ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JACQUES AZÉMA
MARIE KAPLAN-DUFLO
DANIEL REVUZ

Récurrence fine des processus de Markov

Annales de l'I. H. P., section B, tome 2, nº 3 (1965-1966), p. 185-220
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1966__2_3_185_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. II, n° 3, 1966, p. 185-220. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Récurrence fine des Processus de Markov

par

Jacques AZÉMA, Marie KAPLAN-DUFLO

et Daniel REVUZ

(Institut Henri Poincaré).

I. — INTRODUCTION ET NOTATIONS

Cet article a pour but d'étudier la récurrence des processus de Markov. Les principaux résultats connus à ce jour ont trait aux chaînes et aux processus à accroissements indépendants. Dans ce dernier cas on a trouvé des critères de récurrence dans les ouverts (Kingman [*12*]) et de récurrence ponctuelle (Bretagnolle et Dacunha-Castelle [7]).

Nous étudions ici la récurrence dans les ouverts de la topologie fine associée au processus.

Cette notion permet d'une part de trouver des conditions nécessaires et suffisantes de récurrence ponctuelle, et d'autre part des conditions nécessaires et suffisantes de récurrence dans les ouverts pour un processus à résolvante fortement fellérienne.

A l'aide de cette topologie fine nous définissons des classes d'un processus qui prolongent les notions connues pour les chaînes. Dans le cas récurrent on peut préciser le comportement des fonctionnelles additives à l'infini. Enfin nous montrons à quelles conditions la topologie fine est engendrée par les fonctions o-excessives. Dans un dernier paragraphe nous donnons des exemples de processus finement récurrents.

Nous tenons à remercier M. le Professeur Snell et M. Pierre Priouret qui ont relu une première version de cet article et nous ont fait de nombreuses remarques.

Pour la commodité du lecteur nous commencerons par rappeler quelques points de la théorie des processus de Hunt ce qui nous permettra de fixer les notations.

Le lecteur est invité à se référer aux exposés de P. A. Meyer dans [*6*] et [*14*], à [*3*] et à [*8*].

Soit E un espace localement compact à base dénombrable ; $E_\delta = E \cup \{ \delta \}$ désignera son compactifié d'Alexandroff ; si E est compact, δ est isolé dans E_δ. $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{B}_\delta$) désigne la tribu borélienne de E (respectivement E_δ) et $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des fonctions continues sur E nulles à l'infini.

Nous identifions les fonctions boréliennes φ sur E et leur prolongement à E_δ obtenu en posant $\varphi(\delta) = 0$.

Nous considérons un processus de Hunt à valeur dans E,

$$X = \{ \Omega, \mathcal{F}, (P_x)_{x \in E_\delta}, X_t, \theta_t, \zeta \}$$

c'est-à-dire :

a) un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$;

b) une famille de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$, $\{ P_x \}_{x \in E}$;

c) une variable aléatoire ζ définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans $[0, \infty)$, telle que $P^\delta[\zeta = 0] = 1$;

d) une famille d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans E, $(X_t)_{t \in \underline{R}^+}$ telle que :

— pour tout ω, $t \to X_t(\omega)$ est continue à droite et limitée à gauche,

— $P_x[X_0(\omega) = x] = 1$ pour tout x,

— pour tout Γ de $\mathcal{B}$, $x \to P_x[X_t(\omega) \in \Gamma]$ est $\mathcal{B}$-mesurable,

— $\zeta(\omega) = \inf \{ t ; X_t(\omega) = \delta \}$

$$X_t(\omega) = \delta \text{ sur } [\zeta(\omega), \infty[;$$

e) une famille d'applications mesurables θ_t de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que $X_{t+h} = X_t \circ \theta_h$.

Si μ est une mesure bornée sur E_δ et φ une fonction borélienne bornée sur $(\Omega, \mathcal{F})$ on pose

$$\int \varphi(\omega) dP_\mu = E_\mu(\varphi) = \int \mu(dx) E_x(\varphi) = \int \mu(dx) \int \varphi(\omega) dP_x.$$

Soient $\mathcal{G}_t$ la tribu engendrée par les applications X_s $(s \leqslant t)$, $\mathcal{F}_\infty$ la complétée de $\mathcal{G}_\infty$ par rapport aux mesures P_μ et

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{\{\mu \text{ mesures de radon bornées}\}} [A \subset \Omega ; \quad B \in \mathcal{G}_t \quad A \Delta B \in \mathcal{F}_\infty \quad P_\mu(A \Delta B) = 0]$$

Pour obtenir un processus de Hunt, il reste à ajouter 3 axiomes :

$\boxed{A}$ pour tout t,

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s.$$

$\boxed{B}$ propriété de Markov forte : pour T temps d'arrêt par rapport à la famille $\{ \mathcal{F}_t \}$ (« temps d'arrêt du processus X ») et pour φ variable aléatoire bornée sur $(\Omega, \mathcal{F})$

$$E_\mu[\varphi_0\theta_T 1_{(T<\zeta)} \mid \mathcal{F}_T](\omega) = E_{X_{T(\omega)}}(\varphi) \qquad P_\mu \text{ p. s.}$$

$\boxed{C}$ propriété de Blumenthal : pour toute suite de temps d'arrêts T_n qui croît vers un temps d'arrêt T,

$$\lim_{n\to\infty} X_{T_n} = X_T \quad \text{sur} \quad [T < \zeta] \qquad P_\mu \text{ p. s.}$$

A X on associe un semi-groupe $\{ P_t \}_{t\geqslant 0}$ défini pour f universellement mesurable bornée sur E par $P_t f(x) = E_x[f_0 X_t] \cdot \{ U_\lambda \}$ $\lambda > 0$ sera la résolvante de P_t ; pour f positive, on pose

$$Uf(x) = \int_0^\infty P_t f(x) dt.$$

Rappelons que tout semi-groupe « de Feller » (P_t sous-markovien, $P_t \mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}_0$, P_t tend fortement vers l'identité si t tend vers 0) peut être associé à un processus de Hunt [*6*], qui sera appelé « processus de Feller ».

A est dit presque analytique (presque borélien), si pour toute μ il existe deux ensembles analytiques (boréliens) A′ et A″ tels que

$$P_\mu \{ \omega; \exists t \geqslant 0 \quad X_t(\omega) \in (A'' - A') \} = 0 \quad \text{et} \quad A' \subseteq A \subseteq A''.$$

$T_A = \inf \{ t;\ t > 0,\ X_t \in A \}$ et $T_{A^c} = \sigma_A$ sont des temps d'arrêts si A est presque analytique.

Les ensembles presque boréliens V contenant x et tels que $P_x[\sigma_V > 0] = 1$, constituent une base de filtre $\mathcal{V}_f(x)$ des voisinages de x pour une topologie sur E, la « topologie fine » du processus.

Soit $\mathcal{E}_\lambda$ le cône des fonctions λ-excessives pour P_t. Les fonctions λ-excessives sont finement continues et presque boréliennes. On dit qu'un temps d'arrêt T est terminal si

$$\{ T > t \} \subset \{ T = t + T_0\theta_t \}$$

et si

$$\lim_{t\to 0} t + T_0\theta_t = T.$$

Les temps d'entrée dans les ensembles sont terminaux. Pour un tel temps on posera

$$u_T(x) = P_x[T < \zeta].$$

Pour un sous-ensemble presque analytique A de E, on posera :

$$u_A(x) = u_{T_A}(x) = P_x(T_A < \zeta) = P_x(T_A < \infty)$$

$$\mathcal{R}_A = \left\{ \omega ; \overline{\lim_{t\to\infty}} 1_A[X_t(\omega)] = 1 \right\}$$

$$\mathcal{C}_A = \mathcal{R}_A^c.$$

Remarquons que $\mathcal{R}_A \subseteq \{ \zeta = \infty \}$.

II. — RÉCURRENCE FINE

DÉFINITION 1. — Un point x est dit finement récurrent pour le processus X, si pour tout V de $\mathcal{V}_f(x)$, $P_x(\mathcal{R}_V) = 1$.

Il est dit finement transient, s'il existe un V de $\mathcal{V}_f(x)$ tel que $P_x(\mathcal{R}_V) = 0$.

THÉORÈME 1. — Tout point x de E est soit finement récurrent soit finement transient. En outre :

1° x est finement récurrent, si et seulement si pour tout V de $\mathcal{V}_f(x)$, $U(x, V) = +\infty$.

2° x est finement transient, si et seulement si il existe un V de $\mathcal{V}_f(x)$ tel que $U(x, V) < +\infty$.

La démonstration de ce théorème repose sur les lemmes suivants :

LEMME 1. — Soient x et y deux points de E. Si $P_y[\mathcal{R}_V] > 0$ pour tout V de $\mathcal{V}_f(x)$, alors $U(y, V) = +\infty$ pour tout V de $\mathcal{V}_f(x)$.

Démonstration. — Soit V un élément de $\mathcal{V}_f(x)$. Par définition de la topologie fine $P_x[\sigma_V > 0] = 1$, donc $E_x[e^{-\sigma_V}] < 1$. La fonction $z \to E_z[e^{-\sigma_V}]$ est 1-excessive donc finement continue et presque borélienne. Il existe donc un ensemble W finement fermé de $\mathcal{V}_f(x)$ et un nombre $k < 1$ tels que pour tout z de W, $E_z[e^{-\sigma_V}] \leqslant k < 1$. Soient a et δ deux nombres strictement positifs tels que pour tout z de W, $P_z[\sigma_V > a] \geqslant \delta > 0$.

Considérons la suite de temps d'arrêts :

$$\begin{aligned} T_1 &= \sigma_V \\ &\vdots \\ T_{2p} &= T_{2p-1} + T_W . \theta_{T_{2p-1}} \\ T_{2p+1} &= T_{2p} + \sigma_V . \theta_{T_{2p}}. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que pour tout y de E,

$$\mathcal{R}_W \subset \left\{ \omega \, ; \int_0^\infty 1_V(X_t(\omega))dt = \infty \right\} \qquad P_y \text{ p. s.}$$

Soit

$$A_n = \{ \omega \, ; T_{2n+1}(\omega) - T_{2n}(\omega) > a, \, T_{2n}(\omega) < \zeta(\omega) \}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_y[A_n \mid \mathcal{F}_{T_{2n}}] = \sum_{n=0}^{\infty} P_{X_{T_{2n}}}(T_1 > a) 1_{(T_{2n} < \zeta)} \geqslant \sum_n 1_{(T_{2n} < \zeta)}.$$

D'après le théorème de Borel-Cantelli généralisé, P_y presque sûrement une infinité de A_n sont réalisés, lorsque $\sum_n 1_{(T_{2n} < \zeta)} = \infty$.

$\mathcal{R}_W$ est somme de deux ensembles :

$$- \mathcal{R}_W \cap \left[\bigcup_p \{ \omega \, ; T_{2p}(\omega) < \infty \quad \text{et} \quad T_{2p+1}(\omega) = \infty \} \right].$$

Sur cet ensemble

$$\int_0^\infty 1_V(X_t(\omega))dt = \infty.$$

$$- \mathcal{R}_W \cap \left[\bigcap_p \{ \omega \, ; T_p(\omega) < \infty \} \right].$$

Sur cet ensemble, une infinité de A_n sont réalisés P_y presque sûrement et

$$\mathcal{R}_W \subset \left\{ \omega \, ; \int_0^\infty 1_V(X_t(\omega))dt = \infty \right\} \qquad P_y \text{ p. s.}$$

LEMME 2. — Pour toute mesure bornée μ sur E :

a) Si T est un temps terminal, la limite de $u_T(X_t)$ lorsque t tend vers ζ existe P_μ p. s. Cette limite Z_T est nulle sur $[T = \zeta]$ (P_μ p. s.).

b) Si A est un sous-ensemble de E presque analytique $Z_{T_A} = Z_A$ est nulle sur $\mathcal{C}_A(P_\mu$ p. s.).

c) Si A est presque analytique et si u_A vaut 1 en tout point de A (en particulier si A est finement ouvert), alors $Z_A = 1_{\mathcal{R}_A}$ (P_μ p. s.).

Démonstration. — *a)* La fonction $z \to u_T(z)$ étant excessive et bornée, $\{ u_T(X_s), \mathcal{F}_s \}$ est une surmartingale sur $\{ \Omega, \mathcal{F}, P_\mu \}$ continue à droite. L'existence de Z_T est une conséquence du théorème de convergence des surmartingales. Considérons :

$$P_\mu[T < \zeta \mid \mathcal{F}_{T \wedge t}] = P_\mu[t < T < \zeta \mid \mathcal{F}_{T \wedge t}] + P_\mu[T \leqslant t \mid \mathcal{F}_{T \wedge t}]$$

T est un temps terminal, dont $T \circ \theta_t + t = T$ sur $(t < T)$. D'autre part $\zeta \circ \theta_t + t = \zeta$. D'où :

$$\begin{aligned} P_\mu[T < \zeta \mid \mathcal{F}_{T \wedge t}] &= P_\mu[T \circ \theta_{T \wedge t} < \zeta \circ \theta_{T \wedge t} \mid \mathcal{F}_{T \wedge t}] 1_{(T > t)} + 1_{(T \leqslant t)} \quad P_\mu \text{ p. s.} \\ &= 1_{(T > t)} u_T(X_{T \wedge t}) + 1_{(T \leqslant t)} \quad P_\mu \text{ p. s.} \\ &= 1_{(T > t)} u_T(X_t) + 1_{(T \leqslant t)} \quad P_\mu \text{ p. s.} \end{aligned}$$

Si nous passons à la limite, quand t tend vers ζ par valeur rationnelle en restant inférieur à ζ nous obtenons :

$$1_{(T < \zeta)} = 1_{(T = \zeta)} Z_T + 1_{(T < \zeta)} \qquad P_\mu \text{ p. s.}$$

$$1_{(T = \zeta)} Z_T = 0 \qquad P_\mu \text{ p. s.}$$

b) Soit A presque analytique.

Pour tout n, μP_n est une mesure bornée sur E et

$$1_{(T_A = \zeta)} Z_A = 1_{(T_A = \infty)} Z_A = 0 \qquad P_{\mu P_n} \text{ p. s.}$$

ou

$$1_{(T_A \circ \theta_n = \infty)} Z_A \circ \theta_n = 1_{(T_A \circ \theta_n = \infty)} Z_A = 0 \quad P_\mu \text{ p. s.}$$

car pour tout n, $P_\mu[Z_A = Z_A \circ \theta_n] = 1$,

$$0 = \sup_n Z_A . 1_{(T_A \circ \theta_n + n = \infty)} = Z_A . 1 \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} (T_A \circ \theta_n + n = \infty) \right\}$$

$$0 = Z_A . 1_{\mathcal{C}_A} \qquad P_\mu \text{ p. s.}$$

c) Soit ω dans $\mathfrak{R}_A$. Pour tout n, $n + T_A \circ \theta_n(\omega)$ est fini et $X[n + T_A \circ \theta_n(\omega)]$ est un point de la fermeture fine $\tilde{A}$ de A.

La fonction u_A est égale à 1 sur A ; en effet en un point de A cela résulte de l'hypothèse faite en *c*), et un point y de $\tilde{A} \backslash A$ est régulier pour A

$$u_A(y) = P_y(T_A = 0) = 1.$$

$$Z_A(\omega) = \lim_{n \to \infty} u_A[X_n + T_A \circ \theta_n(\omega)] = 1$$

si ω est dans $\mathfrak{R}_A$ (P_μ p. s.) donc dans le cas *c*),

$$Z_A = 1_{\mathfrak{R}_A} \qquad P_\mu \text{ p. s.}$$

LEMME 3. — Si x n'est pas une trappe, il existe un ensemble U de $\mathcal{V}_f(x)$ et une constante M tels que

$$\sup_{y \in E} E_y[\sigma_U] \leqslant M.$$

Démonstration. — *a*) Soient $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions boréliennes bornées et finement continues. Le domaine $\mathcal{D}$ du générateur infinitésimal de Dynkin $\mathcal{A}$ contient $U_\lambda(\mathcal{C})$.

Supposons que pour toute fonction f de $U_\lambda(\mathcal{C})$, $\mathcal{A}f(x)$ soit nulle. Alors, $\lambda I - \mathcal{A}$ étant l'inverse de U_λ, pour toute fonction g de $\mathcal{C}$, en particulier pour toute fonction continue sur E et nulle à l'infini, et pour tout $\lambda > 0$:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t g(x) dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} g(x) dt.$$

Grâce à la continuité à droite de l'application $t \to P_t g(x)$ et aux propriétés de la transformation de Laplace, ceci entraîne que pour tout t et pour toute fonction g de $\mathcal{C}$, $P_t g(x) = g(x)$ soit $P_t(x, .) = \varepsilon_x$ mesure de Dirac en $x . x$ est alors une trappe.

b) Si x n'est pas une trappe, soit g une fonction de $U_\lambda(\mathcal{C})$ telle que $\mathcal{A}g(x) > 0$. Posons :

$$U = \left\{ y \; ; \; \mathcal{A}g(y) \geqslant \frac{1}{2} \mathcal{A}g(x) \right\}.$$

U est un élément de $\mathcal{V}_f(x)$ et pour tout y de E :

$$\frac{1}{2} \mathcal{A}g(x) E_y \int_0^{\sigma_U} e^{-\lambda t} dt \leqslant E_y \int_0^{\sigma_U} e^{-\lambda t} \mathcal{A}g(X_t) dt \leqslant 3 \, \| g \|.$$

La seconde inégalité est due à la relation :

$$g(y) - E_y[e^{-\lambda \sigma_U} g(X\sigma_U)] = E_x \int_0^{\sigma_U} e^{-\lambda t} [\lambda I - \mathcal{A}] g(X_t) dt$$

et pour tout $\lambda > 0$:

$$E_y \int_0^{\sigma_U} e^{-\lambda t} \mathcal{A}g(X_t) dt \leqslant 3 \, \| g \|.$$

Pour tout $\lambda > 0$ et tout y de E :

$$E_y \left[\frac{1 - e^{-\lambda \sigma_U}}{\lambda} \right] \leqslant \frac{6 \| g \|}{\mathcal{A}g(x)}$$

et

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} E_y \left[\frac{1 - e^{-\lambda \sigma_U}}{\lambda} \right] = E_y[\sigma_U] \leqslant \frac{6 \| g \|}{\mathcal{A}g(x)} < \infty.$$

Remarquons que ce lemme est semblable à un lemme classique ([*8*] lemme 5.5); mais ici la topologie fine remplace la topologie initiale et le résultat est valable pour tous les processus de Hunt au lieu de n'être valable que pour les processus de Feller.

LEMME 4. — S'il existe un ensemble V de $\mathcal{V}^f(x)$, tel que $P_x[\mathcal{R}_V] < 1$, alors il existe un W de $\mathcal{V}_f(x)$ tel que $U(x, W) < +\infty$.

S'il existe un ensemble V de $\mathcal{V}_f(x)$ tel que $P_x(\mathcal{R}_V) < 1$, x n'est pas une trappe. On peut d'après le lemme 3 lui associer un ensemble U de $\mathcal{V}_f(x)$ et un nombre fini M, tels que

$$\sup_{y \in E} E_y[\sigma_U] \leqslant M.$$

Si $G = V \cap U$, $P_x[\mathcal{C}_G] > 0$, la fonction

$$t \to u_G(X_t(\omega)) = P_{X_t(\omega)}(T_G < \zeta)$$

tend P_x p. s. vers 0 sur $\mathcal{C}_G$, d'après le lemme 2.

Il existe donc un t positif tel que

$$E_x[P_{X_t}(T_G < \infty)] = P_x[T_G \circ \theta_t < \infty] < 1.$$

Ce t étant fixé, la fonction $y \to P_y[T_G \circ \theta_t < \infty]$ est excessive puisque c'est $P_t u_G$, u_G étant excessive. Il existe donc un fermé fin W de $\mathcal{V}_f(x)$, inclus dans G tel que pour tout y de W :

$$P_y[T_G \circ \theta_t < \infty] \leqslant a < 1.$$

Considérons la suite de temps d'arrêts :

$$\begin{aligned}
T_1 &= t + T_W \circ \theta_t \\
T_2 &= T_1 + \sup(\sigma_U, t) \circ \theta_{T_1} \\
&\cdots \\
T_{2n} &= T_{2n-1} + \sup(\sigma_U, t) \circ \theta_{T_{2n-1}} \\
T_{2n+1} &= T_{2n} + T_W \circ \theta_{T_{2n}}.
\end{aligned}$$

Notons $\sigma_U V t = \sup(\sigma_U, t)$

$$\begin{aligned}
U(x, W) &\leqslant t + \sum_n E_x[1_{(T_{2n-1} < \zeta)}(T_{2n} - T_{2n-1})] \\
&\leqslant t + \sum_n E_x[1_{(T_{2n-1} < \zeta)} E_{X_{T_{2n}}}(\sigma_U V t)] \\
&\leqslant t + (t + M) \sum_n E_x[1_{(T_{2n-1} < \zeta)}]
\end{aligned}$$

car pour tout y de E, $E_y[\sigma_U V t] \leqslant t + M$.

$$\begin{aligned} P_x[T_{2n+1} < \zeta] &= P_x[T_{2n+1} < \infty] \\ &= P_x[T_{2n-1} < \zeta \,;\, T_W \circ \theta_{\sigma_U V t} \circ \theta_{T_{2n-1}} < \infty] \\ &= E_x[1_{(T_{2n-1} < \zeta)} P_{X_{T_{2n-1}}}(T_W \circ \theta_{\sigma_U V t} < \infty]. \end{aligned}$$

Mais W est un fermé fin, donc $X_{T_{2n-1}}$ est un point de W et :

$$P_{X_{T_{2n-1}}}[T_W \circ \theta_{\sigma_U V t} < \infty] \leqslant P_{X_{T_{2n-1}}}[T_W < \infty] \leqslant a$$

$$P_x[T_{2n+1} < \infty] \leqslant a P_x[T_{2n-1} < \infty] \leqslant a^n$$

$$U(x, W) \leqslant t + (t + M) \sum_n a^n = t + (t + M) \frac{1}{1 - a} < \infty.$$

Les lemmes 1 et 4 entraînent le théorème 1.

On peut compléter le théorème 1 en étudiant le comportement des trajectoires au voisinage d'un point x, pour une loi P_y ($y \neq x$).

DÉFINITION 2. — Soient x et y deux points de E. On dit que x *conduit à* y ($x \to y$), si pour tout V de $\mathcal{V}_f(y)$, $P_x[T_V < \infty] > 0$.

THÉORÈME 1 *bis*. — Soient x et y deux points de E. L'une des 2 séries de propositions équivalentes suivante est vérifiée.

1° *a*) $y \to x$ et x est finement récurrent.
b) Pour tout V de $\mathcal{V}_f(x)$, $P_y(\mathcal{R}_V) > 0$ (x est « y-finement récurrent »).
c) Pour tout V de $\mathcal{V}_f(x)$, $U(y, V) = +\infty$.

2° *a*) Il existe V de $\mathcal{V}_f(x)$ tel que $P_y(\mathcal{R}_V) = 0$ (x est « y-finement transient »).
b) Il existe V de $\mathcal{V}_f(x)$ tel que $U(y, V) < \infty$.

Si y ne conduit pas à x, il est évident que les deux propositions de la partie 2° sont réalisées.

Supposons que y conduit à x :

— Ou bien x est récurrent et pour tout V de $\mathcal{V}_f(x)$, $P_x(\mathcal{R}_V) = 1$. A V on peut associer un fermé fin W de $\mathcal{V}_f(x)$ inclus dans V, tel que pour tout z de W, $P_z(\mathcal{R}_V) \geqslant a > 0$.

$$P_y(\mathcal{R}_V) \geqslant E_y[1_{(T_W < \zeta)} P_{X_{T_W}}(\mathcal{R}_V)] \geqslant a P_y(T_W < \infty) > 0$$

d'où, $P_y(\mathcal{R}_V) > 0$ et d'après le lemme 1, $U(y, V) = +\infty$.

— Ou bien x est transient et il existe un ensemble V de $\mathcal{V}_f(x)$ tel que $U(x, V) < +\infty$. Alors il existe un fermé fin W de $\mathcal{V}_f(x)$, inclus dans V, tel que pour tout z de W,

$$U(z, V) \leqslant U(x, V) + \varepsilon < \infty$$

$$U(y, W) = E_y\left[1_{(T_W < \zeta)} E_{X_{T_W}} \int_0^\infty 1_W(X_t)dt\right]$$

$$\leqslant E_y[1_{(T_W<\zeta)} U(X_{T_W}, V)] \leqslant U(x, V) + \varepsilon < \infty.$$

Nous donnons un autre critère de récurrence fine parfois plus maniable, qui sera utilisé dans le paragraphe suivant.

Proposition II 1. — Étant donné deux points x et y de E (disjoints ou confondus).

a) x est y-finement récurrent, si et seulement si tout λ-potentiel de fonction borélienne positive non nul en x a un 0-potentiel infini en y.

b) Un point x est y-finement transient si et seulement s'il existe un compact K tel que $0 < U(x, K)$ et $U(y, K) < \infty$.

c) Étant donné deux points x et y, x conduit à y si et seulement si tout λ-potentiel de fonction borélienne positive non nul en y n'est pas nul en x.

Démonstration. — *a*) et *b*) Supposons x-finement récurrent. Soient f λ-excessive telle que $f(x) > 0$ et $V = \left\{y; f(y) > \frac{1}{2}f(x)\right\}$. V est un élément de $\mathcal{V}_f(x)$, donc $U(y, V) = +\infty$ et :

$$Uf(y) \geqslant \frac{1}{2}f(x)U(y, V) = +\infty.$$

En particulier, si f est borélienne bornée et positive, telle que $Uf(x) > 0$, alors $U_\lambda f(x) > 0$:

$$UU_\lambda f(y) = \frac{1}{\lambda}[Uf(y) - U_\lambda f(y)] = +\infty \quad \text{et} \quad Uf(y) = +\infty.$$

Si x est y-finement transient, il existe un V de $\mathcal{V}_f(x)$ tel que $U(y, V) < \infty$. Mais x a une base de voisinages fins initialement compacts [*3*]. Donc il existe un compact K tel que $0 < U(x, K)$ et $U(y, K) < \infty$.

c) Supposons que x conduit à y. Soit f une fonction borélienne positive telle que $U_\lambda f(y) > 0$.

$$V = \left\{z, U_\lambda f(z) \geqslant \frac{1}{2} U_\lambda f(y)\right\}$$

est un élément de $\mathcal{V}_f(y)$.

Pour tout $\mu > 0$ on a

$$\begin{aligned} U_\mu U_\lambda f(x) &= E_x \int_0^\infty e^{-\mu t} U_\lambda f(X_t) dt \\ &\geqslant E_x \int_0^\infty e^{-\mu t} 1_V(X_t) U_\lambda f(X_t) dt. \end{aligned}$$

Donc

$$0 < [U_\mu 1_V(x)] \left[\frac{1}{2} U_\lambda f(y)\right] \leqslant U_\mu U_\lambda f(x)$$

et $U_\lambda f(x) > 0$.

Si x ne conduit pas à y, il existe un V de $\mathcal{V}_f(y)$ tel que $u_V(x) = 0$. La fonction excessive u_V, nulle en x et non en y est limite croissante de λ-potentiels de fonctions bornées; d'où le résultat.

III. — RÉCURRENCE DES PROCESSUS A RÉSOLVANTE FORTEMENT FELLÉRIENNE

Soit $\mathcal{V}(x)$ la base de filtre des voisinages presque boréliens de x pour la topologie initiale. La définition usuelle de la récurrence est la suivante :

— x est « récurrent » si pour tout U de $\mathcal{V}(x)$, $P_x(\mathcal{R}_U) = 1$.

— x est « transient » s'il existe un U de $\mathcal{V}(x)$ tel que $P_x[\mathcal{R}_U] = 0$.

En outre définissons,

— x est « y-récurrent » si pour tout U de $\mathcal{V}(x)$, $P_x(\mathcal{R}_U) > 0$.

— x est « y-transient » s'il existe un U de $\mathcal{V}(x)$ tel que $P_y(\mathcal{R}_U) = 0$.

On pourrait chercher à énoncer les théorèmes II 1 et 1 *bis* en remplaçant la notion de récurrence fine par la récurrence et les ouverts fins par les ouverts initiaux. Ce résultat a été obtenu par Kingman [*12*] pour les processus à accroissements indépendants. Nous allons l'obtenir pour les processus à résolvante fortement fellérienne. Par contre dans le cas général, un point peut n'être ni récurrent, ni transient.

Rappelons qu'un processus de Hunt à résolvante fortement fellérienne est un processus tel que le λ-potentiel ($\lambda > 0$) de toute fonction borélienne bornée est une fonction continue.

THÉORÈME III 1. — Si X est un processus de Hunt à résolvante fortement fellérienne et si x et y sont deux points de E (distincts ou confondus), l'une des 2 séries de propositions équivalentes suivantes est réalisée.

(1) *a*) x est y-récurrent.

b) x est y-finement récurrent.

c) Toute fonction positive continue non nulle en x a un 0-potentiel infini en y.

(2) *a*) x est y-transient.

b) x est y-finement transient.

c) Il existe une fonction continue non nulle en x, dont le 0-potentiel est fini en y.

En outre étant donné 2 points distincts x et y, les 3 propositions suivantes sont équivalentes.

a) x conduit à y.

b) Pour tout U de $\mathcal{V}(y)$, $P_x[T_U < \infty] > 0$.

c) y appartient au support de la mesure $U_\lambda(x, .)$.

Pour montrer ce théorème, nous commençons par un lemme semblable au lemme II 1.

LEMME. — Soit X un processus *fellérien*. Supposons que pour un couple de points (x, y) de E, $P_y(\mathcal{R}_V)$ soit non nul pour tout V de $\mathcal{V}(x)$. Alors pour tout V de $\mathcal{V}(x)$, $U(y, V) = +\infty$.

Démonstration. — Supposons qu'il existe un V de $\mathcal{V}(x)$ tel que $U(y, V) < \infty$. La fonction $z \to U(z, V)$ est semi-continue inférieurement; en effet 1_V est limite croissante d'une suite de fonctions continues f_n et

$$U(z, V) = \lim_{\lambda \to 0} \lim_{n \to \infty} U_\lambda f_n(z)$$

$z \to U(z, V)$ est donc limite croissante de fonctions continues.

Elle n'est pas nulle en x et $W = \left\{ z;\ U(z, V) > \frac{1}{2} U(x, V) \right\} \in \mathcal{V}(x)$.

Si $U(y, V)$ est fini, la surmartingale $\{ U(X_t; V), \mathcal{F}_t \}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P_y)$ tend (P_y p. s.) vers 0 lorsque t tend vers 0 car :

$$\lim_{t \to \infty} E_y \int_0^t 1_V(X_s)ds = \lim_{t \to \infty} [U(y, V) - E_y U(X_t, V)] = U(y, V).$$

Mais

$$\overline{\lim_{t \to \infty}}\, U(X_t, V) \geqslant \frac{1}{2} U(x, V) \text{ sur } \mathcal{R}_W.$$

Donc, si $U(y, V) < \infty$ alors il existe un W de $\mathcal{V}(x)$ tel que $P_y[\mathcal{R}_W] = 0$. Le lemme est démontré.

Le théorème III 1 résulte alors de la proposition II 1 *a*. En effet si x est finement y-transient, il existe, d'après cette proposition, un λ-potentiel de fonction positive borélienne non nul en x de 0-potentiel fini en y. Le processus étant à résolvante fortement fellérienne, il existe une fonction continue non nulle en x (donc un voisinage de x) de 0-potentiel fini en y. Grâce au lemme III 1 cela implique que x est finement transient, les parties (1) et (2) du théorème III 1 en résultent.

Pour la partie (3), supposons que pour tout U de $\mathcal{V}(y)$, $P_x[T_U < \infty] > 0$. Alors pour tout U de $\mathcal{V}(y)$, et tout λ, $U_\lambda(x, U) > 0$ (en effet si

$$U_\lambda(x, U) = 0, \int_0^\infty 1_U(X_s)ds = 0 \ (P_x \text{ p. s.})$$

ce qui entraîne d'après la continuité à droite des trajectoires $P_x(T_U < \infty) = 0$). Ceci équivaut à dire que toute fonction positive continue non nulle en y a un potentiel non nul en x. En particulier, tout λ-potentiel de fonction positive borélienne non nul en y, a un λ-potentiel non nul en x. Ceci implique d'après la proposition II 1 *c*) que x conduit à y. La propriété $x \to y$ entraîne évidemment que pour tout U de $\mathcal{V}(y)$, $P_x[T_U < \infty] > 0$: d'où la partie (3) du théorème III 1.

Dans le cas des processus fellériens, Hunt (cf. [*6*] exposé n° 9) a donné une condition suffisante pour que le processus tende vers l'infini si t tend vers l'infini (P_x p. s. pour tout x) : il suffit que le semi-groupe P_t soit « intégrable » c'est-à-dire que pour tout x et tout compact K de E :

$$U(x, K) = \int_0^\infty P_t(x, K)dt < \infty.$$

Cette condition est aussi nécessaire pour un processus à résolvante fortement fellérienne.

Proposition III 1. — Étant donné un processus à résolvante fortement fellérienne, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) Tout point de E est finement transient.

b) Tout point de E est transient.

c) Les trajectoires tendent vers l'infini P_x p. s. pour tout x.

d) Le semi-groupe P_t est intégrable.

Démonstration. — *c*) Implique évidemment *a* et *b*.

$d \Rightarrow c$ d'après le théorème de Hunt rappelé ci-dessus.

$a \Leftrightarrow b$ d'après le théorème III 1.

Supposons *b*. Soient y dans E et K un compact.

Pour tout x de K, il existe un V_x de $\mathcal{V}(x)$ tel que $U(y, V_x) < \infty$. Les V_x forment un recouvrement de K; on peut en extraire un recouvrement fini $\{ V_{x_i}, i = 1 \ldots n \}$ et :

$$U(y, K) \leqslant \sum_{i=1}^{n} U(y, V_{x_i}) < \infty.$$

Donc b implique d, d'où le résultat.

IV. — CLASSES D'UN PROCESSUS DE MARKOV

Dans le cas particulier où X est une chaîne de Markov, c'est-à-dire où E est dénombrable muni de la topologie discrète, tout point est un ouvert initial donc un ouvert fin. La notion de récurrence fine en un point coïncide alors avec la notion d'état récurrent habituelle. Il en est de même pour la notion $x \to y$. Montrons, que l'on peut définir des classes d'un processus de Hunt, qui coïncident dans le cas où E est discret avec les classes des chaînes de Markov.

Proposition IV 1. — Si x conduit à y et y conduit à z, alors x conduit à z.

Démonstration. — En effet pour tout W de $\mathcal{V}_f(z)$, tout V de $\mathcal{V}_f(y)$ et tout $\lambda > 0$:

$$E_x[e^{-\lambda T_W}] \geqslant E_x\left[e^{-\lambda(T_V + T_W \cdot \theta_{T_V})}\right] = E_x[e^{-\lambda T_V} E_{X_{T_V}}(e^{-\lambda T_W})].$$

L'hypothèse $y \to z$ entraîne $E_y[e^{-\lambda T_W}] > 0$.

La fonction $y \to E_y[e^{-\lambda T_W}]$ est finement continue et presque borélienne; il existe donc un fermé fin V de $\mathcal{V}_f(y)$ tel que pour tout u de V,

$$E_u[e^{-\lambda T_W}] \geqslant a > 0.$$

Alors :

$$E_x[e^{-\lambda T_W}] \geqslant a E_x[e^{-\lambda T_V}] > 0 \quad \text{et} \quad x \to z.$$

Proposition IV 2. — Si x est un point finement récurrent :

1° Pour tout ensemble presque analytique A, tel que $P_x(T_A < \infty) > 0$, $P_x(\mathcal{R}_A) = 1$.

2° Si x conduit à y, alors y est finement récurrent, y conduit à x et $\inf_{V \in \mathcal{V}_f(y)} P_x[\mathcal{R}_V] = 1$.

Démonstration. — 1° Grâce au lemme II 2, $Z_A(\omega) = \lim\limits_{t\to\infty} u_A[X_t(\omega)]$ est nulle sur $\mathcal{C}_A(P_x$ p. s.). Si $u_A(x) = P_x[T_A < \zeta]$ est strictement positif, alors $W = \left\{ y;\ u_A(y) > \frac{1}{2} u_A(x) \right\}$ est un élément de $\mathcal{V}_f(x)$ et $P_x[\mathcal{C}_W] = 0$. D'où :

$$Z_A(\omega) = \overline{\lim}\, u_A(X_t(\omega)) > \frac{1}{2} u_A(x) > 0\ P_x \text{ p. s.} \quad \text{et} \quad P_x(\mathcal{C}_A) = 0.$$

2° En particulier si x conduit à y, $P_x[\mathcal{R}_V]$ est égal à 1 pour tout V de $\mathcal{V}_f(y)$. D'où, en vertu du théorème II 1 *bis*, y est récurrent. Reste à montrer que y conduit à x. Pour le montrer considérons un ouvert fin de $\mathcal{V}_f(x)$, W tel que $u_W(y) < 1$. Il existe un V de $\mathcal{V}_f(x)$, tel que pour tout point z de V, $u_W(z) \leqslant a < 1$. Grâce au lemme II 2 :

$$Z_W(\omega) = \lim_{t\to\infty} u_W[X_t(\omega)] = 1_{\mathcal{R}_W}(\omega) = 1\,.(P_x \text{ p. s.}).$$

Mais :

$$P_x[\mathcal{R}_V] = 1 \text{ implique } \underline{\lim}_{t\to\infty}\, u_W[X^t(\omega)] \leqslant a < 1.$$

On aboutit à une contradiction et pour tout W de $\mathcal{V}_f(x)$ $u_W(y) = 1$; y conduit à x.

DÉFINITION IV 1. — Étant donné deux points x et y de E, nous dirons que *x communique avec y*, si x conduit à y et y conduit à x.

Cette relation est une relation d'équivalence grâce à la proposition 1. Nous appellerons *classes du processus* ses classes d'équivalence.

DÉFINITION IV 2. — Un état x est dit *essentiel*, si pour tout état y tel que x conduit à y, y conduit à x.

Un état essentiel ne peut conduire qu'à un état essentiel.

Supposons, en effet, que x est essentiel et conduit à y. Si y conduit à z, x conduit à z grâce à la transitivité de la loi $\rightarrow$, et z conduit à x puisque x est essentiel. Donc z conduit à y d'après la transitivité de $\rightarrow$.

Une classe du processus qui contient un point essentiel contient donc seulement des points essentiels. Nous dirons qu'il s'agit d'une *classe essentielle*.

Une classe essentielle est finement fermée.

Soient en effet C une telle classe et z un point de l'adhérence fine de C. Pour tout V de $\mathcal{V}_f(z)$, l'intersection de V et de C n'est pas vide. Donc pour tout point x de C, $P_x[T_V < \infty]$ est strictement positif, et x conduit à z : z appartient à C.

Grâce à la proposition 2, un état récurrent est essentiel et ne peut conduire qu'à un état récurrent. Parmi les classes essentielles, certaines sont donc constituées d'états récurrents.

DÉFINITION IV 3. — Nous appellerons *classe récurrente* une classe du processus constituée d'états récurrents.

Nous montrerons plus loin par un exemple que le processus partant d'une classe récurrente peut en sortir avec une probabilité positive. Le problème se pose donc de définir des ensembles contenant les classes récurrentes et d'où le processus ne sorte pas avec probabilité 1. Nous ne résolvons le problème de manière satisfaisante que sous l'hypothèse (L) (cf. [*14*], p. 160).

DÉFINITION. — Un ensemble A presque borélien est dit stable si

$$\forall x \in \mathrm{A} \qquad \mathrm{P}_x[\forall t \in \mathrm{R}_+, \mathrm{X}_t \in \mathrm{A}] = 1.$$

Proposition IV 3. — Soit $(\mathrm{C}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ l'ensemble des classes récurrentes. Il existe une famille $(\mathrm{D}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ d'ensembles finement fermés tels que :

a) $\forall i \in \mathrm{I} \quad \mathrm{D}_i \supset \mathrm{C}_i$.

b) $\mathrm{D}_i \cap \mathrm{D}_j = \varnothing$, si $i \neq j$.

c) D_i est intersection d'ensembles stables.

Démonstration. — Considérons la fonction

$$a_x(y) = \inf_{\mathrm{V}\in\mathcal{V}_f(x)} \mathrm{U}_{\mathrm{V}}(y).$$

1° $a_x(y) = a_{x'}(y)$ si x et x' appartiennent à une même classe récurrente C.

Soit en effet V′ dans $\mathcal{V}_f(x')$; $u_{\mathrm{V}'}(x) = 1$. Pour tout ε il existe un V finement fermé de $\mathcal{V}_f(x)$, tel que pour tout z de V, $u_{\mathrm{V}'}(z) > 1 - \varepsilon$. Pour tout y de E :

$$\mathrm{P}_y[\mathrm{T}_{\mathrm{V}'} < \infty] \geqslant \mathrm{P}_y[\mathrm{T}_{\mathrm{V}} < \infty, \mathrm{T}_{\mathrm{V}'} \circ \theta_{\mathrm{T}_{\mathrm{V}}} < \infty]$$

$$\mathrm{P}_y[\mathrm{T}_{\mathrm{V}} + \mathrm{T}_{\mathrm{V}'} \circ \theta_{\mathrm{T}_{\mathrm{V}}} < \infty] = \mathrm{P}_y[\mathrm{T}_{\mathrm{V}} < \infty, \mathrm{T}_{\mathrm{V}'} \circ \theta_{\mathrm{T}_{\mathrm{V}}} < \infty]$$

$\mathrm{X}_{\mathrm{T}_{\mathrm{V}}}$ est dans V et $\mathrm{P}_{\mathrm{X}_{\mathrm{T}_{\mathrm{V}}}}(\mathrm{T}_{\mathrm{V}'} < \infty) > 1 - \varepsilon$.

Donc pour tout ε et tout V′ de $\mathcal{V}_f(x')$, il existe un V de $\mathcal{V}_f(x)$ tel que

$$u_{\mathrm{V}'}(y) \geqslant (1-\varepsilon)u_{\mathrm{V}}(y)$$

$$\inf_{\mathrm{V}'\in\mathcal{V}_f(x')} u_{\mathrm{V}'}(y) \geqslant (1-\varepsilon) \inf_{\mathrm{V}\in\mathcal{V}_f(x)} u_{\mathrm{V}}(y)$$

$$a_{x'}(y) \geqslant a_x(y)$$

De même, $a_x(y) \geqslant a_{x'}(y)$ et $a_x(y) = a_{x'}(y)$.

On posera $a_x(y) = a_{\mathrm{C}}(y)$, pour tout x de la classe C.

2° Si x est finement récurrent, $a_x(y) = \inf_{V \in \mathcal{V}_f(x)} P_y[\mathcal{R}_V]$.

En effet,

$$P_y[\mathcal{R}_V] \leqslant u_V(y) \quad \text{et} \quad \inf_{V \in \mathcal{V}_f(x)} P_y[\mathcal{R}_V] \leqslant \inf_{V \in \mathcal{V}_f(x)} u_V(y) = a_x(y).$$

D'autre part, $P_x(\mathcal{R}_V) = 1$. Pour tout ε, il existe un fermé fin W de $\mathcal{V}_f(x)$ tel que pour tout z de W :

$$P_z[\mathcal{R}_V] > 1 - \varepsilon$$

$$P_y[\mathcal{R}_V] \geqslant E_y[1_{(T_W < \infty)} 1_{\mathcal{R}_V}]$$

$$\begin{aligned} E_y[1_{(T_W < \infty)} 1_{\mathcal{R}_V}] &= E_y[E_y[1_{(T_W < \infty)} 1_{\mathcal{R}_V} \circ \theta_{T_W} \mid \mathcal{F}_{T_W}]] \\ &= E_y\left[1_{(T_W < \infty)} P_{X_{T_W}}(\mathcal{R}_V)\right] \end{aligned}$$

$$P_y(\mathcal{R}_V) \geqslant (1 - \varepsilon) a_x(y).$$

Pour tout ε et tout V de $\mathcal{V}_f(x)$, $P_y(\mathcal{R}_V) \geqslant (1 - \varepsilon)\, a_x(y)$.
D'où : $P_y[\mathcal{R}_V] \geqslant a_x(y)$.

$$\inf_{V \in \mathcal{V}_f(x)} P_y(\mathcal{R}_V) \geqslant a_x(y)$$

ce qui termine la démonstration de 2°.

3° Soit alors $x \in C$; pour tout ensemble V de $\mathcal{V}_f(x)$ posons

$$D_V = \{ y : P_y[\mathcal{R}_V] = 1 \}.$$

La fonction $y \to P_y[\mathcal{R}_V]$ est invariante, D_V est donc un ensemble presque borélien, finement fermé et il est clair que D_V contient C. Montrons que D_V est un ensemble stable.

En effet si $x \in D_V$

$$P_t[P_{\cdot}[\mathcal{R}_V])(x) = P_x[\mathcal{R}_V] = 1$$

soit

$$E_x[P_{X_t}[\mathcal{R}_V]] = 1.$$

Donc :

$$\forall t \in R^+,\ P_{X_t}[\mathcal{R}_V] = 1 \qquad P_x \text{ p. s.}$$

et

$$P_x[\forall r \in Q^+,\ P_{X_r}[\mathcal{R}V] = 1] = 1$$

mais comme la fonction $t \to P_{X_t}[\mathcal{R}_V]$ est P_x-presque sûrement continue à droite :

$$P_x[\forall t,\ P_{X_t}[\mathcal{R}_V] = 1] = 1$$

ce qui démontre que D_V est stable.

Posons :

$$D = \bigcap_{V \in \mathcal{V}_f(x)} D_V = \{ y ;\, a_C(y) = 1 \}.$$

D ne dépend pas du point x choisi dans C d'après 1°, il contient C et est finement fermé (car c'est l'intersection des ensembles finement fermés D_V).

4° Il reste à montrer que si C_i et C_j sont deux classes récurrentes, les ensembles D_i et D_j correspondants sont disjoints.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un z dans $D_i \cap D_j$. Soient x_i dans C_i et x_j dans C.

Il existe un V_i de $\mathcal{V}_f(x_i)$ tel que $u_{V_i}(x_j) = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé fin V_j de $\mathcal{V}_f(x_j)$ tel que :

$$\forall y \in V_j \qquad u_{V_i}(y) < \varepsilon$$

$$P_z[\mathcal{R}_{V_j}] = 1$$

donc

$$\overline{\lim_{t \to \infty}}\, u_{V_i}(X_t) < \varepsilon \qquad P_z \text{ p. s.}$$

donc

$$\overline{\lim_{t \to \infty}}\, u_{V_i}(X_t) = 0 \qquad P_z \text{ p. s.}$$

D'après le lemme II 2, ceci entraîne que $P_z[\mathcal{R}_{V_i}] = 0$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $z \in D_i$, c'est-à-dire $P_z[\mathcal{R}_{V_i}] = 1$.

Remarque. — Pour toute loi initiale ν ne chargeant que D, P_ν presque sûrement toute trajectoire est dense dans C.

THÉORÈME IV 1. — Sous l'hypothèse (L) de Meyer, on peut associer à la famille $(C\ )_{i \in I}$ des classes récurrentes une famille $(D_i)_{i \in I}$ d'ensembles stables, finement fermés et disjoints, tels que $D_i \supset C_i$.

Il reste à montrer que les ensembles $(D_i)_{i \in I}$ de la proposition IV 3 sont stables lorsqu'on fait l'hypothèse (L). Sous l'hypothèse (L) l'enveloppe supérieure d'une famille filtrante croissante de fonctions excessives peut être atteinte par une sous-famille dénombrable. Si x est un élément d'une classe récurrente C, il existe une sous-famille dénombrable $\{ V_n \}$ de $\mathcal{V}_f(x)$ telle que

$$(1 - a_C) = \sup_{V \in \mathcal{V}_f(x)} \{ 1 - P \circ (\mathcal{R}_V) \} = \sup_{\{V_n\}} \left\{ 1 - P \circ \left(\mathcal{R}_{V_n}\right) \right\}$$

et

$$a_C = \inf_{\{V_n\}} P \circ \left(\mathcal{R}_{V_n}\right)$$

a_C est alors invariante.

En effet a_C est presque borélienne et pour tout t et tout y

$$\begin{aligned}(P_t)a_C(y) &= E_y\Big[\inf_{\{v_n\}} P_{X_t}(\mathcal{R}_{V_n})\Big] = E_y\Big[\inf_{\{v_n\}} E_y\big(1_{\mathcal{R}_{V_n}}\circ\theta_t \mid \mathcal{F}_t\big)\Big] \\ &= E_y\Big[\inf_{\{v_n\}} E_y\big(1_{\mathcal{R}_{V_n}} \mid \mathcal{F}_t\big)\Big] = E_y\Big[\inf_{\{v_n\}} 1_{\mathcal{R}_{V_n}}\Big] = a_C(y).\end{aligned}$$

L'ensemble D où a_C vaut 1 est un ensemble stable, car le raisonnement fait dans la partie 3) de la démonstration précédente pour les ensembles D_V est valable ici.

Remarque. — Dans le cas des chaînes de Markov, on montre que pour tout x d'une classe récurrente C, $P_x[\forall t \in R^+, X_t \in C] = 1$. L'ensemble D introduit dans le théorème précédent ne coïncide pas avec C en général : pour la chaîne définie sur $\{0, 1\}$ par $P(0, 1) = 1$ et $P(1, 1) = 1$, $C = \{1\}$ et $D = \{0, 1\}$.

Montrons par un exemple, que la relation $P_x[\forall t \in R^+, X_t \in C] = 1$ pour x dans la classe C est fausse en général.

Considérons le processus de Feller sur $E = \{0\} \cup [1, \infty[$ muni de la topologie induite par celle de R défini comme suit. Soit F une mesure de probabilité diffuse sur $[1, \infty[$. Lorsque la particule est en 0, elle y reste pendant un temps de loi exponentielle, puis saute, la loi du point où elle saute étant F. Lorsque la particule est en un point de $[1, \infty[$ elle y reste pendant un temps de loi exponentielle puis saute en 0. Plus précisément, posons :

$$\pi[0, .] = F(.)$$

$$\pi[y, \{0\}] = 1 \quad \text{si} \quad y \in [1, \infty[.$$

Soit $\pi^{(n)}$ le $n^{\text{ième}}$ itéré de π. Pour tout t de R^+ et x de E, posons :

$$P_t(x, .) = e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n\,!}\,\pi^{(n)}(x, .).$$

P_t est un semi-groupe de Feller, on lui associe un processus de Feller X. Pour X, la topologie fine de E est la topologie discrète, car pour tout y de E, $P_y[\sigma_{\{y\}} > 0] = 1$.

Pour tout couple de points distincts (x, y),

$$\begin{aligned}P_x[T_{\{y\}} < \infty] &= 0 \quad \text{si} \quad y \neq 0 \\ &= 1 \quad \text{si} \quad y = 0\end{aligned}$$

$C = \{0\}$ et $D = E$. Mais $P_0[\mathcal{R}_{D\setminus C}] = 1$.

Proposition IV 4. — Soit C une classe récurrente et $D = \{ y ; a_c(y) = 1 \}$. Étant donné une fonctionnelle additive A du processus, deux cas sont possibles :

— ou bien, pour tout x de D, $P_x[A_\infty = \infty] = 1$,
— ou bien, pour tout x de C, $P_x[A_\infty = 0] = 1$.

Dans le second cas, si A_t est fini P_z p. s. pour tout t et tout z de D\C, alors pour tout z de D\C, $P_z[A_\infty < \infty] = 1$.

Cas particuliers. — 1° Soit T un temps terminal.

$$\begin{aligned} A_t &= 0 \quad \text{si} \quad t < T \\ &= \infty \quad \text{si} \quad t \geqslant T \end{aligned}$$

est une fonctionnelle additive. Donc ou bien $P_x[T < \infty] = 1$ pour tout x de D, ou bien $P_x[T = \infty] = 1$ pour tout x de C.

2° Soit Γ un ensemble universellement mesurable. On peut associer à Γ plusieurs fonctionnelles additives mesurant le temps de séjour du processus dans A. Considérons par exemple une « fonction déterminante » h, c'est-à-dire une fonction continue croissante de t ($t \geqslant 0$) telle que $h(0) = 0$; on peut définir une h-mesure de Hausdorff H sur les ensembles bornés de R^+ (cf. [*10*]). Si Γ est un ensemble universellement mesurable,

$$A_t^H(\omega) = H[s \,;\, s \leqslant t \quad \text{et} \quad X_s(\omega) \in \Gamma]$$

est une fonctionnelle additive. La seule relation à vérifier est l'additivité. Mais si E est un ensemble borné de R^+ :

$$H(E \cap [0, t]) + H(E \cap]t\ \infty[) = H(E).$$

D'où, pour tout couple (t, s)

$$\begin{aligned} A_{t+s}^H(\omega) - A_t^H(\omega) &= H[u \,;\, t < u \leqslant t+s \quad \text{et} \quad X_u(\omega) \in \Gamma] \\ &= H[u \,;\, u \leqslant s \quad \text{et} \quad X_u \circ \theta_t(\omega) \in \Gamma] \\ &= A_s^H \circ \theta_t(\omega). \end{aligned}$$

Pour toute mesure de Hausdorff H, la mesure du temps de séjour dans Γ, A_∞^H est soit infinie P_x presque sûrement pour tout x de C, soit nulle P_x-presque sûrement pour tout x de C.

Si on pose $h = t^\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, on voit que la dimension de Hausdorff de l'ensemble des instants passés en Γ est constante P_x presque sûrement pour tout $x \in C$; d'autre part si pour un x de C, $U^\lambda(x, \Gamma)$ n'est pas nul,

$$P_z\left[\int_0^\infty 1_V(X_s)ds = \infty\right] = 1 \quad \text{pour tout } z \text{ de D.}$$

Démonstration de la proposition IV 3. — (1) Soit T tel que $\lim_{t\to 0} \downarrow T_0\theta_t + t = T$ et x un point de C. Grâce au lemme II 2 *a*), $Z_T = \lim_{s\to\infty} u_T(X_s)$ est nulle sur $\{ T = \infty \}$ (P_x p. s.). Mais x étant finement récurrent, $u_T(x) = Z_T$ (P_x p. s.).

Si $u_T(x)$ n'est pas nul, $P_x[Z_T = 0] = 0$ et $P_x[T = \infty] = 0$.

(2) Soit A_t une fonctionnelle additive et x un point de C. Supposons que pour tout t, $P_x(A_t < \infty) = 1$. Soit $T^\varepsilon = \inf\{ t; A_t > \varepsilon \}$.

Si pour tout ε, $P_x[T_\varepsilon < \infty] = 0$, alors $P_x[A_\infty = 0] = 1$. Sinon il existe un ε tel que $P_x[T_\varepsilon < \infty] = 1$ en vertu de la première partie. Pour tout t :

$$1 \geqslant E_x[u_{T^\varepsilon}(X_t)] \geqslant E_x[Z_{T^\varepsilon}] = 1$$

d'où grâce à la continuité à droite de $t \to u_{T^\varepsilon}(X_t(\omega))$

$$P_x[\forall t \quad u_{T^\varepsilon}(X_t) = 1] = 1$$

Soient

$$T^{(1)} = T^\varepsilon$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$T^{(n)} = T^{(n-1)} + T^\varepsilon \circ \theta_{T^{(n-1)}}$$

$$\begin{aligned} P_x[T^{(n)} < \infty] &= P_x[T^{(n-1)} < \infty;\ T^\varepsilon \circ \theta_{T^{(n-1)}} < \infty] \\ &= E_x[1_{(T^{(n-1)} < \infty)} u_{T^\varepsilon}(X_{T^{(n-1)}})] \\ &= P_x[T^{(n-1)} < \infty] = 1. \end{aligned}$$

Mais $A_{T^{(n)}} > n\varepsilon$ et $P_x[A_\infty = \infty] = 1$.

(3) Si A_t n'est pas finie (P_x p. s. pour x dans C), soit $T = \inf\{ t; A_t = \infty \}$. T est un temps terminal, $P_x[T < \infty] > 0$, donc $P_x[T < \infty] = 1$.

(4) La fonction $z \to P_z[A_\infty = \infty]$ est excessive car

$$\{ A_\infty = \infty \} \supseteq \{ A_\infty . \theta_t = \infty \}$$

$$\lim_{t\to 0} \{ A_\infty . \theta_t = \infty \} = \lim_{t\to 0} \{ A_\infty . \theta_t + A_t = \infty \} = \{ A_\infty = \infty \}$$

d'après la continuité à droite de $t \to A_t(\omega)$.

On montrera à la partie VI par application immédiate du théorème des surmartingales qu'une telle fonction est constante sur C où elle vaut d'après (2) ou (3) 0 ou 1. Si z est dans D\C,

$$\lim_{s\to\infty} P_{X_s}(A_\infty = \infty) = 1 \qquad (P_z \text{ p. s.})$$

$$1 \geqslant P_z(A_\infty = \infty) \geqslant E_z[P_{X_s}(A_\infty = \infty)] = 1 \qquad \text{et} \qquad P_z(A_\infty = \infty) = 1.$$

Si $P_x(A_\infty = \infty) = 0$ sur C, $P_x(A_\infty = 0) = 1$ sur C.

(5) Reste à montrer la fin de la proposition. Supposons que $P_x[A_\infty = 0] = 1$ sur C.

Si pour tout t, $P_z(A_t < \infty) = 1$, le processus $\{ P_{X_s}(A_\infty = \infty), \mathcal{F}_s \}$ est une martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, P_z)$ et

$$P_z(A_\infty = \infty) = \lim_{s \to \infty} E_z[P_{X_s}(A_\infty = \infty)] = 0.$$

V. — RÉCURRENCE DANS LES POINTS

DÉFINITION V 1. — Un point x est dit ponctuellement récurrent pour le processus X si $P_x[\mathcal{R}_{\{x\}}] = 1$. Il est dit ponctuellement transient si $P_x[\mathcal{R}_{\{x\}}] = 0$. Il est dit ponctuellement y-récurrent si $P_y[\mathcal{R}_{\{x\}}] > 0$ et ponctuellement y-transient si $P_y[\mathcal{R}_{\{x\}}] = 0$.

THÉORÈME V 1. — Si $P_x(T_x < \infty) > 0$, x est ponctuellement récurrent (resp. transient) si et seulement si il est finement récurrent (resp. transient).

Démonstration. — Il est clair que la récurrence ponctuelle entraîne la récurrence fine et que la transience fine entraîne la transience ponctuelle. Il reste donc à montrer que la récurrencce entraîne la récurrence ponctuelle. Pour cela nous utilisons le lemme II 2. Il existe un voisinage fin V de x tel que

$$\forall z \in V \qquad P_z[T_{\{x\}} < \infty] \geqslant a > 0$$

donc

$$u_{\{x\}}(X_t) \geqslant a \qquad \text{pour} \qquad X_t \in V$$

et

$$\overline{\lim_{t \to \infty}}\, u_{\{x\}}(X_t) \geqslant a$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

Donc la limite $Z_{\{x\}}$ ne peut être nulle et par conséquent $1_{\mathcal{R}_{\{x\}}} = 0$ P_x presque sûrement. x est ponctuellement récurrent.

Remarque. — Ceci démontre qu'un tel point est valeur d'adhérence fine d'une trajectoire appartenant à un ensemble de probabilité 1, lorsque $t \to \infty$ si et seulement si la trajectoire passe une infinité de fois par ce point. Cela rejoint un théorème de M. Brelot : sous l'hypothèse C_X une suite x_n a pour valeur d'adhérence fine x si et seulement si $x_n = x$ une infinité de fois (cf. [5]).

On peut indépendamment de la théorie précédente donner un critère nécessaire et suffisant de récurrence ponctuelle qui redémontre la loi de tout ou rien.

Proposition V 1. — x est ponctuellement récurrent si et seulement si

$$E_x \int_0^\infty E_{X_t}[e^{-T\{x\}}]dt = \infty.$$

Il est ponctuellement transient si et seulement si

$$E_x \int_0^\infty E_{X_t}[e^{-T\{x\}}]dt < \infty.$$

Démonstration. — Nous posons

$$\Phi^1(y) = E_y[e^{-T\{x\}}]$$
$$\psi^\lambda(y) = \Phi^1(y) - (\lambda - 1)U_\lambda \Phi^1(y).$$

1^er^ cas : *x est régulier pour lui-même.*

Il existe alors une fonctionnelle additive finie continue A_t telle que :

$$E_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} dA_t = \psi^\lambda(x).$$

Le changement de temps associé à A_t est défini par :

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \inf\{ s; A_s > t \} \quad \text{si} \quad \{ s; A_s > t \} \neq \varnothing. \\ &= \infty \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

Blumenthal et Getoor [*4*] ont montré qu'il existe un subordinateur $Y = \{ \tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}, (Y_t)_{t \in R^+} \}$ et une variable aléatoire S exponentielle définie sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ et indépendante de Y, tels que $\{ \Omega, \mathcal{F}, P_x, (\tau(t))_{t \in R^+} \}$ soit équivalent au subordinateur tué au temps S. En outre, le paramètre de S est $C(x) = \lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{1}{\psi^\lambda(x)}$.

Il y a donc deux cas possibles :

1° si $\lim\limits_{\lambda \to 0} \psi^\lambda(x) = \infty$, $\tilde{P}(S = \infty) = P_x(\forall t,\ \tau(t) < \infty; = 1$.

2° si $\lim\limits_{\lambda \to 0} \psi^\lambda(x) < \infty$, $\tilde{P}(S < \infty) = 1$.

Dans ce cas le processus Y étant markovien, $\tilde{P}[Y_{S-} < \infty] = 1$ et il existe une variable aléatoire T définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ par $T = \inf \{ t;\ \tau(t) = \infty \}$ telle que :

$$P_x[T < \infty, \quad \forall t \geqslant T \quad \tau(t) = \infty \quad \text{et} \quad \tau(T)^- < \infty] = 1.$$

Mais d'après Blumenthal et Getoor, on a les inclusions suivantes

$$\{t\,;\forall\varepsilon>0\quad A_{t+\varepsilon}-A_t>0\}\subseteq\{t\,;X_t=x\}\subseteq\{t\,;\forall\varepsilon>0\quad A_{t+\varepsilon}-A_{t-\varepsilon}>0\}$$

donc

$$\begin{aligned}\{\,\omega\,;\overline{\lim_{t\to\infty}}\ 1_{\{x\}}(X_t)=0\,\}&=\{\,\omega\,;\exists S(\omega)<\infty\quad\forall t\geqslant S(\omega)\quad A_t(\omega)=A_{S(\omega)}(\omega)\,\}\\&=\{\,\omega\,;\exists S(\omega)<\infty\ \forall t<A_s(\omega)\quad\tau(t)<S(\omega),\forall t\geqslant A_s(\omega)\quad\tau(t)=\infty\}\end{aligned}$$

et

$$\overline{\lim_{\lambda\to 0}}\ \psi^\lambda(x)=+\infty\Leftrightarrow P_x[\overline{\lim_{t\to\infty}}\ 1_{\{x\}}(X_t)=1]=1$$

$$\overline{\lim_{\lambda\to 0}}\ \psi^\lambda(x)<\infty\quad\Leftrightarrow P_x[\overline{\lim_{t\to\infty}}\ 1_{\{x\}}(X_t)=0]=1.$$

2e cas : x est irrégulier pour lui-même.

Soit $V(t)$ le nombre de visites en x avant l'instant t

$$\forall t<\infty\qquad P_x[V(t)<\infty]=1 \text{ (d'après Blumenthal et Getoor).}$$

Il est clair que l'on a récurrence si $P_x[V(\infty)=\infty]=1$ et transience si $P_x[V(\infty)<\infty]=1$, or

$$E_x\int_0^\infty e^{-\lambda t}dV(t)=B\psi^\lambda(x)$$

où B est une constante positive indépendante de λ.

D'autre part soit la suite de temps d'arrêts

$$\begin{aligned}T_1&=T_{\{x\}}\\T_2&=T_1+T_{\{x\}}\circ\theta_{T_1}\\&\vdots\\T_n&=T_{n-1}+T_{\{x\}}\circ\theta_{T_{n-1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_x[T_n<\infty]&=P_x[T_{n-1}<\infty,\ T_{\{x\}}\circ\theta_{T_{n-1}}<\infty]\\&=(P_x[T_{\{x\}}<\infty])^n\end{aligned}$$

par application de la propriété de Markov forte.

Distinguons deux cas : 1° si $P_x[T_{\{x\}}<\infty]=1$:

$$\forall n\qquad P_x[T_n<\infty]=1.$$

Il existe P_x p. s. dans une infinité de T_n finis qui ne peuvent pas être situés dans un intervalle compact, puisque $P_x[V(t) < \infty] = 1$ quel que soit t. Il y a donc presque sûrement récurrence.

$$P_x[V(\infty) = \infty] = 1 \quad \text{et} \quad E_x[V(\infty)] = \infty.$$

2° Si $P_x[T_{\{x\}} < \infty] = k < 1$,

$$P_x[T_n < \infty] = k^n \quad \text{et} \quad P_x[\exists n,\ T_n = \infty] = 1.$$

Il y a donc transience et $E_x[V(\infty)] < \infty$ car $P_x[V(\infty) \geqslant n] < k^n$ et

$$E_x[V(\infty)] = \sum_{n=0}^{\infty} n P_x[V_\infty = n] \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} n k^n$$

or il est aisé de voir en appliquant le théorème de convergence monotone

$$\lim_{\lambda \to 0} \psi^\lambda(x) < \infty \Leftrightarrow E_x[V(\infty)] < \infty$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \psi^\lambda(x) = \infty \Leftrightarrow E_x[V(\infty)] = \infty.$$

Le critère est donc également valable dans ce cas et on peut le transformer pour atteindre celui de l'énoncé car $\lim\limits_{\lambda \to 0} \psi^\lambda(x) = +\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{\lambda \to 0} U_\lambda \Phi^1(x) = +\infty$ donc si et seulement si

$$\lim_{\lambda \to 0} E_x \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} E_{x_t}[e^{-T_{\{x\}}}] dt = +\infty$$

et par une nouvelle application du théorème de convergence monotone si et seulement si

$$E_x \int_0^{+\infty} E_{x_t}[e^{-T_{\{x\}}}] = +\infty.$$

On a maintenant un critère analogue pour le comportement de x pour la loi y.

Proposition V 2. — x est ponctuellement y-récurrent si et seulement si

$$E_y \int_0^{+\infty} E_{x_t}[e^{-T_{\{x\}}}]\, dt = \infty$$

x est ponctuellement y-transient si et seulement si

$$E_y \int_0^{+\infty} E_{x_t}[e^{-T_{\{x\}}}] dt < \infty.$$

Démonstration.

$$P_y[\mathcal{R}_{\{x\}}] > 0 \Leftrightarrow P_y[T_{\{x\}} < \infty] > 0 \quad \text{et} \quad P_x[\mathcal{R}_{\{x\}}] = 1$$

en effet

$$\begin{aligned} P_y[\mathcal{R}_{\{x\}}] &= P_y[\mathcal{R}_{\{x\}} \circ \theta_{T_{\{x\}}}] = P_y[P_y[\mathcal{R}_{\{x\}} \circ \theta_{T_{\{x\}}} \mid \mathcal{F}_{T_{\{x\}}}]] \\ &= P_y\left[P_{X_{T_{\{x\}}}}[\mathcal{R}_{\{x\}}] 1_{(T_{\{x\}} < \infty)}\right] \end{aligned}$$

et comme $X_{T_{\{x\}}} = x$

$$P_y[\mathcal{R}_{\{x\}}] = P_y[T_{\{x\}} < \infty] . P_x[\mathcal{R}_{\{x\}}]$$

calculons maintenant

$$\begin{aligned} E_y\left[\int_0^{+\infty} E_{X_t}[e^{-T_{\{x\}}}] dt\right] &= E_y\left[\int_0^{T_{\{x\}}} E_{X_t}[e^{-T_{\{x\}}}] dt\right] \\ &\quad + E_y\left[\int_{T_{\{x\}}}^{\infty} E_{X_t}[e^{-T_{\{x\}}}] dt\right] \\ &= E_y\left[\int_0^{T_{\{x\}}} e^{-(T_{\{x\}} - t)} dt\right] + P_y(T_{\{x\}} < \infty) E_x\left[\int_0^{\infty} E_{X_t}(e^{-T_{\{x\}}}) dt\right] \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Ce critère peut servir à donner une autre démonstration de l'équivalence entre récurrence ponctuelle et récurrence fine pour un point non polaire.

Cas particuliers. — Le critère de récurrence ponctuelle prend une forme plus simple sous l'hypothèse (F) de Hunt ([*5*] ou [*6*] exposé 10). Rappelons que sous cette hypothèse, on définit une mesure excessive ξ et des noyaux fonctions séparément semi-continus inférieurement $(x, y) \to u_\lambda(x, y)$ pour $\lambda > 0$. Les noyaux potentiels $U_\lambda(x, .)$ sont absolument continus par rapport à ξ et ont $u_\lambda(x, .)$ pour densité. Enfin étant donné un point x de E le rapport des fonctions $\psi^\lambda(.)$ et $u_\lambda(., x)$ est constant et indépendant de λ; il est nul si et seulement si x est polaire. Ceci permet de transcrire la proposition V 2.

Proposition V 3. — Sous l'hypothèse (F) de Hunt, pour tout couple de points x et y de E, tel que x est non polaire, 2 cas sont possibles :

1° $\lim\limits_{\lambda \to 0} u_\lambda(y, x) = \infty$ et x est ponctuellement y-récurrent;

2° $\lim\limits_{\lambda \to 0} u_\lambda(y, x) = \infty$ et x est ponctuellement y-transient.

VI. — APPLICATION A LA TOPOLOGIE FINE

Il est bien connu ([*3*]) que la topologie fine est la topologie la moins fine rendant continues les fonctions du cône $\mathcal{E}_\lambda$ pour $\lambda > 0$.

En revanche on ne savait pas dans quelles conditions le résultat était vrai pour $\lambda = 0$. Nous allons ici préciser ces conditions :

Nous appellerons $\mathcal{T}_f$ la topologie fine et $\mathcal{T}_0$ la topologie la moins fine rendant continues les fonctions du cône $\mathcal{E}_0$. $\mathcal{T}_0$ est moins fine que $\mathcal{T}_f$.

Proposition VI 1. — Étant donné deux points x et y de E les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1° $\forall f \in \mathcal{E}_0 \quad f(x) = f(y)$.

2° x et y sont finement récurrents et appartiennent à une même classe.

Démonstration : *a*) 1) $\Leftarrow$ 2). — En effet $\{ \Omega, \mathcal{F}_t, P_x, f_0 X_t \}$ est une surmartingale positive, séparable; elle admet donc une limite P_x presque sûrement lorsque $t \to \infty$; or x et y étant finement récurrents et appartenant à la même classe $f(x)$ et $f(y)$ sont P_x presque sûrement valeurs d'adhérence de $f_0 X_t$ lorsque $t \to \infty$, ce qui entraîne $f(x) = f(y)$.

b) 1) $\Leftarrow$ 2). — Pour tout V de $\mathcal{V}_f(x)$ et tout W de $\mathcal{V}_f(y) . u_V(x)$ et $u_W(x) \in \mathcal{E}_0$, donc

$$u_V(x) = 1 = u_V(y)$$
$$u_W(x) = 1 = u_W(y)$$

et x et y communiquent.

Montrons que x et y sont finement récurrents.

Étant donné V de $\mathcal{V}_f(x)$ et W de $\mathcal{V}_f(y)$ désignons par $\mathcal{A}(V, W)$ la suite de temps d'arrêts

$$\begin{aligned}
T_0 &= T_V \\
T_1 &= T_V + T_W \circ \theta_{T_V} \\
&\cdots \\
T_{2P} &= T_{2P-1} + T_V \circ \theta_{T_{2P-1}} \\
T_{2P+1} &= T_{2P} + T_W \circ \theta_{T_{2P}}.
\end{aligned}$$

Montrons par récurrence que $P_x[T_p < \zeta] = P_x[T_p < \infty] = 1$, pour tout P et tout couple (V, W). La propriété est vraie pour $p = 0$.

Supposons la vraie pour $2p$ et pour tout couple (U, W). Alors étant donné un couple (V, W), montrons que $P_x[T_{2p+1} < \zeta] = 1$.

$$P_x[T_{2p+1} < \zeta] = E_x[1_{(T_{2p}<\zeta)} E_{X_{T_{2p}}}(T_W < \zeta)] = E_x[u_W(X_{T_{2p}})].$$

Pour tout ε, il existe un fermé fin V_ε de $\mathcal{V}_f(x)$ inclus dans

$$V \cap \{ z ; u_W(z) > 1 - \varepsilon \}.$$

Soit T_p^ε la suite $\mathcal{A}(V_\varepsilon, W)$

$$P_x[T_{2p+1} < \zeta] \geqslant P_x[T_{2p+1}^\varepsilon < \zeta] > 1 - \varepsilon$$

et

$$P_x[T_{2p+1} < \zeta] = 1.$$

Le passage de $2p + 1$ à $2p + 2$ est identique en échangeant les rôles de V et W.

Si W^c est dans $\mathcal{V}_f(x)$, $E_x[e^{-\lambda T_W}] < 1$ et il existe un fermé fin V de $\mathcal{V}_f(x)$ et 2 nombres A et $a > 0$ tels que pour tout z de V, $P_z[T_W > A] > a$ (cf. lemme II 1). La suite $\mathcal{A}(V, W)$ croît P_x p. s. vers $+\infty$ si $p \to \infty$ grâce au théorème de Borel-Cantelli car :

$$\sum_p P_x[T_{2p+1} - T_{2p} > A \mid \mathcal{F}_{T_{2p-1}}] 1_{(T_{2p-1})} = \sum_p P_{X_{T_{2p-1}}}[T_V + T_W \cdot \theta_{T_V} > A]$$
$$\geqslant a \sum_p 1_{(T_{2p-1} < \zeta)} = \infty \qquad (P_x \text{ p. s.}).$$

Donc pour tout W de $\mathcal{V}_f(y)$, $P_x[\mathcal{R}_W] = 1$ et y est finement récurrent.

Si x est un point de E désignons par $\mathcal{V}_0(x)$ la base de filtre de ses voisinages presque boréliens pour la topologie $\mathcal{T}_0$.

Proposition VI 2. — $\mathcal{V}_f(x) = \mathcal{V}_0(x)$ si et seulement si x est finement transient ou est une trappe.

Démonstration. — *a*) Supposons x finement récurrent :

— si x est une trappe, x est dans $\mathcal{V}_f(x)$. Mais $\{ x \} = \{ z ; P_z[\sigma_{\{x\}} < \infty] = 1 \}$ donc x est aussi dans $\mathcal{V}_0(x)$. Donc $\mathcal{V}_0(x) = \mathcal{V}_f(x)$;

— si x n'est pas une trappe, il existe un U dans $\mathcal{V}_f(x)$ tel que $\sup_{x \in E} E_y[\sigma_U] < M$ (lemme II 3).

D'où $P_x[\mathcal{R}_{U^c}] = 1$ (proposition IV 2).

Montrons que U n'est pas dans $\mathcal{V}_0(x)$, autrement dit que pour toute suite $f_1 \ldots f_n$ de fonctions de $\mathcal{E}_0$ et pour toute suite $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ de réels positifs :

$$\{ | f_1 - f_1(x) | < \varepsilon_1 \} \cap \ldots \cap \{ | f_n - f_n(x) | < \varepsilon_n \} \cap U^c \neq \varnothing .$$

Soit

$$\tilde{\Omega} = \bigcap_{i=1}^{n} \{ \omega \, ; \lim_{t \to \infty} f_i[X_t(\omega)] = f_i(x) \} \cap \mathcal{R}_{U^c}.$$

$P_x[\tilde{\Omega}] = 1$ car x est finement récurrent. Mais pour tout ω de $\tilde{\Omega}$, il existe un T tel que pour tout $t \geqslant T$ et pour $i = 1 \dots n$.

$$|f(X_t(\omega)) - f_i(x)| < \varepsilon_i.$$

Comme ω est dans $\mathcal{R}_{U^c}$, ceci implique que pour $i = 1 \dots n$

$$\exists y \in U^c \quad \text{tel que} \quad |f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon_i.$$

b) Supposons x finement transient.

Montrons d'abord que si U est dans $\mathcal{V}_f(x)$ et tel que

$$\sup_{y \in E} E_y[\sigma_U] < M < \infty$$

il existe un ensemble V de $\mathcal{V}_f(x)$ inclus dans U tel que

$$E_x[u_V(X\sigma_U)] < 1.$$

Supposons en effet que pour tout V de $\mathcal{V}_f(x)$, $E_x[n_V(X\sigma_U)] = 1$ et à tout V de $\mathcal{V}_f(x)$ associons la suite

$$T_1^V = \sigma_U + T_V \circ \theta_{\sigma_U}$$
$$\vdots$$
$$T_p^V = T_{p-1}^V + T_1^V \circ \theta_{T_{p-1}^V}.$$

Montrons par récurrence que pour tout V et tout p

$$P_x[T_p^V < \zeta] = 1.$$

La propriété est vraie pour $p = 1$ puisque

$$\begin{aligned} P_x[T_1^V < \zeta] &= P_x[\sigma_U + T_V \circ \theta_{\sigma_U} < \zeta] \\ &= E_x[1_{\{\sigma_U < \zeta\}} P_{X_{\sigma_U}}[T_V < \zeta]] \\ &= E_x[u_V(X_{\sigma_U})] = 1. \end{aligned}$$

Supposons-la vraie pour p. A tout V de $\mathcal{V}_f(x)$ et tout ε, on peut associer un fermé fin V_ε de $\mathcal{V}_f(x)$ inclus dans $V \cap \{ z ; E_z[u_V(X_{\sigma_U})] > 1 - \varepsilon \}$.

$$\begin{aligned} P_x[T_{p+1}^V < \zeta] &= P_x\left[T_p^V + T_1^V \circ \theta_{T_p^V} < \zeta\right] \\ &\geqslant P_x\left[T_p^{V}\varepsilon + T_1^V \circ \theta_{T_p^{V_\varepsilon}} < \zeta\right] \\ &\geqslant E_x[1(T_p^V\varepsilon < \zeta) E_{X_{T_p^{V_\varepsilon}}}(T_1^V < \zeta)] \geqslant 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

et

$$P_x[T^V_{p+1} < \zeta] = 1.$$

Mais $E_x[e^{-\lambda\sigma_U}] = 1$ et il existe un V fermé fin de $\mathcal{V}_f(x)$ et 2 constantes A et $a > 0$ telles que $\inf_{z \in V} P_z[\sigma_U > A] = a$.

Pour tout W inclus dans V, la suite T^W_p croît vers $+\infty$ (toujours par le théorème de Borel-Cantelli) et $P_x[\mathcal{R}_W] = 1$: x est finement récurrent.

Montrons que $\mathcal{V}_0(x) = \mathcal{V}_f(x)$: Soit W dans $\mathcal{V}_f(x)$. Il existe d'après le lemme II 3 un U de $\mathcal{V}_f(x)$ inclus dans W tel que, $\sup_{y \in E} E_y[\sigma_U] < M < \infty$.

Donc il existe un V de $\mathcal{V}_f(x)$ tel que, $E_x[u_V(X_{\sigma_U})] < u_V(x) = 1$. L'ensemble $\{ z;\ E_z[u_V(X_{\sigma_U})] < u_V(z) \}$ appartient à $\mathcal{V}_0(x)$ et est inclus dans U donc dans W. Donc $\mathcal{V}_0(x) \supset \mathcal{V}_f(x)$; comme $\mathcal{C}_0$ est moins fine que $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{V}_0(x) = \mathcal{V}_f(x)$.

COROLLAIRE. — La topologie fine d'un processus de Hunt est la topologie la moins fine rendant continues les fonctions 0-excessives si et seulement si les seuls points finement récurrents sont des trappes.

VII. — EXEMPLES

(1) *Proposition VII 1.* — Tout point du mouvement brownien plan est finement récurrent. En outre, il y a une seule classe récurrente.

Remarquons que les points du mouvement brownien plan sont polaires. La récurrence fine n'entraîne donc pas la récurrence ponctuelle dans le cas des points polaires.

Cette proposition résulte de la proposition VI 1. En effet les fonctions excessives du mouvement brownien plan sont les fonctions surharmoniques positives dans le plan, qui sont constantes. C'est aussi une conséquence du théorème III 1, car le mouvement brownien est à résolvante fortement fellérienne.

On retrouve ainsi quelques résultats connus sur le mouvement brownien plan :

— presque toute trajectoire est dense dans le plan [*13*] ;

— pour tout ensemble Γ de mesure de Lebesgue non nulle, le temps de séjour dans Γ est presque sûrement infini : en effet

$$U^\lambda(0, \Gamma) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_\Gamma \frac{1}{2\pi t} e^{-\frac{x^2+y^2}{2t}} dxdy$$
$$= \int_\Gamma dxdy \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{2\pi t} e^{-\frac{x^2+y^2}{2t}} dt > 0$$

d'où

$$P_0\left[\int_0^\infty 1_\Gamma(X_s)ds = \infty\right] = 1 \text{ grâce à la proposition (VI-3).}$$

(2) Soit X un processus de Hunt, F un fermé régulier pour X. $\varphi(x) = E_x[e^{-T_F}]$ est alors un potentiel régulier de la classe D, il existe une fonctionnelle additive continue de support fin F telle que

$$\varphi(x) = E_x\int_0^\infty e^{-t}dA_t.$$

Soit $\tau(t)$ le changement de temps associé à cette fonctionnelle additive alors

$$P_x[\forall t \in R_+ X\tau(t) \in F^*] = 1 \qquad \text{où} \qquad F^* = F \cup \{\delta\}.$$

Motoo [15] a montré qu'il existait un processus de Hunt $\tilde{X}$ sur F

$$\tilde{X} = (\tilde{\Omega}, \tilde{X}_t, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{\Theta}_t, (\tilde{P}_x)_{x\in F})$$

équivalent au processus à valeurs dans F $(\Omega, \mathcal{F}, X\tau(t), (P_x)_{x\in F})$.

Dans la suite nous appellerons $\tilde{X}$ le processus trace de X sur F.

Proposition VII 2. — *a*) La topologie fine du processus X est la trace de la topologie fine du processus X sur F;

b) un point x de F est finement récurrent pour $\tilde{X}$ si et seulement s'il est finement récurrent pour X;

c) les classes de X sont les intersections des classes de X avec F.

Démonstration. — *a*) Nous noterons $\mathcal{V}_f(x)$ le filtre des voisinages fins de x pour X; soit x appartenant à F et U voisinage fin de x pour le processus X

$$P_x[\inf\{t; X_t \in U^c\} > 0] = 1$$

donc

$$P_x[\inf\{t; X\tau(t) \in F\backslash U \cap F\} > 0] = 1$$

puisque $t \to \tau(t)$ est continue à droite presque sûrement

$$P_x[\inf\{t; X_t \in F\backslash U \cap F\} > 0] = 1.$$

Ce qui montre que $U \cap F$ est un voisinage fin de x pour la topologie fine associée à $\tilde{X}$.

Réciproquement soit $U \in \tilde{\mathcal{V}}_f(x)$

$$P_x[\inf\{t; X_t \notin U\} > 0] = 1$$

donc

$$P_x [\inf \{ t;\, X_{\tau(t)} \notin U \} > 0] = 1$$

donc

$$P_x [\inf \{ t;\, X_t \notin U \cup F^c \} > 0] = 1$$

donc $U \cup F^c$ est un voisinage fin de x pour X.

b) Soit x un point de F. Grâce à la 1re partie, si x est finement récurrent pour $\tilde{X}$, il est évidemment finement récurrent pour X. Réciproquement, supposons x finement récurrent pour X. Soit V dans $\tilde{\mathcal{V}}_f(x)$.

$$0 = \tilde{P}_x [\inf (t\,;\, \tilde{X}_t \in V)] = P_x [\inf (t;\, X_{\tau(t)} \in V] = P_x [\inf (t;\, X_t \in V)]$$

et

$$u_V(x) = P_x[T_V < \infty] = 1.$$

Il existe un W de $\mathcal{V}_f(x)$, tel que pour tout y de W, $u_V(y) \geqslant \frac{1}{2}$. x étant finement récurrent pour X, $P_x(\mathcal{R}_W) = 1$, d'où :

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\; u_V(X_t) \geqslant \frac{1}{2} \qquad P_x \text{ p. s.}$$

et

$$P_x(\mathcal{R}_V) = 1 = P_x (\overline{\lim_{t\to\infty}}\; 1_V[X_{\tau(t)}] = 1)$$
$$= \tilde{P}_x\, (\overline{\lim_{t\to\infty}}\; 1_V(\tilde{X}_t) = 1)$$

x est donc finement récurrent pour $\tilde{X}$.

c) Soit x un point de F, finement récurrent pour X et pour $\tilde{X}$. Étant donné un point y de F, si x conduit à y pour X, alors x conduit à y pour $\tilde{X}$. En effet pour tout V de $\mathcal{V}_f(y)$:

$$P_x[T_V < \infty] \geqslant P_x[\exists t\,;\, X_{\tau(t)} \in V \cap F]$$
$$\geqslant P_x[T_{V\cap F} < \infty] > 0.$$

Réciproquement, montrons que, si, x conduit à y pour X, alors x conduit à y pour $\tilde{X}$.

Soit V un élément de $\tilde{\mathcal{V}}_f(y)$; on a $u_V(y) = 1$. Soit

$$M = \left\{ z \in E\,;\; u_V(z) > \frac{1}{2} \right\}.$$

On a $P^x[T_W < \infty] = a > 0$ donc $P^x[T_V < \infty] \geqslant \frac{a}{2}$ ce qui montre que $x \to y$ pour $\tilde{X}$.

(3) *Proposition VII 3.* — La trace du mouvement brownien plan sur une droite du plan est un processus de Cauchy.

COROLLAIRES. — *a*) Le processus de Cauchy est finement récurrent et n'a qu'une classe récurrente. Le temps de séjour du processus de Cauchy dans tout ensemble de mesure de Lebesgue non nulle est presque sûrement infini.

b) Le mouvement brownien plan récurre presque sûrement dans tout sous-ensemble d'une droite, de mesure de Lebesgue non nulle.

Le début de *a*) résulte des propositions (VII 1, 2, 3). Pour la fin de *a*) considérons un sous-ensemble Γ de R de mesure de Lebesgue non nulle. Pour le processus de Cauchy

$$U_\lambda(0, \Gamma) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt \int_\Gamma \frac{t}{\pi} \frac{dx}{x^2 + t^2} = 0$$

d'où

$$P_0\left[\int_0^\infty 1_\Gamma(X_t)dt = \infty\right] = 1 \text{ (proposition 3).}$$

Pour démontrer la partie *b*) désignons par $\tau(t)$ le changement de temps associé à la droite $\{ y = 0 \}$ pour obtenir la trace du mouvement brownien sur cette droite comme en (2). Pour tout x :

$$1 = E_{\{x,0\}} [\overline{\lim_{t\to\infty}}\, 1(X\tau(t) \in \Gamma) = 1] = E_{\{x,0\}} [\overline{\lim_{t\to\infty}}\, 1(X_t \in \Gamma) = 1]$$

car l'ensemble des t tel que X_t soit sur $y = 0$ n'est pas $P_{\{x,0\}}$ p. s. borné, ce qui implique $P_{\{x,0\}} [\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty] = 1$.

Remarque. — MacKean [*11*] a montré que les fonctions positives et invariantes d'un processus stable sont constantes. Nous montrons ici que les fonctions excessives des processus stables d'indice $\alpha \geqslant 1$ sont constantes et qu'elles ne le sont pas si $\alpha < 1$.

Les processus stables d'indice $\alpha > 1$ sont en effet ponctuellement donc finement récurrents; les processus stables d'indice $\alpha < 1$ ne sont pas récurrents dans les ouverts.

Démonstration de la proposition VII 3. — *a*) Soit

$$X = \{ \Omega^1, \mathcal{F}^1, (P_x^1)_{x\in R}, (X_t)_{t\in R^+} \}$$

un processus à accroissements indépendants réels, symétrique; pour tout A de $P_x^1(A) = P_0^1(A - x)$ et pour tout λ réel, $E[e^{i\lambda X_t}] = e^{-t\varphi(\lambda)}$ où $\varphi(\lambda)$ est un nombre réel. Soit $Y = \{ \Omega^2, \mathcal{F}^2, (P_y^2)_{y\in R}, (Y_t)_{t\in R^+} \}$ un processus de Feller réel, tel que 0 soit régulier. A Y on peut associer le temps local $\tau(t)$ en 0; avec les notations introduites dans la partie V

$$E_y^2[e^{-\lambda}\tau(t)] = \Phi(y) \exp \frac{-t}{\psi^\lambda(0)}$$

posons

$$E_0^2[e^{-\lambda}\tau(t)] = e^{-tc(\lambda)}.$$

Soit Z le processus de Feller produit des deux précédents :

$$\begin{aligned} Z &= \{ \Omega^1 \times \Omega^2 ; \mathcal{F}^1 \otimes \mathcal{F}^2, P_x^1 \otimes P_y^2, (X_t, Y_t)_{t \in R^+} \} \\ &= \{ \Omega, \mathcal{F} ; P_{\{x,y\}}, (X_t, Y_t)_{t \in R^+} \} \end{aligned}$$

$\tau(t)$ est aussi le changement de temps associé à la fonctionnelle additive continue de 1-potentiel $E_{\{x,y\}}[e^{-T}]$, T étant le temps d'entrée de Z dans la droite $\{ y = 0 \}$.

Pour tout t, $X\tau(t) = 0$ et le processus trace de Z sur $\{ y = 0 \}$ est le processus à accroissements indépendants $\{ \Omega, \mathcal{F}, (P_{x,0})_{x \in R}, (Y\tau(t))_{t \in R^+} \}$.

Pour tout Γ, borélien de R, posons :

$$\begin{aligned} \nu_t(\Gamma) &= P_0^2(Y_t \in \Gamma) \\ \xi_s(\Gamma) &= P_0^1(\tau(s) \in \Gamma) \\ \mu_u(\Gamma) &= P_{0,0}(Y\tau(s) \in \Gamma) \\ E_{\{x,0\}}[e^{i\lambda Y}\tau(u)] &= e^{-i\lambda x} E_{\{0,0\}}[e^{i\lambda Y}\tau(u)] \\ E_{\{0,0\}}[e^{i\lambda Y}\tau(u)] &= \int_0^\infty e^{i\lambda y}\mu_u(dy) = \int_0^\infty \xi_u(dt) \int_0^\infty e^{i\lambda y}\nu_t(dy) \\ &= \int_0^\infty e^{-t\varphi(\lambda)}\xi_u(dt) = e^{-uC[\varphi(\lambda)]}. \end{aligned}$$

Le processus trace de Z sur $\{ y = 0 \}$ est ainsi déterminé.

b) Supposons en particulier que X et Y sont tous deux des mouvements browniens linéaires :

$$E^i[e^{i\lambda X_t}] = E^2[e^{i\lambda Y_t}] = e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \quad \text{et} \quad \varphi(\lambda) = + \frac{\lambda^2}{2}.$$

Pour calculer la loi de $\tau(t)$, désignons par $T_{\{x\}}$ le temps d'entrée après 0 du processus Y dans x. On sait [*13*] que :

$$E_0^2[e^{-\lambda T_{\{y\}}}] = E_y^2[e^{-\lambda T_{\{0\}}}] = e^{-|y|\sqrt{2\lambda}}$$

donc :

$$\begin{aligned} \Phi_1(y) &= e^{-|y|\sqrt{2}} \\ \psi^\lambda(y) &= \Phi_1(y) - (\lambda - 1)U_\lambda\Phi_1(y) \\ &= 1 - (\lambda - 1)\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|z|\sqrt{2}}u_\lambda(y, z)dz \end{aligned}$$

or

$$u_\lambda(x, y) = \frac{e^{-|y-x|\sqrt{2}}}{\sqrt{2\lambda}} \text{(voir par exemple [4])}$$

$$\psi_\lambda(0) = 1 - (\lambda - 1)\frac{2}{\sqrt{2\lambda}}\int_0^\infty e^{-|z|\sqrt{2}}e^{-|z|\sqrt{2\lambda}}dz$$

$$= 1 - (\lambda - 1)\frac{1}{\sqrt{\lambda} + \lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

et

$$E_{\{x,y\}}[e^{-\lambda}\tau(t)] = e^{-|y|\sqrt{2}}\exp\left(-t\sqrt{\lambda}\right)$$

$$C(\lambda) = \sqrt{\lambda} \quad \text{et} \quad C[\varphi(\lambda)] = \sqrt{\frac{\lambda^2}{2}}\frac{|\lambda|}{\sqrt{2}}$$

$$E_{\{x,0\}}[e^{i\lambda Y}\tau(u)] = e^{-i\lambda x}e^{-u\frac{|\lambda|}{\sqrt{2}}}$$

et le processus trace est bien un processus de Cauchy.

(4) *Exemple de processus à accroissements indépendants récurrents dans les ouverts et non finement récurrents.*

Considérons sur R un processus de Poisson X_P symétrique de pas P et de paramètre 1. Soient μ_P^{*t} son semi-groupe de convolution et $e^t\psi_P(\lambda)$ sa fonction caractéristique :

$$e^t\psi_P(\lambda) = e^{t\,[\cos\lambda_{P-1}]}$$

et $\mu_P^{*t}(0)$ est équivalent à $t^{-\frac{1}{2}}$ pour t infiniment grand, grâce au théorème central limite.

Considérons maintenant un processus Y somme de 3 processus indépendants du type précédent, de pas incommensurables, par exemple $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$.

Ce processus est récurrent dans les ouverts car :

$$\frac{1}{\psi_{\sqrt{3}}(\lambda) + \psi_{\sqrt{5}}(\lambda) + \psi_{\sqrt{7}}(\lambda)} = \frac{1}{(\cos\lambda_{\sqrt{3}-1}) + (\cos\lambda_{\sqrt{5}-1}) + (\cos\lambda_{\sqrt{7}-1})}$$

équivaut au voisinage de 0 à $\frac{1}{t^2}\left(\frac{2}{3+5+7}\right)$ et n'est donc pas intégrable au voisinage de 0 : Y est récurrent les ouverts.

Par contre, nous allons montrer que Y n'est pas finement récurrent. 0 est un ouvert fin, car le temps de sortie hors de 0 est une variable exponentielle (de paramètre 3). $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ étant incommensurables, Y_t ne peut être nul que si les 3 processus $X_{\sqrt{3}}(t)$, $X_{\sqrt{5}}(t)$ et $X_{\sqrt{7}}(t)$ sont nuls.

Si μ^{*t} est le semi-groupe associé à Y, $\mu^{*t}(0)$ équivaut pour t infiniment grand à

$$t^{-\frac{3}{2}} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \mu^{*t}(0)dt < \infty = 0$$

est ponctuellement et finement transient.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Azéma J., Kaplan M. et Revuz D., Récurrence fine et récurrence en un point des processus de Markov. *Notes au C. R.*, t. 261, p. 3945-3948.

[2] Azéma J., Kaplan M., et Revuz D., Classes récurrentes d'un processus de Markov. *Notes au C. R.*, t. 261, p. 4320-4322.

[3] Bauer H., Cours de 3e cycle à la Faculté des Sciences de Paris, 2e semestre 1963-1964.

[4] Blumenthal R. M. et Getoor, R. K., Local Times for Markov processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. 3, 1964, p. 50-75.

[5] Brelot, M., *Annali di matematica*, t. 57, 1962, p. 77-95.

[6] Brelot, Choquet et Deny, Séminaire de théorie du potentiel, 5e année, 1961.

[7] Bretagnolle J. et Dacunha Castelle D., Récurrence en un point des processus à accroissements indépendants. *Notes au C. R.*

[8] Dynkin E. B., *Markov Processes*, Springer Verlag, 1965.

[9] Hunt G. A., Markov processes and potentials. *Illinois J. Math.*, t. 2, 1958, p. 151-213.

[10] Kahane J. P. et Salem, R., *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Hermann.

[11] MacKean H. P., Sample functions of stable processes. *Ann. of Math.* (2), t. 61, 1955, p. 564-579.

[12] Kingman J. F. C., Récurrence properties of processes with stationary independent increments. *J. Austral. Math. Soc.*, t. 4, 1964, p. 223-228.

[13] Lévy P., *Processus stochastique et mouvement Brownien*, Gauthier-Villars, 1965.

[14] Meyer P. A., Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov. *Ann. Inst. Fourier*, t. 12, 1962, p. 125-230.

[15] Motoo M., Sweeping out of additive functionals. *Annals of the Institute of statistical mathematics*, t. 16, 1964, p. 317-346.

(Manuscrit reçu le 2 décembre 1965).