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \varphi_a^{(n)}(t)(e^{ity} - 1)$$

convergeait pour $z \uparrow 1$ vers une distribution tempérée $g(0, y)\lambda$.

(4-6) est donc équivalent à :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \lim_{z \uparrow 1} < e^{-it(x-u)}, \sum_{n=1}^{\infty} z^n \varphi_a^{(n)}(t)(e^{ity} - 1) > = \pm \frac{y}{2\sigma^2} \tag{4-9}$$

De (1-1) et du lemme de Riemann-Lebesgue on déduit :

$$\lim_{|x| \to \infty} \lim_{z \uparrow 1} \int_{|t| > \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(-t) e^{-it(x-u)}(e^{ity} - 1) z^n \varphi_a^n(t) dt = 0$$

De $|\psi^n(t) - \varphi_a^n(t)| < \rho'^n$, $0 < \rho' < 1$, tR, on déduit par le lemme de Riemann-Lebesgue :

$$\lim_{|x| \to \infty} \lim_{z \uparrow 1} \int_{|t| < \theta} \sum_n z^n (\varphi_a^{(n)}(t) - \psi^n(t)) \exp - itu(e^{ity} - 1) dt = 0$$

Il reste à étudier l'existence de :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \lim_{z \uparrow 1} \mathrm{Re} \int \frac{e^{it(u-x)}(e^{ity} - 1)}{1 - z\psi(t)} dt$$

$$\mathrm{A}^z(x, y) = \cos tu\, (\cos t(x + y) - \cos tx)(1 - z\mathrm{R}(t))\, |1 - z\psi(t)|^{-2}$$

$$\mathrm{B}^z(x, y) = \cos tu\, (\sin t(x + y) - \sin tx) z\mathrm{I}(t)\, |1 - z\psi(t)|^{-2}$$

$$= 0(t\mathrm{I}(t)\, |1 - z\psi(t)|^{-2}) \cos t\left(x + \frac{y}{2}\right)$$

u et y étant fixés.

$$\mathrm{C}^z(x, y) = - \sin tu\, (\cos t(x + y) - \cos tx)\mathrm{I}(t)\, |1 - z\psi(t)|^{-2}$$

$$= 0(t^2\mathrm{I}(t)\, |1 - z\psi(t)|^{-2}) \cos t\left(x + \frac{y}{2}\right)$$

$$\mathrm{D}^z(x, y) = - \sin tu\, (\cos t(x + y) - \cos tx)(1 - z\mathrm{R}(t))\, |1 - z\psi(t)|^{-2}$$

$$= 0(t^2\, |1 - z\mathrm{R}(t)|) \cos t\left(x + \frac{y}{2}\right)$$

De $$1 - z\mathrm{R}(t) - (1 - z) \geqq \mathrm{C}zt^2 \,;\, |t| < \theta$$

(où C ne dépend que de ψ et θ et de $I(t) = \sigma(t)$) on déduit :

$$\lim_{|x|\to\infty} \lim_{z\uparrow 1} \int_{|t|<\theta} [B^z(x, y) + C^z(x, y) + D^z(x, y)]dt = 0$$

$$\int_{t<\theta} \frac{I(t)}{t^3} dt \leq \int_{|t|<\theta} \int_{x\in R} \frac{1 - \cos tx}{t^2} H(x)dxdt$$

puisque

$$I(t) = \int \frac{1 - \cos tx}{t} (H^+(x) - H^-(x))dx$$

avec

$$H^+(x) = P(X > x), \qquad H^-(x) = P(X < -x), \qquad x \in R^+$$

et

$$\int_{R^+} (H^+ - H^-)(x)dx = 0$$

Comme $xH(x) \in L_1(R, dx)$ on en déduit :

$$\int_R \left| \frac{I(t)}{t^3} \right| dt < \infty.$$

Il reste à étudier A.

$$A_{x,y} = (\cos tx(1 - \cos ty) - \sin tx \sin ty) \frac{1 - zR(t)}{\| 1 - z\psi(t) \|^2} (1 + O(t^2)).$$

(le terme $O(t^2)$ représentant $\operatorname{Re}(e^{-itu} - 1)$).

Remarquons que :

$$\int \frac{(1 - z)t^2 dt}{((1 - z) + z(1 - R)^2) + I^2} \leqq O\left(\sqrt{1 - z} \int \frac{du}{1 + u^2}\right) \to O(z \uparrow 1)$$

Des majorations précédentes et le lemme de Riemann-Lebesgue montrent alors que tous les termes ont une limite nulle sauf :

$$\int A'_{x,y}(t)dt = - \int_{|t|<\theta} \sin tx \sin ty \frac{t(1 - R(t))}{\| 1 - \psi(t) \|^2} dt$$

De

$$| \sin ty - yt | \leqq K \, | t^3 y^3 | \, (t < \theta)$$

et de

$$\frac{t(1 - R)}{\| 1 - \psi \|^2} = \frac{t(1 - R)}{t^4} = O\left(\frac{I(t)}{t^3}\right)$$

on déduit que :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\lim_{z\uparrow 1}\int A'_{x,y}(t)dt = \lim_{x\to\pm\infty}\lim_{z\uparrow 1}\int_{|t|<\theta}\frac{zt\sin tx}{1-R(t)}dt$$

en appelant marche T_n, $T_n = \sum_1^n Z_k$ associée à la marche S_n la marche définie par les variables aléatoires indépendantes Z_k de même loi, de densité concentrée sur R^+,

$$f(u) = H(u) = \int_{u\leqq|x|<\infty} dF(X)\ ;\ u \geqq 0.$$

En particulier si $EX_k^2 < \infty$, on a :

$$E\,|\,Z_k\,| = EZ_k = \int_0^\infty uH(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(X) < \infty$$

on peut donc appliquer à la marche T_n les résultats de la partie 2. Posons :

$$I^* = \int \sin txH(x)dx$$
$$1 - R(t) = tI^*(t)$$

$I^*(t)$ est la partie imaginaire de la fonction caractéristique de la marche T_n associée à S_n.

De ce que :

$$\frac{I^*}{I^{*2}} - \frac{I^*}{I^{*2}+(1-R^*)^2} = 0\left(\frac{(1-R^*)^2 I^*}{t^4}\right)$$

on déduit que :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{I^*}{I^{*2}} - \frac{I^*}{I^{*2}+(1-R^*)^2}\sin txdt = 0$$

En appliquant le théorème IV-3 à la marche T_n on obtient :

$$\lim_{x\to\infty} g_{T_n}(x) - g_{T_n}(-x) = \pi\sigma^{-2} = 2\lim_{x\to\infty}\int \sin txI_m\left(\frac{1}{1-\varphi^*(t)}\right)dt$$
$$= 2\lim_{x\to\infty}\int \sin tx\frac{I^*(t)}{I^*(t)^2+(1-R^*(t))^2}dt$$

d'où le théorème IV-2.

$$(B) : \lim_{z\uparrow 1}\int\frac{tI(t)}{|\,1-z\varphi(t)\,|^2}dt < \infty$$

c) **Étude de l'hypothèse B.**

(B) est vérifiée dans les cas suivants de manière à peu près évidente :

— X symétrique (ou φ réelle)
— $E|X| < \infty$ et $|1 - \varphi(t)| = 0(t^{2-\varepsilon})0 < \varepsilon < 1$

ce qui est le cas des domaines d'attraction des lois stables d'indice, $1 \leqq \alpha \leq 2$.

On peut également vérifier l'hypothèse (B) dans les cas suivants, S_n étant récurrente :

α) $E|X| < \infty$, X bornée d'un côté.
β) X a une densité $f(X)$ convexe pour $X \leqq X_0$ et $X \geqq X_1$.
γ) X est dans le domaine d'attraction non normale de la loi de Gauss.

Le principe de la démonstration est le suivant :
On suppose donc

$$\int x^2 dF = \infty,$$

on a, si $E|X| < \infty$:

$$I(t) \leqq |t| \int_0^\infty (1 - \cos tx)(H^+(x) - H^-(x))dx$$

avec

$$H^+(x) = P(X > x)\,; \qquad H^-(x) = P(X < -x),\ x > 0$$

$$1 - R(t) = t \int_0^\infty \sin tx(H^+(x) + H^-(x))dx$$

$$B(\theta) = \lim_{z \uparrow 1} \int \frac{tI(t)}{|1 - z\varphi(t)|^2} dt\,;\ V = [-\theta, \theta]$$

$$\leqq \int_V dt \frac{\int (1 - \cos tx)(H^+(x) - H^-(x))dx}{\left(\int_0^\infty \sin txH(x)dx\right)^2 + \left(\int (1 - \cos tx)(H^+(x) - H^-(x))dx\right)^2}$$

Si

$$\int (1 - \cos tx)(H^+(x) - H^-(x))dx = 0 \int (1 - \cos tx)H(x)dx \qquad (4\text{-}6)$$

alors l'intégrale $B(\theta)$ est de même nature que :

$$\lim_{z \uparrow 1} \int_{|t| < \theta} \mathrm{Re} \frac{dt}{1 - z\Phi(t)}$$

avec

$$\Phi(t) = \int e^{itx}H(x)dx$$

or cette dernière limite est finie puisque la marche T_n associée à S_n est transiente. On peut vérifier dans chacun des cas α, β, γ que l'on a (4-6).

BIBLIOGRAPHIE

[1] SPITZER, Random Walk.
[2] FELLER, *Theory of Probability*. Tome II. Wiley.
[3] HERZ, Colloque sur la théorie du potentiel. C. N. R. S., Paris, 1965.
[4] NEVEU, Bases Mathématiques du calcul des Probabilités. Masson.
[5] BRETAGNOLLE et DACUNHA-CASTELLE, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, t. **256**, 1964, p. 2665.
[6] BRETAGNOLLE et DACUNHA-CASTELLE, *C. R. Acad. Sci*, Paris, t. **262**, 1966, p. 955.
[7] STONE Ch., *Ann. Math. Stat.*, vol. 37, n° 1, 1966, p. 271.
[8] SMITH, *J. Roy. Stat. Soc.*, t. **20**, 1958, p. 243.
[9] HALMOS, *Measure Theory*.
[10] HARRIS, *Third Berkeley Symposium*, vol. II.

(Manuscrit reçu le 19 janvier 1967).