

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. P. BENZÉCRI

## **Un modèle géométrique de milieu continu déformable : la théorie des deux métriques**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 3, n° 3 (1967), p. 277-321

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1967\\_\\_3\\_3\\_277\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1967__3_3_277_0)

© Gauthier-Villars, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**Un modèle géométrique  
de milieu continu déformable :  
la théorie des deux métriques**

par

**J. P. BENZÉCRI**

---

Pour être en état d'appliquer facilement la Géométrie à la Mécanique, il ne suffit pas de connaître les diverses formes que les lignes ou surfaces peuvent présenter, et les propriétés de ces lignes ou de ces surfaces, mais il importe encore de savoir quels sont les changements de forme que peuvent subir les corps considérés comme des systèmes de points matériels, et à quelles lois générales ces changements de forme se trouvent assujettis <sup>(1)</sup>.

A. Cauchy

---

**SOMMAIRE.** — Notre modèle comprend deux métriques riemanniennes, dont l'une donne les distances des molécules dans l'espace et l'autre les distances qui tendraient à s'établir en l'absence de contrainte. Cette dernière métrique est généralement non euclidienne; sa variation au cours du temps correspond au fluage. Le modèle, qui est susceptible de diverses généralisations, est étudié du point de vue de la thermodynamique.

**SUMMARY.** — In our model, we use two different riemannian metrics; the first one gives the actual distances between molecules; the second gives

---

<sup>(1)</sup> Cité après N. Jukovskii, Thèse, Recueil Mathématique, Tome VIII, ou Œuvres complètes, Tome II, 1949.

the distances that should be; if there were no stren. The latter is generally non euclidian, and its variation through times is equivalent to plasticity. Various generalisations are suggested. A thermodynamical study is included.

## 1. INTRODUCTION : LES MÉTHODES DE LA MÉCANIQUE

L'étude des milieux continus progresse suivant trois directions principales : technologie, physique, géométrie.

C'est l'ingénieur qui découvre des matériaux (plastiques, alliages...), des méthodes d'usinage (emboutissage, traitement de surface), des phénomènes parasites (vibrations, fluage...) : il pose ainsi des problèmes nouveaux et leur donne une première solution.

Du physicien, au contraire, on attend l'explication intime et définitive des phénomènes : tel comportement macroscopique résulte de la disposition des longues chaînes moléculaires d'un polymère (caoutchouc); tel autre, d'un principe statistique de la mécanique quantique ou de la thermodynamique... Mais, quelle que soit notre confiance dans la mécanique physique, nous devons savoir que si la description moléculaire des gaz (milieux peu condensés où la plus grande part de l'énergie échangée par chaque molécule l'est pendant une faible fraction du temps dans des interactions binaires) est depuis longtemps fort avancée, la physique des solides cristallins (milieux très ordonnés où chaque élément est en permanence, en interaction avec les mêmes voisins immédiats..., ou les mêmes modes énergétiques globaux) est en plein développement, tandis que la théorie des liquides (milieux assez denses pour que chaque élément soit en permanence en interaction avec plusieurs voisins, qui cependant se renouvellent sans cesse...) en est à ses débuts. *A fortiori*, la théorie des plastiques est-elle dans l'enfance.

Avec les phénomènes matériels, le géomètre, en tant que tel, n'a pas un contact privilégié. Mais dans l'espace des formes où l'imagination l'introduit et où la rigueur règle ses pas, il lui échoit d'organiser en un système harmonieux et efficace les ébauches de l'ingénieur et du physicien. De plus, quand les informations sont rares, les conjectures du mathématicien peuvent étayer des descriptions partielles et guider la recherche des faits. D'où la grande part que, faute de mieux, tiennent aujourd'hui dans tant de sciences (sciences humaines : psychologie, sociologie, linguistique, ...; mais aussi physique des particules élémentaires...) les modèles de comportements. Qui ignore les alcaloïdes parle de *dormitiva virtus*; qui ne connaît la loi de Newton place les planètes sur des cercles engrenés...

Quant à nous, en concevant des modèles de milieux continus (plus particulièrement de milieux condensés déformables, considérés dans le domaine statique où les énergies de déformation l'emportent de beaucoup sur les énergies cinétiques...) puissions-nous être plus heureux que tant d'astronomes qui se sont succédé de Ptolémée à Copernic.

Depuis quelque dix ans, une école de géomètres a renouvelé l'appareil mathématique de la mécanique des milieux continus. Nos propres vues se sont formées il y a plusieurs années en confrontant à la théorie des espaces de Riemann, des rudiments de technologie et de physique. Si les recherches dont G. Truesdell (1965), vient de publier une anthologie ne nous sont connues que depuis peu, nous aurions eu grand-peine, hors de ce cadre favorable, à trouver tout seul quels énoncés analytiques donner de nos intuitions. Nous renverrons donc fréquemment aux mémoires de A. E. Green, W. Noll, R. S. Rivlin, C. Truesdell..., tant pour reconnaître ce que nous devons à ces auteurs, que pour marquer, s'il se peut, l'originalité de nos conceptions.

Donnons le plan de notre travail : au § 2, nous formulons les équations cinématiques et dynamiques d'un milieu continu, en faisant jouer un rôle central à la métrique de position (cf. 2.2). Ainsi se trouve marquée la place des équations rhéologiques, relations entre contrainte déformation et fluage qui font l'objet du § 3, là est introduite la métrique de structure (cf. 3.1) dont on peut dire en bref qu'elle est en état de référence non euclidien, variable. Nous suggérons des explications pour deux phénomènes physiques : la pulvérisation du verre trempé (cf. 3.2.4) et le gelage des contraintes (cf. 3.5.3). Une analogie mécanique (cf. 3.5.2) nous suggère une théorie thermodynamique du processus irréversible qu'est le mouvement d'un matériau visqueux et fluent (cf. 3.6).

## 2. OBJET DE LA RHÉOLOGIE

Par rhéologie, nous entendrons ici, en suivant l'étymologie, étude de la matière qui coule, qui se déforme continument. Pour préciser cette définition, nous procéderons négativement; c'est-à-dire que nous écarterons progressivement du champ de notre étude des phénomènes qui certes concernent le flux de la matière, mais dont les lois peuvent être déduites des principes généraux de la cinématique et de la dynamique ou même de quelques postulats nouveaux qui, présumés valables, quelle que soit la matière, ne nous disent rien de la diversité des états où peut se trouver celle-ci.

### 2.1. Continuum de masses.

Par continuum de masses, nous entendrons une variété tridimensionnelle  $\mathcal{M}$ , munie d'une mesure positive  $\mu_\mu^*$ . Un point  $m \in \mathcal{M}$ , sera appelé un point matériel, une partie mesurable  $\underline{m} \subset \mathcal{M}$  sera appelée un domaine matériel; l'intégrale  $\mu_{\underline{m}}^*$  de la mesure  $\mu$  étendue à  $\underline{m}$ , sera appelée la masse du domaine. Un système de coordonnées locales sur  $\mathcal{M}$  sera désigné par  $\{u^\alpha\}$ ; on supposera que la mesure  $\mu$  a par rapport à tout système  $\{u^\alpha\}$  une densité non-nulle (notée aussi  $\mu$ ) et l'on écrira :

$$\mu_{\underline{m}}^* = \int_{\underline{m}} \mu(u^1, u^2, u^3) du^1 du^2 du^3$$

Cette formule appelle une remarque.

En toute rigueur l'intégrale ci-dessus n'a de sens que si  $\underline{m}$  est un cycle orienté de  $\mathcal{M}$  (par exemple une partie, difféomorphe à une sphère et munie d'une orientation) inclus dans le domaine de définition des coordonnées  $u^\alpha$  : or, à l'encontre d'une forme différentielle, l'élément de masse doit avoir une intégrale dont la valeur ne change pas de signe avec l'orientation de la partie dont on cherche la masse; on peut de deux manières échapper à cette difficulté (que seuls les puristes de la géométrie admettront d'abord, mais qui peut soudain se présenter à un calculateur sous la forme d'une masse rendue négative par un changement de coordonnées...). D'une part,  $\mathcal{M}$  (devant, on va le voir, être réalisable comme une partie de l'espace euclidien tridimensionnel), est orientable : l'on peut donc se restreindre aux systèmes de coordonnées directs pour une certaine orientation, et supposer la densité toujours positive. D'autre part, la notion de distribution différentiable de masses peut être définie comme distincte de celle de forme différentielle. Notons  $T(\mathcal{M})$  le fibré tangent à ;  $T^*(\mathcal{M})$  le fibré dual à  $T(\mathcal{M})$ ;  $O(\mathcal{M})$  le fibré des pseudoscalaires sur  $\mathcal{M}$  (i. e. des couples d'une orientation  $\varepsilon$  et d'un scalaire réel  $\lambda$ , le couple  $(\varepsilon, \lambda)$  étant équivalent au couple  $(-\varepsilon, -\lambda)$  où  $-\varepsilon$  désigne l'orientation opposée à  $\varepsilon$ ). Une forme différentielle de degré 3 est une section du fibré  ${}^3\Lambda T^*(\mathcal{M})$ ; une distribution différentielle de masse est une section du fibré  $({}^3\Lambda T^*(\mathcal{M})) \otimes O(\mathcal{M})$ .

Supposons qu'une distribution différentielle de masse soit donnée localement comme le produit tensoriel d'une fonction pseudoscalaire par une forme :

$$(\varepsilon, \lambda(u^1, u^2, u^3)) \otimes (\rho(u^1, u^2, u^3) du^1 \wedge du^2 \wedge du^3),$$

où  $\varepsilon$  est une orientation définie sur tout le domaine des coordonnées  $u^\alpha$  (i. e. soit l'orientation pour laquelle ce système est direct, ou celle pour lequel

il est inverse). Soit  $\underline{m}$  le support d'un cycle différentiable  $\underline{m}_\varepsilon$ , d'orientation  $\varepsilon$ , la masse de  $\underline{m}$  sera :

$$\int_{\underline{m}_\varepsilon} \lambda(u^1 u^2 u^3) \times \rho(u^1, u^2, u^3) du^1 \wedge du^2 \wedge du^3$$

On vérifie sans peine que cette masse ne dépend que du produit des tenseurs donnés ci-dessus et non de la présentation particulière de ce produit (on peut changer  $\varepsilon$  en  $-\varepsilon$  et  $\lambda$  en  $-\lambda$ ; ou encore  $\lambda$  en  $\varphi\lambda$  et  $\rho$  en  $\rho/\varphi$ ,  $\varphi$  désignant une fonction quelconque).

### 2.2. Cinématique et métrique de position.

Une *disposition spatiale* du continuum de masses sera une application différentiable injective (deux points matériels distincts ne peuvent avoir même position à un même instant...) de la variété  $\mathcal{M}$  dans l'espace euclidien tridimensionnel. Un mouvement du continuum de masses sera une suite de dispositions spatiales dépendant différentiablement d'un paramètre  $t$ , le temps variant sur un intervalle de la droite réelle. Si l'espace euclidien est rapporté à un système (généralement orthonormal) de coordonnées  $x^i$ , un mouvement sera donné par un système de fonctions différentiables de quatre variables :

$$x^i = x^i(\{u^\alpha\}; t).$$

Le vecteur vitesse, à l'instant  $t$ , du point matériel  $\{u^\alpha\}$  a pour composantes euclidiennes :

$$v^i = \frac{\partial}{\partial t} x^i(\{u^\alpha\}; t);$$

les composantes  $v^\alpha$  dans un système de coordonnées matérielles  $u^\alpha$  sont reliées aux  $v^i$  par le système (où il convient de sommer par rapport à l'indice muet  $\alpha \dots$ ) :

$$v^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}(\{u^\alpha\}; t) = v^i$$

comme le tableau des  $(\delta x^i / \partial u^\alpha)$  a un déterminant non nul (i. e. la différentielle de l'application « disposition » est non dégénérée), on peut écrire les formules inverses :

$$v^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} v^i$$

Et de même pour l'accélération :

$$\dot{v}^i = \frac{\partial^2}{\partial t^2} x^i(\{u^\alpha\}; t)$$

$$\dot{v}^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \dot{v}^\alpha$$

$$\dot{v}^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} \dot{v}^i$$

A tout instant  $t$ , la disposition spatiale définit sur  $\mathcal{M}$  une métrique euclidienne; la *métrique de position*, dont le  $ds^2$  sera noté :

$$p_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta;$$

on a :

$$p_{\alpha\beta} = p_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta},$$

où  $p_{ij} = \delta_{ij}$  si les coordonnées  $x^i$  sont, comme on le supposera généralement, orthonormées. Comme on le verra, d'une part, la métrique de position simplifie l'énoncé du principe d'indifférence matérielle (cf. e. g. Truesdell, t. II, 1965, p. 64; et l'article subséquent de Noll, 1955), d'autre part, couplée avec la métrique de structure (introduite plus bas, cf. 3.1), elle donne un modèle simple de fluage.

Le tenseur  $\{p_{\alpha\beta}\}$  se présente ici comme un élément symétrique de  $T^* \otimes T^*$ ; on peut encore l'interpréter comme un isomorphisme de  $T$  sur  $T^*$  :

$$\{u^\alpha\} \rightsquigarrow \{u^\beta p_{\alpha\beta}\}$$

l'isomorphisme inverse sera noté  $\{p^{\alpha\beta}\}$ ; il est défini par :

$$p^{\alpha\beta} p_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma;$$

$\{p^{\alpha\beta}\}$  peut s'interpréter encore comme la forme quadratique sur  $T^*$  transporté de  $\{p_{\alpha\beta}\}$  (considérée comme forme quadratique sur  $T$ ) par  $\{p_{\alpha\beta}\}$  considérée comme isomorphisme de  $T$  sur  $T^*$ ).

Après les considérations cinématiques de ce numéro, on doit revenir sur la distribution des masses. On a :

$$\mu(u^1, u^2, u^3) du^1 \wedge du^2 \wedge du^3 = \mu(u^1, u^2, u^3) (\det [\partial x^i / \partial u^\alpha])^{-1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

la fonction du point et du temps :

$$\mu(u^1, u^2, u^3) | \det [\partial x^i / \partial u^\alpha] |^{-1} = \mu(u^1, u^2, u^3) (\det [p_{\alpha\beta}])^{-1/2}$$

est appelée masse spécifique et généralement notée  $\rho$ . Considérée comme fonction des  $x^i$  et de  $t$ ,  $\rho$  satisfait à une équation de continuité :

$$\rho + \rho \operatorname{div} v = 0;$$

calculant  $\rho$  à partir de la fonction  $\mu(u^1, u^2, u^3)$  (qui ne dépend pas de  $t$ ) par l'intermédiaire des  $x^i(u^\alpha)$ , nous sommes assurés que l'équation de continuité est satisfaite.

### 2.3. Le tenseur des contraintes.

Soit  $\mathcal{S}$  une surface matérielle orientable (sous-variété de dimension 2 de  $\mathcal{M}$ ). Supposons que l'on supprime la matière de l'un des côtés de  $\mathcal{S}$  : pour que de l'autre côté la matière persévère dans son équilibre ou dans son mouvement (sans discontinuité des accélérations) il faut appliquer un système de forces qui remplacent celles dues à l'impénétrabilité, à la cohésion, etc., de la matière. C'est par des considérations de la sorte que l'on a coutume de définir à tout instant sur un continuum matériel en mouvement, le champ de tenseur des contraintes. Quoique la mesure des contraintes ne soit possible (moyennant des hypothèses naturelles) que dans certaines conditions particulières de mouvement (e. g. pièce métallique soumise à la traction...), on considère les contraintes comme des grandeurs observables.

Un élément de surface  $dS$  considéré comme élément de frontière d'un élément de volume matériel sera représenté par un secteur orthogonal à la surface, orienté vers l'extérieur de la matière et de longueur égale à l'aire de la surface (orthogonalité et longueur s'entendent pour la métrique de position à l'instant et au point considéré). On écrira ce vecteur :

$$\{dS^\alpha\}; \quad \text{ou} : \quad \{dS^i\},$$

avec les relations :

$$dS^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} (\{u^\alpha, t\}) dS^\alpha$$

$$dS^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} dS^i$$

Moyennant des hypothèses de différentiabilité, l'élément de force  $dF$  exercé suivant  $dS$  sur l'élément de matière dont elle est frontière s'écrira :

$$dF^\alpha = \sigma^\alpha_\beta dS^\beta; \quad \text{ou} : \quad dF^i = \sigma^i_j dS^j$$

En particulier, si  $dF$  est toujours normal à l'élément de surface, on dit qu'il y a répartition hydrostatique des contraintes, ou pression pure ( $\sigma^\alpha_\beta = -\pi \delta^\alpha_\beta$ ).



Entre les composantes  $\sigma^\alpha_\beta$  et  $\sigma^i_j$  on a les relations :

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} (\{u^\alpha\}; t) \times \sigma^\alpha_\beta = \sigma^i_j \times \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} (\{u^\alpha\}; t)$$

Sous l'hypothèse (non valable pour un plasma de dipôles !) que la matière n'est pas soumise à des forces extérieures exerçant sur un élément un couple du même ordre que son volume mais non négligeable vis-à-vis de lui, on démontre classiquement que le tenseur des contraintes  $\sigma^i_j$  est symétrique, i. e. :

$$\forall i, j : \sigma^i_j = \sigma^j_i$$

Dans un système de coordonnées  $u^\alpha$  lié à la matière, donc non orthonormé pour la métrique  $p$ , la symétrie s'écrit :

$$\forall \alpha, \beta : p_{\alpha\gamma} \sigma^\gamma_\beta = p_{\beta\gamma} \sigma^\gamma_\alpha$$

(le terme symétrie n'a de sens que pour un tenseur du carré tensoriel d'un espace vectoriel. Or, on a :

$$\begin{aligned} \sigma &\in T(\mathcal{M}) \otimes T^*(\mathcal{M}) \\ p &\in T^*(\mathcal{M}) \otimes T^*(\mathcal{M}); \end{aligned}$$

par contraction de  $\sigma$  et de  $p$  on obtient un tenseur de  $T^{*2}$ , qui se trouve être symétrique...).

On peut faire ici sur la nature tensorielle de  $\sigma$ , des considérations analogues à celles de 2.1. La notion d'élément d'aire  $dS$ , considéré comme élément de frontière n'a été identifiée à celle de vecteur que par l'intermédiaire de la métrique  $p$ . Il est possible, indépendamment de  $p$ , de définir le tenseur des contraintes et d'en exprimer la symétrie.

Un élément de frontière, sera un élément du produit tensoriel :

$$(T \wedge T) \otimes O;$$

en bref, au tenseur :

$$(a \wedge b) \otimes (\varepsilon, \lambda)$$

(où  $a, b$  sont des vecteurs de  $T$ ,  $\varepsilon$  une orientation,  $\lambda$  un scalaire réel), on associera l'élément de frontière défini par  $|\lambda|$  fois le parallélogramme construit sur  $a, b$ , ce parallélogramme étant considéré comme bord de la matière située du même côté qu'un vecteur  $c$  tel que le système :

$$\left( a, b, \frac{\lambda}{|\lambda|} c \right)$$

ait l'orientation  $\varepsilon$ .

Le tenseur des contraintes, qui à un élément de frontière associe un vecteur appartiendra au produit tensoriel :

$$((T \wedge T) \otimes O)^* \otimes T = (T^* \wedge T^*) \otimes O \otimes T$$

l'égalité s'explique parce que  $O^* = O$ ).

Or nous sommes ici dans un espace tridimensionnel : par conséquent  $T \wedge T$  et  $T^* \wedge T^*$  sont des espaces (en dualité) de dimension 1 : nous les noterons respectivement  $V$  et  $V^*$  ( $V$  comme volume; plus précisément, un champ de  $V^*$  est une 3-forme). L'application canonique produit extérieur

$$(T^* \wedge T^*) \times T^* \rightarrow V^*$$

nous fournit l'identification (isomorphisme canonique) :

$$T^* \wedge T^* \approx T \otimes V^*$$

Ainsi le tenseur des contraintes  $\sigma$  apparaît comme un élément de

$$T \otimes T \otimes O \otimes V^* ;$$

comme le facteur  $T$  figure deux fois dans ce produit, on peut donc interpréter l'expression  $\sigma$  est symétrique, comme

$$\sigma \in (\otimes_s^2(T)) \otimes O \otimes V^* \subset T \otimes T \otimes O \otimes V^* ,$$

où  $\otimes_s^2(T)$  désigne le sous-espace des tenseurs symétriques de  $T \otimes T$ ).

### 2.4. L'équation dynamique.

On écrit que tout élément de volume matériel est en équilibre sous l'action des forces d'inertie, des forces extérieures et des forces de contraintes. Si on note  $g$  le vecteur force extérieure exercé sur l'unité de masse (e. g. force massique de pesanteur...) on a l'équation classique (cf. e. g. Noll, 1955, p. 17) :

$$\text{Div } \sigma + \rho g - \rho \dot{v} = 0$$

ou sous forme tensorielle :

$$p^{jk} \frac{\partial \sigma^i}{\partial x^k} + \rho g^i - \rho v^i = 0$$

(équation où nous avons fait figurer le tenseur métrique  $p = \delta$  pour que les contractions se fassent comme il se doit entre paires d'indices l'un haut, l'autre bas).

Dans un système de coordonnées  $u^\alpha$  liées à la matière, la formule donnant

le champ de vecteur (section de  $T(\mathcal{M})$ ) divergence du champ de tenseur  $\sigma$  est plus complexe. On a alors l'équation dynamique :

$$p^{\alpha\beta}[(\partial\sigma^\gamma_\alpha/\partial u^\beta) - \sigma^\gamma_\epsilon \Gamma^{\epsilon}_{\beta\alpha} + \sigma^\epsilon_\alpha \Gamma^\gamma_{\beta\epsilon}] = \mu(\det [p^{\alpha\beta}])^{1/2}(\dot{v}^\gamma - g^\gamma);$$

formule où (cf. e. g., Cartan, 1925, p. 11 ou Lichnerowicz), les  $\Gamma$  sont les symboles de Christoffel, donnés par :

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} &= p^{\alpha\epsilon} \Gamma_{\beta\epsilon\gamma}; \\ \Gamma_{\alpha\beta\gamma} &= 1/2 \left( \frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial p_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial p_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} \right).\end{aligned}$$

Considérons dans quelle mesure on peut, en étudiant un milieu continu, faire abstraction du mouvement même  $x^i(\{u^\alpha\}; t)$ , pour ne considérer que la métrique de position et les contraintes (sur le lien entre les deux cf. *infra*).

D'abord, il est possible connaissant le champ de tenseur  $p_{\alpha\beta}(\{u^\alpha\}; t)$  et le mouvement d'un repère matériel particulier (i. e. pour un point matériel particulier  $\{u^\alpha_0\}$ ) les 3 fonctions du temps :

$$x^i(\{u^\alpha_0\}; t)$$

et les neuf fonctions du temps :

$$\frac{\partial}{\partial u^\beta} x^i(\{u^\alpha_0\}; t)$$

celles-ci assujeties aux six relations (cf. 2.2) :

$$p_{ij} \times \frac{\partial}{\partial u^\beta} x^i(\{u^\alpha_0\}; t) \times \frac{\partial}{\partial u^\gamma} x^j(\{u^\alpha_0\}; t) = p_{\beta\gamma}(\{u^\alpha_0\}; t)$$

ce qui fait donc  $3 + 9 - 6 = 6$  (fonctions numériques du temps), de reconstituer, par intégration des équations de connexion, les trois fonctions de quatre variables qui décrivent le mouvement.

Pareil calcul n'offre aucun intérêt pratique. En revanche, si on peut négliger les forces d'inertie (on dit alors que le mouvement est quasi statique), ainsi que les forces extérieures (ou que les  $g^\alpha$  sont faciles à calculer parce qu'il s'agit du champ constant de la pesanteur et que des considérations de symétrie donnent les composantes de la verticale dans le système des  $u^\alpha$  . . .) l'équation dynamique ne comporte plus que  $\sigma$  et  $p$ . Mais outre la relation contrainte-déformation (cf. *infra*), il faut ajouter à l'équation dynamique (entre  $\sigma$  et  $p$ , des équations de deux sortes) :

1° Annulation du tenseur de courbure de la métrique de position : en

effet, cette métrique n'est réalisable dans un espace euclidien que si (cf. Cartan, 1925, p. 22, ou Lichnerowicz) :

$$R_{\beta\gamma\epsilon}^{\alpha} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial u^{\epsilon}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\epsilon}}{\partial u^{\gamma}} + \Gamma^{\eta}_{\beta\gamma} \Gamma^{\alpha}_{\eta\epsilon} - \Gamma^{\eta}_{\beta\epsilon} \Gamma^{\alpha}_{\eta\gamma} = 0$$

(cette condition nécessaire n'est suffisante que localement : elle assure l'existence d'une application de  $\mathcal{M}$  dans l'espace euclidien induisant la métrique  $p$ , mais elle n'assure pas que cette application soit injective).

2° Conditions aux limites :

On ne peut, sans intégrer d'équations différentielles, exprimer en  $p$  et  $\sigma$  des conditions telles que : un point matériel de la frontière est soumis à une force de contact dépendant de sa position. Nous nous limiterons donc à des conditions aux limites de deux types : pression superficielle et encastrement (il est clair qu'on a en vue ici des matériaux solides ou plastiques non des fluides).

a) Pression superficielle : supposons que la surface libre du milieu soit définie par une équation implicite

$$\varphi(u^1, u^2, u^3) = 0$$

un vecteur normal à la surface sera :

$$p^{\alpha\beta}(\partial\varphi/\partial u^{\beta}) = n^{\alpha} ;$$

la contrainte à laquelle est soumis l'élément de surface représenté par  $n^{\alpha}$  devra être  $\pi \cdot n^{\alpha}$  ( $\pi$  pression) d'où :

$$\pi p^{\alpha\beta}(\partial\varphi/\partial u^{\beta}) = \sigma^{\alpha}_{\beta} p^{\beta\gamma}(\partial\varphi/\partial u^{\gamma})$$

b) Encastrement : les conditions d'encastrement concernent  $p$ , non  $\sigma$ ; on exprime que les deux formes quadratiques fondamentales (au sens de la géométrie différentielle classique) de la surface du milieu sont celles imposées par l'encastrement. Supposons que l'équation de la surface libre soit  $u^3 = 0$  (pratiquement, il est naturel de choisir le paramétrage pour cela). Les fonctions

$$p_{\alpha\beta}(u^1, u^2, 0; t) \quad , \quad (\text{où } \alpha, \beta, \epsilon \in \{1, 2\} \text{ )},$$

et :

$$\frac{1}{\sqrt{p^{33}}} [(\partial p^{\gamma 3} / \partial u^{\alpha}) + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\epsilon} p^{\epsilon 3}] p_{\gamma\beta} \quad , \quad (\text{où } \alpha, \beta \in \{1, 2\} \text{ )},$$

qui sont les six coefficients des deux formes quadratiques fondamentales de la surface  $u^3 = 0$ , rapportée aux coordonnées paramétriques  $u^1, u^2$ , doivent être indépendantes du temps.

c) Conditions mixtes : si le bord  $\partial\mathcal{M}$  de  $\mathcal{M}$  est divisé en  $n$  portions connexes  $\partial\mathcal{M}_i$  dont chacune est, soit encastrée, soit soumise à une pression  $\pi_i$ , on écrira  $n$  systèmes de conditions de l'un des deux types ci-dessus. Mais il faut prendre garde que si deux portions disjointes du bord sont encastrées dans des appuis reliés rigidement entre eux, on fixe non seulement les formes de ces portions (cf. 6), mais aussi leur position relative. D'où une condition de forme intégrale sur la connexion associée à la métrique de position.

Notons ici que les équations peuvent en première approximation être linéarisées sous la seule hypothèse que les variations relatives locales de la métrique de position soient faibles, au sens suivant : quel que soit le vecteur  $h^\alpha$  situé au point  $u^\alpha$  le carré de norme

$$p_{\alpha\beta}(\{u^\alpha\}; t)h^\alpha h^\beta$$

varie au cours du temps de moins qu'un pourcentage fixé (e. g. 5 %). Une telle restriction, comme l'a marqué Novozhilov (1948, § 10) est compatible avec de grandes déformations globales (e. g. si une longue pièce se courbe, la distance entre les extrémités peut être divisée par 2 sans que la courbure ne soit nulle part grande.

## 2.5. Le problème rhéologique.

Supposons, ce qui est assurément fort peu réaliste, que l'on soit maître de donner au champ de force  $g$  une valeur arbitraire fonction du temps. Il sera alors possible de faire prendre aux  $x^i(u^\alpha)$ , donc aux  $p_{\alpha\beta}(\{u_\alpha\}; t)$ , des valeurs quelconques : car quelles que soient les contraintes qui apparaissent dans la matière du fait de ces déformations, on pourra fixer  $g$  pour équilibrer ces contraintes et les forces d'inertie.

Le problème fondamental de la rhéologie peut maintenant s'énoncer ainsi, indépendamment de toute considération dynamique :

Étant donné un continuum matériel étudier comment le tenseur des contraintes  $\sigma$ , y est fonction de la métrique de position  $p$ .

On notera ici :

1° que nous parlons de la métrique de position  $p$  et non du mouvement : c'est postuler implicitement le principe d'indifférence matérielle, selon lequel un déplacement (isométrique) fonction du temps composé avec un mouvement ne change rien aux contraintes (ce principe est plus général que le principe de Galilée; principe qui, il est vrai, concerne les équations de la dynamique, éliminées de notre objet par l'introduction d'un champ extérieur de compensation...);

2° que tel que nous l'avons posé — relation entre  $\sigma, p, u$  — le problème semble physiquement indéterminé. D'une part, nous n'avons rien dit des phénomènes thermiques; d'autre part, il ne suffit pas d'avoir la géométrie macroscopique des masses pour calculer les contraintes qui, au moins dans un solide, résultent de l'organisation intime de ce que l'on peut grossièrement se figurer comme un réseau de ressorts reliant ces masses ! Dans la suite, complétant le schéma mathématique du domaine matériel pour décrire adéquatement (au niveau macroscopique) l'objet physique que nous avons en vue, nous introduirons un être géométrique non observable, le champ tensoriel métrique de structure.

### 3. UN MODÈLE DE MATÉRIAU ISOTROPE ET PERMANENT

Au centre de nos modèles est l'idée d'associer à tout matériau un état de référence à la fois variable au cours du temps (du fait du fluage) et généralement non euclidien, irréalisable dans l'espace ordinaire comme un état d'équilibre. Nous traitons presque exclusivement de matériaux isotropes et dont on peut dire, en bref, que leurs modules (d'élasticité, de fluage, de viscosité) sont constants (permanents). Toutefois, à 3.5.3, nous combinons un modèle plus complexe qui permet d'expliquer le phénomène du « gelage des déformations ».

#### 3.1. Déformation et métrique de structure.

Soit E et F deux espaces euclidiens (espace vectoriel muni d'une forme quadratique définie positive) de même dimension L ; une application linéaire non dégénérée de E sur F. On sait qu'il existe un système unique de trois applications linéaires B, I, C :

$$B \in \mathcal{L}(E, E) \quad ; \quad I \in \mathcal{L}(E, F) \quad ; \quad C \in \mathcal{L}(F, F);$$

B et C symétriques (relativement à la métrique euclidienne de E et F respectivement), I isométrique, telles que :

$$L = C \circ I = I \circ B$$

I est la partie déplacement et C (ou B) la partie déformation de l'application L.

En mécanique des milieux élastiques, on considère communément qu'à

l'instant 0 la matière est au repos dans un état de contrainte hydrostatique uniforme (i. e. pression pure constante, cf. 2.3). On écrit :

$$\begin{aligned}x^i &= X^i(\{x^i_0\}; t), \\x^i_0 &= X^i(\{x^i_0\}; 0),\end{aligned}$$

les équations du mouvement en fonction des positions initiales ; on décompose la différentielle à l'instant  $t$  :

$$\frac{\partial X^i}{\partial x^j_0}(\{x^i_0\}; t)$$

de l'application « mouvement » de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ , en déplacement et déformation, selon le schéma rappelé ci-dessus. On formule alors une relation entre contrainte et déformation.

Pareille méthode peut se trouver en défaut, du fait de deux difficultés principales, que les mécaniciens ont depuis longtemps notées :

1° On peut fabriquer (par frettage, cf. *infra* 3.2, ou par refroidissement non uniforme...) des pièces métalliques pour lesquelles il n'existe pas d'état d'équilibre hydrostatique : quelques conditions aux limites qui leur soient imposées, ces pièces seront le siège de contraintes non isotropes.

2° La plupart des solides, e. g. les métaux, sont susceptibles de fluage : soumis (même à froid) à des efforts convenables, ils peuvent à la longue, sans se rompre ni, apparemment, se détériorer, changer de forme; quand cessent les efforts déformants, la pièce ne revient pas à l'état d'équilibre hydrostatique où elle était initialement, mais prend un nouvel état (où généralement, cf. 1°, subsistent d'ailleurs des contraintes non isotropes).

Ainsi, non seulement un état de référence initial où les contraintes sont isotropes et uniformes n'existe pas en général (cf. 1°), mais à supposer qu'il existe, cet état peut, au cours du temps, cesser de correspondre à une possibilité mécanique, et n'être donc plus le niveau de référence par rapport auquel on puisse valablement calculer les contraintes (cf. 2°)...

Pour échapper aux difficultés que nous venons de signaler, on a essayé plusieurs voies :

a) Faire de tous les milieux continus une théorie qui, comme celle des liquides soit purement phénoménologique, en ce sens qu'y interviennent seules des grandeurs observables (gradient du champ de vitesse, au lieu de la déformation; et contraintes, supposées mesurables...) à l'exclusion de toute variable d'état cachée (telle que les dimensions de la matière dans un état de référence dont nous venons de voir combien il est physiquement insaisissable...).

Dans cette voie, les recherches les plus fameuses sont sans doute celles de Truesdell et des chercheurs qui, après lui, ont étudié l'hypoélasticité (cf. e. g., Noll, 1955).

b) Tenir compte non seulement de la valeur instantanée de quelques grandeurs observables ou non, mais de toute l'histoire de la déformation, histoire dont les propriétés instantanées du matériau seraient des fonctionnelles. Dans cette voie, ouverte, croyons-nous par Boltzmann (1874), se sont engagés Green et Rivlin (1957), Coleman et Noll (1960).

c) Conserver son rôle fondamental à l'état de référence, mais en prenant garde que celui-ci peut n'être ni constant (cf. 2°), ni réalisable dans l'espace euclidien comme un état où les contraintes sont isotropes et uniformes (cf. 1°). Dans cette voie, nous citerons deux beaux mémoires où Kröner (1960) et Toupin et Rivlin (1960) ont étudié, en géomètres autant qu'en physiciens, les dislocations des cristaux; la maille irrégulière d'un cristal en dislocation définit, en effet, un état de référence, où les chaînes d'atomes sont des axes privilégiés...

A la base du modèle que nous définirons dans ce paragraphe est la notion d'état de référence non euclidien variable. Puisqu'il est variable, cet état de référence dépend de l'histoire du matériau, c'est donc une sorte de mémoire. Cependant, l'état de référence peut généralement être éliminé (au sens algébrique du terme, cf. 3.4.3), des équations qu'il a permis d'écrire, laissant un système qui ne comporte que les variables phénoménologiques et détermine l'évolution de celles-ci.

Les méthodes de ce paragraphe se généralisent à des matériaux non isotropes (matériaux pour lesquels il n'y a pas d'état privilégié à partir duquel la relation entre déformation et contrainte admette un groupe de symétrie isomorphe au groupe des rotations de  $R^3$ ); on peut dans la recherche d'un état de référence à partir de données phénoménologiques macroscopiques reprendre les considérations de Noll (1958) (sur le groupe d'isotropie...) et non permanents (e. g. s'il y a écrouissage ou fatigue irréversible : non seulement l'état de référence varie en fonction du temps, mais la relation entre l'état de référence les contraintes et le mouvement, relation qui, pour l'usager, définit les propriétés mécaniques instantanées du matériau, varie elle aussi). Mais il s'agira principalement ici (sauf à 3.5.3) de matériaux isotropes et permanents (en un sens que seul l'énoncé même des équations définira rigoureusement...).

L'état de référence sera défini, sur la variété  $\mathcal{M}$ , par la donnée d'une métrique fonction du temps :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(\{u^\alpha\}; t) du^\alpha du^\beta ;$$



cette métrique, ou *métrique de structure*, n'est pas en général euclidienne (elle n'a pas, comme la métrique de position (cf. 2.4, 1°), un tenseur de courbure nul). Physiquement, elle définit les dimensions que prendrait localement et infinitésimalement la matière pour être en équilibre à la température  $T_0$  sous la pression  $\pi_0$ . Nous disons « localement et infinitésimalement » parce que, globalement (et même localement pour une portion finie), l'équilibre hydrostatique uniforme est impossible : on peut imaginer qu'une sphère matérielle infiniment petite étant séparée du tout et plongée dans un liquide à la pression  $\pi_0$ , on en considère les nouvelles dimensions... ; mais si pareille fiction soutient l'imagination, ce n'est que par les équations qu'elle nous suggère, qu'elle peut trouver place dans une théorie rigoureuse. Nous parlons d'une pression  $\pi_0$  et non de la pression nulle, parce que notre modèle s'applique aux liquides qui entrent en ébullition lorsque la pression est inférieure à la tension de vapeur (laquelle est fonction de la température).

Il résulte du principe de conservation de la matière que l'élément de volume sur  $\mathcal{M}$  associé à la métrique de structure, est constant et proportionnel à la mesure  $\mu$  (cf. 2.1). En tout point de  $\mathcal{M}$ , et à tout instant, le produit (cf. 2.2) :

$$\mu(u^1, u^2, u^3) (\det [q_{\alpha\beta}])^{-1/2},$$

est égal à la masse spécifique  $\rho_0$  du matériau considéré, à la température  $T_0$ , sous la pression  $p_0$ .

La déformation peut maintenant être définie dans le cadre mathématique rappelé au début de ce numéro. Ici, l'espace de départ  $E$  est l'espace  $T(\mathcal{M})_m$  (tangent à la variété  $\mathcal{M}$  en un point  $m$ ) muni de la métrique de structure  $q$ ; l'espace d'arrivée  $F$  est le même espace  $T(\mathcal{M})_m$ , muni cette fois de la métrique de position  $p$ ; l'application  $L$  est l'application identique de  $T(\mathcal{M})_m$  dans lui-même. La décomposition obtenue ne nous donnera évidemment pas la rotation d'une molécule placée en  $m$  depuis un instant initial de référence, car l'usage même de la métrique de position (au lieu des  $x^i$  ( $\{u^\alpha\}$ ;  $t$ ), coordonnées du mouvement) équivaut à travailler à un déplacement près (cf. 2.2 et 2.5, 1° : principe d'indifférence matérielle). Puisque  $L$  est l'identité  $B$  et  $C$  sont tous deux l'inverse de  $I$ . Comme d'habitude, on a une expression rationnelle non pour  $B$  et  $C$ , mais pour leur carré que nous noterons  $D$  :

$$D^\alpha_\beta = q^{\alpha\gamma} p_{\gamma\beta} ;$$

$D$  a pour directions propres les directions principales d'allongement de la matière (ces directions forment un trièdre orthogonal à la fois pour la métrique  $q$  et la métrique  $p$ ), chaque valeur propre est le carré du rapport de la  $p$ -norme à la  $q$ -norme d'un vecteur propre.

On définit aussi le tenseur  $d$ , vitesse de déformation :

$$d^\alpha_\beta = (1/2)p^{\alpha\gamma}\dot{p}_{\gamma\beta}$$

(où  $\dot{p}_{\alpha\beta}$  est la dérivée temporelle de  $p_{\alpha\beta}(\{u^\alpha\}; t)$ ; cette notation sera utilisée dans la suite pour tous les tenseurs). Ce tenseur, qui ne dépend que de la métrique de position, coïncide avec celui défini classiquement à partir du gradient des vitesses. Le tenseur  $d$  est symétrique (relativement à  $p$ ). Ses valeurs propres sont, on le sait, les taux d'allongements dans trois directions principales instantanées de déformation.

Enfin, on définit, pour la métrique de matière l'analogue de  $d$  : c'est le tenseur  $f$  de fluage que nous introduisons pour exprimer la vitesse avec laquelle se modifie l'organisation interne de la matière, l'état de référence... On pose :

$$f^\alpha_\beta = (1/2)q^{\alpha\gamma}\dot{q}_{\gamma\beta}$$

Le tenseur  $f$  est symétrique relativement à  $q$  (sur la symétrie cf. 2.3). Il résulte du principe de conservation de la matière (cf. *supra*) que le tenseur  $f$  est de trace nulle.

En fonction du tenseur de fluage et du tenseur de vitesse de déformation, on peut calculer la dérivée de  $D$ . On a la formule :

$$(1/2)\dot{D}^\alpha_\beta = -f^\alpha_\gamma D^\gamma_\beta + D^\alpha_\gamma d^\gamma_\beta$$

Dans la suite, nous donnerons des équations reliant  $f$ ,  $d$ ,  $D$ ,  $\sigma$ . Auparavant, nous donnerons des exemples de métrique  $q$  non euclidiennes; puis nous traiterons des fonctions invariantes de matrices, fonctions qui interviennent dans nos équations.

### 3.2. Exemples de structures non euclidiennes.

3.2.1. Donnons d'abord une analogie bidimensionnelle. E. Cartan a démontré (cf. 1925, p. 52) qu'une variété de dimension  $n$  munie d'un  $ds^2$  peut être réalisée (localement) comme sous-variété d'un espace euclidien de dimension au plus  $n(n + 1)/2$  (la distance étant celle induite par l'espace ambiant). Un  $ds^2$  de dimension 2 est donc le  $ds^2$  d'une surface de l'espace tridimensionnel. En assujétissant une coque à prendre place (sans frottement) entre deux plans parallèles indéformables, on pourra réaliser le  $ds^2$  de structure bidimensionnel le plus général...

3.2.2. Considérons un cylindre infini de rayons  $r_0$  sur lequel est fretté un tube (infini lui aussi) de rayon intérieur  $r$  ( $r < r_0$ ) et de rayon extérieur  $R$  :

l'ensemble du cylindre et du tube forme une pièce dont le  $ds^2$  de structure s'écrit (dans un système de coordonnées paramétriques usuel) :

$$ds^2 = dz^2 + d\rho^2 + [\varphi(\rho)]^2 d\theta^2 \quad ; \quad 0 \leq \rho \leq R - r + r_0$$

où  $\varphi(\rho)$  est la fonction égale à  $\rho$  si  $\rho \leq r_0$  et égale à  $\rho + r_0 - r$  si  $\rho \in (r_0, r_0 + R - r)$ . On conçoit qu'en frettant un grand nombre de tubes minces, on puisse rapprocher arbitrairement un  $ds^2$  correspondant à une fonction  $\varphi(r)$  quelconque.

3.2.3. Trempons une boule incandescente de rayon  $R$  dans un bain d'eau ou d'huile froide. Il se formera à la périphérie une couche solide de rayon peu inférieur à  $R$ . Puis l'intérieur se refroidissant, tendra à prendre le rayon, notablement inférieur à  $R$ , qui est le sien à la température ordinaire : mais du fait de la cohésion avec la couche périphérique, il ne pourra en être exactement ainsi... La couche extérieure sera contractée par l'intérieur qui, en quelque sorte l'aspire, et l'intérieur sera distendu par l'extérieur d'où éventuellement apparition de pressions négatives. Quant au  $ds^2$  de structure, il ne pourra être euclidien, puisque (pour la métrique de structure) l'extérieur est une sphère de rayon  $R$  tandis que l'intérieur est une boule de rayon très inférieur (la situation est l'inverse de celle du frettage). Comme on a noté (cf. e. g. Gubkin, t. III, 1960, p. 42) des pressions négatives comme contraintes résiduelles au voisinage de la surface de pièces métalliques traitées, il semble intéressant de faire une théorie de la trempe en précisant ce que nous suggérons ici, grâce aux équations données plus bas.

3.2.4. Les  $ds^2$  de structure posent des problèmes de stabilité particuliers. Considérons le  $ds^2$  de structure :

$$ds^2 = A(\rho)dz^2 + d\rho^2 + [\varphi(\rho)]^2 d\theta^2;$$

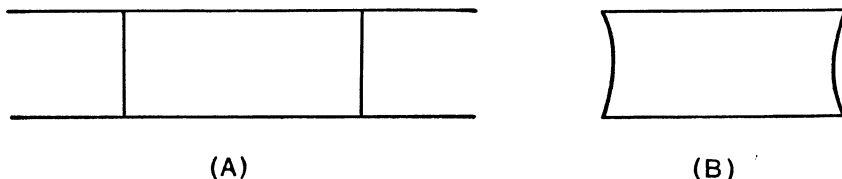
il n'est pas sûr que le  $ds^2$  de position donné par une solution stable des équations de l'élasticité aura la même symétrie hélicoïdale que le  $ds^2$  de structure : en particulier, on imagine que si  $A(\rho)$  a un maximum pour  $\rho = 0$ , il pourra y avoir flambage de la colonne centrale à l'intérieur de la masse. On pourrait de même étudier le  $ds^2$  :

$$ds^2 = A(z)dx^2 + B(z)dy^2 + dz^2$$

( $x, y$  indéfinis,  $z \in (-h, +h)$ ), qui a les symétries d'une plaque plane, mais peut bien « vriller » pour certaines fonctions  $A(z), B(z)$ .

A propos de la plaque, signalons le problème de la rupture d'une glace en verre trempé. La technique de trempe peut être définie par une fonction  $A(z) = B(z)$ . Le  $ds^2$  de structure étant non euclidien le matériau ne peut,

dans notre espace qu'être déformé d'où des contraintes, et une énergie interne supérieure à celle qu'aurait le même volume de matière à la même température si son  $ds^2$  était euclidien. Si on fragmente la glace, cette énergie potentielle de déformation diminuera ; parce que, e. g. quittant la forme cylindrique qu'il avait dans le tout (A), le fragment pourra se creuser suivant sa tranche (B) :



Cependant fragmenter augmente l'énergie potentielle de surface... L'énergie potentielle minima correspond donc à une certaine taille de fragments. Normalement la vitre reste entière (de même qu'un objet posé dans une corbeille ne descend pas seul sur le sol où pourtant son énergie potentielle serait plus basse...). Mais qu'un choc survienne, la glace se mettra alors en fragments de la taille optima définie ci-dessus : c'est la pulvérisation caractéristique du verre trempé (verre dit incassable...). Nous pensons que la théorie des deux métriques, suggère ici encore, d'intéressants calculs.

### 3.3. Fonctions invariantes de matrices.

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $\mathcal{L}(E, E)$  l'espace vectoriel des applications linéaires de  $E$  dans lui-même. Nous dirons qu'une application  $\Phi$  de  $\mathcal{L}(E, E)$  dans lui-même est invariante si, quelles que soient l'application linéaire  $\tau \in \mathcal{L}(E, E)$  et l'application linéaire inversible  $\theta$  de  $E$  dans  $E$  :

$$\theta \circ \Phi(\tau) \circ \theta^{-1} = \Phi(\theta \circ \tau \circ \theta^{-1})$$

Dans la suite,  $E$  sera supposé de dimension 3 ; comme les applications linéaires sont décrites par leur matrice, nous parlerons de fonctions invariantes de matrices : comme il s'agira toujours de matrices diagonalisables (parce que symétriques...), nous pouvons nous borner à étudier les fonctions invariantes de matrices  $3 \times 3$  diagonalisables.

Plaçons-nous dans un système de coordonnées où  $\tau$  est diagonal. Quel que soit  $\theta$  diagonal inversible,  $\theta \circ \tau \circ \theta^{-1}$  est égal à  $\tau$  : il en résulte que si  $\varphi$  est une fonction invariante,  $\Phi(\tau)$  devra être diagonale dans tout système où  $\tau$  est diagonal. Ainsi la recherche des fonctions invariantes de matrices  $3 \times 3$  diagonalisables se ramène à la recherche des applications  $\varphi \mathbb{R}^3$  de  $\mathbb{R}^3$

invariantes par permutation au sens suivant : soit  $\sigma$  l'une des six permutations des entiers 1, 2, 3; notons  $x = \{x_i\}$  un point de  $\mathbb{R}^3$ ;  $y = x_\sigma$  le point de  $\mathbb{R}^3$  de coordonnées :

$$y_i = x_{\sigma(i)};$$

$X = \{x_i\}$  le point  $\varphi(x)$ ;  $Y = X_\sigma$  le point déduit de  $X$  comme  $y$  de  $x$ ; alors on a :

$$\varphi(x_\sigma) = X_\sigma$$

L'image par  $\Phi$  d'une application linéaire  $l$ , diagonale dans un certain système et de valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , sera une application  $L$  diagonale dans le même système et de valeur propre  $\Lambda_i$  avec :

$$\varphi(\lambda) = \Lambda;$$

où  $\Lambda = \{\Lambda_i\}$ ,  $\lambda = \{\lambda_i\}$ , et  $\varphi$  est une fonction vectorielle symétrique définie par  $\Phi$ .

Donnons maintenant une expression générale valable pour toute fonction vectorielle symétrique  $\varphi$  indéfiniment différentiable de  $x = \{x_i\} \in \mathbb{R}^3$  : il existe trois fonctions indéfiniment différentiables de trois variables  $A, B, C$  (si  $\varphi$  est seulement de classe  $\mathcal{C}^p$ , les fonctions auxiliaires  $A, B, C$  sont de classe  $\mathcal{C}^{p-3}$ ) telles que, si on note  $\varphi_i$  les trois composantes de  $\varphi$  :

$$\varphi_i(x) = A(e_1, e_2, e_3)x_i^2 + B(e_1, e_2, e_3)x_i + C(e_1, e_2, e_3);$$

formule où  $e_1, e_2, e_3$  sont les fonctions symétriques élémentaires :

$$e_1 = x_1 + x_2 + x_3 \quad ; \quad e_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \quad ; \quad e_3 = x_1x_2x_3;$$

(il est d'ailleurs possible de prendre un autre système de fonctions symétriques de base, e. g. les sommes des puissances 1, 2, 3 des  $x_i$ ).

Pour démontrer l'existence de cette expression remarquons d'abord que les  $A, B, C$  sont déterminés, comme solution d'un système linéaire par les formules :

$$\begin{aligned} A &= \frac{(x_2 - x_3)\varphi_1 + (x_3 - x_1)\varphi_2 + (x_1 - x_2)\varphi_3}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 - x_3)} \\ B &= \frac{(x_3^2 - x_2^2)\varphi_1 + (x_1^2 - x_3^2)\varphi_2 + (x_2^2 - x_1^2)\varphi_3}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 - x_3)} \\ C &= \frac{x_2x_3(x_2 - x_3)\varphi_1 + x_3x_1(x_3 - x_1)\varphi_2 + x_1x_2(x_1 - x_2)\varphi_3}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 - x_3)}; \end{aligned}$$

Les fonctions  $A, B, C$  sont définies et continûment différentiables en un point  $x$  dont les trois coordonnées  $x_i$  sont distinctes : pour montrer

qu'elles se prolongent par continuité en une fonction continûment différentiable partout, c'est-à-dire pour diviser les numérateurs successivement par les trois différences des coordonnées, on utilise la symétrie des  $\varphi_i$  et le :

Lemme : Soit  $\varphi(x, y, z)$  une fonction indéfiniment différentiable sur  $\mathbb{R}^3$  (ou sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ ) et nulle si  $x = 0$ . Alors le quotient de  $\varphi$  par  $x$  est indéfiniment différentiable.

Comme il est clair que les A, B, C sont symétriques en les  $x_i$ , on peut appliquer le théorème de Newton différentiable (Glaeser, 1963) et exprimer les A, B, C en fonction des  $e_i$ .

Notons une autre expression (où  $f$  est indéfiniment différentiable) :

$$\varphi_i(x) = f(x_i, e_1, e_2)$$

(la même valant pour les trois  $\varphi_i$ ).

Pour démontrer l'existence de  $f$  on remarque que si les coordonnées sont toutes trois distinctes, le passage de  $(x_1, x_2, x_3)$  à  $(x_1, e_1, e_2)$  est localement un difféomorphisme; d'autre part (e. g. d'après la formule déjà démontrée le théorème de Weierstrass)  $\varphi$  est limite uniforme d'expressions polynomiales de la forme demandée : on peut donc appliquer le théorème II que Glaeser utilise pour démontrer le théorème de Newton différentiable.

D'autre part, si  $\varphi$  est assujétié à prendre ses valeurs dans le plan, lieu des points dont la somme des coordonnées est nulle (pour la fonction matricielle  $\Phi$  cela correspond à des matrices de trace nulle), on a l'expression générale :

$$\varphi_i(x) = Ax_i^3 + Bx_i - \frac{1}{3} [(e_1^2 - 2e_2)A + e_1B],$$

où A et B sont, comme ci-dessus des fonctions symétriques différentiables.

Pour les fonctions de matrices, nous adopterons les notations suivantes. Les trois fonctions symétriques de base seront ici  $S_1, S_2, S_3$ , de poids respectifs 1, 2, 3 :

$$\begin{aligned} S_1(\tau) &= \tau^\alpha_\alpha = \text{trace de } \tau \\ S_2(\tau) &= \sum \left( \lambda^i - \frac{1}{3} S_1(\tau) \right)^2 \\ S_3(\tau) &= \sum \left( \lambda^i - \frac{1}{3} S_1(\tau) \right)^3, \end{aligned}$$

où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $\tau$ . On définit deux fonctions invariantes de trace nulle :

$$\begin{aligned} \psi_1(\tau) &= \tau - \frac{1}{3} S_1(\tau)\delta, \\ \Theta_2(\tau) &= \psi_1(\psi_1(\tau) \circ \psi_1(\tau)), \end{aligned}$$

(où  $\delta$  désigne l'application identique). On remarque que :

$$\begin{aligned} S_2(\tau) &= S_1(\psi_1(\tau) \circ \psi_1(\tau)) \\ S_3(\tau) &= S_1(\psi_1(\tau) \circ \psi_1(\tau) \circ \psi_1(\tau)). \end{aligned}$$

La fonction invariante différentiable la plus générale peut s'écrire :

$$B(S_1, S_2, S_3)\psi_1(T) + A(S_1, S_2, S_3)\theta_2(\tau) + C(S_1, S_2, S_3)\delta;$$

(où A, B, C sont des fonctions différentiables de trois variables). La fonction prend ses valeurs dans les matrices de trace nulle si, et seulement si,  $C \equiv 0$ .

### 3.4. Contraintes et fluage.

Dans le modèle adopté ici, l'état d'un continuum matériel est complètement décrit par la donnée de trois champs tensoriels  $p$ ,  $q$ ,  $\sigma$  et d'une fonction scalaire  $T$  (la température) qui dépendent du temps. A 2.5, nous avons convenu d'éliminer de l'étude rhéologique l'équation dynamique (cf. 2.4) en supposant que les forces massiques prenaient à tout instant des valeurs convenables pour équilibrer les contraintes et la force d'inertie. Les équations caractéristiques du milieu doivent donc permettre étant donné les  $p_{\alpha\beta}(\{x^i\}; t)$  (la métrique de position à tout instant  $t$ ) les  $q_{\alpha\beta}(\{x^i\}; t_0)$  et  $T(\{x^i\}; t_0)$  (la métrique de structure et la température à un instant initial  $t_0$ ) de déterminer l'évolution de  $q$  et  $T$  au-delà de l'instant  $t_0$  et de calculer  $\sigma$ . Si on fait sur le champ de force des hypothèses plus réalistes que celles de 2.5, ces mêmes équations caractéristiques doivent déterminer à partir des données initiales  $(x^i, x^i, q, T)$  l'évolution de ces grandeurs; nous ne précisons pas ici ce problème. Dans ce paragraphe, nous traitons des contraintes et du fluage, réservant à 3.6 les questions énergétiques et thermiques.

3.4.1. *Les contraintes.* — Nous supposons que  $\sigma$  est la somme de deux termes la *contrainte élastique*, fonction de la déformation (de  $D$ ) et la *contrainte visqueuse*, fonction du taux  $d$  de déformation : ces deux termes sont les fonctions invariants de matrice (cf. 3.3) dépendant de la température. On écrit donc :

$$\sigma = \varepsilon(D; T) + \mathcal{V}(d; T).$$

Considérons d'abord la contrainte élastique  $\varepsilon$ ; nous l'écrivons (cf. 3.3) :

$$\varepsilon(D; T) = \mu(S_1, S_2, S_3; T)\psi_1(D) + \xi(S_1, S_2, S_3; T)\theta_2(D) - \pi(S_1, S_2, S_3; T)\delta;$$

dans cette formule générale,  $\mu$ ,  $\xi$ ,  $\pi$  sont des fonctions différentiables de la température  $T$  et des trois fonctions symétriques  $S_1, S_2, S_3$  de la matière  $D$ .

La fonction  $\pi$ , coefficient de la partie hydrostatique de la contrainte élastique, est la pression (en particulier,  $\pi(0, 0, 0; T_0)$  est la pression de référence  $\pi_0$ ). Remarquons que le volume spécifique s'exprimant par la formule :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} (\det [D])^{1/2} \approx \frac{1}{\rho_0} \left( 1 + \frac{1}{2} S_1(D) + \dots \right),$$

le module de compression  $K$  (rapport, nécessairement positif, entre l'accroissement de pression et la diminution relative de volume, dans une transformation à  $T$  constant), est donné par :

$$K = - 2 \frac{\partial \pi}{\partial S_1}$$

(Notons ici que le coefficient  $\lambda$  de Lamé est défini par :  $\lambda = K - (2\mu/3)$ ). On interprète de même

$$K\alpha_0 = \frac{\partial \pi}{\partial T},$$

où  $\alpha_0$  est le coefficient de dilatation thermique (rapport, généralement positif mais parfois négatif (caoutchouc), entre la variation relative de volume et l'augmentation de température, dans une transformation à pression constante). C'est pourquoi, communément (cf. e. g. Landau et Lifsic, 1965, p. 28) on utilise la formule approchée :

$$\pi = \pi_0 + K\alpha_0(T - T_0) - (K/2)(D\gamma\gamma - 3),$$

formule à laquelle nous préférons une équation d'état (approchée elle aussi car  $D$  y est remplacé par son déterminant) :

$$\pi = \pi(\rho, T) \quad ; \quad \text{où} : \pi_0 = \pi(\rho_0, T_0).$$

Le cas limite où  $K$  est infini correspond à un matériau incompressible : la pression n'est plus alors déterminée par la variation relative du volume (laquelle est nulle ou, plus exactement, rigoureusement déterminée par la variation de température :  $\rho$  est une fonction déterminée de  $T$ ), mais par les conditions aux limites et l'équation dynamique.

Nous démontrerons par des considérations thermodynamiques (cf. 3.6) que, si la contrainte élastique est hydrostatique (i. e. si  $\mu = \xi = 0$ ), la pression  $\pi$  ne dépend de  $D$  que par l'intermédiaire de la masse spécifique  $\rho$  (laquelle est, cf. *supra*, une fonction symétrique...); la contrainte élastique est déterminée par l'équation d'état :  $\pi = \pi(\rho; T)$ . La métrique de structure ne joue alors aucun rôle puisque  $\rho$  s'exprime en fonction de la grandeur cinématique observable  $p$  (et de densité  $\mu$ , cf. *supra*, 2.2) : nous ne parlerons



donc pas de ce cas, qui est celui des fluides ordinaires (gaz ou liquides, à l'exclusion des liquides résilients). Nous n'envisagerons pas non plus le cas (dont nous ne sachons pas qu'il corresponde à rien de réel), où la contrainte élastique, tout en étant une pression pure, serait fonction non seulement de  $\rho$ , mais d'autres invariants de  $D$  que son déterminant.

Quant à la partie de trace nulle de la contrainte élastique, son terme principal est conformément à la loi de Hook,  $\mu\psi_1(D)$  : en effet  $\theta_2(D)$  est du second ordre en  $\psi_1(D)$ . Pour que la contrainte s'oppose à la déformation (i. e. que l'élément de volume reçoive une puissance positive du fait du travail des forces élastiques, quand  $\psi_1(D)$  est multiplié par un coefficient supérieur à 1), le coefficient  $\mu$  doit être positif; si  $\mu(0, 0, 0; T)$  est nul, il n'est guère vraisemblable que  $\xi$  soit non nul, car, puisque  $\theta_2$  est une fonction paire de  $\psi_1(D)$ , le premier terme satisfaisant aux conditions de stabilité serait  $S_3 \times \theta_2$ , qui est du cinquième ordre; en revanche, si  $\mu(0, 0, 0; T)$  est non nul  $\xi$  peut être non nul et fournir un terme complémentaire...

Pour cerner de plus près les formes possibles de la fonction  $\xi(D; T)$ , il faut recourir à la thermodynamique, comme nous le ferons à 3.6. Mais il apparaîtra alors préférable d'exprimer les contraintes élastiques en fonction, non de  $D$ , mais de la matrice  $L = \frac{1}{2} \text{Log } D$  ( $D$ , matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont positives, admet un logarithme qui a mêmes directions propres que  $D$  et pour valeurs propres les logarithmes des valeurs propres de  $D$ ). L'intérêt de  $L$  est, entre autres, que sa trace  $S_1(L)$  est le logarithme de la dilatation, tandis que  $\psi_1(L)$  est le logarithme d'une transformation conservant le volume, laquelle ne coïncide qu'au premier ordre avec le  $\frac{1}{2}$  logarithme de  $\psi_1(D)$  :

$$e^{\psi_1(L)} \neq \frac{1}{2} \text{Log } (\psi_1(D)) ;$$

la décomposition de  $D$  en  $\frac{1}{3} S_1(D)\delta$  et  $\psi_1(D)$  ne sépare qu'approximativement l'effet dilatation (lié à  $\det(D)$ ), de la déformation proprement dite. Si nous avons cependant choisi dans ce paragraphe de calculer en  $D$ , non en  $L$ , c'est que l'élimination faite à 3.4.3 repose sur la formule simple exprimant  $\dot{D}$  en fonction de  $f$  et  $d$  : or, l'expression de  $\dot{L}$  serait bien plus complexe. Donc, d'une part dans la théorie thermodynamique, on exprime en fonction de  $L$ , l'énergie libre, les contraintes...; mais d'autre part, dans le système des équations du milieu continu, on calcule en  $D$  (une formule algébrique  $\xi(D; T)$  pouvant se déduire de la formule en  $(L, T)$ , par un

développement polynomial poussé jusqu'au degré d'approximation que l'on juge utile).

En revanche, il est toujours possible, particulièrement dans le cas d'un fluide incompressible de choisir pour invariants numériques de  $D$  non  $\{S_1, S_2, S_3\}$ , mais le système  $\{(\det D - 1), S_2, S_3\}$  : on passe en effet d'un système à l'autre par un changement différentiable de variables.

Pour la contrainte visqueuse, on a la formule générale :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(d; T) &= 2\mu_v(S_1, S_2, S_3; T)\psi_1(d) + \xi_v(S_1, S_2, S_3; T)\theta_2(d) + \dots \\ &\quad - \pi_v(S_1, S_2, S_3; T)\delta; \end{aligned}$$

Comme au repos la contrainte visqueuse est nulle, on doit avoir  $\mathcal{U}(0; T) \equiv 0$  et aussi  $\pi_v(0, 0, 0; T) \equiv 0$ ; le terme principal de  $\pi_v$  est donc fourni par  $(\partial\pi_v/\partial S_1)S_1(d)$ .

C'est pourquoi, on utilise communément une expression linéaire (cf. e. g., Monin et Aglom, 1965, p. 37) :

$$\mathcal{U}(d)^\alpha_\beta = 2\mu_v d^\alpha_\beta + [\xi - (2\mu_v/3)]d^\gamma_\gamma \delta^\alpha_\beta;$$

ou avec les notations de 3.3 :

$$\mathcal{U}(d) = 2\mu_v\psi_1(d) + \xi S_1(d)\delta.$$

Dans cette formule,  $\mu_v$  est le coefficient de viscosité et  $\xi$  le coefficient de viscosité second. Si le milieu est supposé incompressible (ou si  $\xi = -\mu_v/3$ ), on a le terme de contrainte visqueuse des équations de Navier-Stokes. Pour divers fluides, on a des formules, théoriques ou empiriques, donnant la variation de  $\mu_v$  en fonction de  $T$  : mais nous ne dirons rien ici de l'influence de la température sur la viscosité. La puissance reçue par l'unité de volume du fait du travail des contraintes visqueuses devant être positive ou nulle quel que soit  $d$ , les coefficients  $\mu_v$  et  $\xi$  sont non négatifs (Remarquons que, selon cette condition de stabilité, un milieu compressible ne peut satisfaire aux équations de Navier-Stokes qui imposeraient  $\xi = -\mu_v/3$ ).

3.4.2. *Le fluage.* — On a l'équation générale :

$$f = \mathcal{F}(D; T) = \varphi(S_1, S_2, S_3; T)\psi_1(D) + \xi_f(S_1, S_2, S_3; T)\theta_2(D);$$

en effet,  $f$  est une matrice de trace nulle.

Le terme principal (comme pour les contraintes) est celui en  $\psi_1$ ; si on suppose  $\varphi(0, 0, 0; T)$  non nul, il doit être positif car le fluage tend à réduire la déformation (la partie non diagonale de  $D$ , autrement dit l'invariant positif  $S_1(D)$ ...). Si on suppose  $\xi_f = 0$  et  $\varphi$  positif ne dépendant que de  $T$  (vraisemblablement croissant avec  $T$ , car à chaud les matériaux deviennent

plastiques) on a le fluage linéaire. Les liquides résilients qui, d'une part, à une échelle de temps suffisamment brève se comportent comme des solides élastiques (e. g. rebondissent), mais d'autre part coulent, à la longue, comme de véritables liquides doivent avoir  $\mu(0, 0, 0; T)$  non nul (élasticité), mais aussi  $\varphi(0, 0, 0; T)$  non nul (et d'autant plus élevé que la constante de temps est plus brève) : on peut donc, en première approximation, attribuer aux liquides résilients un fluage linéaire.

Mais dans le cas du fluage, au contraire du cas de l'élasticité, il est physiquement intéressant d'envisager un terme principal infiniment petit d'ordre élevé en  $\psi_1(D)$  : le fluage en effet ne commence à être sensible qu'à partir d'un seuil. En posant :

$$\varphi(S_1, S_2, S_3; T) = \varphi_q(T)S_2^q$$

on approchera d'autant plus du fluage à seuil que  $q$  sera plus élevé.

On peut d'ailleurs prendre pour  $\varphi$  une fonction différentiable rigoureusement nulle quand  $(S_2, S_3)$  reste dans un certain voisinage de  $(0, 0)$ . Ici encore, on aura une formule vraisemblable en posant  $\varphi$ , fonction de  $S_2$  et  $T$  seuls, et  $\varphi$  nulle quand  $S_2$  est inférieur à un seuil qui décroît quand  $T$  croît. Le matériau a alors un domaine d'élasticité parfaite; si  $S_2(D)$  reste, dans tout le mouvement, inférieur au seuil, la métrique de structure est constante au cours du temps; le matériau peut être immobile sous des contraintes non hydrostatiques constantes. C'est par cela que Noll (1955, p. 28-29) définit la résilience. Supposons au contraire que le matériau a une tendance, si lente soit-elle quand  $D$  est quasi diagonale, à rendre asymptotiquement  $q$  rigoureusement proportionnel à  $p$ . Il ne peut alors y avoir équilibre dans l'immobilité que si la contrainte est hydrostatique; et donc pour Noll, il s'agit d'un corps fluent non résilient (même si tel est le cas du liquide résilient dont nous venons de proposer un modèle). Quand  $\varphi$  tend vers l'infini,  $q$  suit fidèlement  $p$  et lui reste proportionnel  $q$  est donc déterminé par la condition complémentaire de conservation de la matière (cf. 3.1) : on a un fluide ordinaire, non résilient (en notre sens du terme) et nous l'avons dit, il n'est pas à propos d'introduire une métrique de structure.

Quant au terme en  $\theta_2$  si une loi  $f = S_3\theta_2(D)$  n'est pas à exclure *a priori* du fait qu'elle est un infiniment petit du 5<sup>e</sup> ordre en  $\psi_1(D)$ , elle présente toutefois une particularité. Supposons que les valeurs propres de  $\psi_1(D)$  soient  $-a, -b, a+b$  ( $a$  et  $b$  de même signe), ce que nous écrivons :

$$\psi_1(D) = \{-a, -b, a+b\},$$

et nous figurerons  $\psi_1(D)$  en projetant le point  $(-a, -b, a+b)$  de  $\mathbb{R}^3$

sur le plan, lieu des points dont la somme des coordonnées est nulle. On aura, avec les mêmes notations :

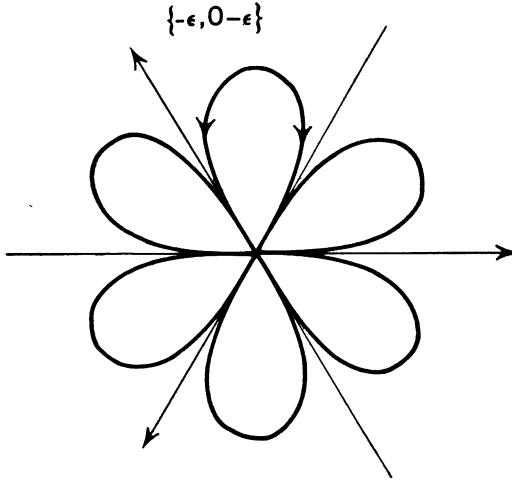
$$\theta_2(D) = \left\{ \frac{a^2 - 2ab - 2b^2}{3}, \frac{-2a^2 - 2ab + b^2}{3}, \frac{a^2 + 4ab + b^2}{3} \right\};$$

et, puisque  $D = -2f_0D$  on aura, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 5 :

$$\psi_1(\dot{D}) \approx -2S_3f = -6ab(a + b)f$$

d'où pour la dérivée temporelle  $S_2$  de  $S_2(D)$ , une expression non positive :

$$\dot{S}_2 = 2S_1(\psi_1(\dot{D}) \circ \psi_1(D)) \approx -4(S_3)^2 = -36a^2b^2(a + b)^2$$



Dans le plan le point figuratif de  $\psi_1(D)$  tend à rejoindre l'origine suivant les courbes en pétale de marguerite que nous avons dessinées (dans le plan les axes fléchés sont les projections des axes de  $R^3$ ). Or, si  $b = 0$ , on est au sommet d'un pétale : le vecteur tangent :  $\theta_2(D)$  est perpendiculaire à la demi-droite joignant le point à l'origine; et, de plus, le coefficient  $S_3$  est lui-même nul. Ainsi le fluage s'annule dans le seul cas particulier où  $\psi_1(D)$  a une de ses valeurs propres nulle : ce qui semble physiquement peu explicable. Il semble donc improbable que le terme principal du fluage puisse ne pas être en  $\psi_1(D)$ .

Notons enfin que relativement aux termes en  $\theta_2(\xi$  et  $\xi f)$  un critère intéressant est fourni par la condition que soit positive la puissance de fluage  $N_3$  calculée ci-dessous à 3.6.3.

3.4.3. *Élimination de la métrique de structure.* — L'expression de la contrainte élastique  $\sigma_e$  en fonction de la formation  $\mathcal{D}$  peut généralement être inversée; en effet la différentielle de  $\xi(\mathcal{D}; T)$  par rapport à  $\mathcal{D}$  est l'expression linéaire :

$$\mu(0, 0, 0; T_0)\psi_1(\mathcal{D}) - \frac{\partial \pi}{\partial S_1}(0, 0, 0; T_0)S_1(\mathcal{D})\delta = \mu\psi_1(\mathcal{D}) - \frac{K}{2} S_1(\mathcal{D})\delta;$$

$\mu$  et  $K$  étant strictement positifs, cette application linéaire est inversible et on a donc une expression différentiable exacte de  $\mathcal{D}$  en fonction de  $\sigma_e$  et  $T$  :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\sigma_e; T);$$

expression qui est, comme toutes celles rencontrées jusqu'ici, une fonction invariante de matrice, et dont, suivant nos notations, le développement de l'ordre est :

$$\mathcal{D} = \left[ 1 + \frac{2}{3K} \pi_0 + \frac{2}{3} \alpha_0(T - T_0) + \frac{2}{9K} S_1(\sigma_e) \right] \delta + \frac{1}{\mu} \psi_1(\sigma_e)$$

et en substituant à  $\sigma_e$  sa valeur fonction des seules grandeurs observables, on a :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\sigma - \mathcal{V}(d; T); T)$$

connaissant  $\mathcal{D}$  on peut calculer  $q$  en fonction de  $p$  et donc éliminer  $q$ . Cette élimination se fait d'ailleurs immédiatement en égalant deux expressions de  $\dot{\mathcal{D}}$ , dont l'une est la dérivée totale de la fonction  $\mathcal{D}$  par rapport au temps, et l'autre s'obtient à partir de l'équation donnée à la fin de 3.1, en substituant à  $f$  et  $\mathcal{D}$  leurs valeurs en fonction de  $d$  et  $\sigma$ ; on a l'équation différentielle :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \sigma} [\dot{\sigma} - \dot{\mathcal{V}}] + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial T} \dot{T} \\ = - \mathcal{F}(\mathcal{D}(\sigma - \mathcal{V}; T) \circ \mathcal{D}(\sigma - \mathcal{V}; T) + \mathcal{D}(\sigma - \mathcal{V}; T) \circ d);$$

formule où  $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \sigma}$  est la différentielle de  $\mathcal{D}$  par rapport à  $\sigma_e$  (application linéaire

qui à une matrice, variation infinitésimale de  $\sigma_e$ , fait correspondre la matrice, variation correspondante de  $\mathcal{D}$  :  $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \sigma} [\dot{\sigma} - \dot{\mathcal{V}}]$  est donc la matrice, « vitesse

de variation de  $\mathcal{D}$  », image par l'application linéaire  $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \sigma}$  de la matrice

$\dot{\sigma} - \dot{\mathcal{V}}$ , vitesse de variation de  $\sigma_e$ ). Il est essentiel de noter que  $\dot{\sigma}$  et  $\dot{\mathcal{V}}$  sont définis par les dérivés des composantes des tenseurs dans des axes coor-

données liés à la matière (les  $\sigma^{\alpha\beta}$ ,  $\mathcal{U}^{\alpha\beta}$  . . .) : les dérivés temporelles des  $\sigma^i$ ;  $\mathcal{U}^i$ ; seraient à compléter de termes de rotation instantanée.

Dans l'équation : figure  $\dot{T}$ , dérivée de la température qui sera calculée à 3.6 par un bilan énergétique et thermique.

Si on suppose que le matériau est incompressible, on peut, de même calculer  $D$  en fonction de la température, de  $\rho$  et de  $\psi_1(\sigma_e)$  (la pression  $-\frac{1}{3}S_1(\sigma_e)$  étant maintenant déterminée par les équations dynamiques).

En supposant que les contraintes sont données par le système approché :

$$\begin{aligned} \psi_1(\sigma) &= \mu(T)\psi_1(D) + 2\mu_v\psi_1(d) \\ \pi &= \pi(\rho; T), \end{aligned}$$

et en linéarisant le second membre de l'équation différentielle des contraintes on a (outre l'équation obtenue en différentiant l'équation d'état) :

$$\psi_1 \left[ \frac{1}{2\mu} \left( \dot{\sigma} - 2\mu_v \dot{d} \right) + \dot{T} \left( \frac{1}{2} \frac{d}{dT} \left( \frac{1}{\mu} \right) \sigma - \frac{\bar{d}}{dT} \left( \frac{\mu_v}{\mu} \right) \bar{d} \right) \right] = - \frac{\varphi}{\mu} \psi_1(\sigma - 2\mu_v d) + \psi_1(d)$$

Si l'on néglige la contrainte visqueuse ( $\mu_v = 0$ ), on obtient une équation communément utilisée en théorie de la plasticité. Du point de vue de la théorie des deux métriques, on peut dire que la contrainte élastique joue le rôle d'une mémoire : l'état de référence variable (la métrique de structure  $q$ ) peut à tout instant être calculé en fonction de  $\psi_1(\sigma_e)$ .

Si l'on substitue à  $\varphi$  une fonction convenable de  $S_2(\sigma - 2\mu_v d)$ , ce fluide peut être arbitrairement semblable à un solide. Mais, pour autant qu'il y a fluage, il ne s'agit pas d'un matériau hypoélastique. Le fluage en effet, comme d'ailleurs la viscosité sont essentiellement sensibles à l'échelle de temps (aux petites vitesses de déformations celle-ci est négligeable; aux grandes, celui-là), dont, par essence (cf. Noll, 1955, p. 35), le matériau hypoélastique est indépendant.

### 3.5. Schémas de matériaux complexes.

Dans ce numéro, nous donnons des analogies électrique ou mécanique correspondant au modèle à deux métriques et nous envisageons des généralisations.

3.5.1. *Analogie électrique.* — Classiquement, on assimile vitesse à intensité de courant  $i$ , force à tension électrique  $E$ . Ainsi un frottement mécanique devient une résistance électrique; une masse (inertie) devient

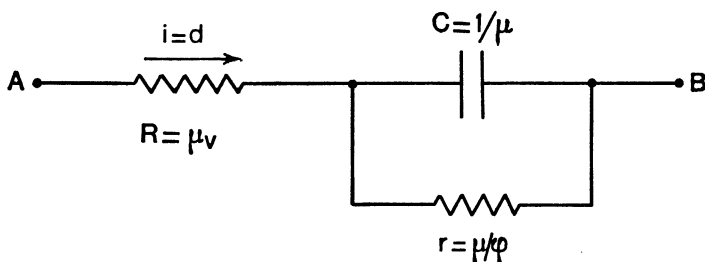
une self; un ressort devient une capacité (car la charge  $Q$ , intégrale du courant est l'analogie du déplacement, intégrale de la vitesse). Ici, laissant hors de notre analogie la pression, la dilatation..., pour ne considérer que les parties de trace nulle des tenseurs, nous poserons :

$$\psi_1(\sigma) \approx E \quad ; \quad \psi_1(d) \approx i;$$

d'où :

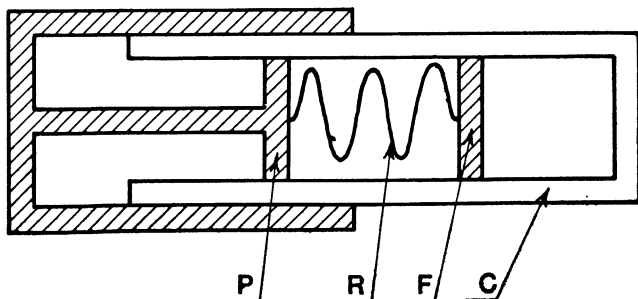
$$\psi_1(D) \approx Q;$$

au matériau étudié correspond alors le circuit :



la tension  $\sigma$  entre les bornes A et B est somme d'un terme de frottement visqueux (tension aux bornes de la résistance  $R$ ) et d'un terme élastique (tension aux bornes du carburateur  $C$ );  $r$  est la résistance de fuite (résistance d'autant plus faible que le fluage est plus élevé), au travers de laquelle se décharge le condensateur  $C$  (la charge  $D$ , différence entre les métriques  $p$  et  $q$  tend à s'annuler...). On notera l'absence de terme selfique : l'accélération de la déformation ne crée pas de contrainte propre.

3.5.2. *Analogie mécanique.* — Considérons le dispositif figuré ci-dessous : un cylindre  $C$  est fermé par un piston-couvercle  $P$ ; un ressort  $R$  est logé dans le cylindre  $C$  et fixé au piston  $P$  et au fond mobile  $F$ ;  $P$  et  $F$  se déplacent avec frottement, relativement à  $C$ .



On peut voir, dans ce dispositif, une image de notre matériau. Il n'y a que deux paramètres apparents : la longueur totale (qui détermine la position du piston P dans le cylindre C) et la force extérieure  $\sigma$  qui tend à séparer ou à rapprocher P de C. La position du fond mobile F, au contraire, est un paramètre caché. La force  $\sigma$  est la somme de deux termes : un terme élastique, la tension du ressort R, et un terme visqueux dû au frottement de P sur C. La longueur du ressort R est l'analogue de la matrice D; le mouvement du fond F est le fluage; quand F se déplace en suivant P, auquel il est relié par R, l'état de référence (i. e. la longueur totale que prendrait le dispositif si F restant fixe, le ressort n'était ni étiré, ni comprimé) se modifie.

Du point de vue énergétique, il est clair que l'évolution de notre dispositif n'est pas un processus réversible, vu la part qu'y ont les frottements. Mais imaginons que l'isolement thermique de l'ensemble soit total et que, de plus, seul le ressort R ait une capacité calorifique non négligeable. Le travail des contraintes qui agissent sur P et C, sera intégralement transmis à R, soit directement, sous forme de chaleur dissipée dans le frottement du piston P et du fond mobile F contre le cylindre C. Si on admet que l'évolution du ressort R est réversible, on pourra de l'étude thermodynamique usuelle de R déduire des propriétés du système global irréversible. Cette analogie nous guidera à 3.6.

Le modèle ci-dessus est, en substance, classique; à ceci près que pour séparer la variable d'état cachée des variables phénoménologiques et guider l'analogie énergétique, nous avons donné au dispositif la forme d'un cylindre clos. C'est croyons-nous à Maxwell que remonte l'idée de prendre une analogie mécanique pour faire concevoir que l'état liquide et l'état solide puissent n'être que des cas limites d'un champ d'états plus complexes.

3.5.3. *Modèles généraux.* — Comme nous l'avons dit plus haut (3.1), anisotropie et écoulement sortent du domaine de la théorie des deux métriques telle que nous l'avons exposée jusqu'ici. Pour rendre compte de ces particularités, on pourrait supposer qu'à la métrique de structure est associé un champ de tenseur de Gauchy, variable, lui aussi, au cours du temps. Nous suggérons ici une autre voie qui a l'avantage de ne pas nécessiter d'équations essentiellement nouvelles.

On trouve dans Kačanov (1956, chap. XI) de nombreux schémas, complexes, obtenus en combinant, en série ou en parallèle, des schémas de matériaux simples. Mettons par exemple en série deux schémas électriques tels que celui de 3.5.1 (ou, ce qui revient au même, mettons en parallèle, comme le fait Kačanov, deux schémas mécaniques) : on a ainsi



le schéma d'un modèle à trois métriques, modèle que nous décrirons sommairement avant d'en suggérer une application.

Les variables phénoménologiques du modèle sont, comme plus haut,  $\sigma$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $d$ ; les variables d'états sont les deux champs de tenseur  $q_1$  et  $q_2$  métriques de structure de deux matériaux que nous supposons couplés. On définit :

$$D_i^\alpha{}_\beta = q_i^{\alpha\gamma} \dot{p}_{i\gamma\beta},$$

$$f_i^\alpha{}_\beta = \frac{1}{2} q_i^{\alpha\gamma} \dot{q}_{i\gamma\beta},$$

(où l'indice  $i$  prend les valeurs 1 et 2). On écrit une équation de contrainte totale :

$$\sigma = \varepsilon_1(D_1; T) + \mathcal{U}_1(d; T) + \varepsilon_2(D_2; T) + \mathcal{U}_2(d; T)$$

et deux équations de fluage ( $i = 1, 2$ ) :

$$f_i = \mathcal{F}_i(D_i; T)$$

Le modèle n'est apparemment pas adapté à la description des matériaux anisotropes de type cristallin. Nous ignorons ce qu'il vaut pour l'écrasement. Mais en revanche, on va voir qu'il fournit une analogie simple du « gelage des déformations ».

Supposons que le matériau 1 soit parfaitement élastique (non fluent) quand la température varie de 0 à 100°; tandis que le matériau 2, parfaitement élastique lui aussi à la température ordinaire, se comporte comme un liquide résilient au-delà de 100°. Soumettons à des contraintes extérieures une pièce de notre matériau; chauffons quelque temps au-delà de 100°, puis refroidissons; et, enfin supprimons la contrainte extérieure. Nous aurons une pièce où la métrique de matière  $q_1$  sera la même qu'initialement, tandis que la métrique  $q_2$  conservera la valeur nouvelle qu'elle avait prise à chaud par fluage sous la contrainte extérieure. Utilisons l'indice C pour les valeurs des tenseurs « à chaud » après fluage du matériau 2 et l'indice F pour les valeurs finales, à froid quand on a supprimé les contraintes extérieures. On peut écrire les équations :

$$D_2 C = 0; \quad \psi_1(\sigma_C) = \mu_1 \psi_1(D_{1C})$$

$$0 = \psi_1(\sigma_F) = \mu_1 \psi_1(D_{1F}) + \mu_2 \psi_1(D_{2F});$$

et, de plus, la différence des déformations  $D_1$  et  $D_2$  étant approximativement constante quand  $q_1$  et  $q_2$  ne fluant pas,  $p$  seul varie :

$$D_{1F} - D_{2F} = D_{1C}$$

Si, par exemple  $\mu_1 = \mu_2$  (les deux matériaux couplés ont même module de torsion), on aura :

$$D_{1F} = - D_{2F} = \frac{1}{2} D_1 C$$

Globalement le matériau conserve donc à froid, après qu'on ait retiré les contraintes extérieures, la moitié de la déformation (écart entre  $p$  et  $q_1$  demeuré constant) qu'il avait prise à chaud, sous les contraintes extérieures. C'est ce qu'on appelle le « gelage des déformations ».

Physiquement, il est assez vraisemblable que les matériaux qui présentent le gelage comportent à la fois des liaisons moléculaires stables (« carcasse », ou matériau 1) et des liaisons labiles à chaud (matériau 2).

D'un point de vue mathématique, on notera que dans le modèle ci-dessus, à trois métriques, l'élimination algébrique des variables cachées (les deux métriques de structure), n'est plus possible.

### 3.6. Énergétique et thermodynamique.

Nous guidant sur l'analogie de 3.5.2, nous supposons que notre matériau est composé de noyaux dont l'évolution interne est réversible (comme celle du ressort R) mais dont la disposition évolue irréversiblement avec des frottements tant au niveau des contraintes macroscopiques apparentes (piston P, viscosité) que des décrochages internes (fond F, fluage). L'énergie reçue par les noyaux réversibles comprendra donc quatre termes, dont trois caloriques et un mécanique (tous seront mesurés avec les mêmes unités mécaniques).

(Nous mettons à part l'énergie cinétique dont nous traiterons brièvement à 3.6.4).

- 1) L'apport de chaleur par conduction.
- 2) L'apport de chaleur par travail des contraintes visqueuses.
- 3) L'apport de chaleur par travail interne (fluage).
- 4) L'apport mécanique de déformation, obtenu en retranchant du travail des contraintes (analogue au travail du piston P), ce travail de fluage (analogue au travail du fond F).

Une fois ce bilan fait, l'élévation de température pourra être déterminée comme s'il s'agissait d'un matériau élastique évoluant de façon réversible (sans viscosité ni fluage).

3.6.1. *Le flux thermique.* — La puissance reçue par l'unité de volume du fait de la conduction est égale à la divergence du champ de vecteur

courant calorique. Si (comme c'est, croyons-nous, l'usage) on suppose que la conductibilité thermique  $k$  varie peu par compression et reste isotrope pour un matériau isotrope soumis à des contraintes non hydrostatiques, la puissance reçue par l'unité de volume sera :

$$W_1 = k \Delta_p T$$

où  $\Delta_p T$  est le laplacien de la fonction température, pour la métrique de position  $p$ .

3.6.2. *Le frottement visqueux.* — La puissance reçue par l'unité de volume du fait du travail des contraintes visqueuses est :

$$\begin{aligned} W_2 &= S_1(\mathcal{U}(d; T) \circ d) \\ &= 2\mu_v S_2(d) + \xi_v S_3(d) - 3\pi_v S_1(d) \end{aligned}$$

ou, avec la formule approchée donnée à 3.4.1 :

$$W_2 = 2\mu_v S_2(d) + \zeta [S_1(d)]^2.$$

3.6.3. *Le travail de fluage.* — Pour calculer le travail de fluage, nous adopterons le principe suivant (obtenu en généralisant ce qui est vrai pour le dispositif de 3.5.2) : le travail de fluage est égal au travail reçu du fait des contraintes élastiques dans un mouvement dont le tenseur vitesse de déformation  $d_f$  est tel qu'il apporte à la dérivée  $\dot{D}$  de l'écart entre  $p$  et  $q$ , une contribution opposée à celle de  $f$  (le travail fourni par le ressort R pour déplacer F de 1 cm vers la droite est égal au travail reçu par R de P, frottement visqueux mis à part, quand P se déplace de 1 cm vers la droite ramenant ainsi la longueur de R, longueur qui est l'analogie de D, à sa valeur initiale). On a donc :

$$\begin{aligned} -f \circ D + d_f \circ D &= 0 \\ d_f &= D^{-1} \circ f \circ D = f \end{aligned}$$

d'où pour la puissance par unité de volume;

$$W_3 = S_1(\mathcal{E}(D; T) \circ F(D; T));$$

soit avec les notations de 5.4 :

$$W_3 = \varphi \mu S_2(D) + (\varphi \xi + \mu \xi_f) S_3(D) + \xi_f \frac{1}{2} [S_2(D)]^2.$$

ou en négligeant les termes en  $\theta_2$

$$W_3 = \varphi \mu S_2(D).$$

3.6.4. *La puissance mécanique.* — Ce sera par définition (cf. analogie du ressort) la différence entre la puissance reçue du fait du travail des contraintes élastiques (travail du piston P non contre le frottement avec C, mais contre la pression du ressort) et la puissance de fluage (travail du ressort R déplaçant F).

$$W_4 = S_1(\mathfrak{E}(D; T)) \circ (d - \mathcal{F}(D; T)).$$

Nous donnerons ici du bilan des puissances reçues par le milieu continu, deux vérifications dont la première justifie la démarche heuristique de 3.6.3.

Supposons les deux métriques  $p$  et  $q$  données à un instant  $t_0$ . La condition à laquelle doivent satisfaire  $d$  et  $f$  pour que les invariants scalaires de  $D$  (paramètres de formes analogues de la longueur du ressort R) aient une dérivée nulle est que, dans tout système où  $D$  est diagonal (si  $D$  a ses trois valeurs propres distinctes il n'y a qu'un seul tel système, qui est l'unique système conjugué commun par rapport à  $p$  et  $q$ ) le tenseur  $d - d_f$  ait ses termes diagonaux nuls. La valeur calculée pour  $W_4$  est alors nulle, ce qui est cohérent avec le fait que les noyaux élastiques n'ayant pas été déformés, mais seulement déplacés, il n'y a pas eu travail mécanique.

Considérons une partie  $N$  du continuum matériel  $\mathcal{M}$  et soit  $\partial N$  la surface bord de  $N$ . La puissance reçue par  $N$  est égale, mis à part le terme de conduction thermique (intégrale étendue à  $N$  de  $W_1$ , ou flux du vecteur courant de chaleur au travers de  $\partial N$ , les deux sont bien égaux), au travail des forces massiques (de densité  $g$ ) augmenté du travail des contraintes à la frontière (en mouvement)  $\partial N$ .

On va montrer que cette puissance est égale à la somme de deux termes :

- l'intégrale de puissance ( $W_2 + W_3 + W_1$ ) reçue au sein de la matière du fait des contraintes  $\sigma$ ;

- la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique (terme que nous avons exclu de notre bilan, puisque selon le principe d'indifférence matérielle, les effets cinétiques peuvent être séparés des effets de déformation exprimés par la seule considération des deux  $ds^2$  de structure et de position).

Pour faire ce calcul, plaçons-nous dans des coordonnées  $x^i$  liées à l'espace euclidien.

La puissance totale reçue du fait du travail des contraintes est l'intégrale de  $S_1(\sigma \circ d)$ , soit :

$$\iiint_N \Sigma_{i,j} \sigma_j^i \times 1/2 \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) dx_1 dx_2 dx_3$$

du fait de la symétrie de  $\sigma_i$ ; on peut écrire cette puissance :

$$\iiint_N \Sigma_{i,j} \sigma_j^i \frac{\partial v^i}{\partial x^j} dx_1 dx_2 dx_3$$

ou encore :

$$\int_{\partial N} \Sigma_{i,j} \sigma_j^i v^i dS^i - \iiint (\text{Div } \sigma) \cdot v dx_1 dx_2 dx_3 ;$$

or l'intégrale double n'est autre que le travail des contraintes sur le bord  $\partial N$  de  $N$ ; et, puisque selon l'équation dynamique de 2.4,  $\text{Div } \sigma = \rho \dot{v} - \rho g$ , l'intégrale triple est la différence de la dérivée, par rapport au temps, de l'énergie cinétique et de la puissance reçue du fait du travail des forces massiques. Ce qui achève la vérification.

3.6.5. *Équation d'état d'un matériau élastique* (calcul des chaleurs latentes). — Nous supposons que l'énergie interne  $U$  et l'entropie  $S$  de l'unité de masse du matériau ne dépendent que de la température et des invariants du tenseur  $D$  (De même, l'énergie interne et l'entropie du ressort  $R$  ne dépendent que de la température et de la longueur de  $R$ ). On peut donc se borner à considérer un solide, fait de notre matériau, qui se déforme à partir d'un état d'équilibre statique initial (sous la pression  $\pi_0$ , à la température  $T_0$ ) en gardant trois axes de déformation principale fixes. Notons :

$$x(t) = e^{x(t)} ; \quad y(t) = e^{y(t)} ; \quad z(t) = e^{z(t)}$$

les rapports des dimensions suivant ces trois axes, à l'instant  $t$ , aux dimensions initiales. Toutes les matrices que nous considérons étant diagonales dans le système des axes principaux, nous écrirons ces matrices par leur diagonale :

$$q = \{ 1, 1, 1 \} ; \quad p = D = \{ x^2, y^2, z^2 \} = \{ e^{2x}, e^{2y}, e^{2z} \} ;$$

$$d = \{ \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z} \} ; \quad L = (1/2) \text{Log } D = \{ X, Y, Z \}.$$

On a, de plus, pour le volume spécifique :

$$1/\rho = e^{x+y+z}/\rho_0 = xyz/\rho_0.$$

Après ces précisions cinématiques, venons-en à la thermodynamique. La différentielle de l'entropie  $S$  de la masse unité de matière s'écrit :

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} [cdT + l_x dX + l_y dY + l_z dZ]$$

où  $c$  est la chaleur spécifique à dimensions constantes analogue de la chaleur spécifique à volume constant d'un gaz, mais ici il y a trois paramètres

de dimension  $X, Y$  et  $Z$  et  $l_x, l_y, l_z$  sont les chaleurs latentes de dilatation dans les trois directions principales (quantités de chaleur à fournir pour une dilatation isotherme, rapportée à l'accroissement relatif de la longueur). Les dimensions étant fixées, l'entropie doit être une fonction strictement croissante de la température : autrement (cf. *infra* stabilité), la température d'un corps de dimensions constantes pourrait s'accroître tandis que le corps ne recevrait pas de chaleur, ou même en céderait. On peut donc exprimer  $T$  comme une fonction des quatre quantités  $X, Y, Z, S$  (ou  $x, y, z, S$ ); et, éventuellement, prendre l'entropie  $S$  de l'unité de masse comme variable indépendante à la place de la température  $T$ .

On a de même pour l'énergie interne  $U$  (de l'unité de masse) :

$$dU = dW + dQ = dW + TdS;$$

le travail  $dW$  (forme différentielle qui, à l'encontre de  $dU$  et de  $dS$  n'est pas une différentielle totale exacte), est donné par :

$$dW = (1/\rho_0)e^{x+y+z}(\sigma_x dX + \sigma_y dY + \sigma_z dZ),$$

où  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  sont les composantes principales de la contrainte élastique  $\sigma$  (laquelle est diagonale dans le système des axes principaux de déformation) (On notera que dans cette formule nous avons supposé travail et chaleur mesurés dans la même unité : la plupart des traités physiques, ayant en vue des applications numériques, mettent, au contraire devant  $dQ$ , le facteur  $J$ , équivalent mécanique de la calorie).

On sait classiquement (et on vérifie sans peine) que  $F = U - TS$ , est une fonction telle que :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\text{dim}} = -S$$

(l'indice  $\text{dim}$  signifie que la dérivée est prise à dimensions constantes), d'où :

$$\begin{aligned} l_x &= T \frac{\partial S}{\partial X} = -T \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial T} \\ &= (-1/\rho_0)e^{x+y+z} \cdot T \cdot \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial T}\right)_{\text{dim}} ; \end{aligned}$$

On a des formules analogues pour  $l_y$  et  $l_z$ .

Nous pouvons maintenant exprimer la puissance thermique  $Wd$  qu'il faut fournir à l'unité de volume du matériau pour réaliser isothermiquement une déformation (de vitesse  $d = \{ \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z} \}$ ) en fonction des dérivés (par rapport à la température), de grandeurs mécaniques; c'est la formule

(qui en substance remonte, croyons-nous, à Clapeyron, cf. e. g., Bruhat, 1947, p. 169) :

$$\begin{aligned} Wd &= -T \left[ \dot{X} \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial T} \right)_{\text{dim}} + \dot{Y} \left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial T} \right)_{\text{dim}} + \dot{Z} \left( \frac{\partial \sigma_z}{\partial T} \right)_{\text{dim}} \right] \\ &= -TS_1 \left( d \circ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_{\text{dim}} \right); \end{aligned}$$

disons pour fixer le sens physique de  $(\partial \sigma / \partial T)_{\text{dim}}$ , que c'est le rapport de la variation du tenseur des contraintes élastiques à la variation de la température, dans une transformation à dimensions constantes où il n'y aurait pas fluage (où, ce qui revient au même, dans une transformation où la déformation interne  $d + f$  est nulle). Avant de poursuivre (cf. 3.6.7) l'étude de l'équation d'état, donnons l'équation thermique qui complétera le système des équations (cinématique, dynamique, de contrainte, de fluage) déjà écrites pour l'évolution d'un milieu continu.

3.6.6. *L'équation thermique.* — C'est le bilan thermique du volume unité :

$$W_1 + W_2 + W_3 = \rho c \dot{T} - TS_1((d - f) \circ (\partial \sigma / \partial T)_{\text{dim}});$$

$W_1, W_2, W_3$  sont donnés par les formules de 3.6.1, 3.6.2, 3.6.3;  $c$  est la chaleur spécifique à dimension constante;  $\rho$  est la masse spécifique; et le coefficient de  $T$  est donné par la formule :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial T} S_1(d) - 2 \frac{\partial \mu}{\partial T} [S_1(\psi_1(D) \circ d) - \varphi S_2(D) - \xi_f S_3(D)] \dots \\ - \frac{\partial \xi}{\partial T} [S_2(\theta_2(D) \circ d) - \varphi S_3(D) - \frac{\xi_f}{2} (S_2(D))^2]; \end{aligned}$$

ici,  $\pi, \mu, \xi$  (resp.  $\varphi; \xi_f$ ) sont les fonctions des invariants de  $D$  introduites à 3.4.1 (resp. 3.4.2); comme on l'a dit, les termes en  $\xi$  et  $\xi_f$  semblent négligeables, mais on les a donnés puisque le calcul en est possible. On notera que le terme en  $(\partial \pi / \partial T)$  est classique en théorie des gaz.

3.6.7. *Équation d'état* (calcul des contraintes). — Nous poursuivons l'étude thermodynamique en exprimant les contraintes en fonction des dérivées partielles de  $F$  (ou de  $U$ ), puis en rappelant une propriété de convexité que Coleman et Noll (1959) ont déduite d'un postulat de stabilité.

Dans ce numéro, nous noterons  $S_i$  (resp.  $R_i$ ) où l'indice  $i$  prend les valeurs 1, 2, 3, les invariants scalaires matriciels  $S_i(0)$  (resp.  $S_i(L)$ ).

Si on exprime  $F = U - ST$ , en fonction de  $R_1, R_2, R_3, T$ , on a pour les contraintes, d'après la formule donnée ci-dessus pour le travail  $dW$  :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \rho(\partial F/\partial X) \\ &= \rho_0 e^{-R_1} \left[ \frac{\partial F}{\partial R_1} + 2 \left( X - \frac{R_1}{3} \right) \frac{\partial F}{\partial R_2} + 3 \left( X - \frac{R_1}{3} \right)^2 \frac{\partial F}{\partial R_3} \right] \\ &= \rho_0 e^{-R_1} \left[ \frac{\partial F}{\partial R_1} + R_2 \frac{\partial F}{\partial R_3} + 2 \left( X - \frac{R_1}{3} \right) \frac{\partial F}{\partial R_2} + \left( 3 \left( X - \frac{R_1}{3} \right)^2 - R_2 \right) \frac{\partial F}{\partial R_3} \right], \end{aligned}$$

et les formules analogues pour  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$ . On a donc de la contrainte élastique  $\sigma_e$  les deux expressions équivalentes :

$$\begin{aligned} \sigma_e &= -\pi(S_1, S_2, S_3; T)\delta + \mu(S_1, S_2, S_3; T)\psi_1(D) + \xi(S_1, S_2, S_3; T)\theta_2(D), \\ &= -\pi(R_1, R_2, R_3; T)\delta + 2\mu^L(R_1, R_2, R_3; T)\psi_1(L) + 3\xi^L(R_1, R_2, R_3; T)\theta_2(L); \end{aligned}$$

la première expression provient de 3.4.1; dans la seconde, on a noté :

$$\begin{aligned} \pi(R_1, R_2, R_3; T) &= \left( -\frac{\partial F}{\partial R_1} - R_2 \frac{\partial F}{\partial R_3} \right) \rho_0 e^{-R_1} \\ \mu^L(R_1, R_2, R_3; T) &= (\partial F/\partial R_2) \rho_0 e^{-R_1} \\ \xi^L(R_1, R_2, R_3; T) &= (\partial F/\partial R_3) \rho_0 e^{-R_1} \end{aligned}$$

Il est possible de passer d'une expression à l'autre; en particulier, puisque nous avons dans les deux cas séparé la partie de trace nulle des contraintes, les deux coefficients de pression  $\pi$  ne sont que les expressions d'une même grandeur en fonction de deux groupes de variables; de plus, en se bornant aux termes du premier ordre (en la déformation) de la partie de trace nulle, on a :

$$\mu(0, 0, 0; T) = \mu^L(0, 0, 0; T).$$

Comme nous l'avons annoncé plus haut (3.4.1), on voit que si la contrainte est toujours purement hydrostatique, la pression ne dépend de la déformation que par l'intermédiaire de la masse spécifique  $\rho$ . En effet, on a alors  $\mu^L = \xi^L = 0 : F$ , et toutes les grandeurs qui s'en déduisent par dérivation, ont donc des dérivées partielles nulles par rapport à  $R_2$  et  $R_3$ .

Notons ici qu'il nous paraît intéressant de chercher si des expressions  $F$  de la forme :

$$F = F_1(R_1; T) + \mu(T)R_2$$

(où  $F_1$  est la fonction d'un fluide proprement dit, sans rémanence) peuvent satisfaire à toutes les conditions thermodynamiques connues.

Si dans le système des variables indépendantes, on substitue à la tem-



pérature  $T$ , l'entropie  $S$  de l'unité de masse et qu'on dérive  $U$  au lieu de  $F$ , on a des fonctions analogues à celles données ci-dessus; en effet, on a :

$$\sigma_x = \rho_0 e^{-R_1} \left( \frac{\partial F}{\partial X} \right)_T = \rho_0 e^{-R_1} \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right)_S,$$

(où l'indice  $S$  ou  $T$ , affectant les dérivées partielles signifie que l'on considère la variation de  $F$  ou  $U$  dans une déformation où  $X$  varie,  $Y$ ,  $Z$  et  $S$  ou  $T$  restant fixes).

3.6.8. *Stabilité.* — Voyons d'abord sur deux exemples comment des conditions naturelles de stabilité peuvent se traduire par la convexité d'une fonction. On a déjà dit (3.6.5) que la chaleur spécifique à dimension constante,  $c$ , est positive : sinon un corps pourrait, sans mouvement occasionnant un échange de travail, élever sa propre température en fournissant, de surcroît, de la chaleur au milieu extérieur... Or, on a :

$$\begin{aligned} c &= T(\partial S / \partial T)_{\text{dim}} ; \\ c &= - T(\partial^2 F / \partial T^2)_{\text{dim}} ; \end{aligned}$$

que  $c$  soit positif implique donc que  $F$  (fonction de  $T$ , pour des dimensions fixées) tourne sa concavité vers le bas. Mais on a aussi :

$$(\partial U / \partial S)_{\text{dim}} = T ;$$

d'où, puisque  $S$  croît avec  $T$ , l'inégalité :

$$(\partial^2 U / \partial S^2)_{\text{dim}} > 0 ;$$

qui nous donne le sens de la concavité de  $U$ .

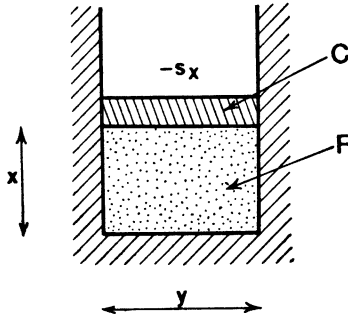
Considérons maintenant un morceau de notre matériau élastique qui, à la température et sous la pression de référence, soit un cube d'arête unité, donc de masse  $\rho_0$ . Supposons qu'au cours de déformation sans fluage, la pièce demeure un parallélépipède rectangle d'arêtes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (voir les notations à 3.6.5) parallèles aux directions principales de déformation. Notons  $\rho_0 U(x, y, z; S)$  l'énergie interne de ce parallélépipède (i. e. le produit par  $\rho_0$  de l'énergie interne de la masse unité). Notons  $s_x$  la force élastique qui s'exerce sur la face  $yz$ , contrainte mesurée sur un axe normal à la face et orienté vers l'extérieur, on a :

$$s_x = yz \sigma_x = \rho_0 (\partial U / \partial x)_S$$

(pour le voir, se reporter à 3.6.7 et remplacer  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  par  $e^x$ ,  $e^y$ ,  $e^z$ ). On calculerait de même  $s_y$ ,  $s_z$ .

Supposons que le parallélépipède  $P$  soit enfermé dans une cavité pris-

matique indéformable, de section un rectangle ( $y \times z$ ), de base rigide plane, fermée par un couvercle pesant C, coulissant dans la cavité (Sur la figure, on a supprimé la dimension  $z$ ). Si on suppose (pour fixer l'intuition, bien qu'il n'en soit pas toujours ainsi avec un matériau solide) que le matériau



est comprimé, on peut dire que le couvercle, de poids ( $-s_x$ ) est en équilibre sur P. Cet équilibre ne peut être stable que si à une diminution de  $x$  correspond un accroissement de ( $-s_x$ ) (en bref, si la pression croît quand le volume diminue). Si le parallélépipède P n'échange pas de chaleur avec l'extérieur (déformation adiabatique), ceci signifie que l'on a :

$$(\partial^2 U / \partial x^2)_s > 0;$$

C'est encore une propriété de convexité.

Plus généralement, selon Coleman et Noll (1959), la fonction  $U(x, y, z; S)$  tourne sa concavité vers le haut, au sens suivant, quels que soient les  $x, y, z, \delta$  et les accroissements  $\delta$  :

$$U(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z; S + \delta S) > U(x, y, z, S) + \delta x \frac{\partial U}{\partial x} + \delta y \frac{\partial U}{\partial y} + \delta z \frac{\partial U}{\partial z} + \delta S \frac{\partial U}{\partial S}.$$

Ce que l'on peut, intuitivement, justifier ainsi. Un élément de matière placé dans un tout, est soumis à des forces ( $s_x, s_y, s_z$  dans le cas du parallélépipède) et porté à une température : ces forces et cette température sont des conditions extérieures à l'élément qui régissent les échanges d'énergie entre l'extérieur et lui. Ainsi, pour le parallélépipède, on a :

$$\delta E = s_x \delta x + s_y \delta y + s_z \delta z + T \delta S,$$

comme expression de l'énergie reçue dans une déformation ( $\delta x, \delta y, \delta z; \delta S$ ) (on voit sur cette formule une analogie entre le couple T, S et le couple

force, dimension). Au second ordre près,  $\delta E$  est justement la variation d'énergie interne  $\rho_0 \delta U$ ; et pour qu'il y ait stabilité, il faut que le terme du second ordre ( $\rho_0 \delta U - \delta E$ ) soit positif (que l'énergie fournie à l'élément soit inférieure à celle nécessaire pour le petit changement d'état envisagé) : c'est bien la condition de convexité de Coleman et Noll.

Reste à noter, ce dont nous ne tenterons de tirer aucune conclusion précise, que pour un matériau réel, dont l'évolution irréversible comporte fluage et viscosité, le problème de l'équilibre se pose autrement que nous ne l'avons supposé ici.

3.6.9. *Généralisation.* — L'équation thermique se généralise immédiatement aux matériaux composés de plusieurs matériaux isotropes, matériaux que nous avons introduits à 3.5.3 pour expliquer le gelage des déformations. En revanche, dans le cas d'un matériau unique anisotrope l'étude du processus thermodynamique irréversible complexe de déformation avec fluage et viscosité, semble très difficile. On devrait recourir alors aux relations de symétrie d'Onsager (relations qui, dans le cas simple où nous nous sommes placés, semblent n'apporter aucune information, parce que, en bref, une matrice diagonale est, *ipso facto*, symétrique...). Le fluage, en effet, nous paraît être, comme la viscosité, un phénomène de transfert; si classiquement on considère, dans un fluide visqueux (cf. e. g. Qian Xüé Sen, § 10.6) la vitesse de déformation  $d$  comme une force généralisée, duale du tenseur des contraintes visqueuses, nous devons considérer le fluage  $f$  (où, plus exactement, la déformation compensatrice  $d_f$  introduite à 3.6.3) comme en dualité avec  $\psi_1(\sigma)$  : car leur produit apparaît dans le terme d'augmentation d'entropie  $\frac{1}{T} W_z$ .

#### NOTE

Pour N. K. Baramboïm (1961), la notion fondamentale de la « mécano-chimie » est le « microcracking », ou rupture (rupture éventuellement suivie de recombinaison), de liaisons chimiques sous l'effet des déformations mécaniques (macroscopiques). Tant que les liaisons chimiques restent inchangées, on est dans la limite élastique du matériau; tant que les liaisons chimiques rompues par le microcracking mécanique sont remplacées par d'autres liens, de même nature, mais autrement disposés, il y a fluage; quand le type même du plexus chimique évolue irréversiblement commence la fatigue, qui peut aller jusqu'à la rupture.

A titre d'exemple, citons cette explication du bon comportement des

produits vulcanisés (p. 181) : « ... les liaisons polysulfurées sont si labiles, que même après leur rupture, peuvent se former de nouvelles liaisons transverses avec un autre degré de sulfuration (pour notre auteur, degré de sulfuration signifie = nombre d'atomes de soufre dans un pont). Une semblable reconstruction du réseau des liaisons chimiques, sous l'action des forces extérieures, permet de supprimer les défauts formés par rupture de liaisons, en reconstituant celles-ci dans la nouvelle distribution mutuelle des chaînes, résultant de la déformation, ce qui améliore la répartition des contraintes et le travail du réseau.

C'est le réseau labile de liaisons chimiques qui définit, selon nous, la métrique de matière; rupture (microcracking) et reconstruction du réseau sont, au niveau moléculaire, les deux phases d'un processus qui se traduit macroscopiquement par le fluage. Toutefois, ce qui complique le fluage, c'est que (cf. *loc. cit.*), le réseau reconstruit peut présenter des directions privilégiées d'orientation des chaînes et donc être anisotrope... De plus, le fluage ne suit pas les déformations trop rapides (particulièrement, cf. p. 154, les déformations alternées de sens contraire) qui détériorent irréversiblement le réseau : dans de telles conditions de travail, les matériaux à haute limite élastique se comportent mieux que les matériaux fluents. Mais, pour Baramboïm (p. 190), l'industrie chimique doit viser à concevoir des matériaux qui, par le foisonnement de liaisons chimiques entretiennent leur structure sans cesse déchirée par le microcracking : de tels matériaux sont justement ceux qui correspondent le mieux au modèle que nous avons proposé...

#### BIBLIOGRAPHIE

- N. K. BARAMBOÏM, *Mexanoximiä polimerov*, Moscou, 1961.
- L. BOLTZMANN, Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. *Wiener Ber.*, t. 70, 1874, p. 274.
- G. BRUHAT, *Thermodynamique*, 4<sup>e</sup> édition, Masson, Paris, 1947.
- E. CARTAN, La géométrie des espaces de Riemann. *Mémorial des sciences mathématiques*, fascicule IX, Gauthier-Villars, Paris, 1925.
- B. D. COLEMANN et W. NOLL, On the thermostatics of continuous media. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 4, 1959, p. 97-128 (Reproduit dans TRUESDELL, t. III, 1965).
- B. D. COLEMANN et W. NOLL, An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. VI, 1960, p. 335-370 (Reproduit dans TRUESDELL, t. II, 1965).
- G. GLAESER, Fonctions composées différentiables. *Annals of Mathematics*, vol. 77, 1963, p. 193-209.
- A. E. GREEN et R. S. RIVLIN, The mechanics of non linear materials with memory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. I, 1957, p. 1-21 (Reproduit dans TRUESDELL, t. II, 1965).

- S. I. GUBKIN, *Plastičeskaâ deformaciâ metallov*, Moscou, t. III, 1960.
- A. M. KAČANOV, *Osnovy teorii plastičnosti*, Moscou, 1956.
- E. KRÖNER, Allgemeine Kontinuum stheorie der Vorsetzungen und Eigenspannungen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 4, 1960, p. 273-334 (Reproduit dans TRUESDELL, t. III, 1965).
- L. D. LANDAU et E. M. LIFŠIC, *Teoriâ uprugosti*, Moscou, 1965 (t. VII du Cours de Physique théorique).
- A. LICHNEROWICZ, *Éléments de calcul tensoriel*, Colin, Paris, 1951.
- A. S. MONIN et A. M. AGLOM, *Statističeskaâ gidromexanika*, Moscou, t. 1, 1965.
- W. NOLL, A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 2, 1960, p. 197-226 (Reproduit dans TRUESDELL, t. II, 1965).
- W. NOLL, On the continuity of the solid and fluid states. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, vol. 4, 1955, p. 3-81 (Reproduit dans TRUESDELL, t. II, 1965).
- V. V. NOVOZHILOV, *Osnovy nelineïnoi teorii uprugosti* (Fondements de la théorie non linéaire de l'élasticité), OGIZ, Léningrad-Moskva, 1948.
- QIAN XÜÉ SEN, *Mécanique physique* (édition chinoise 1962; édition russe 1965).
- R. A. TOUPIN et R. S. RIVLIN, Dimensional changes in crystals caused by dislocation. *Journal of Math. Physics*, vol. 1, 1960, p. 8-15 (Reproduit dans TRUESDELL, t. IV, 1965).
- C. TRUESDELL, *Continuum Mechanics* (GORDON et BEACH, 1965. Anthologie en 4 tomes éditée par C. TRUESDELL).

(Manuscrit reçu le 10 novembre 1966).

---

TABLE DES MATIÈRES

I. — <i>Introduction : les méthodes de la mécanique.</i> . . . . .	278
II. — <i>Objet de la rhéologie.</i> . . . . .	279
2.1. Continuum des masses . . . . .	280
2.2. Cinématique et métrique de position . . . . .	281
2.3. Le tenseur des contraintes . . . . .	283
2.4. L'équation dynamique . . . . .	285
2.5. Le problème rhéologique . . . . .	288
III. — <i>Un modèle de matériau isotrope et permanent.</i> . . . . .	289
3.1. Déformation et métrique de structure. . . . .	289
3.2. Exemples de structures non euclidiennes. . . . .	293
3.3. Fonctions invariantes de matrices. . . . .	295
3.4. Contraintes et fluages . . . . .	298
3.5. Schémas de matériaux complexes. . . . .	305
3.6. Énergétique et thermodynamique. . . . .	309

---