

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. P. BENZÉCRI

La catégorie des simplexes segmentés et ses applications au traitement des constituants non connexes en linguistique mathématique

Annales de l'I. H. P., section B, tome 3, n° 3 (1967), p. 227-275

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1967__3_3_227_0

© Gauthier-Villars, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**La catégorie des simplexes segmentés
et ses applications au traitement
des constituants non connexes
en linguistique mathématique**

par

J. P. BENZÉCRI

SOMMAIRE. — Les diverses opérations d'imbrication dont sont susceptibles des suites discontinues de symboles, constituent une structure algébrique qu'il est commode de décrire par une catégorie (ou algèbre type) que, pour rappeler certaines analogies avec l'algèbre homologique, nous appelons catégorie des simplexes segmentés. Nous donnons ici des constructions algébriques détaillées et proposons des applications à la linguistique mathématique.

SUMMARY. — The various shufflings and interminglings that can be done on interrupted (discontinuous) strings of symbols, constitute an algebraic structure which can be described by a category or algebra type; this category has been called the « category of segmented simplexes » since it somewhat recalls the classical simplicial structures of algebraic topology. The paper gives detailed algebraic constructions and suggests linguistic applications.

INTRODUCTION BIBLIOGRAPHIQUE

Le présent mémoire constitue la troisième leçon d'un cours de linguistique mathématique multigraphié en 1963 alors que l'auteur dirigeait le laboratoire de calcul de la Faculté des Sciences de Rennes.

Notre but était de formaliser les calculs de constituants non connexes. V. Ingue avait déjà vu l'intérêt linguistique de tels calculs : mais ses travaux peu rigoureux étaient l'objet de critiques, qui sans portée quant au fond, n'en montraient pas moins la nécessité de nouvelles recherches algébriques.

Qu'on utilise ici une catégorie pour décrire une structure algébrique n'est pas étranger aux travaux de J. Benabbou qui, en 1963, préparait à Rennes sa thèse sur les « algèbres types » (Thèse Paris, 1966 et séminaire Ehresmann).

Depuis 1963, les voies proposées dans cette leçon ont fait l'objet de recherches qui se poursuivent à l'Institut de Statistiques de l'Université de Paris, où l'auteur est maintenant professeur. Un article de F. Benzécri consacré à l'algèbre des constituants non connexes et un autre de J. Friant sur les grammaires C. S. ont paru en 1967 aux *Annales de l'Institut Poincaré*. La thèse de doctorat d'état de J. Roubaud et la thèse de 3^e cycle de R. Guedj s'achèvent. Après H. Vandeburgh, P. Leroy s'intéresse au traitement automatique des constituants non connexes. Nous avons nous-mêmes présenté ces recherches à la conférence IFIP sur les manipulations de symboles (Pise, septembre 1966).

§ I. MOTS ET ÉTATS NON CONNEXES

1. Mots et concaténations.

1.1. **Notations.** — L'alphabet Λ est un ensemble, dont les éléments sont appelés lettres et notés, dans ce paragraphe par une minuscule grecque : α, β, \dots . Dans les applications linguistiques, Λ peut être un ensemble fini d'unités d'ordre et de nature quelconque : lettres ou idéogrammes; morphèmes ou mots; phonèmes ou syllabes. Le monoïde libre L associé à Λ est le lexique : c'est l'ensemble des mots, ou suites finies ordonnées de lettres de Λ ; un mot est noté par une minuscule latine (ou grecque si c'est un mot d'une seule lettre).

Le monoïde L est muni de sa loi associative, la juxtaposition (ou produit de juxtaposition), qui à deux mots a, b fait correspondre le produit ab , obtenu en les écrivant l'un après l'autre. La juxtaposition est associative, mais non commutative. Il est commode de considérer l'ensemble vide \emptyset comme un mot, qui est élément neutre à droite et à gauche du monoïde L . A la suite vide de mots de L , on donne comme produit de juxtaposition le mot vide \emptyset .

Une séquence est un élément du monoïde libre associé à L (pris pour alphabet) : c'est un élément de L^n , pour n entier convenable, suite ordonnée de n mots de L : on la note (a_1, \dots, a_n) , ou (a_i) , ou même a s'il est inutile de préciser s'il s'agit d'une séquence de n mots ($n \neq 1$) (encore appelée mot non connexe, ou mot discontinu à n composantes) ou d'un mot ordinaire (qui s'identifie à une séquence d'un seul mot : $L^1 \approx L$). Sur les séquences, on effectue des opérations, dont la juxtaposition est un cas particulier.

1.2. **Imbrications.** — L'application ρ :

$$L^n \times L^p \rightarrow L^{n+p}$$

$$(a_i), (b_j) \rightsquigarrow (C_k) = \rho((a_i), (b_j)),$$

est une imbrication s'il existe une permutation $\epsilon(\rho)$ de la suite des entiers de 1 à $n + p$, telle que, quel que soit k :

$$C_k = a_{\epsilon(\rho)k} \quad , \quad \text{si} \quad \epsilon(\rho)k \leq n$$

$$C_k = b_{(\epsilon(\rho)k) - n} \quad , \quad \text{si} \quad \epsilon(\rho)k > n,$$

avec sur $\epsilon(\rho)$ la condition que soit croissante la restriction de la permutation inverse ϵ^{-1} de $\epsilon(\rho)$, à chacun des deux intervalles :

$$1, \dots, n \quad ; \quad n + 1, \dots, n + p.$$

On peut dire que les deux séquences (a_i) et (b_j) sont imbriquées en une seule (C_k) , où les a_i et les b_j se retrouvent, l'ordre de chacune des sous-séquences étant respecté.

Ainsi l'application ρ :

$$L^3 \times L^4 \rightarrow L^7$$

$$(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3, b_4) \rightsquigarrow (a_1, b_1, b_2, a_2, b_3, a_3, b_4),$$

est une imbrication.

1.3. **Liaisons.** — L'application λ :

$$L^n \rightarrow L^p$$

$$(a_i) \rightsquigarrow (b_j) = \lambda((a_i)),$$

est une liaison, s'il existe une application non décroissante $\pi(\lambda)$ de la suite des entiers de 1 à n , dans celle des entiers de 1 à p , telle que :

$$\forall j = 1, \dots, p : b_j = \prod_{(\lambda)i=j} a_i,$$

le produit Π , désignant le produit de juxtaposition d'une partie des a_i , rangés de gauche à droite par ordre d'indices croissants (S'il n'y a pas de i tel que $\pi(\lambda)i = j$, on pose $b_j = \emptyset$, produit de la suite vide). Ainsi l'application λ :

$$\begin{aligned} L^5 &\rightarrow L^3 \\ (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) &\rightsquigarrow (a_1 a_2 a_3, a_4 a_5, \emptyset) \end{aligned}$$

est une liaison.

1.4. **Concaténations.** — L'application μ :

$$L^n \times L^p \rightarrow L^q,$$

est une concaténation, si elle est composée d'une imbrication et d'une liaison :

$$\begin{aligned} L^n \times L^p &\xrightarrow{\rho} L^{n+p} \xrightarrow{\lambda} L^q \\ \mu &= \lambda_0 \rho. \end{aligned}$$

Dans la suite, on dira parfois les « concaténations » pour désigner les concaténations mêmes (dont les imbrications sont des cas particuliers) et les liaisons.

1.4.1. *Le produit de juxtaposition, qui peut s'écrire :*

$$\begin{aligned} L \times L &\xrightarrow{\rho} L^2 \xrightarrow{\lambda} L \\ a, b &\rightsquigarrow (a, b) \rightsquigarrow ab, \end{aligned}$$

est une concaténation.

1.4.2. *L'application σ^n :*

$$\begin{aligned} L^n \times L^{n+1} &\rightarrow L \\ (a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_{n+1}) &\rightsquigarrow b_1 a_1 b_2 a_2 \dots b_n a_n b_{n+1} = C \end{aligned}$$

est une concaténation : on peut dire que la séquence (a_i) est insérée dans C avec le contexte (b_j) : on appellera σ^n « insertion contextuelle ».

1.4.3. *Exercice.* — Soit μ une concaténation :

$$L^p \times L^q \rightarrow L^r,$$

il existe deux concaténations, ξ et μ :

$$\begin{aligned} L^p \times L^{r+1} &\xrightarrow{\xi} L^{q+1} \\ L^q \times L^{r+1} &\xrightarrow{\nu} L^{p+1}, \end{aligned}$$

telles que, quels que soient $a \in L^p$, $b \in L^q$, $x \in L^{r+1}$:

$$\sigma^r(\mu(a, b), x) = \sigma^q(b, \xi(a, x)) = \sigma^p(a, \nu(b, x)).$$

De même, soit λ une liaison :

$$L^p \xrightarrow{\lambda} L^q,$$

il existe une liaison λ' :

$$L^{q+1} \xrightarrow{\lambda'} L^{p+1},$$

telle que, quels que soient $a \in L^p$, $b \in L^{q+1}$:

$$\sigma^q(\lambda(a), b) = \sigma^p(a, \lambda'(b)).$$

Enfin soit ρ une concaténation :

$$L^p \times L^q \xrightarrow{\rho} L$$

il existe une liaison λ :

$$L^q \xrightarrow{\lambda} L^{p+1},$$

telle que :

$$\forall x \in L^p, \quad \forall y \in L^q : \rho(x, y) = \sigma^p(x, \lambda(y)).$$

2. Langues et états.

2.1. **Définitions.** — Une langue sur un alphabet Λ est une partie F du monoïde L : un mot $a \in F$ est appelé une phrase de la langue.

Deux mots a, b sont dans le même état, relativement à F , si et seulement si :

$$\forall x, y \in L : (xay \in F) \Leftrightarrow (xby \in F),$$

i. e. si les mots a et b se rencontrent dans les phrases de F , exactement dans les mêmes contextes. La relation : être dans le même état, est une relation d'équivalence sur L (associée à F); l'ensemble quotient, ou ensemble des états est noté \tilde{L} ; la classe d'équivalence, ou état d'un mot a dans ce quotient, est notée \tilde{a} ; un état quelconque est noté par une minuscule latine surmontée d'un tilde.

On définit de même l'ensemble \tilde{L}_p des états non connexes (à p composantes), comme le quotient de L^p par la relation d'équivalence suivante :

$$(\tilde{a}_i) = (\tilde{b}_i), \text{ et si seulement si :}$$

$$\forall (c_j) \in L^{p+1} : (\sigma^p((a_i), (c_j)) \in F) \Leftrightarrow (\sigma^p((b_i), (c_j)) \in F)$$

Sur \tilde{L}_p (ou \tilde{L}_1), une relation d'ordre notée comme l'inclusion est ainsi définie :

$(\tilde{a}_i) \subset (\tilde{b}_i)$, si et seulement si :

$$\forall (c_j) \in L^{p+1} : (\sigma^p((a_i), (c_j)) \in F) \Rightarrow (\sigma^p((b_i), (c_j)) \in F),$$

i. e. si l'ensemble des contextes de a dans les phrases de F est inclus dans ceux de b .

2.2. Opérations sur les états. — Soit $(a_i), (b_i) \in L^p$; on a l'implication :

$$(\forall i \leq p : \tilde{a}_i \subset \tilde{b}_i) \Rightarrow (\tilde{a}_i) \subset (\tilde{b}_i);$$

ce qui permet de définir une application :

$$\tilde{L}^p \xrightarrow{m_p} \tilde{L}_p$$

$$(\tilde{a}_i) \mapsto (\tilde{a}_i);$$

l'application m_p est surjective, mais non nécessairement injective.

Les diverses concaténations et liaisons sont compatibles avec la relation d'équivalence définissant les états et avec leur inclusion. Démonstrons-le pour une concaténation, en nous reportant aux notations et résultats de l'exercice 1.4.3.

Soit $a, a' \in L^p$; $b, b' \in L^q$, on a :

$$((\tilde{a} \subset \tilde{a}') \wedge (\tilde{b} \subset \tilde{b}')) \Rightarrow (\widetilde{\mu(a, b)} \subset \widetilde{\mu(a', b')}) :$$

en effet, il faut montrer que :

$$\forall x \in L^{p+q} :$$

$$(\sigma^r(\mu(a, b), x) \in F) \Rightarrow (\sigma^r(\mu(a', b'), x) \in F)$$

or l'on a :

$$\sigma^r(\mu(a, b), x) = \sigma^p(a, \nu(b, x));$$

$$\sigma^r(\mu(a', b'), x) = \sigma^p(a', \nu(b', x));$$

d'où :

$$(\sigma^r(\mu(a, b), x) \in F) \Rightarrow (\sigma^r(\mu(a', b'), x) \in F);$$

et de même :

$$\sigma^r(\mu(a', b), x) = \sigma^q(b, \xi(a', x));$$

$$\sigma^r(\mu(a', b'), x) = \sigma^q(b', \xi(a', x));$$

d'où :

$$(\sigma^r(\mu(a', b), x) \in F) \Rightarrow (\sigma^r(\mu(a', b'), x) \in F).$$

Les concaténations s'étendent donc aux états; on notera :

$$\widetilde{\mu(a, b)} = \tilde{\mu}(\tilde{a}, \tilde{b});$$

et l'on a :

$$((\tilde{a} < \tilde{a}') \wedge (\tilde{b} < \tilde{b}')) \Rightarrow (\tilde{\mu}(\tilde{a}, \tilde{b}) < \tilde{\mu}(\tilde{a}', \tilde{b}')).$$

En particulier, la juxtaposition s'étend aux états et \tilde{L} est un monoïde, quotient de L .

La famille des \tilde{L}_p , avec leur structure d'ordre et les diverses opérations étudiées et leurs composées, a une structure qui, sous le nom d'échelle ordonnée sera décrite au § III.

2.3. Langues finies d'états. — La langue F sera dite finie d'états, si le monoïde \tilde{L} est un ensemble fini. Pour démontrer qu'on retrouve ainsi la notion, classique aujourd'hui, de « finite state grammar » utilisons la notion d'état à l'initiale, qui coïncide avec la notion d'état introduite pour le cas probaliste dans notre mémoire Physique et langue (in la traduction automatique, 1963).

Deux mots a, b sont dans le même état à l'initiale (relativement à F), si :

$$\forall x \in L : (ax \in F) \Leftrightarrow (bx \in F).$$

On définit ainsi une relation d'équivalence sur L : le quotient est noté \bar{L} , la classe ou état à l'initiale du mot a est notée \bar{a} . En général \bar{L} n'hérite pas de la structure de monoïde de L . Le monoïde \tilde{L} opère à droite sur l'ensemble \bar{L} ; on pose : $\bar{a}\tilde{b} = \overline{a\tilde{b}}$.

Remarquons que l'on a :

$$(\tilde{a} = \tilde{b}) \Leftrightarrow (\forall \bar{x} \in \bar{L} : \bar{x}\tilde{a} = \bar{x}\tilde{b}),$$

et que \bar{L} est un quotient de \tilde{L} (car $\tilde{a} = \tilde{b}$ implique $\bar{a} = \bar{b}$). De ces deux points, il résulte que \bar{L} est fini si et seulement si \tilde{L} est fini : d'où l'équivalence entre langue finie d'état au sens ci-dessus : \tilde{L} fini, et finite state grammar : \bar{L} fini.

3. Systèmes d'axiomes.

Dans ce numéro, un mot, connexe ou non, sera noté par une minuscule latine, affectée éventuellement d'un indice.

Relativement à une langue F , l'on se pose deux problèmes :

1) trouver un ensemble fini de règles, qui appliquées suivant des lois convenables un nombre fini de fois, permettent de démontrer l'appartenance à F de toute phrase (de F);

2) étant donné un mot $m \in L$, décider, par un processus fini standard si le mot m appartient à F .

Pour une langue finie d'états, il est facile de résoudre ces deux problèmes, par exemple comme suit : l'on se donne le monoïde \tilde{L} (qui est fini) avec son opération, l'on se donne la partie de \tilde{L} , qui correspond à des états de mots de F (l'image \tilde{F} de F dans \tilde{L}), enfin l'on se donne les états des mots d'une lettre, ce qui permet de calculer l'état d'un mot quelconque.

Si le monoïde \tilde{L} n'est pas fini, les problèmes 1 et 2 peuvent cependant être solubles, en particulier à l'aide de la notion de système d'axiomes, introduite ci-dessous.

Pour démontrer qu'un mot m appartient à F , nous ferons usage des deux schémas de démonstration suivants :

$$[f \in F, \tilde{f} \subset \tilde{g} \mid \Rightarrow [g \in F]$$

$$[\tilde{a} \subset \tilde{b}, \tilde{a}' \subset \tilde{b}' \mid \Rightarrow [\rho(\tilde{a}, \tilde{a}') \subset \rho(\tilde{b}, \tilde{b}')]]$$

(ρ est une concaténation quelconque), ainsi que d'axiomes de la forme :

$$f_j \in F,$$

ou :

$$\tilde{a}_i \subset \tilde{b}_i.$$

Une démonstration (qu'un mot appartient à F , ou démonstration de ce mot) peut se ramener à la forme suivante :

axiome : $f_j \in F$

« mise en facteur » : $f_j = \rho_1(a_i, b_1)$

axiome : $\tilde{a}_i \subset \tilde{b}_i$

schémas \rightarrow $\rho_1(b_i, b_1) \in F$

« mise en facteur » : $\rho_1(b_{i_1}, b_1) = \rho_2(a_{i_1}, b_2)$

axiome : $\tilde{a}_{i_1} \subset \tilde{b}_{i_1}$

schémas \rightarrow $\rho_2(b_{i_2}, b_2) \in F$
 \vdots
 etc...

On notera que la seule concaténation « insertion contextuelle » suffit à ces démonstrations. En effet, supposons que :

$$a_{i_1} \in L^p, \quad b_1 \in L^q;$$

d'après l'exercice 1.4.3. (fin), on peut trouver une liaison λ telle que

$$\forall x \in L^p, \forall y \in L^q : \rho_1(x, y) = \sigma^p(x, \lambda(y)).$$

En posant (b_1) , on aura au début de la démonstration :

axiome : $f_j \in F$

« mise en facteur » : $f_j = \sigma^p(a_{i_1}, b'_1)$

axiome : $\tilde{a}_{i_1} \subset \tilde{b}_{i_1}$

schémas : $\sigma^p(a_{i_1}, b'_1) = \rho_1(a_{i_1}, b_1) \in F$

et de même pour la suite.

Supposons donné un ensemble fini d'axiomes :

$$(A) : f_j \in F \quad \tilde{a}_i \subset \tilde{b}_i$$

l'ensemble des mots démontrables (au sens ci-dessus de démonstration) par (A), forme une langue $F(A)$, pour laquelle les axiomes sont satisfaits i. e. :

$$f_j \in F(A)$$

et (relativement à la langue $F(A)$) : $\tilde{a}_i \subset \tilde{b}_i$.

L'on dit que (A) est un système d'axiomes pour la langue $F(A)$. Si l'on connaît un système (fini) d'axiomes pour la langue F , le problème 1 est résolu pour cette langue.

Supposons que l'on puisse affecter chacune des lettres de l'alphabet (fini) Λ , d'un poids strictement positif, de telle sorte que, dans chaque axiome $a_i \subset b_i$ du système (A) la somme des poids des lettres de b_i soit supérieure ou égale à celle des poids des lettres de a_i : l'on démontre alors (cf. Chonsky in Inf. and Control, p. 143, 1959) que le problème 2 peut être résolu pour la langue $F(A)$. En effet, l'ensemble des démonstrations possibles

d'un mot donné m est fini, comme l'ensemble des mots, ou des suites de mots distincts, d'un « poids » inférieur à celui de m .

Nous dirons qu'un système d'axiomes est connexe si tous les mots a_i , b_i sont des mots connexes : à un système d'axiomes connexe (A), pour une langue $F(A)$, il est facile de faire correspondre une grammaire de dérivation (avec vocabulaire non terminal) du type de celles étudiées par Chomsky. Pour cela, l'on introduit, à côté du « vocabulaire terminal » ou alphabet donné Λ , un vocabulaire non terminal (auxiliaire) comprenant le symbole S (Sentence ou phrase), et un deuxième alphabet

$$\underline{\Lambda} = \{ \underline{\alpha}, \underline{\beta}, \dots \}$$

L'on écrit les règles de substitution (où \underline{a} est le mot a récrit en lettres de $\underline{\Lambda}$).

$$S \rightarrow f_j$$

$$\underline{a}_i \rightarrow \underline{b}_i$$

$$\underline{\lambda} \rightarrow \lambda \quad (\forall \lambda \in \Lambda).$$

f est une phrase, si, et seulement si, le symbole S peut être récrit f , en appliquant successivement les règles de substitutions ci-dessus.

Nous avons déjà démontré, que si \tilde{L} est fini, et seulement dans ce cas, l'on a une finite state grammar pour F.

L'on peut définir des classes de langues selon les systèmes d'axiomes qu'elles admettent et comparer ces classes aux classes de Chomsky.

Nous noterons :

C_1 : la classe des langues qui admettent une grammaire de dérivation (à vocabulaire non terminal) où les règles de substitutions concernent un seul symbole initial (à gauche), auquel on substitue un membre non vide, mais éventuellement un contexte est spécifié (cf. Chomsky, type 1).

C_2 : la classe des langues « context-free » : i. e. comme ci-dessus, mais sans condition de contexte pour l'application des règles de substitution (cf. Chomsky, type 2).

K_0 : la classe des langues qui n'admettent pas de systèmes finis d'axiomes (au sens de ce paragraphe).

K_1 : la classe des langues qui admettent un système fini d'axiomes non connexes.

K_{II} : la classe des langues qui admettent un système fini d'axiomes connexes.

Sans étudier le problème général de trouver des critères pour répartir les langues entre ces diverses classes, nous donnerons quelques exemples, diversement situés dans les échelles C et K.

$$\begin{aligned} (\text{ex. 1}) &\in C_2 \cap K_{II}; & (\text{ex. 2}) &\in C_I \cap K_I; \\ (\text{ex. 3}) &\in C_2 \cap K_{II}; & (\text{ex. 4}) &\in C_2 \cap K_{\bullet}. \end{aligned}$$

3.1. Exemple 1 :

$$\Lambda = \{ \alpha, \beta, \gamma \} ; \quad F = \left\{ \underbrace{\alpha \dots \alpha}_p \beta \underbrace{\gamma \dots \gamma}_p \mid p \in \mathbb{N} \right\}$$

Cette langue n'est pas finie d'états; elle admet un système d'axiomes connexe :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta \in F \\ \tilde{\beta} \subset \widetilde{\alpha\beta\gamma}. \end{array} \right.$$

3.2. Exemple 2 :

$$\Lambda = \{ \alpha, \beta, \gamma \} ; \quad F = \left\{ \underbrace{\alpha \dots \alpha}_p \underbrace{\beta \dots \beta}_q \underbrace{\alpha \dots \alpha}_p \underbrace{\beta \dots \beta}_q \beta \gamma \gamma \gamma \mid p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Cette langue n'est pas finie d'états; elle n'admet pas de grammaire context-free (cf. Chomsky). Mais elle admet un système fini d'axiomes (non connexe) :

$$\begin{aligned} \alpha\beta \times \beta\gamma\gamma\gamma &\in F \\ \widetilde{(\alpha\beta, \alpha\beta)} &\subset \widetilde{(\alpha\alpha\beta, \alpha\alpha\beta)} \\ \widetilde{(\alpha\beta, \alpha\beta)} &\subset \widetilde{(\alpha\beta\beta, \alpha\beta\beta)} \end{aligned}$$

L'on peut démontrer qu'il n'y a pas de systèmes finis d'axiomes connexes.

3.3. Exemple 3 :

$\Lambda = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$; $F \{ = a\gamma a' \mid a \text{ mot quelconque de } \alpha \text{ et } \beta; \text{ à ce mot à l'envers} \}$.

Cette langue n'est pas finie d'états; elle admet une grammaire context-free et un système fini décidable d'axiomes connexe :

$$\begin{aligned} \gamma &\in F \\ \tilde{\gamma} &\subset \widetilde{\alpha\gamma\alpha} \\ \tilde{\tilde{\gamma}} &\subset \widetilde{\beta\gamma\beta} \end{aligned}$$

3.4. Exemple 4 :

$$\Lambda = \{ \alpha, \beta \}; F = \{ aa' \mid a \text{ mot quelconque; } a' \text{ ce mot à l'envers} \}.$$

Cette langue n'est pas finie d'états; elle admet une grammaire context-free, mais elle n'admet pas de systèmes finis d'axiomes (connexes ou non). En effet, si a, b sont deux mots distincts (connexes ou non), il est impossible que soit vérifiée aucune des deux inclusions :

$$\tilde{a} \subset \tilde{b} \quad \text{ou} \quad \tilde{b} \subset \tilde{a}.$$

Supposons noté \underline{a} (resp. \underline{b}), le mot connexe obtenu en supprimant les « intervalles » éventuels entre les composants de a , (resp. \bar{b}), et notons comme ci-dessus \underline{a}' , \underline{b}' les mots à l'envers correspondant : $\underline{b}\underline{b}'$ (resp. $\underline{a}\underline{a}'$) est une phase où se trouve \underline{b} (resp. \underline{a}) dans un contexte que n'admet pas \underline{a} (resp. \bar{b}).

L'on voit sur ces exemples que l'existence de systèmes finis d'axiomes est compatible avec des structures assez complexes, mais comme il fallait s'y attendre, s'agissant d'une procédure inductive, la présence de marquants (γ dans l'exemple 3, comparé à l'exemple 4) est parfois commode, alors qu'elle ne joue qu'un rôle mineur si l'on se pose le problème d'engendrer les phrases de la langue, avec un système comportant des symboles auxiliaires, qui peuvent tenir le rôle de marquants dans la phrase de construction, puis disparaître.

3.5. L'exemple 5 donne une grammaire de type déductif, avec, dans les règles de dérivation, des constituants non connexes; ceci invite à étudier les grammaires de constituants non connexes sans (ou avec ?) conditions de contexte. Pour définir la classe générale de ces grammaires, il faut introduire dans le vocabulaire non terminal des signes discontinus; ce que nous ferons au § III 4 avec le formalisme donné aux § II et III.

Exemple 5. — Vocabulaire terminal : $\{ \alpha, \beta \}$, non terminal : $\{ S, A \}$; on a les règles :

$$S \rightarrow ABAB$$

$$A \dots A \rightarrow \alpha A \dots \alpha A \quad ; \quad A \dots A \rightarrow \alpha \dots \alpha$$

$$B \dots B \rightarrow B\beta \dots B\beta \quad ; \quad B \dots B \rightarrow \beta \dots \beta$$

règles que l'on interprète aussi : dans une chaîne où se rencontrent deux A (resp. B), on peut les remplacer simultanément par αA ou par α (resp. $B\beta$ ou β). Pour éviter la substitution simultanée de deux symboles A , il suffit

d'introduire les signes non connexes (s'insérant en 2 points de la chaîne) « double-A » et « double B », et l'on a les règles :

$$\begin{array}{c}
 \text{S} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \text{A} & \text{B} \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{|c|} \hline \text{A} \\ \hline \end{array} \rightarrow \alpha \begin{array}{|c|} \hline \text{A} \\ \hline \end{array} \alpha \quad ; \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{A} \\ \hline \end{array} \rightarrow \alpha \dots \alpha \\
 \\
 \begin{array}{|c|} \hline \text{B} \\ \hline \end{array} \rightarrow \beta \begin{array}{|c|} \hline \text{B} \\ \hline \end{array} \beta \quad : \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{B} \\ \hline \end{array} \rightarrow \beta \dots \beta
 \end{array}$$

Du symbole S, ces règles permettent de dériver l'ensemble des phrases :

$$\alpha^n \beta^p \alpha^n \beta^p$$

et ce, sans le marquant de fin de phrase $\gamma\gamma\gamma$ utilisé par Chomsky pour donner une grammaire context dependent ou (C. S.) de la langue de l'exemple 2. (La langue $\alpha^n \beta^p \alpha^n \beta^p$ admet, il est vrai, une grammaire C. S. : en effet, Landweber a démontré que toute grammaire C. S. avec marquant est équivalente à une grammaire C. S. sans marquant; pour une démonstration, on pourra consulter la thèse de J. Friant (thèse publiée en 1967, par les *Annales de l'Inst. Henri Poincaré*).

§ II. LA CATÉGORIE DES SIMPLEXES SEGMENTÉS (SEG)

1. Les simplexes divisés.

1.1. **Simplexe.** — Soit $K \in \mathbb{N}$: nous noterons $]k[$ et appellerons simplexe k , l'ensemble ordonné d'entiers naturels non nuls :

$$\begin{aligned}
]k[&= \{ 1, \dots, k \} = \{ i \mid i \in \mathbb{N}^*; 1 \leq i \leq k \} \\
]0[&= \emptyset.
 \end{aligned}$$

(Une convention usuelle est de noter :

$$[k] = \{ 0, \dots, k \} = \{ i \mid i \in \mathbb{N}; 0 \leq i \leq k \};$$

de même que l'on note $]a, b[$ le segment (a, b) privé de a , nous notons $]k[$ le simplexe $[k]$ privé du zéro).

$]k[$ peut être muni de la topologie simpliciale, dont les fermés sont les sections finissantes de la structure ordonnée, i. e. les $]p[$ avec $p \leq k$. Si

$]k[$ et $]k'[$ sont munis de cette topologie, il est équivalent de dire qu'une application de $]k[$ dans $]k'[$ est continue ou qu'elle est non décroissante.

Soit $\{]n_h[\}$ une suite ordonnée de simplexes indexés par $h \in]k[$. Posons :

$$n = \sum_{h=1}^k n_h.$$

On notera u_h l'application de $]n_h[$ dans $]n[$ ainsi définie :

$$\forall i \in]n_h[, n_h(i) = i + \sum_{h' < h} n_{h'}.$$

$]n[$ est la somme directe ensembliste des $]n_h[$ par les applications u_h . Dans le paragraphe, quand on aura à considérer simultanément plusieurs suites de simplexes $\{]n_h[\}$, $\{]m_h[\}$, indexés par $h \in]k[$, on notera, sauf confusion possible, de la même façon :

$$]n_h[\xrightarrow{u_h}]n[,$$

et :

$$]m_h[\xrightarrow{u_h}]m[, \text{ etc...}$$

1.2. Simplexe divisé. — Un simplexe divisé S est un couple d'un simplexe $]n(S)[$ et d'une partition de celui-ci en $q(S)$ sous-ensembles non vides appelés S -faces (ou simplement faces). Un simplexe divisé peut être défini par une surjection, $f(S)$ de $]n(S)[$ sur $]q(S)[$, qui envoie chaque S -face de $]n(S)[$ sur un sommet de $]q(S)[$; afin que l'application $f(S)$ soit définie de façon unique par la partition de $]n(S)[$, on impose la condition :

$$\forall j, j' \in]q(S)[: \\ (j < j') \Leftrightarrow \left(\inf_{f(S)i=j} i < \inf_{f(S)i'=j'} i' \right).$$

Dans la suite, on identifiera le simplexe divisé S avec un ensemble de triples d'entiers strictement positifs :

$$S = \{ (i, j, k) \mid i \in]n(S)[; j = f(S)i; k = r(S)i \},$$

où $r(S)i$ est le cardinal de l'ensemble :

$$\{ i' \mid i' \leq i; f(S)i' = f(S)i \}.$$

Il faut remarquer que, si S est connu, la connaissance de i détermine (j, k) et réciproquement.

Pour $j \in]q(S)[$, on notera $d(S)j$ le cardinal de la j^e S-face :

$$d(S)j = \sup_{f(S)i=j} r(S)i.$$

On notera $c(S)$ l'application de $]q(S)[$ dans N^* telle que :

1° $\forall j, j' \in]q(S)[$:

$$\inf_{f(S)i=j} i < \sup_{f(S)i'=j'} i' \Rightarrow (c(S)j \leq c(S)j').$$

2° l'ensemble des valeurs prises par $c(S)$ soit un simplexe $]v[$ avec v aussi grand que possible.

On verra plus bas une interprétation intuitive de $c(S)$.

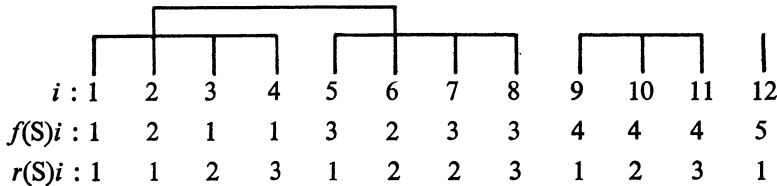
Le simplexe $]n(S)[$ (ou l'ensemble S qui lui correspond biunivoquement par l'application $(i, j, k) \rightsquigarrow i$) peut être muni de plusieurs topologies :

1° La topologie simpliciale considérée en 1.1.

2° La topologie faciale ou topologie associée à la partition en S-faces ; i. e. la topologie pour laquelle les ouverts (ainsi que les fermés) sont les réunions de S-faces.

3° La S-topologie, ou topologie de simplexe divisé, qui est borne supérieure des deux précédentes : pour la S-topologie, les S-faces sont des composantes connexes et la restriction à la $j^{\text{ème}}$ face de l'application $r(S)$ est un homéomorphisme sur $]d(S)j[$ muni de la topologie simpliciale.

Intuitivement, on peut représenter un simplexe divisé comme une suite de peignes, les S-faces, dont les dents sont imbriquées; sur la figure, on a indiqué, sous chaque dent, le triple (i, j, k) correspondant :



La fonction $d(S)$ donne le nombre de dents des peignes; $c(S)$ numérote de gauche à droite, les groupes de peignes imbriqués; on a :

$$\begin{aligned} j &: 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ d(S)j &: 3 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ c(S)j &: 1 & 1 & 1 & 2 & 3. \end{aligned}$$

Nous noterons, pour $n \in N$: $S(n)$: l'unique simplexe divisé tel que :

$$\begin{aligned} n(S(n)) &= n; & q(S(n)) &= n : \\ S(n) &= \{ (i, i, 1) \mid i \in]n[\}. \end{aligned}$$

$S[n]$: l'unique simplexe divisé tel que :

$$\begin{aligned} n(S[n]) &= n; & q(S[n]) &= 1 : \\ S[n] &= \{ (i \ 1 \ i) \mid i \in [n] \} \end{aligned}$$

En général, un simplexe divisé sera noté par une capitale latine, éventuellement suivie d'indices, exposants, parenthèses, etc.; la notation fonctionnelle pour n, q, f, d, r, c sera toujours employée (on dira par exemple $n(A_i)$, $q(A_i)$, ..., pour le nombre de sommets, le nombre de faces- A_i -faces du simplexe divisé A_i).

1.3. Produit de simplexes divisés. — Soit $\{ S_h \}, h \in [k]$ une suite ordonnée de simplexes divisés. On définit le simplexe divisé produit :

$$S = \times_{h \in [k]} S_h = S_1 \times \dots \times S_h \times \dots \times S_k,$$

par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} n(S) &= \sum_{h=1}^k n(S_h) \\ q(S) &= \sum_{h=1}^k q(S_h) \end{aligned}$$

$\forall i \in [n(S_h)] :$

$$f(S) \circ u_{hi} = u_h \circ f(S_h)i,$$

où le symbole u_h a le sens indiqué en 1.1. Notons que :

$\forall i \in [n(S_h)] :$

$$r(S) \circ u_{hi} = r(S_h)i.$$

Intuitivement, le diagramme de S est obtenu en juxtaposant, de gauche à droite, ceux de $S_1, \dots, S_h, \dots, S_k$.

Quoique $[n(S)]$ soit comme directe ensembliste des $[n(S_h)]$, on a employé le mot produit en vue de l'application à la catégorie des simplexes segmentés.

2. Objets et morphismes.

2.1. Simplexes segmentés. — Un objet, ou simplexe segmenté, de la catégorie (SEG) que nous définissons est un simplexe divisé S tel que l'application $f(S)$ de $[n(S)]$ dans $[q(S)]$ soit non décroissante. Intuitivement,

cela veut dire que les peignes ne sont pas imbriqués; formellement S est un simplexe segmenté si et seulement si :

$$\forall j \in]q(S)] : \\ c(S)j = j.$$

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $S(n)$ et $S]n]$ (voir ci-dessus 1.2) sont des simplexes segmentés. Le produit \times d'une suite de simplexes segmentés est un simplexe segmenté; on a, pour tout simplexe segmenté S :

$$S = \prod_{j \in]q(S)]} S]d(S)j] \\ S = S]d(S)1] \times S]d(S)2] \times \dots \times S]d(S)q(S)].$$

Un simplexe segmenté sera noté, comme un simplexe divisé quelconque, par une capitale latine, éventuellement indexée.

2.2. Correspondance simpliciale. — Un morphisme, ou correspondance simpliciale, de la catégorie (SEG) sera noté par une minuscule grecque (autre que ε et π) éventuellement affectée d'indices. On notera fonctionnellement $A(\mu)$ (resp. $B(\mu)$) le simplexe segmenté source (resp. but) de μ . Ceci dit, une correspondance simpliciale μ est un triple formé :

- 1° d'un simplexe divisé $S(\mu)$, appelé graphe de la correspondance,
- 2° d'une application ensembliste $\varepsilon(\mu)$:

$$]n(S(\mu))] \rightarrow]n(A(\mu))]$$

du graphe vers la source (ou ce qui revient au même, aucune confusion n'étant à craindre, de $S(\mu)$ vers $A(\mu)$),

- 3° d'une application ensembliste $\pi(\mu)$:

$$]n(S(\mu))] \rightarrow]n(B(\mu))]$$

du graphe vers le but (ou de $S(\mu)$ vers $B(\mu)$).

Les applications $\varepsilon(\mu)$, $\pi(\mu)$ doivent satisfaire aux conditions ci-dessous formulées, où $e(\mu)$ (resp. $p(\mu)$) est une application ensembliste de $]q(S(\mu))]$ dans $]q(A(\mu))]$ (resp. $]q(B(\mu))]$), bien déterminée par $\varepsilon(\mu)$ (resp. $\pi(\mu)$).

$$f(A(\mu)) \circ \varepsilon(\mu) = e(\mu) \circ f(S(\mu)) \\ r(A(\mu)) \circ \varepsilon(\mu) = r(S(\mu)) \\ d(A(\mu)) \circ e(\mu) = d(S(\mu)) \\ f(B(\mu)) \circ \pi(\mu) = p(\mu) \circ f(S(\mu))$$

$p(\mu)j$ ne dépend que de $c(S(\mu))j$,

$\pi(\mu)$ est non décroissante (donc aussi $p(\mu)$).

Avec les topologies considérées en 1.2, on peut énoncer simplement les conditions imposées à ε et à π :

$\varepsilon(\mu)$ est un étalement de $S(\mu)$ (ou $]n(S(\mu))]$) dans $A(\mu)$ (ou $]n(A(\mu))]$) si $S(\mu)$ et $A(\mu)$ sont munis tous deux soit de la topologie faciale, soit de la topologie de simplexe divisé;

$\pi(\mu)$ est une application continue de $S(\mu)$ (ou $]n(S(\mu))]$) dans $B(\mu)$ (ou $]n(B(\mu))]$) si $S(\mu)$ et $B(\mu)$ sont tous deux munis soit de la topologie simpliciale, soit de la topologie faciale (soit donc aussi de la topologie de simplexe divisé).

Des conditions ci-dessus, il résulte que :

$$\forall j \in]q(S(\mu))] : \\ d(S(\mu))j = d(A(\mu)) \circ \varepsilon(\mu)j.$$

Pour représenter intuitivement un morphisme μ , nous donnerons les diagrammes (en peignes) de la source, du graphe et du but, avec, sur le $j^{\text{ème}}$ peigne du graphe, indication du rang $e(\mu)j$ du peigne correspondant de la source et sous les groupes de dents des peignes du graphe, une accolade les reliant à la dent (du but) qui est leur image par $\pi(\mu)$.

Pour la commodité des calculs de composés de morphismes (cf. *infra* 3.4), on donnera deux tableaux : le premier, à neuf colonnes et $n(S(\mu))$ lignes donne, au centre, les triples de $S(\mu)$, à droite et à gauche, leurs images par $\pi(\mu)$; le second, à cinq colonnes et $q(S(\mu))$ lignes, groupe, de part et d'autre de l'indice j : à gauche $e(\mu)j$, $d(S(\mu))j$ (afin de vérifier que $d(S(\mu)) = d(A(\mu)) \circ \varepsilon(\mu)$), à droite $c(S(\mu))j$ et $p(\mu)j$ (celui-ci fonction de celui-là).

2.3. Exemples de morphismes.

2.3.1. *Les liaisons.* — Un morphisme λ est une liaison sous les conditions ci-dessous :

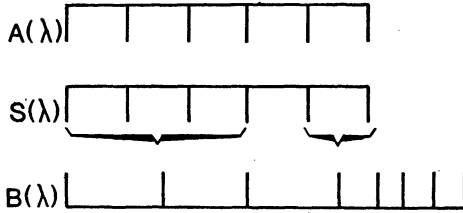
$$S(\lambda) = S]n], \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$A(\lambda) = S(\lambda), \quad \varepsilon(\lambda) \text{ est l'application identique,}$$

$$B(\lambda) = S]m], \quad (m \in \mathbb{N}^*).$$

$\pi(\lambda)$ est une application croissante, et à ceci près quelconque de $]n]$ dans $]m]$.

Voici les diagrammes et tableaux d'une liaison :



$e(i)$	$e(j)$	$r(i)$	i	j	$r(i)$	$\pi(i)$	$p(j)$
1	1	1	1	1	1	2	1
2	1	2	2	1	2	2	1
3	1	3	3	1	3	2	1
4	1	4	4	1	4	2	1
5	1	5	5	1	5	4	1
6	1	6	6	1	6	4	1

e	d	j	c	p
1	6	1	1	1

2.3.2. *Imbrication.* — Un morphisme ρ est une imbrication sous les conditions ci-dessous :

$$n(A(\rho)) = n(S(\rho))$$

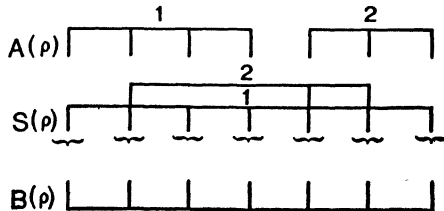
$$q(A(\rho)) = q(S(\rho))$$

$$\forall j \in]q(S(\rho))] : e(\rho)j = j$$

$$B(\rho) = S]n(S(\rho))]$$

$$\pi(i, j, k) = (i, 1, i)$$

Il résulte de ces conditions que ρ est complètement déterminé par son graphe $S(\rho)$ (qui est quelconque). Voici les diagrammes et tableaux d'une imbrication binaire ($q(S(\rho)) = 2$).



$\varepsilon(i)$	$e(j)$	$r(t)$	i	j	$r(i)$	$\pi(i)$	$p(j)$
1	1	1	1	1	1	1	1
5	2	1	2	2	1	2	1
2	1	2	3	1	2	3	1
3	1	3	4	1	3	4	1
6	2	2	5	2	2	5	1
7	2	3	6	2	3	6	1
4	1	4	7	1	4	7	1

e	d	j	c	p
1	4	1	1	1
2	3	2	1	1

Le lien entre les liaisons et imbrications définies ici et celles étudiées au § I est précisé au § III, 2. 1.

Comme au § I, on appellera concaténation le composé d'une liaison et d'une imbrication; en particulier, on définit le morphisme, insertion contextuelle, σ^h :

$$A(\sigma^h) = S]h] \times S]h + 1] \quad ; \quad B(\sigma^h) = S]1]$$

$$n(S(\sigma^h)) = 2n + 1 \quad ; \quad \pi(\sigma^h) = \text{cte} = 1 ;$$

$\varepsilon(\sigma^h)$ est la permutation de $]2n + 1]$, définie par :

z pair : $\varepsilon(\sigma^h)z = z/2$

z impair : $\varepsilon(\sigma^h)z = n + (z + 1)/2.$

2.3.3. *Notations.* — On notera :

$\lambda(n)$ la liaison définie par :

$$A(\lambda(n)) = S(\lambda(n)) = S]n] \quad ; \quad B(\lambda(n)) = S]1]$$

$$\forall i \in]n] : \varepsilon(i) = i \quad ; \quad \pi(i) = 1$$

$\rho(n)$ l'imbrication définie par :

$$A(\rho(n)) = S(\rho(n)) = S(n) \quad ; \quad B(\rho(n)) = S]n]$$

$$\forall i \in]n] : \varepsilon(i) = \pi(i) = i.$$

$\psi(n)$ le morphisme défini par :

$$A(\psi(n)) = S(\psi(n)) = S(n) \quad ; \quad B(\psi(n)) = S[1]$$

$$\forall i \in]n] : \varepsilon(i) = i \quad ; \quad \pi(i) = 1.$$

On montrera, facilement, que :

$$\psi(n) = \lambda(n) \circ \rho(n)$$

(cf. *infra* : composition).

2.3.4. *Permutations.* — Soit ξ une permutation de $]n]$: on va définir un morphisme, noté aussi ξ et appelé permutation de source, but et graphe

$$A(\xi) = B(\xi) = S(\xi) = S(n).$$

On pose :

$$\pi(\xi) = \text{identité de }]n],$$

$$\varepsilon(\xi) = \xi^{-1}, \text{ permutation de }]n] \text{ inverse de } \xi.$$

Intuitivement, les n dents de $A(\xi)$ se retrouvent dans $B(\xi)$, permutées par ξ .

3. Composition des morphismes.

3.1. *Notations.* — Du fait du petit nombre d'applications considérées, les notations simplifiées données ci-dessous n'entraînent pas, ici, de confusion.

S_a (où a est un bloc indiciel quelconque), un simplexe divisé.

$$n_a = n(S_a) \quad ; \quad q_a = q(S_a) \quad ; \quad f_a = f(S_a).$$

ε_a^b (resp. π_a^b) : un étalement (resp. une application continue non décroissante) de S_a dans S_b (ou de $]n_a]$ dans $]n_b]$).

e_a^b (resp. p_a^b) : l'unique application rendant commutatif le diagramme :

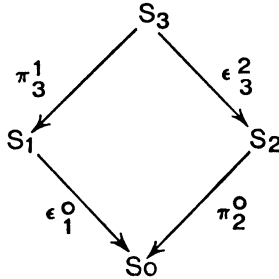
$$\begin{array}{ccc}]n_a] & \xrightarrow{\varepsilon_a^b \text{ (resp. } \pi_a^b)} &]n_b] \\ \downarrow f_a & & \downarrow f_b \\]q_a] & \xrightarrow{e_a^b \text{ (resp. } p_a^b)} &]q_b] \end{array}$$

$$\varepsilon_a^c = \varepsilon_b^c \circ \varepsilon_a^b \quad ; \quad \pi_a^c = \pi_b^c \circ \pi_a^b$$

$\mu_{a,b}$: un morphisme de source S_a , de but S_b

$$S_{a,b} = S(\mu_{a,b}) \quad ; \quad \varepsilon_{a,b}^a = \varepsilon(\mu_{a,b}) \quad ; \quad \pi_{a,b}^a = \pi(\mu_{a,b}).$$

3.2. **Produit fibré lexicographique.** — Soit le diagramme commutatif :



(où les ϵ, π ont des propriétés précisées dans les notations). On dit qu'il définit un produit fibré lexicographique, ce que l'on écrit :

$$\pi_3^1 S_{\epsilon_3^2} = S_{\epsilon_1^0} \times_{\pi_2^0} S_2$$

si sont satisfaites les conditions suivantes :

S_3 est produit fibré ensembliste de S_1 par S_2 sur S_0 (i. e. l'application $\pi_3^1 \times \epsilon_3^2$ de S_3 dans $S_1 \times S_2$:

$$z \rightsquigarrow (\pi_3^1(z), \epsilon_3^2(z))$$

met S_3 en correspondance biunivoque avec :

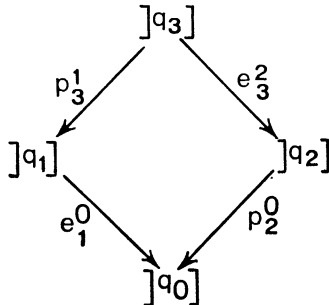
$$\{ (x, y) \mid x \in S_1 ; y \in S_2 ; \epsilon_1^0(x) = \pi_2^0(y) \}.$$

S_3 est ordonné lexicographique par les deux projections π_3^1, ϵ_3^2 , i. e. :

$\forall z, z' \in S_3 :$

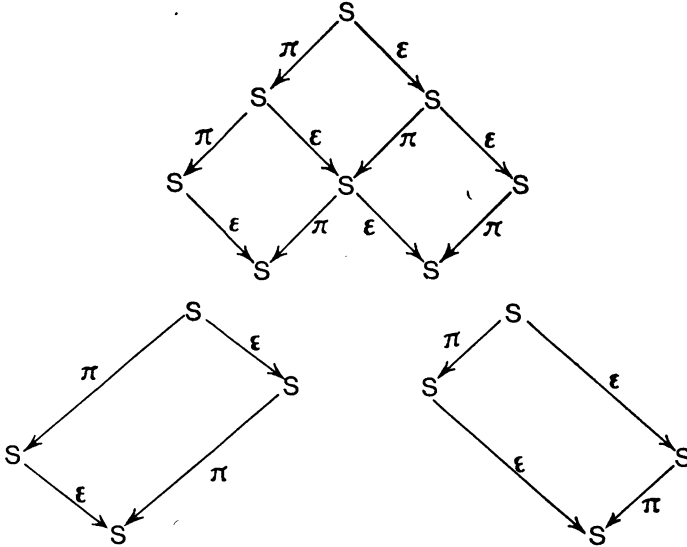
$$z < z' \Rightarrow ((\pi_3^1(z) < \pi_3^1(z')) \vee ((\pi_3^1(z) = \pi_3^1(z')) \wedge (\epsilon_3^2(z') < \epsilon_3^2(z))))).$$

$]q_3]$ est alors produit fibré ensembliste (sans condition lexicographique d'ordre) de $]q_1]$ par $]q_2]$ sur $]q_0]$ dans le diagramme :



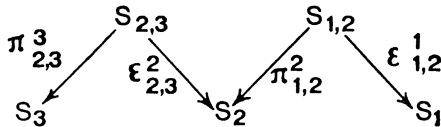
On vérifie que si $S_1, S_2, S_0, \epsilon_1^0, \pi_2^0$ sont donnés, on peut déterminer $S_3, \pi_3^1, \epsilon_3^2$ de manière unique pour avoir un produit fibré lexicographique. On a

l'associativité du produit fibré lexicographique au sens suivant : si, dans le diagramme ci-dessous (où pour plus de simplicité on a omis les indices), les trois « carrés » définissent des produits fibrés lexicographiques, il en est de même des deux « rectangles » :



la démonstration est facile, en jouant sur le diagramme à deux étages des $([n], \varepsilon, \pi)$ et $([q], e, p)$ reliés par les f .

3.3. Compositions des morphismes. — Soient donnés deux morphismes $\pi_{1,2} \mu_{2,3}$ par leurs graphes et, les ε, π ; on a :



Notons le produit fibré lexicographique :

$$\pi_{1,3}^{2,3} S_{1,3}^{\varepsilon_{1,3}^1} = S_{2,3}^{\varepsilon_{2,3}^2} \times_{\pi_{1,2}^2} S_{1,2}$$

Le graphe de $\mu_{1,3} = \mu_{2,3} \circ \mu_{1,2}$ est par définition $S_{1,3}$ et l'on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mu_{1,3}) &= \varepsilon_{1,3}^1 = \varepsilon_{1,2}^1 \circ \varepsilon_{1,3}^1 \\ \pi(\mu_{1,3}) &= \pi_{1,3}^3 = \pi_{2,3}^3 \circ \pi_{1,2}^2 \end{aligned}$$

Avec cette définition, l'associativité de la composition des morphismes est une conséquence immédiate de l'associativité du produit fibré lexicographique.

On vérifie immédiatement que si δ_s^s (en abrégé δ) est le morphisme de source S et de but S tel que :

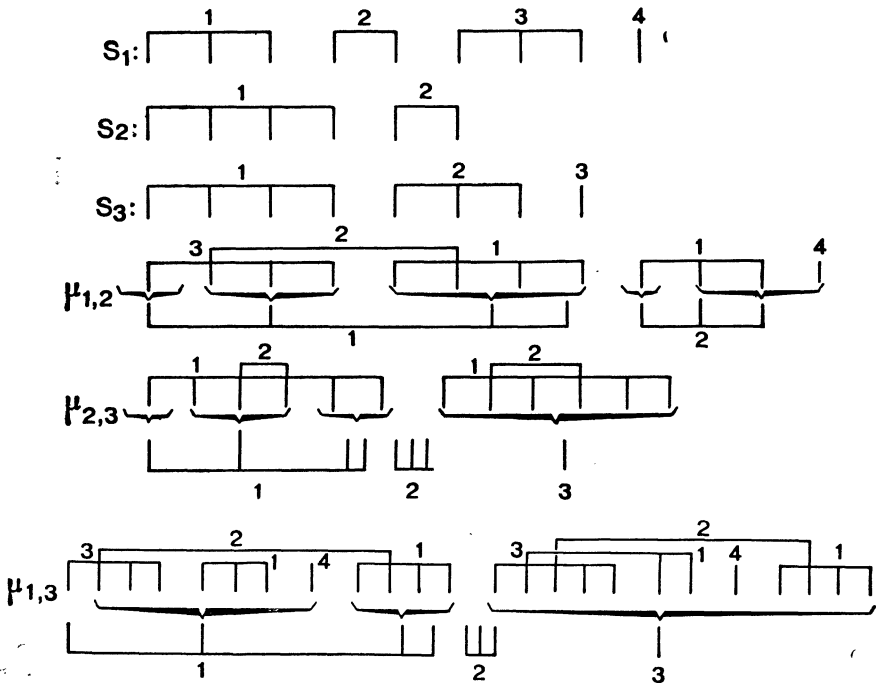
$$S(\delta) = S \quad ; \quad \varepsilon(\delta) = \pi(\delta) = \text{identité},$$

δ_s^s est un élément neutre à droite et à gauche pour la composition des morphismes : on l'appelle morphisme neutre de S .

Étant donné deux simplexes segmentés S, S' , il existe un unique morphisme μ de source S , de but S' et de graphe $S(0) = \emptyset$: c'est le morphisme vide, dont le composé à droite ou à gauche avec un morphisme quelconque est un morphisme vide. Tout morphisme dont la source ou le but est $S(0)$ est un morphisme vide.

3.4. Un exemple de calcul. — L'algorithme appliqué ci-dessous pour le calcul du composé de deux morphismes est facilement automatisable. Nous donnerons successivement : les diagrammes des objets et des morphismes; les tableaux des objets et des morphismes donnés; le calcul commenté du tableau du morphisme composé.

3.4.1. Les diagrammes.



3.4.2. Les tableaux des objets.

S_1			S_2			S_3		
i	$f(i)$	$r(i)$	i	$f(i)$	$r(i)$	i	$f(i)$	$r(i)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	1	2	2	1	2
3	1	3	3	1	3	3	1	3
4	2	1	4	1	4	4	1	4
5	2	2	5	2	1	5	2	1
6	3	1	6	2	2	6	2	2
7	3	2				7	2	3
8	3	3				8	3	1
9	4	1						

j	$d(j)$	j	$d(j)$	j	$d(j)$
1	3	1	4	1	4
2	2	2	2	2	3
3	3			3	1
4	1				

3.4.3. Les tableaux des morphismes donnés.

$\pi_{1,3}$	$\varepsilon(i)$	$e(j)$	$r(i)$	i	j	$r(i)$	$\pi(i)$	$p(j)$
	6	3	3	1	1	1	1	1
4	2	2	1	2	2	1	2	1
7	3	3	2	3	1	2	2	1
8	3	3	3	4	1	3	2	1
1	1	1	1	5	3	1	3	1
5	2	2	2	6	2	2	3	1
2	1	2	2	7	3	2	3	1
3	1	3	3	8	3	3	3	1
1	1	1	1	9	4	1	5	2
2	1	2	2	10	4	2	6	2
3	1	3	3	11	4	3	6	2
9	4	1	1	12	5	1	6	2

	$\varepsilon(i)$	$e(j)$	$r(i)$	i	j	$r(i)$	$\pi(i)$	$p(j)$	
	$\pi_{2,3}$	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	2	2	1	2	2	1	2
	5	2	1	3	2	1	2	1	2
	6	2	2	4	2	2	2	1	2
	3	1	3	5	1	3	3	1	3
	4	1	4	6	1	4	3	1	3
	1	1	1	7	3	1	8	3	1
	5	2	1	8	4	1	8	3	1
	2	1	2	9	3	2	8	3	1
	6	2	2	10	4	2	8	3	1
	3	1	3	11	3	3	8	3	1
	4	1	4	12	3	4	8	3	1

e	d	j	c	p
3	3	1	1	1
2	2	2	1	1
1	3	3	1	1
1	3	4	2	2
4	1	5	3	2

e	d	j	c	p
1	4	1	1	1
2	2	2	1	1
1	4	3	2	3
2	2	4	2	3

3.4.4. *L'algorithme de calcul.* — On remplit deux tableaux, l'un à 7×3 , l'autre à 7 colonnes pour calculer les tableaux de $\mu_{1,3}$; toutes les colonnes de ces tableaux ne sont pas indispensables, mais elles permettent des vérifications utiles; sur machine, on peut procéder plus économiquement.

Supposons donné un élément $i \in S_{2,3}$ (resp. $i' \in S_{1,2}$) par une ligne (i) (resp. i') du tableau à 9 colonnes de ce morphisme, on aura :

$$\varepsilon_{2,3}^2 i = \pi_{1,2}^2 i'$$

si et seulement si les trois nombres de gauche de la ligne (i) sont les trois nombres de droite de la ligne (i'). D'où, pour faire le produit fibré lexicographique de $S_{2,3}$ par $S_{1,2}$, la règle suivante de remplissage du tableau à 21 colonnes.

On porte à droite (sur 9 colonnes) la première ligne du tableau (à 9 colonnes) de $\mu_{2,3}$;

on copie à gauche dans l'ordre où elles se présentent dans le tableau de $\mu_{1,2}$, celles de ses lignes qui se terminent par les trois nombres par lesquels commence la ligne écrite à droite;

on recopie à droite la ligne déjà inscrite autant qu'il faut pour qu'il ait le même nombre de lignes à droite qu'à gauche (si l'on n'a rien écrit à gauche, on efface la ligne qui avait été écrite à droite);

on porte à droite la deuxième ligne du tableau de $\mu_{2,3}$ et l'on procède comme avec la première et ainsi de suite jusqu'à épuisement des tableaux des morphismes donnés.

Les lignes du tableau ainsi rempli correspondent aux sommets de $S_{1,3}$ rangés dans l'ordre convenable : on va utiliser les colonnes médianes du tableau à 21 colonnes pour faire le tableau à 3 colonnes du simplexe divisé $S_{1,3}$:

on copie dans la 10^e colonne la suite des entiers naturels, 1, 2, ..., n (s'il y a n lignes);

on copie la 3^e colonne dans la 12^e.

$\varepsilon(i) e(j) r(i)$			i	j	$r(i)$			$\pi(i) p(j)$
6 3 1	1 1 1	1 1 1	1	1	1	1	1	1
4 2 1	2 2 1	2 1 2	2	2	1	2	1	2
7 3 2	3 1 2	2 1 2	3	1	2	2	1	2
8 3 3	4 1 3	2 1 2	4	1	3	2	1	2
1 1 1	9 4 1	5 2 1	5	3	1	5	2	1
2 1 2	10 4 2	6 2 2	6	3	2	6	2	2
3 1 3	11 4 3	6 2 2	7	3	3	6	2	2
9 4 1	12 5 1	6 2 2	8	4	1	6	2	2
1 1 1	5 3 1	3 1 3	9	5	1	3	1	3
5 2 2	6 2 2	3 1 3	10	2	2	3	1	3
2 1 2	7 3 2	3 1 3	11	5	2	3	1	3
3 1 3	8 3 3	3 1 3	12	5	3	3	1	3
6 3 1	1 1 1	1 1 1	13	6	1	1	1	1
1 1 1	9 4 1	5 2 1	14	7	1	5	2	1
4 2 1	2 2 1	2 1 2	15	8	1	2	1	2
7 3 2	3 1 2	2 1 2	16	6	2	2	1	2
8 3 3	4 1 3	2 1 2	17	6	3	2	1	2
2 1 2	10 4 2	6 2 2	18	7	2	6	2	2
3 1 3	11 4 3	6 2 2	19	7	3	6	2	2
9 4 1	12 5 1	6 2 2	20	9	1	6	2	2
1 1 1	5 3 1	3 1 3	21	10	1	3	1	3
5 2 2	6 2 2	3 1 3	22	8	2	3	1	3
2 1 2	7 3 2	3 1 3	23	10	2	3	1	3
3 1 3	8 3 3	3 1 3	24	10	3	3	1	3

Pour remplir la colonne médiane, il faut numéroter les faces de $S_{1,3}$, i. e. ordonner convenablement le produit fibré de $[q_{23}]$ par $[q_{12}]$ sur $[q_2]$, pour que f_{13} satisfasse à la condition imposée en 12. On remplit donc le tableau à 7 colonnes.



Dans les colonnes 3 et 5, on met sur chaque ligne un couple provenant d'une même ligne et des colonnes 5 et 17 du tableau à 21 colonnes : ces couples sont copiés dans l'ordre des lignes de ce tableau, mais sans répétition.

Dans la ligne médiane du tableau à 7 colonnes, on inscrit la suite des entiers naturels $1 \dots m$.

On remplit les colonnes 1, 2 (resp. 6, 7) du tableau à 7 colonnes, de sorte que les colonnes 1, 2, 3 (resp. 5, 6, 7) ne contiennent que des triples provenant des colonnes 1, 2, 3 (resp. 3, 4, 5) du tableau à 5 colonnes de $\mu_{1,2}$ (resp. $\mu_{2,3}$).

On remplit alors la colonne médiane du tableau à 21 colonnes, en sorte que les triples provenant d'une même ligne et des colonnes 5, 11, 17 de ce tableau, se retrouvent sur une même ligne et les colonnes 3, 4, 5 du tableau à 7 colonnes.

En effaçant les colonnes 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 17, 18 (resp. 3, 5) du tableau à 21 (resp. 7) colonnes, on a le tableau à 9 (resp. 5) colonnes de μ_{13} .

e	d		j		c	p
3	3	1	1	1	1	1
2	2	2	2	1	1	1
1	3	4	3	2	1	1
4	1	5	4	2	1	1
1	3	3	5	1	1	1
3	3	1	6	3	2	3
1	3	4	7	4	2	3
2	2	2	8	3	2	3
4	1	5	9	4	2	3
1	3	3	10	3	2	3

4. Produit direct.

La catégorie (SEG) est une catégorie à produit direct : ce produit, que nous notons \times pour le distinguer du produit direct ensembliste, a, du fait, des morphismes vides, certaines des propriétés d'une somme directe.

4.1. Propriétés générales. — Rappelons que la définition du produit direct. Soit S un objet de (SEG), $\{S_i\}_{i \in I}$ une famille finie d'objets, $\{\gamma^i\}_{i \in I}$ des morphismes de source S , de but S_i :

$$\gamma^i \in \text{Hom}(S, S_i).$$

On dit que S est produit direct des S_i par les morphismes (projections) γ^i si, quel que soit le simplexe segmenté X , l'application :

$$\rho \rightsquigarrow \{ \gamma^i \circ \rho \}_{i \in I}$$

$$\text{Hom}(X, S) \longrightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}(X, S_i) \quad \left(\prod \text{ produit ensembliste} \right)$$

est une correspondance biunivoque ensembliste. On note alors

$$S = \times_{\{\gamma^i\}_{i \in I}} S_i$$

Étant donné un système de morphismes μ^i :

$$\mu^i \in \text{Hom}(X, S_i),$$

on note :

$$\mu = \times_{\{\gamma^i\}_{i \in I}} \mu^i$$

l'unique morphisme μ de $\text{Hom}(X, S)$ tel que :

$$\forall i : \mu^i = \gamma^i \circ \mu.$$

En particulier, notons :

$$\alpha_i = \times_{\{\gamma^j\}_{j \in I}} \delta_j^i \in \text{Hom}(S_i, S)$$

où :

$\delta_i^i =$ morphisme neutre de S_i ,

$\delta_i^j =$ morphisme vide de source S_i , de but S_j ($i \neq j$).

Quoique S ne soit pas une somme directe, on a la propriété suivante : si Y est un simplexe segmenté, notons :

$$\text{Hom}_i(S, Y) = \{ \beta \mid \beta \in \text{Hom}(S, Y); j \neq i \Rightarrow \beta \circ \alpha_j = \text{vide} \}$$

alors, on a entre les deux ensembles :

$$\text{Hom}_i(S, Y) \quad \text{et} \quad \text{Hom}(S_i, Y)$$

les deux correspondances biunivoques inverses l'une de l'autre :

$$\beta_i \rightsquigarrow \beta_i \circ \gamma^i$$

$$\beta \circ \alpha_i \rightsquigarrow \beta$$

4.2. Existence du produit direct. — On montre que le produit défini en 1.3 donne le produit direct des morphismes. Soit :

$$S = \times_{h \in]k[} S_h ;$$

définissons $\beta^h \in \text{Hom}(S, S_h)$ par :

$$S(\beta^h) = S_h \quad ; \quad \varepsilon(\beta^h) = u_h \quad ; \quad \pi(\beta^h) = \text{identité.}$$

On vérifie que l'on a :

$$S = \prod_{\{ \beta^h \}_{h \in]k[}} S_h ;$$

Soit X un simplexe segmenté quelconque ; $\rho^h \in \text{Hom}(X, S_h)$; on définit :

$$\begin{aligned} \rho &= \prod_{h \in]k[} \rho^h \\ &= \prod_{\{ \rho^h \}_{h \in]k[}} \rho^h \\ &= \rho^1 \times \dots \times \rho^h \times \dots \times \rho^k, \end{aligned}$$

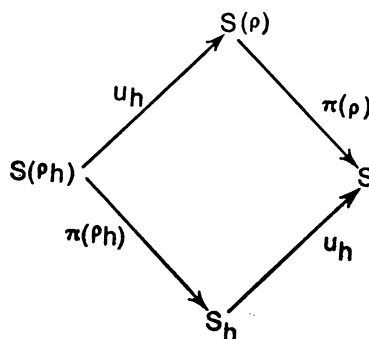
par :

$$S(\rho) = \prod_{h \in]k[} S(\rho^h)$$

$$\forall h : \varepsilon(\rho) \circ u_h = \varepsilon(\rho_h)$$

$$\forall h : \pi(\rho) \circ u_h = u_h \circ \pi(\rho_h), \quad \text{i. e. est commutatif}$$

le diagramme :



4.3. Un exemple. — Tout simplexe segmenté S est produit direct de la famille finie de ses faces. Notons $q(S) = q$; on a :

$$S = \prod_{j \in]q[} S[d(S)j] = \prod_{\{ \gamma_S^j \}_{j \in]q[}} S[d(S)j],$$

où γ_S^j est ainsi défini :

$$S(\gamma_S^j) = d(S)j],$$

$$\varepsilon(\gamma_S^j) = u_j \quad ; \quad \pi(\gamma_S^j) = \text{identité.}$$

4.4. Un produit de morphismes. — Soit $\{X_h\}, \{S_h\}$ deux familles d'objets indexés par $h \in]k]$; $\{\rho_h\}$ une famille de morphismes :

$$\rho_h \in \text{Hom}(X_h, S_h).$$

Nous noterons :

$$\rho = \bigotimes_{h \in]k]} \rho_h = \rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_h \otimes \dots \otimes \rho_k \in \text{Hom} \left(\prod_{h \in]k]} X_h, \prod_{h \in]k]} S_h \right) = \text{Hom}(X, S)$$

$$\rho = \prod_{h \in]k]} \rho_h \circ \gamma^h$$

(où γ^h est la projection de X sur X^h).

5. Générateurs.

Tout simplexe segmenté est un produit direct d'une famille de $S]n]$ (cf. 4.3) : on peut montrer que toute correspondance simpliciale s'exprime par composition et produit (\circ et \times ou, par abréviation \otimes) des γ_s^j , des liaisons et des imbrications binaires (cf. 2.3).

5.1. Réduction aux morphismes de but $S]n]$. — Pour tout morphisme μ on a :

$$\mu = \prod_{j \in]q(B(\mu))]} \gamma_{B(\mu)}^j \circ \mu_j,$$

i. e. μ est un produit de morphismes ayant pour but un $S]n]$.

5.2. Réduction aux projections, liaisons et imbrications multiples. — Soit μ un morphisme de source A et de but $S]n]$; on va définir deux simplexes segmentés B et C et trois morphismes γ (produit de γ_A^j), (imbrication multiple) et λ (liaison), en sorte que :

$$\begin{aligned} \mu &= \lambda \circ \rho \circ \gamma \\ A &\xrightarrow{\gamma} B \xrightarrow{\rho} C \xrightarrow{\lambda} S]n]. \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} B : \quad n(B) &= n(S(\mu)) \\ q(B) &= q(S(\mu)) \\ d(B) &= d(S(\mu)) \end{aligned}$$

d'où le simplexe segmenté B .

$$C = S]n(S(\mu))|$$

$$\gamma = \prod_{\{Y_B^j\}_{j \in]q(B)}} \gamma_A^{e(\mu)j}$$

$$\begin{aligned} \rho : \quad & S(\rho) = S(\mu) \\ & \pi(\rho) = \text{identité de }]n(S(\mu))| \\ & e(\rho) = \text{identité de }]q(S(\mu))| =]q(B)| \\ \lambda : \quad & S(\lambda) = S]n(S(\mu))| \\ & \pi(\lambda) = \pi(\mu) \end{aligned}$$

5.3. Réduction aux imbrications binaires. — Soit ρ une imbrication multiple :

$$A(\rho) = A \times S]n] \quad ; \quad q(A) = q$$

On définit :

ρ_q : imbrication de source A,
 ρ_2 : imbrication binaire,

en sorte que :

$$\rho = \rho_2 \circ (\rho_q \otimes \delta)$$

$$A(\rho) \xrightarrow{\rho_q \otimes \delta} S]n(A)] \times S]n] \xrightarrow{\rho_2} S]n]$$

(où δ est l'application identique de $S]n]$).

ρ_q est défini par la condition suivante : il existe une application croissante V :

$$]n(A)] \xrightarrow{V}]n(A) + n],$$

telle que :

$$f(S(\rho)) \circ V = f(S(\rho_q));$$

et ρ_2 est défini par la condition :

$$\varepsilon(\rho_q \otimes \delta) \circ \varepsilon(\rho_2) = \varepsilon(\rho)$$

NOTE. — On peut éventuellement supprimer la condition :

$$r(A(\mu)) \circ \varepsilon(\mu) = r(S(\mu))$$

posé au n° 2.2. Intuitivement, cette condition correspond à l'interdiction de croiser les dents d'un même peigne, restriction naturelle en linguistique seulement si est fixe l'ordre des constituants d'un même mot; or ce n'est pas le cas pour les particules séparables des verbes allemands. Topologi-

quement, on n'impose plus à ε que d'être un étalement pour la seule topologie faciale.

Aux morphismes générateurs donnés ci-dessus, il faut ajouter les permutations des $S]n]$ (à ne pas confondre avec celles des $S(n)$ définies en 2.3.4) qu'on définit ainsi : soit σ une permutation de $]n]$, on note $\widehat{\sigma}$ le morphisme de source, but et graphe $S]n]$ et tel que $\pi(\widehat{\sigma}) = \text{identité}$; $\varepsilon(\widehat{\sigma}) = \sigma^{-1}$.

§ III. UNE GÉNÉRALISATION DES MONOÏDES

1. Échelle.

1.1. **Définition.** — Une échelle est un couple (SCA, \mathcal{Y}) formé :

d'une sous-catégorie, SCA, de la catégorie des ensembles;

d'un foncteur surjectif, \mathcal{Y} , de SEG sur SCA, satisfaisant à la condition suivante : si dans SEG on a le produit direct :

$$S = \prod_{\{\gamma^i\}_{i \in I}} S_i \quad (\text{où } \gamma^i \in \text{Hom}(S, S_i))$$

alors, on a :

$$\mathcal{Y}S = \prod_{\{\mathcal{Y}\gamma^i\}_{i \in I}} \mathcal{Y}S_i$$

le produit $\mathcal{Y}S$ étant le produit ensembliste ordinaire (bref, le foncteur représente le produit direct de SEG suivant le produit ensembliste).

1.1.0. *Exemple.* — Soit ξ une permutation de $]n]$ (cf. § II, 2.3.4); $\mathcal{Y}\xi$ opère sur le produit $\mathcal{Y}S(n)$ de n exemplaires de $S(1)$, en permutant les « axes » :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{Y}S(n), \forall i \in]n] : \\ \mathcal{Y}\gamma_S^i x = \mathcal{Y}\gamma_S^{\xi i} \circ \mathcal{Y}\xi x \end{aligned}$$

1.1.1. *Nota.* — Dans la catégorie des ensembles, il faut distinguer entre :

$$E = \prod_{\{g^i\}_{i \in I}} E_i,$$

et

$$E = \prod_{i \in I} E_i;$$

la première égalité signifie seulement ceci : l'application :

$$x \rightarrow \{(i, g^i x)\}_{i \in I}$$

$$E \rightarrow \prod_{i \in I} E_i$$

est une correspondance biunivoque; la seconde signifie proprement que E est l'ensemble des graphes d'applications de I dans le système des E_i , i. e. :

$$E = \{ \{(i, x_i)\}_{i \in I} \mid x_i \in E_i \}.$$

On n'a donc pas identité entre :

$$\mathcal{Y} \times = \mathcal{Y} \times_{h \in]k]} S_h$$

et,

$$\pi \mathcal{Y} = \prod_{h \in]k]} \mathcal{Y} S_h,$$

$\mathcal{Y} \times$ n'étant qu'un produit des $\mathcal{Y} S_h$ par certains morphismes; mais, certes, entre $\mathcal{Y} \times$ et $\pi \mathcal{Y}$, il y a une correspondance biunivoque canonique, que l'on peut écrire :

$$\mathcal{Y} \times \xrightarrow{h \in]k]} \prod \mathcal{Y} \beta^h \pi \mathcal{Y}$$

(où β^h est défini comme au § II, 4.2; et $\prod \mathcal{Y} \beta^h$ est le produit ensembliste ordinaire d'applications). Soit $\{x_h\}$ une suite d'éléments des $\mathcal{Y} S_h$; on notera :

$$x = \times_{h \in]k]} x_h$$

l'unique élément de $\mathcal{Y} \times$ tel que :

$$\forall h \in]k] : \mathcal{Y} \beta^h x = x_h$$

Considérons les produits des morphismes \times et \otimes .

Soit ρ_h , $h \in]k]$; une famille de morphismes de même source A ; soit $x \in \mathcal{Y} A$; si on note :

$$\mathcal{Y} \rho_h x = y_h$$

$$\times_{h \in]k]} \rho_h = \rho,$$

on a :

$$\mathcal{Y} \rho x = \times_{h \in]k]} y_h.$$

De même, soit $\rho_h, h \in]k]$, une suite de morphismes de sources quelconques $A(\rho_h)$; soit des $x_h \in A(\rho_h)$; si on note :

$$\mathcal{Y}_{\rho_h} x_h = y_h$$

$$\bigotimes_{h \in]k]} \rho_h = \rho,$$

on a :

$$\mathcal{Y}_{\rho} \times_{h \in]k]} x_h = \times_{h \in]k]} y_h.$$

1.2. Morphismes d'échelles. — Un morphisme m (ou tout autre minuscule latine non déjà spécialisée, affectée au besoin d'indices) de l'échelle (SCA_1, \mathcal{Y}_1) vers l'échelle (SCA_2, \mathcal{Y}_2) est une transformation naturelle, ou morphisme de foncteur de \mathcal{Y}_1 vers \mathcal{Y}_2 , i. e. un système d'applications ensemblistes $m(S)$:

$$\mathcal{Y}_{S_1} \xrightarrow{m(S)} \mathcal{Y}_{S_2}$$

tel que pour tout morphisme ρ de SEG de source A but B, soit commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_1 A & \xrightarrow{\mathcal{Y}_1 \rho} & \mathcal{Y}_1 B \\ \downarrow m(A) & & \downarrow m(B) \\ \mathcal{Y}_2 A & \xrightarrow{\mathcal{Y}_2 \rho} & \mathcal{Y}_2 B \end{array}$$

1.2.1. *Un morphisme d'échelles* est complètement déterminé par la connaissance, $\forall n \in \mathbb{N}$, des $m(S[n])$, on a (cf. § II, 4.3) :

$$m(S) = \prod_{\{ \mathcal{Y}_2 \gamma_S^j \}_{j \in]q(S)]}}$$

Une échelle (SCA, \mathcal{Y}) est déterminée à un isomorphisme m d'échelle près par la connaissance, $\forall n \in \mathbb{N}$, des $\mathcal{Y}S[n]$ ainsi que celle des $\mathcal{Y}\rho, \mathcal{Y}\lambda$ (où ρ (resp. λ) est une imbrication binaire (resp. liaison) quelconque); on note :

$$\mathcal{Y}'S = \prod_{j \in]q(S)]} \mathcal{Y}S[d(S)j],$$

$m(s)$ est la correspondance biunivoque canonique définie ci-dessus entre $\mathcal{Y}S$ et $\mathcal{Y}'S$; et la catégorie (SCA', \mathcal{Y}') isomorphe à (SCA, \mathcal{Y}) est complètement définie avec ses morphismes par la condition que les $m(S)$ définissent un morphisme d'échelle (On a immédiatement les imbrications binaires et les liaisons, $\mathcal{Y}'\rho, \mathcal{Y}'\lambda$, car les $\mathcal{Y}\rho, \mathcal{Y}\lambda$ sont donnés; on en déduit, par composition, les autres morphismes (cf. § II, 5)).

1.2.2. *Sous-échelle.* — Si, quel que soit le simplexe segmenté S , $m(S)$ est une injection (e. g. une inclusion), on dit que le but (SCA_2, \mathcal{Y}_2) de m est une sous-échelle de la source (SCA_1, \mathcal{Y}_1) . Soit

$$\Gamma = \{ \Gamma(S) \}_{S \in \text{SEG}} ; \Gamma(S) \in \mathcal{Y}S$$

une famille de parties des objets d'une échelle (SCA, \mathcal{Y}) . Il existe une plus petite sous-échelle $(SCA(\Gamma), \mathcal{Y}(\Gamma))$ de (SCA, \mathcal{Y}) telle que :

$$\forall S \in \text{SEG} \quad , \quad \Gamma(S) \subset \mathcal{Y}(\Gamma) \subset \mathcal{Y}S.$$

Cette échelle est complètement déterminée par la donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, des

$$\Gamma'(S]n]) = \bigcup_{\substack{S \in \text{SEG} \\ d \quad]j=n}} \gamma'_S \Gamma(S)$$

Posons, $\forall S \in \text{SEG}$,

$$\Gamma'(S) = \prod_{\{ \gamma'_S \}_{j \in]q(S)}}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \Gamma''(S]n]) &= \Gamma'(S]n]) \\ \Gamma''(S) &= \emptyset \text{ si } \mathbf{A}n : S \neq S]n]. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} (SCA(\Gamma), \mathcal{Y}(\Gamma)) &= (SCA(\Gamma'), \mathcal{Y}(\Gamma')) \\ &= (SCA(\Gamma''), \mathcal{Y}(\Gamma'')) \end{aligned}$$

et, quel que soit $B \in \text{SEG}$

$$\mathcal{Y}(\Gamma)B = \cup \mathcal{Y}_{\rho_A^B} \Gamma'(A)$$

où ρ_A^B parcourt l'ensemble des morphismes de SEG de but B et de source (notée A), quelconque.

Soit :

$$\rho_A^B = \rho ; \quad \rho_{A'}^B = \rho' ; \quad x \in \mathcal{Y}A ; \quad x' \in \mathcal{Y}A'.$$

Supposons que :

$$S(\rho) = S(\rho') = S ; \quad \pi(\rho) = \pi(\rho')$$

et :

$$\forall j \in]q(S) \quad : \quad \gamma_A^{e(\rho)j} x = \gamma_{A'}^{e(\rho')j} x'.$$

Alors :

$$\mathcal{Y}_{\rho_A^B} x = \mathcal{Y}_{\rho_{A'}^B} x'.$$

1.2.3. *Échelle quotient.* — Si, de même, $\forall S \in \text{SEG}$, $m(S)$ est une surjection, on dit que le but de m est un quotient de la source.

1.2.3.1. Soit une échelle (SCA, \mathcal{Y}) et une famille de relations d'équivalences sur les ensembles $\mathcal{Y}S]n]$, relations que nous noterons par les surjections sur les quotients :

$$\mathcal{Y}S]n] \xrightarrow{m(n)} \mathcal{Y}_q(n) ;$$

pour qu'il existe une échelle quotient (SCA_q, \mathcal{Y}_q) d'objets les

$$\mathcal{Y}_q S = \prod_{j \in]q(S)]} \mathcal{Y}_q(d(S)j)$$

avec, pour morphismes d'échelle :

$$m(S) = \prod_{j \in]q(S)]} m(d(S)j),$$

il faut et il suffit que les $m(n)$ soient compatibles avec les liaisons et les imbrications binaires.

1.2.3.2. Quels que soient les $m(n)$, on peut trouver un système unique de relations d'équivalences, $m_s(n)$, satisfaisant aux conditions suivantes :

1° $\forall n$, $m_s(n)$ est une relation d'équivalence plus fine (pas toujours strictement) que $m(n)$.

2° Les $m_s(S)$ (définis comme 1.2.3.1) sont un morphisme de (SCA, \mathcal{Y}) sur une échelle quotient (SCA_s, \mathcal{Y}_s) .

3° Si un morphisme d'échelle m' de (SCA, \mathcal{Y}) vers une échelle (SCA', \mathcal{Y}') quelconque est tel que, $\forall n$, $m'(n) = m'(S]n]$ définit une équivalence plus fine que $m(n)$, m se factorise, de manière unique au travers de m_s :

$$m' = m'_s \circ m_s$$

où m'_s est un morphisme de (SCA_s, \mathcal{Y}_s) vers (SCA', \mathcal{Y}') .

On peut dire que m_s est une relation d'équivalence saturée de m et que (SCA_s, \mathcal{Y}_s) est le quotient de (SCA, \mathcal{Y}) par la relation d'équivalence saturée de m .

2. Échelles et monoïdes.

2.1. Échelle d'un monoïde. — Soit G un monoïde avec élément neutre bilatère \emptyset ; on construit une catégorie $SCA(G)$ et un foncteur $\mathcal{Y}(G)$ de SEG sur $SCA(G)$ de telle sorte que le couple $(SCA(G), \mathcal{Y}(G))$ soit une échelle, appelée échelle de G . Les objets sont les ensembles :

$$\mathcal{Y}(G)S = G^s;$$

un élément $x \in \mathcal{Y}(G)S$ sera noté comme une fonction de triples :

$$x = \{ x(i, j, k) \mid (i, j, k) \in S \};$$

éventuellement on écrira $x(i, j, k)$ la valeur de la fonction x pour l'unique triple $(i, j, k) \in S$ dont le premier entier soit i . L'élément x est une famille, indexée par $j \in]q(S)]$ de séquences (ou mots non connexes, cf. § I, 1.1), le $j^{\text{ème}}$ mot ayant $d(S)j$ composantes dont la $k^{\text{ème}}$ est :

$$x(i, j, k) \in G.$$

Les morphismes, notés $\mathcal{Y}(G)/\rho$, sont des applications ensemblistes ainsi définies : soit $x \in \mathcal{Y}(G) A(\rho)$; posons : $y = \mathcal{Y}(G)\rho^x$; on a :

$$y(i'', j'', k'') = \prod_{\substack{i' \in]n(S(\rho))]] \\ \pi(\rho)i' = i''}} x(\varepsilon(\rho)i', j', k');$$

le produit π désignant ici le produit de juxtaposition au sens du monoïde G , de la suite des $x(\varepsilon(\rho)i', j', k)$, tels que $\pi(\rho)i' = i''$, disposés de gauche à droite dans l'ordre des i' croissants (\emptyset étant pris éventuellement pour produit de la famille vide).

Soit φ un second morphisme tel que $A(\varphi) = B(\rho)$ notons $\mathcal{Y}(\varphi)y = z$; on aura l'expression de z en fonction de x_x en substituant à $y(i'', j'', k')$ (chaque fois qu'il intervient dans l'expression formelle d'une composante d'un mot de z) le produit de composantes $x(i, j, k)$ des mots de x , produit auquel est égal $y(i'', j'', k')$.

On interprète aisément d'après 1.1.1 (*in fine*) les produits \times et \otimes de morphismes.

On vérifie que l'on a bien une échelle en s'assurant que $\mathcal{Y}(G)$ est un foncteur (représente la composition des morphismes) qui commute avec le produit.

Pour un monoïde G convenable, e. g. si G et le monoïde libre construit sur un alphabet de deux signes, le foncteur $\mathcal{Y}(G)$ est bijectif au sens suivant : si $\rho \neq \rho', \mathcal{Y}(G)\rho \neq \mathcal{Y}(G)\rho'$ en tant qu'application ensembliste. Cette remarque permet de démontrer que toute relation entre les $\mathcal{Y}(G)\rho$ est vraie des ρ , i. e. si :

$$\mathcal{Y}(G)\rho_1 \circ \mathcal{Y}(G)\rho_2 = \mathcal{Y}(G)\rho,$$

ou :

$$\mathcal{Y}(G)\rho_1 \times \mathcal{Y}(G)\rho_2 = \mathcal{Y}(G)\rho,$$

alors :

$$\rho_1 \circ \rho_2 = \rho \quad \text{ou} \quad \rho_1 \times \rho_2 = \rho.$$

Certains morphismes de la catégorie $SCA(G)$ redonnent les applications étudiées au § I. Si ρ est une imbrication binaire et que G est le monoïde libre, ou lexique, L (cf. § I) on retrouve la notion d'imbrication (ou de liaison) définie en (I, 1.2). Soit ρ_1 une imbrication (au sens du § I) :

$$L^n \times L^p \xrightarrow{\rho_1} L^{n+p},$$

la permutation $\varepsilon(\rho_I)$ de $]n + p]$ permet de définir une imbrication binaire (au sens de II) que nous noterons ρ_{II} :

$$\begin{aligned} A(\rho_{II}) &= S]n] \times S]p] \\ B(\rho_{II}) &= S]n + p] \\ \pi(\rho_{II}) &= \text{identité de }]n + p] \\ \varepsilon(\rho_{II}) &= \text{permutation } \varepsilon(\rho_I) \text{ de }]n + p]. \end{aligned}$$

Quel que soit l'entier y , il y a isomorphisme canonique :

$$\mathcal{Y}(L)S]y] \approx L^y;$$

à l'application :

$$L^n \times L^p \xrightarrow{\rho_I} L^{n+p}$$

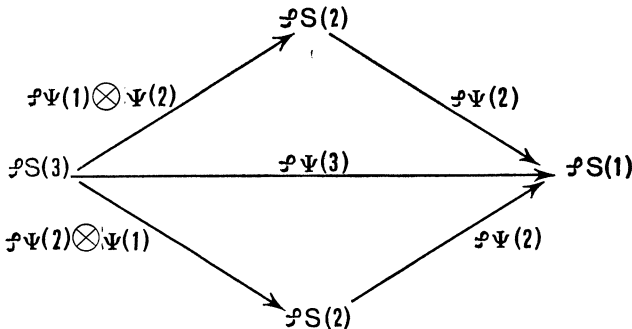
correspond l'application :

$$\mathcal{Y}(L)S]n] \times S]p] \approx \mathcal{Y}(L)S]n] \times \mathcal{Y}(L)S]p] \xrightarrow{\mathcal{Y}(L)\rho_{II}} \mathcal{Y}(L)S]n + p]$$

On ferait de même pour une liaison λ , donc pour une concaténation : par exemple la concaténation insertion contextuelle σ_i^h , définie au § I, 1.4.2 s'identifie à la concaténation $\mathcal{Y}\sigma_{II}^h$ (cf. § II, 2.3.2).

2.2. Propriétés algébriques d'une échelle.

2.2.1. *Le monoïde $\mathcal{Y}S(1)$.* — Soit (SCA, \mathcal{Y}) une échelle quelconque. L'application $\mathcal{Y}\psi(2)$ (cf. § II, 2.3.3) de $\mathcal{Y}C(2)$ (canoniquement isomorphe à $\mathcal{Y}S(1)$), dans $\mathcal{Y}S(1)$, définit sur $\mathcal{Y}S(1)$ une structure de monoïde. Pour démontrer l'associativité de la loi, on considère le diagramme suivant (où $\mathcal{Y}\psi(1)$ est l'application identité de $\mathcal{Y}S(1)$:



dont la commutativité se démontre facilement (cf. 2.1) dans le cas où $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(G)$: l'associativité en résulte.

2.2.2. *Éléments neutres.* — Si κ est un morphisme vide (cf. 3.3) de but S , de source quelconque, $\mathcal{Y}\kappa$ est une application constante, dont la valeur, l'élément neutre de $\mathcal{Y}S$, ne dépend pas de la source : en effet $\mathcal{Y}S(0)$ n'a qu'un élément (neutre !) car $\mathcal{Y}S(0)$ est produit de la famille vide d'ensembles. On peut encore, sans recours à l'objet $S(0)$, démontrer que si κ est le morphisme vide de source $S(2)$, de but $S(1)$, les éléments de l'image $\mathcal{Y}\kappa$ sont neutres à droite et à gauche pour la loi du monoïde $\mathcal{Y}S(1)$, d'où, par l'unicité de l'élément neutre, $\mathcal{Y}\kappa$ est constante. Pour démontrer cela, on considère l'égalité :

$$\gamma_{S(a)}^a = \psi(2) \circ (\psi(1) \otimes \kappa(1)),$$

où $\kappa(1)$ est le morphisme vide de source et but $S(1)$ d'où résulte que le produit d'un couple d'éléments de $\mathcal{Y}S(1)$ dont le premier est dans l'image de $\kappa(1)$ le second quelconque est égal à celui-ci; d'où la neutralité à gauche d'un élément de l'image de $\kappa(1)$; on a de même la neutralité à droite.

2.2.3. *Soit* $SCA(\mathcal{Y}S(1))$, $\mathcal{Y}(\mathcal{Y}S(1))$ l'échelle, notée en abrégé (SCA_1, \mathcal{Y}_1) du monoïde $\mathcal{Y}S(1)$: on construit canoniquement un morphisme m de $(\mathcal{Y}CA_1, \mathcal{Y}_1)$ vers $(\mathcal{Y}CA, \mathcal{Y})$. Les $m(S)$, qui ne sont en général ni injectifs, ni surjectifs, sont ainsi définis. Notons $m'(S)$ l'isomorphisme ensembliste canonique :

$$\mathcal{Y}_1 S \xrightarrow{m'(S)} \mathcal{Y}S(n(S));$$

notons $\rho(S)$ la correspondance simpliciale suivante :

$$\begin{aligned} S(\rho(S)) &= S(n) = A(\rho(S)) \\ B(\rho(S)) &= S \\ \varepsilon(S) &= \pi(S) = \text{identité de }]n(S)]. \end{aligned}$$

On pose :

$$m(S) = \mathcal{Y}\rho(S) \circ m'(S).$$

Si l'échelle initiale (SCA, \mathcal{Y}) est l'échelle d'un monoïde, canoniquement isomorphe à $\mathcal{Y}S(1)$, le morphisme m est alors un isomorphisme d'échelle.

3. Échelle libre.

3.1. **Alphabet gradué.** — Un tel alphabet Λ est une suite d'ensembles :

$$\Lambda = \{ \Lambda_n \}_{n \in \mathbb{N}^*},$$

indexée par un entier strictement positif. Si S est un objet de (SEG), on notera :

$$\Lambda_S = \prod_{j \in q(S)[} \Lambda d(S)j \quad (\text{produit ensembliste});$$

en particulier, on a l'isomorphisme canonique :

$$\Lambda_n \approx \mathbf{V}_{\mathcal{S}[n]}$$

Un élément quelconque de Λ_n ou de $\Lambda_{\mathcal{S}}$ sera noté :

$$l_n \in \Lambda_n$$

$$l_{\mathcal{S}} = \{ l'_{d(\mathcal{S})j} \}_{j \in |d(\mathcal{S})|} = \{ l' \} \in \Lambda_{\mathcal{S}}$$

Soit \mathcal{S} , produit au sens de SEG des \mathcal{S}_h ; supposons donné un $l_{\mathcal{S}_h}$ dans chaque $\Lambda_{\mathcal{S}_h}$: $l_{\mathcal{S}_h}$ est une suite de $q(\mathcal{S}_h)$ éléments des divers ensembles $\Lambda_{\mathcal{S}}$; en juxtaposant ces suites, dans l'ordre des h , on obtient une suite notée :

$$l_{\mathcal{S}} = \times_{h \in |k|} l_{\mathcal{S}_h} \in \Lambda_{\mathcal{S}}$$

Une application Φ d'un alphabet gradué dans une échelle (SCA, \mathcal{Y}) est une suite d'applications ensemblistes :

$$\Phi = \{ \Phi_n \}_{n \in \mathbf{N}^*}$$

$$\Lambda_n \xrightarrow{\Phi_n} \mathcal{Y}\mathcal{S}[n]$$

Si \mathcal{Y} est un simplexe segmenté, on pose :

$$\Phi_{\mathcal{S}} = \prod_{\{ l'_{\mathcal{S}} \}_{j \in |d(\mathcal{S})|}} \Phi d(\mathcal{S})j$$

$$\Lambda_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{S}}} \mathcal{Y}\mathcal{S}$$

3.2. Un problème universel. — Étant donné un alphabet gradué Λ , construire une échelle (SCA(Λ), $\mathcal{Y}(\Lambda)$) (en abrégé ($\mathcal{Y}\text{CA}$, \mathcal{Y})) et une application $\Phi(\Lambda)$ (en abrégé Φ) de Λ dans cette échelle telle que toute application Φ' de Λ dans une échelle quelconque (SCA', \mathcal{Y}') se factorise de manière unique en le composé de Φ et d'un morphisme m de (SCA, \mathcal{Y}) vers (SCA', \mathcal{Y}') :

$$\forall n : \Phi'_n = m(\mathcal{S}[n]) \circ \Phi_n ;$$

$$\forall \mathcal{S} : \Phi'_{\mathcal{S}} = m(\mathcal{S}) \circ \Phi_{\mathcal{S}}$$

A ce problème universel, nous construisons une solution, appelée l'échelle libre sur l'alphabet gradué Λ (Le rapport avec les structures algébriques libres est clair; de plus, si tous les Λ_n sont vides sauf Λ_1 , l'échelle libre sur Λ est canoniquement isomorphe à l'échelle du monoïde libre d'alphabet Λ_1).

3.3. **Construction de l'échelle libre.** — Supposons que (SCA, \mathcal{Y}), solution du problème universel, existe, posons :

$$\Gamma(S) = \emptyset_s \Lambda_s \subset \mathcal{Y}S;$$

on voit que SCA est égal à sa sous-échelle engendrée par le système de parties Γ (cf. 1.2.2). On aura donc pour tout objet B de (SEG) :

$$\mathcal{Y}B = \cup \mathcal{Y}\rho_A^B \circ \Phi_A \Lambda_A,$$

où ρ^B parcourt l'ensemble des morphismes de (SEG) de but B^A (la source A étant notée en indice). Ceci suggère la construction suivante :

3.3.1. *Objets et applications.* — $\mathcal{Y}B$ est le quotient de l'ensemble de couples :

$$\{(\rho^B ; l_A) \mid B(\rho^B) = B ; \quad A(\rho^B) = A ; l_A \in \Lambda_A\}$$

par la relation :

$$(\rho^B ; l_A) \approx (\rho'^B ; l'^A),$$

si :

$$1^\circ \quad S(\rho^B) = S(\rho'^B) = S ; \quad \pi(\rho^B) = \pi(\rho'^B).$$

$$2^\circ \quad \forall j \in]q(S)] ; \quad l^{e(\rho^B)j} = l'^{e(\rho'^B)j}.$$

On notera $((\rho ; 1))$ la classe du couple $(\rho ; 1)$.

Φ est défini par :

$$\Phi_s l_s = ((\delta_s^s ; l_s)),$$

(où δ_s^s est le morphisme identité de S), d'où en particulier Φ_n pour $S = S[n]$.

Dans la suite, il sera souvent commode de noter simplement $((l_s))$ pour $((\delta_s^s ; l_s))$.

$\mathcal{Y}\rho$ est défini par :

$$\mathcal{Y}\rho((\rho' ; l)) = ((\rho \circ \rho' ; l));$$

ce qui permet de noter encore $\mathcal{Y}\rho((l))$ ou $\mathcal{Y}\rho l$ l'élément $((\rho, l))$.

Donnons avec un exemple une interprétation intuitive des $((\rho ; l))$.

Un élément l de Λ_n sera un signe à n insertions représenté comme un peigne à n dents avec l_n inscrit au-dessus. Un élément de $\mathcal{Y}B$ sera un système de $q(B)$ mots (non connexes), le $j^{\text{ème}}$ mot ayant $d(B)j$ composantes ; les divers mots du système seront séparés par des virgules et les composantes d'un même mot par des points de suspension.

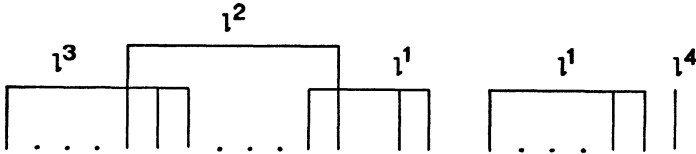
Reprenons les notations du § II, 3.4.1. Soit de plus :

$$l^1 \in \Lambda_3 ; \quad l^2 \in \Lambda_2 ; \quad l^3 \in \Lambda_3 ; \quad l^4 \in \Lambda_4;$$

des symboles de l'alphabet gradué Λ ; et posons :

$$I_{s_1} = \{ I^1, I^2, I^3, I^4 \}$$

$((\mu_{1,2}, I_{s_1}))$ sera une suite de deux mots, le premier à quatre, le second à deux composantes formées à partir des quatre signes I^i à insertion multiple, suivant le schéma $\mu_{1,2}$:



Sur cette interprétation, la relation d'équivalence entre couples (ρ, I) est claire :

$$(\rho, I) \sim (\rho', I')$$

exprime que dans les assemblages $((\rho, I))$ et $((\rho', I'))$ les mêmes signes de Λ apparaissent aux mêmes places (i. e. leurs diverses insertions se font dans les mêmes composantes aux mêmes rangs).

La composition des morphismes s'interprète, *mutatis mutandis*, comme en 2.1. Soit φ, ρ deux morphismes :

$$A(\rho) = A \quad ; \quad B(\rho) = B = A(\varphi) \quad ; \quad B(\varphi) = C;$$

$$I_A \in \Lambda_A \quad ; \quad I_B \in \Lambda_B;$$

on dira que l'élément $((\rho \circ \varphi; I_A))$ de $\mathcal{Y}C$ est obtenu à partir de $((\varphi; I_B))$ par substitution de $((\rho; I_A))$ à I_B .

Si tous les Λ_n sont vides sauf Λ_1 , l'échelle libre sur l'alphabet gradué Λ est canoniquement isomorphe à l'échelle du monoïde libre L_1 d'alphabet Λ_1 . On identifie Λ_1 avec une partie de $\mathcal{Y}(\Lambda)S(1)$ et L_1 avec $\mathcal{Y}(L_1)S(1)$; tous les Λ_s sont vides sauf les $\Lambda_{S(n)}$; $S(\Lambda)S(1)$ n'est autre que l'ensemble des (cf. notations § II, 2.3.3) :

$$((\mathcal{Y}(n); I)) \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*$$

et :

$$I = \{ I^1, \dots, I^n \} \in (\Lambda_1)^n \approx \Lambda_{S(n)};$$

et $((\mathcal{Y}(n); I))$ est identifié avec le mot :

$$I^1 \dots I^n \in L_1 \approx \mathcal{Y}(L_1)S(1).$$

De même, on identifie :

$$((\rho; I)) \quad \text{avec } \mathcal{Y}(L_1)\rho \circ I$$

Du point de vue du problème universel étudié, on peut dire que Λ_1 s'identifiant avec une partie de $\mathcal{Y}(L_1)S(1)$, on a une application Φ de l'alphabet gradué Λ dans l'échelle du monoïde L_1 , d'où un morphisme d'échelle de l'échelle libre de Λ vers l'échelle du monoïde L_1 ; et ce morphisme est un isomorphisme.

3.3.2. *Vérifications.* — Il est clair que les $\mathcal{Y}_B, \mathcal{Y}_\rho$ sont les objets et les morphismes d'une catégorie SCA et que \mathcal{Y} est un morphisme de SEG vers SCA. Reste à vérifier que (SCA, \mathcal{Y}) est une échelle (i. e. que \mathcal{Y} commute avec le produit) et que le problème universel est résolu.

Soit :

$$B = \prod_{\{\gamma^h\}_{h \in |K|}} B_h ;$$

il faut vérifier que :

$$\mathcal{Y}B = \prod_{\{\mathcal{Y}\gamma^h\}} \mathcal{Y}B_h$$

(produit ensembliste) i. e. que l'application $\pi \mathcal{Y}B_h$ est injective et surjective.

Notons que, parce que B est un produit direct (au sens du SEG), un morphisme ρ de but B peut s'écrire :

$$\rho = \prod_{\{\gamma^h\}} \rho^h, \quad \rho^h = \gamma^h \circ \rho.$$

Pour démontrer l'injectivité, considérons :

$$((\rho; l)) ; ((\rho'; l')) \in \mathcal{Y}B.$$

On vérifie que l'on a l'équivalence :

$$\begin{aligned} ((\rho; l)) = ((\rho'; l')) &\Leftrightarrow \dots \\ \forall h : ((\gamma^h \circ \rho; l)) &= ((\gamma^h \circ \rho'; l')) \end{aligned}$$

(voir les conditions 1° et 2° du 3.3.1).

Pour démontrer la surjectivité, considérons un système d'éléments des $\mathcal{Y}B_h$:

$$((\rho^h; l_{A_h})), \quad \text{où} \quad A_h = A(\rho^h); \quad B_h = B(\rho^h);$$

il faut construire $((\rho; l_\Lambda)) \in \mathcal{Y}$ tel que :

$$\forall h : ((\gamma^h \circ \rho; l_\Lambda)) = ((\rho^h; l_{A_h}));$$

il suffit pour cela de poser :

$$\rho = \bigotimes_h \gamma^h; \quad l_\Lambda = \prod_h l_{A_h} \quad (\text{où } A = A(\rho) = \prod A_h)$$

Quant au problème universel, le morphisme de foncteur m ne peut être que le système des $m(B)$:

$$m(B)((\rho ; l)) = \mathcal{Y}'\rho \circ \Phi'_{\Lambda(\rho)} l$$

et c'est bien là un système convenable.

3.4. Échelle donnée par générateurs et relations. — Par analogie avec les groupes, monoïdes, etc., on peut se donner une échelle comme le quotient d'une échelle libre (donnée) par la relation d'équivalence m , saturée d'une relation d'équivalence m (donnée) (cf. 1.2.3.2). En particulier, en reprenant les notations de 1.2.2, $\mathcal{Y}(\Gamma)$ est canoniquement isomorphe à un quotient, par des relations convenables, de l'échelle libre d'alphabet gradué Λ , où

$$\Lambda_n = \Gamma(S[n]).$$

Ainsi, toute échelle peut être donnée par générateurs et relations.

4. Échelle et grammaire générative.

Le formalisme des échelles libres permet l'écriture des grammaires génératives analogues à celles définies par N. Chomsky dans le langage des monoïdes libres dont les échelles sont une généralisation.

La puissance des nouvelles classes de grammaire ainsi obtenues n'a été que sommairement étudiée; quant à l'application aux langues naturelles, nous en donnerons des exemples au § IV.

Voici un modèle de *grammaire de constituants non connexes*, dérivé du modèle libre de context (context-free).

Une telle grammaire est définie par la donnée :

1° d'un alphabet gradué $\Lambda = \{ \Lambda_n \}$.

2° d'une partition de Λ_1 :

$$\Lambda_1 = \Lambda_1^T \cup \Lambda_1^N,$$

en ensembles des symboles terminaux et non terminaux, les symboles des $\Lambda_n (n > 1)$ étant, eux, tous non terminaux :

$$\Lambda_n = \Lambda_n^N.$$

3° d'une partie de Λ_1^N appelée ensemble des symboles initiaux (éventuellement, il n'y en a qu'un seul),

4° d'un ensemble de règles :

$$l_n \rightarrow x$$

où $l_n \in \Lambda_n^N$, ($n \geq 1$) et $x \in \mathcal{Y}(\Lambda)S[n] = \mathcal{Y}S[n]$, autrement dit (avec les conventions de notation données en 3.3.1) :

$$x = ((\rho, l)) = \mathcal{Y}\rho \circ \Phi_{A(\rho)}l = \mathcal{Y}\rho l,$$

avec

$$B(\rho) = S[n] \quad ; \quad l \in \Lambda_{A(\rho)}.$$

Indiquons maintenant comment est défini l'ensemble des phrases correctes, correspondant à une telle grammaire.

On dit que :

$$x \rightarrow y$$

est une *dérivation directe*, s'il existe ρ , φ^h , l^h , l'^h tels que

$$x = ((\rho ; \times_h l^h)) = \mathcal{Y}\rho \times_h l^h$$

$$y = ((\rho \circ \otimes_h \varphi^h ; \times_h l'^h))$$

$$= \mathcal{Y}(\rho \circ \otimes_h \varphi^h) \times_h l'^h ;$$

avec entre les φ^h , l^h , l'^h les conditions suivantes : quel que soit h , ou bien φ^h est un morphisme neutre et $l^h = l'^h = ((\varphi^h, l'^h))$, ou bien :

$$l^h \rightarrow ((\varphi^h, l'^h))$$

est l'une des règles données en 4°. Intuitivement, y est obtenu à partir de x par substitution à certains des l^h d'éléments $((\varphi^h, l'^h))$ qui en dérivent par une règle, les autres étant laissées identiques.

On dit que :

$$x > - < y$$

est une *dérivation*, s'il existe une suite de dérivations directes :

$$x \rightarrow x_1$$

$$x_1 \rightarrow x_2$$

$$\vdots$$

$$x_n \rightarrow y.$$

On dit que x est une phrase correcte si :

$$1^\circ \quad x \in \mathcal{Y}(\Lambda^T)S(1) \subset \mathcal{Y}(\Lambda)S(1),$$

autrement dit (cf. 3.3.1) si x est un mot (ordinaire, connexe) du monoïde libre d'alphabet Λ_1^T .

2° il existe une dérivation :

$$l > - < x,$$

où l est un symbole initial.

Si une suite de dérivations directes qui fait passer de l à x est connue, x apparaît sous la forme :

$$x = ((\rho; l_A)), \quad A = A(\rho)$$

et :

$$l_A = \times_{h \in]q(A)]} \quad l^h = \{ l^h \}_{h \in]q(A)]}$$

$$l^h \in \Lambda_{d(A)h}$$

comme x appartient au monoïde libre construit sur Λ_1^T , on a :

$$\forall j \in]q(\rho)] : l^{\varepsilon(\rho)j} \in \Lambda_1^T,$$

autrement dit le graphe $S(\rho)$ doit avoir toutes ses faces à un seul sommet, $S(\rho) = S(n)$ et

$$\forall j \in]n] : l^{\varepsilon(\rho)j} \in \Lambda_1^T,$$

d'où, pour x , l'écriture :

$$x = \prod_{j \in]n]} l^{\varepsilon(\rho)j},$$

Le produit π étant le produit de juxtaposition du monoïde libre d'alphabet Λ_1^T .

Les considérations ci-dessus montrent que, si l'on connaît une dérivation $l \rightarrow x$, on peut effectivement « calculer » x , c'est-à-dire l'écrire comme une suite de symboles du covabulaire terminal Λ_1^T , juxtaposés.

5. Échelle ordonnée et grammaire inductive.

Une échelle ordonnée est un couple, (SCA, \mathcal{Y}) d'une sous-catégorie SCA de la catégorie des ensembles ordonnés (non totalement) et d'un foncteur \mathcal{Y} de SEG sur SCA, commutant avec le produit. Autrement dit, les objets, $\mathcal{Y}S$, sont des ensembles partiellement ordonnés;

$$\mathcal{Y} \times S_h$$

est isomorphe canoniquement au produit des $\mathcal{Y}S_h$ et il est muni de l'ordre produit; les morphismes $\mathcal{Y}\rho$ sont des applications croissantes, i. e. :

$$(x < y) \Rightarrow (\mathcal{Y}\rho x < \mathcal{Y}\rho y).$$

A toute échelle ordonnée est sous-jacente une échelle (ensembliste), dont les objets et les morphismes sont les mêmes ensembles et les mêmes applications, mais abstraction faite des structures d'ordre.

Reprenant les notations du § I on va définir l'échelle ordonnée $(SCA(F), \mathcal{Y}(F))$, des états (connexes ou non) d'une langue F (ou partie F d'un monoïde libre L , cf. I, 2.1).

On définit d'abord l'échelle ensembliste sous-jacente. Les objets sont les ensembles $\mathcal{Y}(F)S$ ainsi définis :

$$\mathcal{Y}(F)S = \prod_{j \in]q(S)]} \tilde{L}^{d(S)j},$$

en particulier $\mathcal{Y}(F)S[n]$ s'identifie à \tilde{L}_n . Les $\mathcal{Y}(F)S$ sont quotients des ensembles $\mathcal{Y}(L)S$ objets de l'échelle du monoïde libre L (cf. 2.1) :

$$\mathcal{Y}(L)S = L^S \approx \prod_{j \in]q(S)]} L^{d(S)j},$$

et $\tilde{L}^{d(S)j}$ a été défini (§ I, 2.1) comme un quotient de $L^{d(S)j}$. Notons $m(S)$ l'application de $\mathcal{Y}(L)S$ sur son quotient $\mathcal{Y}(F)S$: on va montrer que les $m(S)$ définissent $SCA(F)$ comme une échelle quotient de $SCA(L)$ (cf. 1.2.3); et, simultanément, construire les morphismes $\mathcal{Y}(F)\rho$. Les imbrications et les liaisons étant compatibles avec les relations d'équivalences qui définissent les états (cf. § I, 2.2) on peut, si ρ est une imbrication (binaire) ou une liaison, déterminer $\mathcal{Y}(F)\rho$ de façon unique pour que soit commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}(L)A & \xrightarrow{\mathcal{Y}(L)\rho} & \mathcal{Y}(L)B \\ \downarrow m(A) & & \downarrow m(B) \\ \mathcal{Y}(F)A & \xrightarrow{\mathcal{Y}(F)\rho} & \mathcal{Y}(F)B \end{array}$$

où $A = A(\rho)$; $B = B(\rho)$. Il en résulte (cf. 1.2.3.1) que les $m(S)$ définissent une échelle quotient et que tout morphisme $\mathcal{Y}(F)\rho$ peut être défini comme nous l'avons fait des imbrications et liaisons.

Passons maintenant à la structure ordonnée. On a vu au § I que les $\tilde{L}_n \approx \mathcal{Y}(F)S | n |$ sont ordonnés, donc aussi les $\mathcal{Y}(F)S$ qui en sont des produits. Les imbrications binaires et liaisons $\mathcal{Y}(F)\rho$ sont des applications croissantes, donc aussi les autres morphismes qui en sont des produits ou des composés (cf. § II, 5). Ceci achève la construction de l'échelle ordonnée $(SCA(F), \mathcal{Y}(F))$ et la vérification de ses propriétés.

Comme en 2.2.3, on peut construire un morphisme de l'échelle (ordonnée) du monoïde $\tilde{L} \approx \mathcal{Y}(F)S(1)$ sur l'échelle $(SCA(F), \mathcal{Y}(F))$; d'après la remarque

faite au § I (voir 2.2, au début, les m_p), ce morphisme est une surjection, en sorte que, de même que \tilde{L}_n est un quotient de \tilde{L}^n , $(SCA(F), \mathcal{Y}(F))$ est un quotient de $(SCA(\tilde{L}), \mathcal{Y}(\tilde{L}))$.

Supposons que F soit finie d'état : \tilde{L} est fini et peut être donné par un $(SCA(F), \mathcal{Y}(F))$, quotient de $(SCA(L), \mathcal{Y}(L))$ peut-elle être donnée par un nombre fini de générateurs et de relations : une question se pose, l'échelle nombre fini de relations (cf. 3.4) : évidemment un nombre fini de générateurs suffit (ceux de \tilde{L}), mais les relations d'équivalence $\tilde{L}^n \rightarrow \tilde{L}_n$, pour tout n , sont-elles des conséquences d'un nombre fini d'équivalences ?

Voici un autre problème : étant donné une échelle (éventuellement ordonnée), (SCA, \mathcal{Y}) , existe-t-il un monoïde libre L et une partie $F \subset L$, telle que (SCA, \mathcal{Y}) soit isomorphe à l'échelle des états $(SCA(F), \mathcal{Y}(F))$ de la langue F ?

Le problème suivant : « étant donné un monoïde G, déterminer s'il existe L et F tels que G soit isomorphe à L », est assez simple :

Il faut que l'on puisse trouver une partie $\tilde{F} \subset G$, dite ensemble des états de phrase, relativement à laquelle les divers éléments de G soient distinguables au sens suivant :

$$\forall g, g' \in h \quad g \neq g'$$

$$\exists x, y \in h : ((xgy \in \tilde{F}) \wedge (xg'y \notin \tilde{F})) \vee ((xgy \notin \tilde{F}) \wedge (xg'y \in \tilde{F}))$$

(intuitivement inséré dans le contexte $x \dots y$, l'un des g, g' et un seulement, donne un état de phrase). On prend alors pour L un monoïde libre dont G soit un quotient et pour F l'image réciproque de \tilde{F} dans L.

Le problème précédent, plus complexe pourrait être susceptible d'un traitement analogue.

Notons enfin que l'échelle ordonnée des états peut encore être définie si l'on part non d'une partie F d'un monoïde libre L, mais d'une partie d'un monoïde quelconque.

(Manuscrit reçu le 10 novembre 1966).