ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JACQUES AZEMA
MARIE DUFLO
DANIEL REVUZ

Note sur la mesure invariante des processus de Markov récurrents

Annales de l'I. H. P., section B, tome 3, nº 4 (1967), p. 397-402
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1967__3_4_397_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. III, n° 4, 1967, p. 397-402. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Note sur la mesure invariante des processus de Markov récurrents

par

Jacques AZEMA, Marie DUFLO et Daniel REVUZ
(Institut Henri Poincaré).

0. Étant donné un processus de Markov X à valeur dans un espace E et satisfaisant à l'hypothèse (A) de Hunt (cf. [*6*]), nous avons défini dans [*1*] la notion de récurrence suivante :

Un point x est dit récurrent si presque toutes les trajectoires partant de ce point récurrent dans tout voisinage fin de x. On a montré que x était récurrent si et seulement si la valeur en x du potentiel de toute fonction borélienne bornée ne pouvait être que 0 ou l'infini. On dit qu'un point x conduit à un point y si, partant de x, et pour tout voisinage fin V de y, on a une probabilité positive de visiter V. Si x est récurrent et si x conduit à y, alors y est récurrent et conduit à x. On peut donc définir des classes d'équivalence d'états récurrents que l'on appellera classes récurrentes du processus X.

Sous l'hypothèse (L) de Meyer ([*7*]) on sait associer à chaque classe récurrente C_i un ensemble presque borélien D_i jouissant des propriétés suivantes :

D_i contient C_i, et D_i et D_j sont disjoints dès que $i \neq j$.

Partant d'un point x de D_i, presque toutes les trajectoires ne sortent pas de D_i.

Dans la suite nous étudierons le processus restreint à une telle classe que l'on notera D.

Dans [*2*] nous avons démontré le résultat suivant : il existe une mesure μ,

σ-finie portée par D invariante par le semi-groupe P_t associé au processus ; cette mesure est la seule mesure excessive pour P_t concentrée sur D.

Nous allons dans cette note présenter deux résultats indépendants qui précisent des propriétés de régularité de cette mesure. Les notations seront celles de [*1*] et [*2*].

I. — MESURE INVARIANTE DES PROCESSUS A RÉSOLVENTE FORTEMENT FELLÉRIENNE

1.0. On peut se demander à quelle condition la mesure invariante dont nous avons montré l'existence dans [*2*] est une mesure de Radon. Il n'en est pas toujours ainsi. Mais il en est ainsi dans le cas des processus à résolvente fortement fellérienne. La classe conservative D est l'ensemble des points où une fonction invariante prend la valeur 1 ; c'est donc dans ce cas un ensemble fermé.

Il est clair que si D est localement compacte pour la topologie induite par E, on peut définir sur D un processus de Hunt ayant mêmes trajectoires et même fonction de transition.

Dans toute la suite de ce paragraphe nous supposerons donc $D = E$. Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème : Si X est à résolvente fortement fellérienne la mesure invariante est une mesure de Radon.

1.1. Soit $a(x)$ une fonction positive bornée, borélienne et finement continue telle que :

$$\int_E a(x)\mu(dx) > 0$$

nous poserons :

$$A_t^{(a)} = \int_0^t a(X_s)ds$$

Le changement de temps associé sera noté $\tau_t^{(a)}$ et la résolvente correspondante ${}^{(a)}V^\lambda$. Soit :

$${}^{(a)}V^\lambda f(x) = E_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(X_{\tau_t^a})dt = E_x \int_0^\infty e^{-\lambda A_t^{(a)}}(f_a)(X_t)dt$$

On a alors le lemme ·

LEMME : Si le processus X est à résolvente fortement fellérienne et si f est une fonction finement continue, borélienne et bornée, ${}^{(a)}V^{\lambda}f$ est une fonction continue.

Démonstration : Nous pouvons définir un semi-groupe Q_t sur l'espace des fonctions presque boréliennes bornées en posant :

$$h \to Q_t h(x) = E_x[e^{-\lambda A_t^{(a)}} h(X_t)]$$

Il est clair que ${}^{(a)}V^{\lambda}f$ est le potentiel de la fonction, fa relatif au semi-groupe Q_t et comme ${}^{(a)}V^{\lambda}$ est un opérateur borné, si $fa \in \tilde{B}_0(Q)$ espace des fonctions sur lequel Q_t est faiblement continu alors on aura :

$${}^{(a)}V^{\lambda}f \in \mathscr{D}_{\tilde{A}(Q)}$$

où $\tilde{A}(Q)$ est le générateur infinitésimal faible de Q_t et $\mathscr{D}_{\tilde{A}(Q)}$ son domaine.

Or d'une part $fa \in \tilde{B}_0(Q)$ car :

$$\| Q_t fa \| \leqq \sup_{x \in E} E_x[e^{-\lambda A_t^{(a)}} | fa | (X_t)] \leqq \| a \| \ \| f \|$$

et lorsque $t \downarrow 0$, $e^{-\lambda A_t^{(a)}}(fa)(X_t) \to (fa)(x)$ en restant borné par $\| a \| \ \| f \|$ donc

$$Q_t fa(x) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} (fa)(x)$$

Mais si $\tilde{U}^{\lambda}$ désigne la résolvente de Q, on obtient par calcul élémentaire, pour f mesurable bornée :

$$U^{\lambda}f - U^{\lambda}f = \lambda U^{\lambda}[a\tilde{U}^{\lambda}f]$$

Donc Q est fortement fellérien et les fonctions de $\mathscr{D}_{\tilde{A}(Q)}$ sont continues.

1.2. Démonstration du théorème. Nous supposerons maintenant que a est une fonction positive continue à support dans un compact K. Soit M l'ensemble des mesures de Radon positives à support dans K et de masse 1. M est un sous-ensemble convexe de la sphère unité de l'espace des mesures de Radon sur E. M est faiblement fermé, donc faiblement compact.

Pour tout $\lambda \in R_+$ l'application :

$$\nu \to \lambda \nu^{(a)} V^{\lambda}$$

envoie M dans M, et elle est linéaire et continue. En effet posons :

$$0 = \{ a > 0 \}$$

$$\lambda^{(a)}V^{\lambda}(x, 0) = \lambda E_x \int_0^{\infty} e^{-\lambda A_t^{(a)}} 1_0(X_t) dA_t^{(a)}$$

$$= \lambda E_x \int_0^{\infty} e^{-\lambda A_t^{(a)}} dA_t^{(a)} = 1.$$

Donc si $v \in M$:

$$\lambda v^{(a)}V^{\lambda}(0) = \int_K v(dx) \lambda^{(a)}V^{\lambda}(x, 0) = 1$$

et si

$$A \cap 0 = \emptyset \qquad \lambda v^{(a)}V^{\lambda}(A) = 0.$$

D'autre part soit $\mathscr{F}_\alpha$ un filtre de mesures v_α sur M, convergeant faiblement vers une mesure v. Comme K est fermé dans E qui est normal, toute fonction f continue sur K se prolonge en une fonction $\hat{f}$ continue et bornée sur E et d'après le lemme ${}^{(a)}V^{\lambda}\hat{f}$ est continue.

Donc pour tout $\lambda \in R_+$ on a :

$$\lim_{\mathscr{F}_\alpha} \langle \lambda v^{(a)}V^{\lambda}, f \rangle = \lim_{\mathscr{F}_\alpha} \langle v_\alpha, \lambda^{(a)}V^{\lambda}f \rangle = \langle v, \lambda^{(a)}V^{\lambda}f \rangle = \langle \lambda v^{(a)}V^{\lambda}, f \rangle$$

On peut donc appliquer le théorème de Markov-Kakutani (cf. [*4*]) et l'on conclut qu'il existe dans M un élément invariant par les opérateurs $\lambda^{(a)}V^{\lambda}$. Mais d'après la proposition II.3 de [*2*] cette mesure est proportionnelle à $a\mu$. Donc pour toute fonction a continue à support compact a est une mesure de Radon bornée. μ est donc une mesure de Radon.

II. — ÉTUDE DE LA SINGULARITÉ DES FONCTIONS DE TRANSITION PAR RAPPORT A LA MESURE INVARIANTE

2.0. Soit $P_t(x, A)$ la fonction de transition du processus X. Nous écrirons sa décomposition de Lebesgue par rapport à μ :

$$P_t(x, .) = P_t^0(x, .) + P_t^1(x, .)$$

où $P_t^1(x, .)$ est la composante singulière. Une application classique du théorème des Martingales montre que la fonction $x \rightarrow P_t^1(x, A)$ est mesurable quel que soit le borélien A. Dans [5], Doob montre que $P_t^1(x, .)$ vérifie l'équation de Chapman-Kolmogoroff et que la fonction :

$$t \to P_t^1(x, D)$$

est une fonction décroissante. Nous poserons

$$g(x) = \lim_{t \to \infty} P_t^1(x, D) ;$$

$g(x)$ est clairement mesurable.

Doob montre que la condition $g(x) = 0$ permet d'obtenir certains théorèmes de convergence. Nous allons montrer ici que cette condition est toujours réalisée pour les processus de Markov récurrents dès que la fonction de transition $P_t(x, .)$ possède une partie absolument continue.

2.1. **Théorème.** — Étant donnée une classe conservative D, il n'y a que deux cas possibles :

— ou bien pour tout réel positif t :

$$P_t^1(x, D) = 1 \qquad \mu\text{-presque sûrement sur D,}$$

— ou bien :

$$\lim_{t \to \infty} P_t^1(x, D) = 0$$

pour tout x de D.

Démonstration :

La fonction $1 - g$ est surmédiane car ;

$$P_s[1 - g](x) = 1 - \int P_s^0(x, dy) - \int P_s^1(x, dy) g(y)$$

$$= 1 - g(x) - \int P_s^0(x, dy) g(y) \leqq 1 - g(x)$$

Donc d'aprés la proposition III.3 de [2], $1 - g$ est égale μ-presque sûrement sur D à une constante $1 - a$ et $1 - g \geqq 1 - a$ partout comme P_t^1 vérifie l'équation de Chapman-Kolmogoroff, on a en appliquant le théorème de Lebesgue :

$$g(x) = \lim_{s \to \infty} P_{t+s}^1(x, D) = \lim_{s \to \infty} \int_D P_t^1(x, dy) P_s^1(y, D)$$

$$= \int_D P_t^1(x, dy) g(y) \leqq a P_t^1(x, D)$$

d'où en passant à la limite :

$$g(x) \leqq ag(x)$$

pour tout x de D.

Donc $a \leqq a^2$ et comme $a \leqq 1$ on a $a = 1$ ou $a = 0$. Dans le second cas on a $g(x) \leqq ag(x) = 0$ partout sur D.

Remarque : Dans le premier cas, l'ensemble $\{ g < 1 \}$ est un ensemble transient (cf. [*3*]). Il peut ne pas être vide.

Supposons par exemple que D est réunion d'un cercle et d'un point isolé $\{ x_0 \}$. Le processus partant d'un point du cercle étant la translation uniforme sur le cercle ; le processus partant de $\{ x_0 \}$ y reste un temps exponentiel puis saute en un point dont la loi est une loi diffuse sur le cercle. Dans ce cas $P_t^1(x, D) = 1$ pour tout t et tout x du cercle ; mais $P_t^0(x_0, D) = 1$ pour tout t.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] AZEMA, J., KAPLAN-DUFLO M. et REVUZ D. — Récurrence fine des processus de Markov. *Annales de l'Institut Henri Poincaré.* Vol. II, n° 3, 1966, p. 185-220.

[*2*] AZEMA J., KAPLAN-DUFLO M. et REVUZ D. — Mesure invariante sur les classes récurrentes des processus de Markov. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie werw Geb*, t. **8**, 1967, p. 157-181.

[*3*] AZEMA J., KAPLAN-DUFLO M. et REVUZ D. — Fonctionnelles additives des processus de Markov récurrents. *C. R. Acad. Sci. de Paris*, t. **264**, p. 1142-1145.

[*4*] BOURBAKI. — *Espaces vectoriels topologiques.* Chap. II. Hermann.

[*5*] DOOB J. L. — *Asymptotic properties of Markoff transitions probabilities.* T. A. M. S., t. **63**, 1948, p. 393-421.

[*6*] HUNT G. A. — Markov Processes and Potentials. *Ill. J. of Maths.*, t. **1**, 1957, p. 46-93, p. 316-369 ; t. **2**, 1958, p. 151-213.

[*7*] MEYER P. A. — Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov. *Ann. Inst. Fourier*, t. **12**, 1962, p. 125-230.