

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN-PIERRE CAUBET

Semi-groupes généralisés de matrices positives

Annales de l'I. H. P., section B, tome 1, n° 3 (1964-1965), p. 239-310

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1965__1_3_239_0

© Gauthier-Villars, 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Semi-groupes généralisés de matrices positives

par

Jean-Pierre CAUBET
(Institut Henri Poincaré)

SOMMAIRE. — Étude à l'aide de la théorie des espaces de Riesz de la régularité et des comportements infinitésimaux et asymptotiques des semi-groupes généralisés de matrices positives.

ABSTRACT. — Study by means of lattice cone theory of the regularity, infinitesimal and asymptotic behaviour of generalised semigroups of non-negative matrices.

INTRODUCTION

Les méthodes utilisant la théorie des espaces de Riesz ont été introduites depuis peu dans l'étude des semi-groupes de Markov : citons par exemple les travaux de W. Feller sur les équations de Kolmogorov [7] et [8] et ceux plus récents de J. Neveu notamment sa théorie des semi-groupes de Markov stationnaires sur des espaces dénombrables. L'unité qui se dégage de ces méthodes algébriques, empruntées à la théorie du potentiel, laissait penser qu'elles rendraient compte aisément des propriétés des semi-groupes de Markov non stationnaires, tout au moins sur des espaces finis. Nous montrons dans ce travail qu'il en est bien ainsi et qu'en tout cas sous certaines hypothèses, il en est encore de même dans le cas dénombrable.

Le chapitre I^{er} contient essentiellement des préliminaires. On trouvera d'abord les premières notions sur les semi-groupes (en abrégé s. g.) généralisés de matrices positives sur une famille d'espaces $(E_s)_{s \in T}$, chacun de puis-

sance au plus dénombrable, où T (ensemble temporel totalement ordonné) est un intervalle de la droite numérique finie. Ensuite, nous rappelons quelques résultats sur les espaces de Riesz (ou plus précisément sur les cônes convexes complètement réticulés). Nous donnons enfin (§ 2) une représentation, due à Fréchet, d'un s. g. markovien non stationnaire sur deux états, ce qui suffit dans la suite pour fournir exemples et contre-exemples.

Le chapitre II est consacré à la théorie des s. g. généralisés de matrices positives sur des espaces finis. Nous associons d'abord (§ 3) à un tel s. g. deux familles de cônes convexes réticulés, l'une constituée de ses cônes d'entrée, l'autre de ses cônes de sortie. Puis à tout choix d'un élément sur chaque génératrice extrémale de chacun de ces cônes, nous associons (§ 4) une réduction du s. g. généralisé donné. Chacune de ces réductions constitue un s. g. généralisé de matrices positives sur la famille $(E_{\tau}^*)_{\tau \in S_T}$ des génératrices extrémales des cônes d'entrée et de sortie; l'ensemble temporel (totalement ordonné) étant réunion des instants d'entrée $(t_+)_{t \in T}$ et de sortie $(t_-)_{t \in T}$. Toutes ces réductions peuvent d'ailleurs être considérées comme équivalentes (n° 4.1), ainsi que leurs s. g. actifs (n° 4.2), dont la terminologie est évidemment inspirée de celle de frontière passive due à Feller. Nous montrons alors qu'il existe une famille (T_{β}) d'intervalles, partout dense dans T , sur chacun desquels les dimensions des cônes d'entrée et de sortie sont égales et constantes et toute réduction active. Puis nous établissons (§ 5) l'existence, sur chacun de ces intervalles T_{β} , de réductions continues (cf. proposition 5.2). Le § 6 est consacré à la représentation, comme processus de sauts, de ces réductions continues et les deux paragraphes suivants à l'étude de leur comportement asymptotique aux extrémités de l'intervalle T_{β} . Pour cela, nous caractérisons d'abord (§ 7) les s. g. généralisés dominés par un s. g. continu donné, la notion de dominance étant celle déjà introduite par J. Neveu [10] dans le cas d'un s. g. stationnaire et ceci nous amène à une extension de la notion de s. g. tabou au cas non stationnaire. Les résultats obtenus sur le comportement asymptotique (§ 8) sont énoncés dans les théorèmes 8.2.1 et 8.2.2. Enfin, nous montrons (§ 9) comment cette théorie permet de retrouver simplement et d'interpréter certains résultats dus à Doeblin [6] dans le cas des s. g. stationnaires de matrices positives.

Le chapitre III est consacré à une extension de ces résultats au cas d'un s. g. généralisé de matrices positives sur une famille $(E_s)_{s \in T}$ d'espaces dénombrables. Pour cela, nous faisons d'abord choix d'une hypothèse sous laquelle la frontière de Choquet des cônes d'entrée et de sortie soit au plus de puissance dénombrable. Nous montrons qu'il existe encore une famille (T_{β}) d'intervalles, partout dense dans T , sur chacun desquels ou bien les puis-

sances des frontières de Choquet des cônes d'entrée et de sortie sont finies, égales et constantes, ou bien sont identiquement infinies dénombrables. En se plaçant alors dans ce dernier cas, l'existence de réductions continues n'est cependant plus assurée. Et en faisant dès lors l'hypothèse de cette existence, les résultats se différencient plus nettement encore de ceux obtenus dans le cas fini, car la non-uniformité des mesures q_i associées aux sections continues ne permet pas en général, comme il est d'ailleurs connu dans le cas stationnaire, de donner une représentation de ces réductions continues (cf. th. 10.4.2).

Ce travail représente l'essentiel d'une thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris. Je remercie à ce propos M. J. Neveu qui n'a cessé de suivre mes recherches, M. Fortet pour l'intérêt bienveillant qu'il leur a porté et M. P. Dubreil pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant la présidence du jury.

Enfin, je remercie la Direction des Études et Recherches d'Électricité de France pour l'intérêt qu'elle porte à la recherche théorique et les conditions matérielles exceptionnelles qu'elle assure à ses jeunes chercheurs.

CHAPITRE PREMIER

§ 1 Préliminaires

1.1 **L'ensemble S_R .** — Étant donné la droite numérique R , nous désignerons par S_R l'ensemble défini en adjoignant à R deux éléments notés respectivement ∞_+ et ∞_- et en dédoublant tout nombre $r \in R$ en r_- et r_+ . L'ensemble S_R est totalement ordonné par les relations d'ordre naturelles :

$$\infty_+ < r_- < r_+ < s_- < s_+ < \infty_- \quad r < s \text{ dans } R.$$

De plus, muni de la topologie dont les intervalles $[a_+, b_-]$ constituent une base d'ouverts, l'ensemble (stonien) S_R est compact et totalement discontinu.

Enfin, d'une façon naturelle, à tout intervalle ouvert $T =]a, b[$ de R , on associera en particulier l'intervalle ouvert $S_T =]a_+, b_-[$ de S_R .

1.2 **Semi-groupes généralisés de matrices positives.** — Une matrice réelle Q définie sur un ensemble fini non vide (ou dénombrable) E est dite sous-markovienne à droite (en abrégé sous-markovienne) si :

(a) $Q(\cdot, \cdot) \geq 0$ sur $E \times E$; (b) $\sum_{i \in E} Q(\cdot, i) \leq 1$ sur E . Elle est dite markovienne à droite (en abrégé markovienne) si (b) est une égalité sur E . Semblablement, une matrice réelle Q définie sur l'ensemble fini ou dénombrable, non vide, E est dite sous-markovienne à gauche si :

(a) $Q(\cdot, \cdot) \geq 0$ sur $E \times E$; (b) $\sum_{i \in E} Q(i, \cdot) \leq 1$ sur E . Elle est dite markovienne à gauche si (b) est une égalité sur E .

Soit T un intervalle de la droite numérique R . D'une manière générale, on définit dans ce travail un semi-groupe (en abrégé s. g.) généralisé de matrices positives sur T par la donnée :

- (a) d'une famille $(E_t)_{t \in T}$ d'ensembles finis ou dénombrables et non vides;
- (b) d'une famille $Q = \{Q_s^t; s < t \text{ dans } T\}$ de matrices définies sur les produits $E_s \times E_t$, telles que de plus :

$$(1.2.1) \quad 0 \leq Q_s^t < +\infty \quad \text{sur} \quad E_s \times E_t.$$

$$(1.2.2) \quad Q_s^t Q_t^u = Q_s^u \quad s < t < u.$$

Afin de ne pas alourdir certains énoncés, nous convenons d'exclure le s. g. généralisé Q identiquement nul sur T .

Un s. g. généralisé Q de matrices positives est dit sous-markovien à droite (en abrégé sous-markovien) si chacune des matrices Q_s^t de la famille Q est sous-markovienne à droite. Il est dit markovien à droite (en abrégé markovien) si chacune des matrices Q_s^t de la famille Q est markovienne. Étant donné un s. g. sous-markovien Q , on appelle s. g. markovien associé à Q le semi-groupe défini par adjonction aux espaces $(E_s)_{s \in T}$ d'une famille absorbante $\omega = (\omega_s)_{s \in T}$ telle que :

$$(a) \quad \sum_{i \in E_t} Q_s^t(ij) + Q_s^t(i, \omega_t) = 1 \quad (i \in E_s);$$

$$(b) \quad Q_s^s(\omega_s, \omega_s) = 1;$$

$$(c) \quad Q_s^s(\omega_s, j) = 0 \quad (j \in E_t).$$

Semblablement, un s. g. généralisé Q de matrices positives est dit sous-markovien à gauche si chacune des matrices Q_s^t de la famille Q est sous-markovienne à gauche. En particulier, il est dit markovien à gauche, si chacune des matrices Q_s^t de la famille Q est markovienne à gauche. De même, étant donné un s. g. Q sous-markovien à gauche, on appelle s. g.

markovien à gauche associé à Q le s. g. défini par adjonction aux espaces $(E_s)_{s \in T}$ d'une famille naissante $\alpha = (\alpha^s)_{s \in T}$ telle que :

- (a)
$$\sum_{i \in E_s} Q_i^s(i, j) + Q_i^s(\alpha_s, j) = 1 \quad (j \in E_t);$$
- (b)
$$Q_i^s(\alpha_s, \alpha_t) = 1;$$
- (c)
$$Q_i^s(i, \alpha_t) = 0 \quad (i \in E_s).$$

Enfin, on dit d'un s. g. généralisé Q de matrices positives qu'il est bistochastique si chacune des matrices Q_i^s de la famille Q est simultanément markovienne à droite et à gauche.

1.3 Les fonctions d'intervalle Φ_i^s et Ψ_i^s associées au s. g. généralisé Q . — Rappelons (cf. [14], p. 19 et sq.) qu'une fonction d'intervalle α_i^s est dite intégrable sur l'intervalle (a, b) lorsque les décompositions finies $\alpha_{i_1}^a + \dots + \alpha_b^{i_n}$ convergent suivant le filtre des partitions finies de l'intervalle (a, b) et que l'intégrabilité sur un intervalle entraîne l'intégrabilité sur chacun de ses intervalles partiels.

Soit alors le s. g. généralisé Q de matrices positives, défini sur l'intervalle T de la droite numérique. On désigne par Φ_i^s la fonction d'intervalle telle que :

$$(1.3.1) \quad \exp[-\Phi_i^s] = \sup_{i \in E_s} \sum_{j \in E_t} Q_i^s(i, j).$$

Cette fonction d'intervalle est non décroissante par décomposition, autrement dit elle satisfait à la relation :

$$\Phi_u^s \geq \Phi_t^s + \Phi_u^t \quad s < t < u$$

et on a donc le résultat suivant :

Théorème 1.3.1. — Il existe sur l'intervalle $T = [a, b]$ de la droite numérique une mesure additive $d\Phi$ telle que, suivant le filtre des partitions finies de l'intervalle $[u, v]$ de T , on ait :

$$-\infty \leq \int_u^v d\Phi = \lim \downarrow [\Phi_{i_1}^u + \dots + \Phi_{i_n}^v] \leq \infty$$

l'intégrabilité sur l'intervalle $[u, v]$ entraînant alors celle sur chacun de ses intervalles partiels.

Notons que ce dernier point résulte ici immédiatement des relations :

$$-\infty < \int_u^v d\Phi \leq \Phi_u^u + (\Phi_{i_1}^{u'} + \dots + \Phi_{i_n}^{v'}) + \Phi_v^{v'} < \infty$$

et que la mesure $d\Phi$ est seulement additive. En effet, soit le s. g. généralisé $Q_t^s = a(s) a^{-1}(t)$, où $a(s)$ est une fonction numérique finie strictement positive, à ceci près quelconque. On aura alors $\int_u^v d\Phi = \log a(v) - \log a(u)$.

Ces remarques sont aussi bien valables pour la fonction d'intervalle Ψ_t^s , telle que :

$$(1.3.2) \quad \exp [-\Psi_t^s] = \sup_{j \in E_t} \sum_{i \in E_s} Q_t^s(i, j)$$

et l'on désignera par $d\Psi$ la mesure additive correspondante sur T .

On verra plus loin que l'intégrabilité des mesures $d\Phi$ et $d\Psi$ est en particulier assurée lorsque le s. g. généralisé Q est continu (cf. n° 6.2) et ceci nous permettra de ramener certaines démonstrations au cas d'un s. g. sous-markovien à droite ou à gauche, en utilisant les s. g. \widehat{Q} et \check{Q} définis ci-dessous.

1.4 Les semi-groupes généralisés \widehat{Q} et \check{Q} . — Soit le s. g. généralisé Q . Sous la réserve que la mesure $d\Phi$ est intégrable, nous désignerons dans la suite par \widehat{Q} le s. g. généralisé sous-markovien, associé au s. g. généralisé Q , tel que :

$$(1.4.1) \quad \widehat{Q}_t^s = \exp \left[- \int_s^t d\Phi \right] Q_t^s$$

défini sur les produits $E_s \times E_t$ ($s < t$). Nous utiliserons d'ailleurs la même notation pour désigner le s. g. markovien associé à \widehat{Q} et obtenu par adjonction aux espaces $(E_s)_{s \in T}$ d'une famille absorbante $(\omega_s)_{s \in T}$.

Semblablement et sous la réserve que la mesure $d\Psi$ est intégrable, \check{Q} désignera le s. g. sous-markovien à gauche :

$$(1.4.2) \quad \check{Q}_t^s = \exp \left[- \int_s^t d\Psi \right] Q_t^s$$

défini sur les produits $E_s \times E_t$ ($s < t$) et que l'on rendra éventuellement markovien à gauche par adjonction d'une famille $(\alpha_s)_{s \in T}$.

1.5 Cônes convexes complètement réticulés. — Nous rappelons ci-dessous quelques résultats sur les cônes convexes complètement réticulés. Le théorème 1.5.1 est classique et on en trouvera la démonstration dans Bourbaki [3].

Le théorème 1.5.2 est dû à J. Neveu [10], dont nous empruntons la terminologie.

Soit E un espace vectoriel ordonné, c'est-à-dire un espace vectoriel sur

le corps des nombres réels, sur lequel est défini un cône convexe $E^+ \subset E$ (dit cône positif) tel que :

$$f \in E^+ \quad \text{et} \quad -f \in E^+ \Rightarrow f = 0$$

et partiellement ordonné par la relation $f_1 \leq f_2$ si $f_2 - f_1 \in E^+$.

Définition 1.5.1. — Soit E un espace vectoriel ordonné. On appelle cône convexe complètement réticulé un sous-ensemble F du cône positif E^+ tel que :

$$(a) \quad f_1, \dots, f_n \in F \quad \text{et} \quad \sum_1^n c_i f_i \in E^+ \Rightarrow \sum_1^n c_i f_i \in F \quad \text{quelques soient les constantes } c_1 \dots c_n \text{ (positives ou non) et quel que soit } n > 0.$$

(b) Tout sous-ensemble non vide $H \subset F$, majoré par un élément de F , possède une borne supérieure dans F que l'on notera $\vee H$.

Tout sous-ensemble non vide $H \subset F$ possède une borne inférieure que l'on notera $\wedge H$.

Définition 1.5.2. — Soit F_1 un sous-cône convexe d'un cône convexe complètement réticulé $F \subset E$. Le cône F_1 est dit épais dans F si :

$$(a) \quad f \in F, \quad f_1 \in F_1 \quad \text{et} \quad f \leq f_1 \Rightarrow f \in F_1.$$

Si de plus

(b) Tout sous-ensemble non vide $H \subset F_1$, majoré par un élément de F , possède une borne supérieure dans F_1 , le cône F_1 est dit une bande positive de F .

Théorème 1.5.1 (F. Riesz). — Soit H un sous-ensemble non vide d'un cône convexe complètement réticulé F . L'ensemble H_1 de tous les éléments

$$f \in F \text{ tels que } f \leq \sum_1^n f_i \text{ pour au moins une famille } \{f_1, \dots, f_n\} \text{ d'éléments}$$

de H est le plus petit sous-cône de F , épais dans F qui contient H .

L'ensemble B_1 de toutes les bornes supérieures des sous-ensembles de H_1 est la plus petite bande positive de F contenant H . L'ensemble B_2 de tous les éléments de F étrangers à chacun des éléments de H est une bande positive. L'ensemble B_2 est aussi l'ensemble de tous les éléments de F étrangers à chacun des éléments de B_1 et inversement B_1 est l'ensemble de tous les éléments de F étrangers à chacun des éléments de B_2 .

Enfin, tout élément de F se décompose d'une façon unique en la somme d'un élément de B_1 et d'un élément de B_2 .

Théorème 1.5.2 (J. Neveu). — Soient F et F' deux cônes convexes complètement réticulés, Φ et Φ' deux applications additives non décroissantes définies respectivement sur F dans F' et sur F' dans F , telles que de plus :

$$\Phi' \circ \Phi \geq I \text{ sur } F \quad \Phi \circ \Phi' \leq I' \text{ sur } F'$$

où I et I' désignent respectivement les applications identiques de F sur F et de F' sur F' .

Alors le cône convexe complètement réticulé F est isomorphe par Φ et Φ' à la bande positive $\bar{F}' \subset F'$ des éléments $f' \in F'$ tels que $f' = \Phi \circ \Phi'(f')$. La bande positive complémentaire de la bande \bar{F}' dans F' est constituée des éléments $f' \in F'$ tels que $\Phi'(f') = 0$.

§ 2 Semi-groupes généralisés markoviens sur deux états.

Nous allons d'abord reprendre un exemple simple et connu de s. g. généralisé, afin d'en effectuer la réduction. Nous indiquerons ainsi brièvement la façon dont nous commençons l'étude d'un s. g. généralisé de matrices positives et cette étude suffira d'ailleurs pour nous fournir dans la suite exemples et contre-exemples.

La représentation que nous utilisons ci-dessous d'un s. g. markovien sur deux états est due à Fréchet [9] quoiqu'en fait la méthode que nous reproduisons pour l'obtenir, où l'on ne fait alors aucune hypothèse sur la régularité des semi-groupes cherchés, nous a été communiquée par J. Neveu.

Définissons un semi-groupe markovien à deux états sur un intervalle T de la droite réelle finie R par la donnée

(1) d'une famille $(E_t)_{t \in T}$ d'ensembles constitués chacun de deux états ;

(2) d'une famille $\{P_t^s ; s < t \text{ dans } T\}$ de matrices markoviennes définies sur les $E_s \times E_t$ et telles que l'on ait :

$$(2.1) \quad P_t^s P_u^s = P_u^s \quad s < t < u.$$

Il existe sur les $(E_s)_{s \in T}$ deux sections disjointes i et j telles que le déterminant de P_t^s soit positif (≥ 0) pour tout couple (s, t) . En effet, définissons par exemple deux sections disjointes quelconques, nous obtiendrons les deux sections cherchées en permutant éventuellement dans certains des E_t les états deux à deux.

Posons dans ces conditions :

$$(2.2) \quad P_t^s = \begin{pmatrix} a_t^s & 1 - a_t^s \\ 1 - b_t^s & b_t^s \end{pmatrix}$$

Théorème 2.1 (Fréchet). — Soit P un s. g. généralisé markovien à deux états et T \subset R un intervalle sur lequel $\det (P_t^s) > 0$. Il existe deux fonctions Φ et Ψ , positives (≥ 0), non décroissantes, telles que le s. g. généralisé P soit donné par les relations :

$$(2.3) \quad \alpha_t^s = \frac{\Phi(t) + \Psi(s)}{\Phi(t) + \Psi(t)} \quad b_t^s = \frac{\Psi(t) + \Phi(s)}{\Phi(t) + \Psi(t)}.$$

Démonstration. — Il résulte des relations :

$$(2.4) \quad \begin{aligned} 1 &\geq \det (P_t^s) > 0 && s < t \text{ dans T} \\ \det (P_t^s) \det (P_u^t) &= \det (P_u^s) && s < t < u \text{ dans T} \end{aligned}$$

qu'il existe une fonction $t \rightarrow d(t)$ positive, non décroissante et déterminée à une constante multiplicative (positive) près, telle que :

$$(2.5) \quad \det (P_t^s) = \frac{d(s)}{d(t)} \quad s < t \text{ dans T.}$$

D'après la loi de s. g. généralisé, les éléments α_t^s et b_t^s vérifient les relations :

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \alpha_t^s \alpha_u^t + (1 - \alpha_t^s)(1 - b_u^t) &= \alpha_u^s && s < t < u. \\ b_t^s b_u^t + (1 - b_t^s)(1 - \alpha_u^t) &= b_u^s \end{aligned}$$

Compte tenu de la relation (2.4), les deux relations ci-dessus s'écrivent respectivement :

$$(2.7) \quad \begin{aligned} [d(t)\alpha_t^s - d(s)] + [d(u)\alpha_u^t - d(t)] &= d(u)\alpha_u^s - d(s) \\ [d(t)b_t^s - d(s)] + [d(u)b_u^t - d(t)] &= d(u)b_u^s - d(s) \end{aligned} \quad s < t < u$$

d'où résulte bien l'existence de deux fonctions Φ et Ψ telles que :

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \Phi(t) - \Phi(s) &= d(t)\alpha_t^s - d(s) \\ \Psi(t) - \Psi(s) &= d(t)b_t^s - d(s). \end{aligned}$$

Comme de plus les seconds membres sont positifs, ces fonctions, déterminées à une constante additive près, sont non décroissantes. Par addition des relations (2.8), on obtient enfin :

$$[\Phi(t) + \Psi(t)] - [\Phi(s) + \Psi(s)] = d(t) - d(s).$$

On pourra donc poser :

$$(2.9) \quad d(s) = \Phi(s) + \Psi(s)$$

et choisir les constantes dans Φ et Ψ pour que $\Phi(s) \geq 0$, $\Psi(s) \geq 0$. Des relations (2.8) et (2.9), on déduit la représentation cherchée des éléments α_t^s et b_t^s .

Théorème 2.2. — Soit P un s. g. généralisé markovien à deux états, défini sur l'intervalle $T \subset \mathbb{R}$. Il existe sur T un système d'intervalles T_α , ne se chevauchant pas, sur chacun desquels on a $\det (P_t^s) > 0$ et le s. g. markovien P donné par les relations :

$$(2.10) \quad a_t^s = \frac{\Phi_\alpha(t) + \Psi_\alpha(s)}{\Phi_\alpha(t) + \Psi_\alpha(t)} \quad b_t^s = \frac{\Phi_\alpha(t) + \Phi_\alpha(s)}{\Psi_\alpha(t) + \Psi_\alpha(t)}$$

où Φ_α et Ψ_α sont deux fonctions positives non décroissantes. De plus, lorsque $\det (P_t^t) = 0$, le s. g. généralisé P est donné par les relations :

$$a_t^s = 1 - b_t^s = a(t) \quad t \notin \bigcup_\alpha T_\alpha$$

$$a_t^s = 1 - b_t^s = \frac{\Phi_\alpha(t)}{\Phi_\alpha(t) + \Psi_\alpha(t)} \quad t \in T_\alpha$$

où $a(t)$ est une fonction telle que $0 \leq a(t) \leq 1$, à ceci près quelconque.

Démonstration. — Il résulte de la relation :

$$\det (P_t^s) \det (P_u^t) = \det (P_u^s) \quad s < t < u \text{ dans } T$$

qu'il existe sur T une famille d'intervalles T_α disjoints deux à deux, à l'intérieur (et éventuellement aux extrémités) desquels $\det (P_t^t) > 0$. D'après le théorème précédent, il existe pour chacun de ces intervalles T_α deux fonctions Φ_α et Ψ_α positives, non décroissantes, telles que le s. g. markovien P soit donné sur chacun de ces intervalles par les relations (2.10).

Lorsque $\det (P_t^t) = 0$, les relations (2.6) deviennent respectivement $a_u^s = a_u^t$ et $b_u^s = b_u^t$ ($s < t < u$). Posons $a_t^t = a(t)$. Si $t \notin \bigcup_\alpha T_\alpha$, $a(t)$ est arbitraire à la condition $0 \leq a(t) \leq 1$ près. Si, par contre, $t \in T_\alpha$ en prenant $t < u$ dans T_α , la première relation (2.6) s'écrit, compte tenu de la première relation (2.3) :

$$a(t)d_\alpha(t) - a(u)d_\alpha(u) = \Phi_\alpha(t) - \Phi_\alpha(u).$$

Ainsi, la fonction $a(t)$ est nécessairement de la forme $a(t) = \frac{\Phi_\alpha(t) + a}{\Phi_\alpha(t) + \Psi_\alpha(t)}$, et la condition $0 \leq a(t) \leq 1$ impose que la constante a soit telle que :

$$- \inf_{t \in T_\alpha} \Phi_\alpha(t) \leq a \leq \inf_{t \in T_\alpha} \Psi_\alpha(t).$$

On peut donc choisir la constante additive dans Φ_α pour que $a = 0$.

Étant donné une fonction numérique, nous poserons dans la suite $f(t_+) = \lim_{u \downarrow t} f(u)$ et semblablement $f(t_-) = \lim_{u \uparrow t} f(u)$, lorsque ces limites

existent. Les fonctions Φ_α et Ψ_α étant non décroissantes, les expressions $\Phi_\alpha(t_+)$, $\Phi_\alpha(t_-)$, $\Psi_\alpha(t_+)$ et $\Psi_\alpha(t_-)$ ont en particulier un sens.

Les mesures additives $d\Phi$ et $d\Psi$. — Nous considérons dans cette section le s. g. P défini sur les $(E_s)_{s \in T}$. Le s. g. P étant markovien, la mesure $d\Phi$ est identiquement nulle.

La fonction d'intervalle Ψ_t est d'autre part définie par la relation :

$$\begin{aligned} \exp [-\Psi_t^s] &= (1 + a_t^s - b_t^s) \vee (1 + b_t^s - a_t^s) & s < t \\ &= 1 + |a_t^s - b_t^s|. \end{aligned}$$

En particulier, sur un intervalle T_α , on a :

$$\exp [-\Psi_t^s] = 1 + d_\alpha^{-1}(t) \cdot |(\Phi_\alpha(t) - \Phi_\alpha(s)) - (\Psi_\alpha(t) - \Psi_\alpha(s))|.$$

On en déduit la relation :

$$\exp [-d\Psi] = 1 + d_\alpha^{-1}(t_+) \cdot |d\Phi_\alpha - d\Psi_\alpha|$$

en convenant par exemple de poser $d\Phi_\alpha = \Phi_\alpha(t_+) - \Phi_\alpha(t_-)$ lorsque $t \in T_\alpha$ est un point de discontinuité de la fonction Φ_α .

Si maintenant les fonctions Φ_α et Ψ_α sont continues, il résulte alors des inégalités élémentaires :

$$d_\alpha^{-1}(t) \cdot \text{var. tot. } (\Phi_\alpha - \Psi_\alpha) \Big|_s^t \leq - \int_s^t d\Psi \leq d_\alpha^{-1}(s) \cdot \text{var. tot. } (\Phi_\alpha - \Psi_\alpha) \Big|_s^t$$

que $-d\Psi$ est une mesure de Riemann et plus précisément que $-\int_s^t d\Psi$ est

l'intégrale de Riemann de la fonction $\frac{|\Phi'_\alpha - \Psi'_\alpha|}{\Phi_\alpha + \Psi_\alpha}$.

CHAPITRE II

SEMI-GROUPES GÉNÉRALISÉS DE MATRICES POSITIVES SUR DES ENSEMBLES FINIS

§ 3 Les cônes fondamentaux.

Dans les sections (3.1) et (3.2) de ce paragraphe, on se donne un intervalle T de la droite numérique, $(E_t)_{t \in T}$ une famille d'ensembles finis non vides, telle que si $d_t = \text{Card } (E_t)$, on ait $\sup_{t \in T} d_t < \infty$ et Q_t^s un semi-groupe généralisé de matrices positives sur les $E_s \times E_t$.

3.1 Les cônes d'entrée F_t . — Pour tout $t \in T$, on désigne par F_t l'ensemble des familles $f = \{d_s : s > t \text{ dans } T\}$ de mesures positives sur les E_s , telles que de plus :

$$(3.1.1) \quad 0 \leq f_s < \infty \quad \text{sur } E_s$$

$$(3.1.2) \quad f_u Q_v^u = f_v \quad t < u < v.$$

Les deux théorèmes suivants énoncent les premières propriétés fondamentales de ces cônes. Au § 4, nous en donnons une autre propriété importante.

Théorème 3.1.1. — L'ensemble F_t est un cône convexe complètement réticulé de dimension finie. La borne inférieure d'une famille non vide quelconque $\{f^\beta\}$ d'éléments de F_t est donnée par :

$$(3.1.3) \quad (\bigwedge_{\beta} f^\beta)_s = \lim_{u \downarrow t} \downarrow (\inf_{\beta} f_u^\beta) Q_s^u.$$

Semblablement, la borne supérieure d'une famille non vide $\{f^\beta\}$ d'éléments de F_t , majorée dans F_t , est donnée par :

$$(3.1.4) \quad (\bigvee_{\beta} f^\beta)_s = \lim_{u \downarrow t} \uparrow (\sup_{\beta} f_u^\beta) Q_s^u.$$

Démonstration. — Il est facile de vérifier qu'étant donné un ensemble fini $\{f^i\}_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de F_t et des nombres réels $\{C^i\}_{1 \leq i \leq n}$

(positifs ou négatifs), alors $(\sum_1^n C^i f^i)_s = \sum_1^n C^i f_s^i$ est un élément de F_t

pourvu que $\sum_1^n C^i f_s^i \geq 0$ sur E_s . Il s'ensuit que F_t est un cône ordonné.

De plus, soit f un élément de F_t qui majore la famille $\{f^\beta\}$, c'est-à-dire tel que pour tout β , $f_u \geq f_u^\beta$ sur E_u ($u > t$). Il résulte alors des inégalités élémentaires :

$$(3.1.5) \quad f_u \geq \sup_{\beta} f_u^\beta$$

$$f_v = f_u Q_v^u \geq (\sup_{\beta} f_u^\beta) Q_v^u \geq \sup_{\beta} (f_u^\beta Q_v^u) = (\sup_{\beta} f_v^\beta)$$

que l'expression $(\sup_{\beta} f_u^\beta) Q_v^u$ est majorée par f_v et croissante lorsque $u \downarrow t$.

La formule (3.1.4) définit par suite un élément de F_t . Comme cet élément est majoré dans F_t par tout majorant de la famille $\{f^\beta\}$, c'est donc bien la borne supérieure de cette famille.

On vérifierait de façon semblable la formule (3.1.3).

Théorème 3.1.2. — La dimension des cônes F_t satisfait aux inégalités :

$$(3.1.6) \quad \dim F_t \leq \liminf_{s \downarrow t} \dim F_s \leq \liminf_{s \downarrow t} \text{Card} (E_s).$$

De plus, pour tout instant $t \in T$, pour lequel l'application $s \rightarrow \dim F_s$ admet un maximum localement à droite de t , cette application est constante sur un intervalle (t, \cdot) à droite de t .

Démonstration. — Montrons d'abord l'inégalité (3.1.6), ou ce qui est équivalent, que si pour une suite $s_n \downarrow t$ on a $\text{Card} (E_{s_n}) < p$, alors $\dim F_t < p$.

Pour cela, étant donné p éléments $\{f^i\}_{1 \leq i \leq p}$ du cône F_t , montrons qu'ils ne sont pas linéairement indépendants. Pour tout n , il existe un vecteur $C_n = \{C_n^1, \dots, C_n^p\}$ tel que :

$$\sum_1^p |C_n^i| = 1 \quad \sum_1^p C_n^i f_{s_n}^i = 0.$$

Puisque pour tout $u > s_n$:

$$\sum_1^p C_n^i f_u^i = \left[\sum_1^p C_n^i f_{s_n}^i \right] Q_u^{s_n} = 0$$

nous trouvons qu'en effet, pour tout vecteur C adhérent aux C_n ,

$$\sum |C^i| = 1 \quad \sum_1^p C^i f_u^i = 0 \quad u > t.$$

La démonstration de la première inégalité dans (3.1.6) est analogue. Montrons, en effet, que si pour une suite d'instant $(s_n) \downarrow t$, on a $\dim F_{s_n} < p$, alors $\dim F_t < p$. Étant donné p éléments $\{f^i\}_{1 \leq i \leq p}$ du cône F_t , il existe pour tout n un vecteur C_n tel que :

$$\sum_1^p |C_n^i| = 1 \quad \sum_1^p C_n^i f_{s_n}^i = 0 \quad s > s_n.$$

Ainsi, pour tout vecteur C adhérent aux C_n , on aura encore :

$$\sum_1^p |C^i| = 1 \quad \sum_1^p C^i f_u^i = 0 \quad u > t.$$

La constance de la dimension des cônes F_s sur un intervalle (t, u) à droite de t , moyennant l'hypothèse d'un maximum local en t , résulte alors du fait qu'elle ne prend que des valeurs entières et de l'inégalité :

$$\dim F_t \leq \liminf_{s \downarrow t} \dim F_s$$

on déduit de cette dernière assertion le résultat suivant :

Théorème 3.1.3. — Il existe sur T un ensemble d'intervalles (T_α) , dont la réunion est partout dense dans T , à l'intérieur de chacun desquels la dimension des cônes d'entrée F_t est constante.

Démonstration. — Soit $D = \sup_{t \in T} \dim F_t$. Il résulte du théorème (3.1.2) qu'il existe une famille (T_α^D) d'intervalles partiels de T sur chacun desquels la dimension des cônes F_t est égale à D . Sur l'ensemble $T \setminus \bigcup_{\alpha} \overline{T_\alpha^D}$, constitué d'une famille d'intervalles partiels de T , les cônes d'entrée ont une dimension au plus égale à $D - 1$ et donc il existe une famille d'intervalles (T_α^{D-1}) sur chacun desquels la dimension des cônes d'entrée est égale à $D - 1$. On épuisera ainsi l'intervalle T en poursuivant jusqu'à la dimension 1.

3.2 Les cônes de sortie G_t . — Pour tout $t \in T$, nous désignons par G_t l'ensemble des familles $g = \{g_s; s > t \text{ dans } T\}$ de fonctions positives sur les E_s , telles que de plus :

$$(3.2.1) \quad 0 \leq g_s < \infty \text{ sur } E_s$$

$$(3.2.2) \quad g_u = Q_v^u g_v \quad u < v < t.$$

Les cônes de sortie G_t ont des propriétés entièrement semblables aux propriétés qui ont été énoncées pour les cônes d'entrée F_t . Explicitement, nous avons les résultats suivants :

Théorème 3.2.1. — L'ensemble G_t est un cône convexe complètement réticulé de dimension finie. La borne inférieure d'une famille non vide quelconque $\{g^\beta\}$ d'éléments de G_t est donnée par :

$$(3.2.3) \quad (\bigwedge_{\beta} g^\beta)_s = \lim_{u \uparrow t} \downarrow Q_u^s (\inf_{\beta} g_u^\beta).$$

Semblablement, la borne supérieure d'une famille non vide $\{g^\beta\}$ d'éléments de G_t , majorée dans G_t , est donnée par :

$$(3.2.4) \quad (\bigvee_{\beta} g^\beta)_s = \lim_{u \uparrow t} \uparrow Q_u^s (\sup_{\beta} g_u^\beta).$$

Théorème 3.2.2. — La dimension des cônes de sortie G_t satisfait aux inégalités :

$$\dim G_t \leq \liminf_{s \downarrow t} \dim G_s \leq \liminf_{s \downarrow t} \text{Card} (E_s).$$

De plus, pour tout instant $t \in T$, pour lequel l'application $s \rightarrow \dim G_s$ admet un maximum localement à gauche de t , cette application est constante sur un intervalle (\cdot, t) à gauche de t .

Théorème 3.2.3. — Il existe sur T un ensemble d'intervalles (T_β) , dont la réunion est partout dense dans T , à l'intérieur de chacun desquels la dimension des cônes de sortie G_t est constante.

§ 4 La réduction.

D'après le théorème 3.1.1 du paragraphe précédent, chacun des cônes d'entrée F_t est isomorphe à un cône R_+^n (où $n = \dim F_t$) et possède ainsi une famille $E_{t_+}^*$ de n génératrices extrémales. Et semblablement, d'après le théorème 3.2.1, chacun des cônes de sortie G_t est isomorphe à un cône R_+^m (où $m = \dim G_t$) et possède ainsi une famille $E_{t_-}^*$ de m génératrices extrémales.

Nous allons dans ce paragraphe montrer comment il est possible de substituer à chacun des ensembles E_s les ensembles $E_{s_-}^*$ et $E_{s_+}^*$ et de construire sur les produits $E_{s_\pm}^* \times E_{t_\pm}^*$ ($s_\pm < t_\pm$) une famille de s. g. généralisés Q_t^{\pm} de matrices positives associés au s. g. donné Q .

Un tel s. g. généralisé sera dit une réduction du premier.

Puisque chacun des cônes d'entrée F_t est isomorphe à un cône R_+^n (où $n = \dim F_t$) pour chacun de ces cônes il existe n éléments $(Q_u^{t_+}(i, \cdot))_{i \in E_{t_+}^*}$ portés respectivement par une génératrice extrémale du cône F_t et déterminés chacun à une constante multiplicative positive près. De plus, il résulte de la définition même des éléments du cône F_t que l'on a :

$$(4.1) \quad Q_v^{t_+} = Q_u^{t_+} Q_v^u \quad t < u < v \text{ dans } T.$$

Une fois ces n éléments extrémaux choisis, l'élément f^t le plus général du cône F_t est donné par :

$$(4.2) \quad f_u = \sum_{i \in E_{t_+}^*} \xi(i) Q_u^{t_+}(i, \cdot) \quad t < u \text{ dans } T$$

où $\xi(i)$ est une mesure positive bornée arbitraire sur E_{t+}^* et cette représentation est alors unique.

Semblablement, puisque chacun des cônes de sortie G_t est isomorphe à un cône R_+^m (où $m = \dim G_t$), il existe pour chacun de ces cônes m éléments $(Q_{t-}^u(\cdot, j))_{j \in E_{t-}^*}$ portés respectivement par une génératrice extrême du cône G_t et déterminés chacun à une constante multiplicative positive près. De la définition même des éléments du cône G_t , il résulte que l'on a aussi la relation :

$$(4.3) \quad Q_{t-}^u = Q_v^u Q_{t-}^v \quad u < v < t \text{ dans } T.$$

Une fois ces m éléments extrémaux choisis, l'élément g le plus général de ce cône est donné par :

$$g_n = \sum_{j \in E_{t-}^*} Q_{t-}^u(\cdot, j) \eta(j)$$

où η est une fonction positive bornée arbitraire sur E_{t-}^* et cette représentation est alors unique.

Les opérations de réduction du s. g. généralisé donné Q , que nous allons maintenant décrire, sont alors déterminées d'une manière unique.

(a) Matrices de transition entre éléments extrémaux de deux cônes d'entrée, ou de deux cônes de sortie.

Pour tout $u > t$ dans T et tout $i \in E_{t+}^*, \{Q_v^{t+}(i, \cdot); v > u\}$ est un élément du cône F_u . Il existe donc, d'après ce qui précède, une mesure positive bornée unique $\xi(i, \cdot)$ sur E_{u+}^* telle que :

$$Q_v^{t+}(i, \cdot) = \sum_{j \in E_{u+}^*} \xi(i, j) Q_v^{u+}(j, \cdot).$$

La matrice de transition Q_{u+}^{t+} , définie sur $E_{t+}^* \times E_{u+}^*$, sera par définition la matrice dont l'élément générique est $\xi(i, j)$. On a ainsi la relation :

$$(4.4) \quad Q_v^{t+} = Q_{u+}^{t+} Q_v^{u+} \quad t < u < v \text{ dans } T.$$

Semblablement, pour tout $t < u$ et tout $j \in E_{u-}^*, \{Q_{t-}^s(\cdot, j); s < t\}$ est un élément de G_t . Il existe ainsi une fonction positive bornée unique $\eta(\cdot, j)$ sur E_{t-}^* , telle que :

$$Q_{t-}^s(\cdot, j) = \sum_{k \in E_{t-}^*} Q_{t-}^s(\cdot, k) \eta(k, j).$$

La matrice de transition Q_{u-}^{t-} , définie sur $E_{t-}^* \times E_{u-}^*$, sera par définition la matrice dont l'élément générique est $\eta(j, i)$ et on a la relation :

$$(4.5) \quad Q_{u-}^s = Q_{t-}^s Q_{u-}^{t-} \quad s < t < u \text{ dans } T.$$

(b) Matrices de transition entre éléments extrémaux d'un cône d'entrée et d'un cône de sortie.

On définira la matrice Q_{u-}^{t+} ($t < u$ dans T) sur $E_{t+}^* \times E_{u-}^*$ par la relation :

$$(4.6) \quad Q_{u-}^{t+} = Q_s^{t+} Q_{u-}^s \quad t < s < u \text{ dans } T.$$

Cette définition est, en effet, indépendante de s puisque si $t < s < s' < u$, on a :

$$Q_s^{t+} Q_{u-}^s = Q_s^{t+} Q_s^s Q_{u-}^{s'} = Q_s^{t+} Q_{u-}^{s'}.$$

(c) Matrices de transition entre éléments extrémaux d'un cône de sortie et d'un cône d'entrée.

Soient les instants $u \leq s \leq v$ dans T . Pour tout $k \in E_s$ fixé, $\{Q_r^s(\cdot, k); r < u\}$ est un élément du cône G_u . Il existe donc sur E_{u-}^* une fonction positive bornée unique $\xi(\cdot, k)$ telle que :

$$Q_r^s(\cdot, k) = \sum_{j \in E_{u-}^*} Q_{u-}^r(\cdot, j) \xi(j, k).$$

La matrice positive, définie sur $E_{u-}^* \times E_s$, dont l'élément générique est $\xi(i, j)$ est par définition la matrice de transition Q_{u-}^{s-} ($u \leq s$). On a donc la relation :

$$(4.7) \quad Q_r^s = Q_{u-}^r Q_{u-}^{s-} \quad r < u < s \text{ dans } T.$$

Semblablement, on définit la matrice positive sur $E_s \times E_{v+}^*$ telle que :

$$(4.8) \quad Q_t^s = Q_{v+}^s Q_t^{v+} \quad s < v < t \text{ dans } T.$$

La matrice de transition Q_{v+}^{u-} ($u \leq v$) sur $E_{u-}^* \times E_{v+}^*$ est alors définie par la relation :

$$(4.9) \quad Q_{v+}^{u-} = Q_s^{u-} Q_{v+}^s$$

dont le membre de droite est indépendant du choix de s .

Nous allons maintenant vérifier que les matrices $Q_{i_{\pm}}^{s_{\pm}}$ définies ci-dessus sur les produits $E_{s_{\pm}}^* \times E_{t_{\pm}}^*$ ($s_{\pm} < t_{\pm}$) constituent un semi-groupe généralisé de matrices positives, en indiquant les démonstrations dans l'ordre même où nous avons défini ces matrices de transition. Nous désignerons par un

point tout instant de T qu'il sera inutile d'expliciter. Par contre, tout élément de S_T sera écrit explicitement.

De la définition même des matrices de transition entre éléments extrémaux de deux cônes d'entrée, c'est-à-dire de la relation (4.4), on déduit les relations :

$$Q_v^{s+} = Q_{u+}^{s+} Q_v^{u+} \quad \text{et} \quad Q_v^{s+} = Q_{t+}^{s+} Q_v^{t+} = Q_{t+}^{s+} Q_{u+}^{t+} Q_v^{u+}$$

d'où l'on déduit la relation :

$$(4.10) \quad Q_{u+}^{s+} = Q_{t+}^{s+} Q_{u+}^{t+} \quad s < t < u \text{ dans } T.$$

De même, les relations (4.4) et (4.7 à 9) donnent la succession d'égalités :

$$Q_{u+}^{s+} Q_v^{u+} = Q_v^{s+} = Q_{t+}^{s+} Q_v^{t+} = Q_{t+}^{s+} Q_{t-}^{t+} Q_v^{n+} = Q_{t-}^{s+} Q_{u+}^{t-} Q_v^{u+}$$

d'où l'on déduit la relation :

$$(4.11) \quad Q_{u+}^{s+} = Q_{t-}^{s+} Q_{u+}^{t-} \quad s < t < u \text{ dans } T.$$

On vérifierait semblablement les relations :

$$(4.12) \quad Q_{u-}^{s-} = Q_{t-}^{s-} Q_{u-}^{t-} = Q_{t+}^{s-} Q_{u-}^{t+} \quad s < t < u \text{ dans } T.$$

Dans le cas maintenant d'une matrice de transition entre éléments extrémaux d'un cône d'entrée F_t et d'un cône de sortie G_u , on déduit des relations (4.7 à 9) et (4.6) la succession d'égalités :

$$Q_{u-}^{s+} = Q_{t+}^{s+} Q_{u-}^{t+} = Q_{t+}^{s+} Q_{v-}^{t+} Q_{u-}^{v-} = Q_{v-}^{s+} Q_{t+}^{v-} Q_{u-}^{t+}.$$

Comme, d'après les relations (4.11) et (4.12), le dernier membre est égal à $Q_{t+}^{s+} Q_{u-}^{t+}$ et à $Q_{v-}^{s+} Q_{u-}^{v-}$, on obtient les relations :

$$(4.13) \quad Q_{u-}^{s+} = Q_{t+}^{s+} Q_{u-}^{t+} = Q_{t-}^{s+} Q_{u-}^{t-} \quad s < t < u \text{ dans } T.$$

Dans le cas enfin d'une matrice de transition entre éléments extrémaux d'un cône de sortie G_t et d'un cône d'entrée F_u ($t < u$ dans T), on déduit successivement des relations (4.7 à 9) et (4.6) les égalités :

$$Q_{s-} Q_{u+}^{s-} Q_{u+}^{u+} = Q_{s-} = Q_{t+}^{s-} Q_{s-} = Q_{s-} Q_{t+}^{s-} Q_{v-}^{t+} Q_{u+}^{v-} Q_{u+}^{u+} = Q_{s-} Q_{t+}^{s-} Q_{v-}^{t+} Q_{u+}^{v-} Q_{u+}^{u+}.$$

Comme d'après les relations (4.11) et (4.12) le dernier membre est égal simultanément à :

$$Q_{s-} Q_{t+}^{s-} Q_{u+}^{t+} Q_{u+}^{u+} \quad \text{et} \quad Q_{s-} Q_{v-}^{s-} Q_{u+}^{v-} Q_{u+}^{u+}$$

on obtient les dernières relations cherchées :

$$(4.14) \quad Q_{u+}^{s-} = Q_{t+}^{s-} Q_{u+}^{t+} = Q_{t-}^{s-} Q_{u+}^{t-} \quad s < t < u \text{ dans } T.$$

En conclusion, nous avons montré le résultat suivant :

Théorème 4.1. — Les relations (4.1.1), (4.1.2) et (4.3.·) définissent un s. g. généralisé Q_t^{\pm} de matrices positives sur les $E_s^* \times E_t^*$.

Proposition 4.1. — Tout s. g. réduit peut être considéré comme sa propre réduction :

Démonstration. — Indiquons d'abord ce que nous entendons par la réduction d'un s. g. généralisé $Q = \{ Q_\tau^\sigma ; \sigma < \tau \text{ dans } S_\tau \}$, défini sur S_τ .

On considère pour tout instant $t_+ \in S_\tau$ le cône F_{t_+} de ses lois d'entrées à l'instant $(t_+)_+$, c'est-à-dire le cône des familles $f = \{ f_\sigma ; \sigma > t_+ \}$ des mesures positives sur les $(E_\sigma^*)_{\sigma > t_+}$, telles que :

$$\begin{aligned} 0 &\leq f_\sigma < \infty \\ f_\tau &= f_\sigma Q_\tau^\sigma && t_+ < \sigma < \tau \text{ dans } S_\tau \end{aligned}$$

et on désigne par $E_{(t_+)_+}^*$ l'ensemble de ses génératrices extrémales.

Semblablement, pour tout instant $t_- \in S_\tau$, on considère le cône G_{t_-} de ses lois de sorties à l'instant t_- , c'est-à-dire le cône des familles : $g = \{ g_\sigma ; \sigma < t_- \}$ de fonctions positives définies sur les $(E_\sigma^*)_{\sigma < t_-}$, telles que :

$$\begin{aligned} 0 &\leq g < \infty \\ g_\sigma &= Q_\tau^\sigma g_\tau && \sigma < \tau < t_- \text{ dans } S_\tau \end{aligned}$$

et on désigne par $E_{(t_-)_-}^*$ l'ensemble de ses génératrices extrémales.

On fait alors le choix d'éléments extrémaux sur chacune des génératrices extrémales des cônes F_{t_+} et G_{t_-} , ce qui détermine les matrices $Q_{(t_+)_+}^{\sigma}$ et $Q_{(t_-)_-}^\sigma$ sur les produits $E_{(t_+)_+}^* \times E_\sigma^*$ et $E_\sigma^* \times E_{(t_-)_-}^*$ respectivement.

La construction de la réduction de ce s. g. généralisé s'effectue dès lors comme il a été indiqué ci-dessus, en définissant successivement les matrices $Q_{(u_+)_+}^{(t_+)_+}$, $Q_{(u_-)_-}^{(t_-)_-}$, $Q_{(u_+)_+}^{(t_+)_+}$ et $Q_{(u_+)_+}^{(t_-)_-}$; et comme d'ailleurs l'application $S : S_\tau \rightarrow S_{(S_\tau)}$ est un homéomorphisme, il est enfin naturel d'identifier S_{S_τ} à S_τ lui-même. Soit alors $Q = \{ Q_t^s ; s < t \text{ dans } T \}$ un s. g. généralisé donné et $Q = \{ Q_\tau^\sigma ; \sigma < \tau \text{ dans } S_\tau \}$ une de ses réductions. Nous allons montrer que pour tout $t \in T$, les cônes F_t et F_{t_+} (resp. G_t et G_{t_-}) sont isomorphes, ce qui achèvera la démonstration :

Pour tout $t \in T$ et tout $i \in E_t$, $Q_t^i(i, \cdot) = \{ Q_u^i(i, \cdot) ; u > t \}$ appartient à F_t ; il existe donc une matrice positive et une seule, $Q_{t_+}^i$, telle que :

$$Q_u^i = Q_{t_+}^i Q_u^{t_+}$$

Semblablement, $Q_i(\cdot, i) \{ Q_i^t(\cdot, i) ; s < t \}$ appartient à G_i , d'où l'existence et l'unicité d'une matrice positive Q_i^s telle que :

$$Q_i^s = Q_{i-}^s Q_i^{t-}.$$

On définit ainsi, sur l'ensemble $S_T \cup T$, muni de l'ordre naturel $t_- < t < t_+$, un s. g. généralisé de matrices positives dont la restriction à T est identique au s. g. généralisé donné et dont la restriction à S_T est identique à sa réduction.

Il est dès lors évident que par exemple les cônes F_{t_+} et F_{t-} sont isomorphes.

En effet, soit $h : F_{t_+} \rightarrow F_t$ l'application qui à tout $f \in F_{t_+}$ associe l'élément $[h(\bar{f})]_s = f_{u\pm} Q_s^u(t_+ \leqq u_{\pm} < s)$ de F_t . Et inversement, soit $k : F_t \rightarrow F_{t_+}$ l'application qui à tout $f \in F_t$ associe l'élément $[k(f)]_{v\pm} = f_u Q_{v\pm}^u(t < u < v_{\pm})$ de F_{t_+} . Les applications h et k additives, homogènes et croissantes et qui sont réciproques l'une de l'autre, sont donc des isomorphismes, ce qui achève la démonstration.

Ce résultat, qui complète le théorème ci-dessus, peut être reformulé ainsi :

Théorème 4.1 (suite). — De plus, $\{ f_{t\pm} = f Q_{t\pm}^s ; s < t \}$ est, pour tout $s \in T$ fixé et toute mesure positive bornée f sur $E_{s\pm}^*$, la solution positive bornée la plus générale de :

$$f_{t\pm} Q_{u\pm}^{t\pm} = f_{u\pm} \quad s < t < u \text{ dans } T.$$

Semblablement, $\{ g_{t-} = Q_{v-}^{t-} g ; t < v \}$ est, pour tout $v \in T$ fixé et toute fonction positive bornée g sur E_{v-}^* , la solution positive bornée la plus générale de :

$$Q_{u+}^{t\pm} g_{u\pm} = g_{t\pm} \quad t < u < v \text{ dans } T.$$

Corollaire 4.1. — Pour tout couple (i_1, i_2) d'éléments distincts de $E_{t_+}^*$, on a :

$$(4.4) \quad \lim_{\sigma \downarrow t_+} \downarrow \sum_{j \in E_{\sigma}^*} [\min (Q_{\sigma}^{t_+}(i_1, j), Q_{\sigma}^{t_+}(i_2, j))] Q_{\sigma}^{\sigma}(j, \cdot) = 0.$$

Semblablement, pour tout couple (k_1, k_2) d'éléments distincts de E_{t-}^* , on a :

$$(4.4) \quad \lim_{\tau \uparrow t_-} \downarrow \sum_{j \in E_{\tau}^*} Q_{\tau}^{\tau}(\cdot, j) [\min (Q_{t-}^{\tau}(j, k_1), Q_{t-}^{\tau}(j, k_2))] = 0.$$

La relation (4.4), par exemple, résulte du théorème 3.1.1 et de ce que $Q^{t_+}(i_1, \cdot)$ et $Q^{t_+}(i_2, \cdot)$ sont deux éléments extrémaux du cône F_{t_+} .

Une application du théorème 3.1.2 et du théorème 3.2.2 au s. g. réduit lui-même donne enfin les résultats suivants :

Théorème 4.2. — La dimension des cônes F_t satisfait aux inégalités :

$$\dim F_t \leq \liminf_{s \downarrow t} \dim F_s, \quad \liminf_{s \downarrow t} \dim G_s.$$

Semblablement, la dimension des cônes G_t satisfait aux inégalités :

$$\dim G_t \leq \liminf_{s \uparrow t} \dim F_s, \quad \liminf_{s \uparrow t} \dim G_s.$$

Il existe sur T un ensemble d'intervalles (T_α) , dont la réunion est partout dense dans \bar{T} , à l'intérieur de chacun desquels les dimensions des cônes F_t et G_t sont égales et constantes. Enfin, le cône d'entrée à l'origine de l'intervalle T_α et le cône de sortie à l'extrémité de l'intervalle T_α ont des dimensions au plus égales à la dimension des cônes F_t et G_t à l'intérieur de cet intervalle.

4.1 Semi-groupes généralisés équivalents. — Soit G la famille des semi-groupes généralisés sur les $(E_s)_{s \in T}$ et $(D_s)_{s \in T}$ une famille de matrices positives diagonales, définies sur les $E_s \times E_s$ qui soient de plus régulières et dont les éléments sont finis.

La relation :

$$(4.1.1) \quad P_t^s = D_s Q_t^s D_t^{-1} \quad P, Q \in G$$

définit entre les s. g. généralisés de la famille G une relation d'équivalence. On dira des s. g. généralisés P et Q de la relation (4.1.1) qu'ils sont équivalents.

Proposition 4.1.1. — Les semi-groupes réduits associés à un s. g. généralisé sont équivalents.

Démonstration. — Soit Q une réduction du s. g. généralisé donné, définie par les éléments extrémaux $(Q_\sigma^{t_+}(i, \cdot))_{i \in E_{t_+}^*}$ et $(Q_{t_-}^\sigma(\cdot, j))_{j \in E_{t_-}^*}$ et soit P la réduction de ce même s. g. généralisé, définie à partir des éléments extrémaux :

$$(D_{t_+}(i, i) Q_u^{t_+}(i, \cdot))_{i \in E_{t_+}^*} \quad \text{et} \quad (Q_{t_-}^u(\cdot, j) D_{t_-}^{-1}(j, j))_{j \in E_{t_-}^*}.$$

Les constantes multiplicatives $(D_{t_+}(i, i))_{i \in E_{t_+}^*}$, $t_+ \in S_T$ et $(D_{t_-}^{-1}(j, j))_{j \in E_{t_-}^*}$, $t_- \in S_T$ sont manifestement finies, strictement positives et définissent par

suite sur les produits $E_{t_+}^* \times E_{t_+}^*$ et $E_{t_-}^* \times E_{t_-}^*$ respectivement des matrices diagonales D_{t_+} et $D_{t_-}^{-1}$ positives, régulières, dont les éléments sont finis. Il en résulte que les semi-groupes réduits P et Q vérifient la relation (4.1.1).

4.2 Semi-groupe actif d'un s. g. réduit. — A tout s. g. réduit Q , nous associons un s. g. généralisé $\bar{Q} = \{ \bar{Q}_\tau^\sigma ; \sigma < \tau \text{ dans } S_T \}$ défini de la manière suivante : on désigne par $\bar{E}_{t_-}^*$ (resp. $\bar{E}_{t_+}^*$) le sous-ensemble des génératrices extrémales $i \in E_{t_-}^*$ (resp. $j \in E_{t_+}^*$) pour lesquelles il existe au moins une génératrice extrémale $j \in E_{t_+}^*$ (resp. $i \in E_{t_-}^*$) telle que $Q_{t_+}^-(i, j) > 0$; nous appelons s. g. actif \bar{Q} associé au s. g. réduit Q le s. g. généralisé obtenu par restriction du s. g. réduit Q aux ensembles $(\bar{E}_\sigma^*)_{\sigma \in S_T}$.

On étendra cette définition aux extrémités de l'intervalle S_T lorsque le s. g. généralisé Q donné est lui-même défini aux extrémités de l'intervalle T . Ainsi, par exemple, en posant $T = [a, b]$, $\bar{E}_{b_-}^*$ désignera l'ensemble des génératrices extrémales $i \in E_{b_-}^*$ pour chacune desquelles il existe au moins un $j \in E_b$ tel que $Q_b^-(i, j) > 0$.

Les ensembles $(\bar{E}_\sigma^*)_{\sigma \in S_T}$ jouissent de propriétés entièrement analogues à celles énoncées au théorème 4.2 pour la famille $(E_\sigma^*)_{\sigma \in S_T}$. D'une manière plus précise, étant donné $t_+ \in S_T$, il résulte du fait que la restriction $Q = \{ Q_\tau^\sigma ; t_+ \leq \sigma < \tau \}$ du s. g. généralisé Q aux ensembles $E_{t_+}^*$ et $(\bar{E}_\sigma^*)_{\sigma > t_+}$ possède encore la propriété de s. g. généralisé que l'on a :

$$\text{Card}(E_{t_+}^*) \leq \liminf_{\sigma \downarrow t_+} \text{Card}(E_\sigma^*)$$

et l'on montrerait semblablement que :

$$\text{Card}(E_{t_-}^*) \leq \liminf_{\sigma \uparrow t_-} \text{Card}(\bar{E}_\sigma^*).$$

On obtient ainsi le résultat suivant, que nous utiliserons dans l'étude de la relation de dominance :

Théorème 4.2.1. — Soit \bar{Q} le s. g. actif d'un s. g. réduit Q . Il existe un système d'intervalles (S_{T_ρ}) , dont la réunion est partout dense dans S_T , à l'intérieur de chacun desquels $Q = \bar{Q}$.

A l'intérieur de chacun de ces intervalles, on a en effet $E_\sigma^* = \bar{E}_\sigma^*$.

4.3 Exemple. — Reprenons le cas d'un s. g. généralisé markovien P sur deux états. Nous nous restreindrons (cf. théorème 2.2) à l'étude d'un

intervalle $T_\alpha =]c, d[$ et de ses extrémités. Nous supposons, sans nuire à la généralité, que $\det(P_c) = \det(P_d) = 0$.

Lorsque $t \in]c, d[$, les cônes F_t et G_t sont de dimension deux. Les deux génératrices extrémales du cône F_t sont engendrées par les éléments $(1)f$ et $(2)f$ tels que, si $u \in]t, d[$:

$$\begin{aligned} (1)f_u(i) &= a_u^{t+} & (2)f_u(i) &= 1 - b_u^{t+} \\ (1)f_u(j) &= 1 - a_u^{t+} & (2)f_u(j) &= b_u^{t+} \end{aligned}$$

et les deux génératrices extrémales du cône G_t sont engendrées par les éléments $(1)g$ et $(2)g$ tels que, si $s \in]c, t[$:

$$\begin{aligned} (1)g_s(i) &= a_{i-}^s & (2)g_s(i) &= 1 - a_{i-}^s \\ (1)g_s(j) &= 1 - b_{i-}^s & (2)g_s(j) &= b_{i-}^s. \end{aligned}$$

On en déduit que sur T_α , le s. g. généralisé :

$$P_{v_\pm}^{u_\pm} = \begin{pmatrix} a_{v_\pm}^{u_\pm} & 1 - a_{v_\pm}^{u_\pm} \\ 1 - b_{v_\pm}^{u_\pm} & b_{v_\pm}^{u_\pm} \end{pmatrix} \quad u_\pm < v_\pm$$

est une réduction (markovienne) du s. g. généralisé P qui coïncide avec son s. g. actif \bar{P} . Le cône F_c se réduit à une seule génératrice, engendrée par l'élément f tel que :

$$f_i(i) = \frac{\Phi_\alpha(t)}{\Phi_\alpha(t) + \Psi_\alpha(t)} \quad f_i(i) = \frac{\Psi_\alpha(t)}{\Phi_\alpha(t) + \Psi_\alpha(t)}.$$

Le cône G_d admet la génératrice extrémale engendrée par l'élément $(1)g$ tel que :

$$(1)g_i(i) = (1)g_i(j) = 1$$

et si d'ailleurs $\Phi_\alpha(d_-) = \Psi_\alpha(d_-) = \infty$, le cône G_d se réduit à cette seule génératrice. Il admet par contre une seconde génératrice extrémale lorsque :

- (a) $\Phi_\alpha(d_-) < \infty \quad \Psi_\alpha(d_-) = \infty$
 (b) $\Phi_\alpha(d_-) = \infty \quad \Psi_\alpha(d_-) < \infty.$

Dans le premier cas, cette seconde génératrice est engendrée par l'élément non borné :

$$(2)g_i(i) = \Phi_\alpha(d_-) + \Psi_\alpha(t) \quad (2)g_i(j) = \Phi_\alpha(d_-) - \Phi_\alpha(t)$$

et dans le second cas, par l'élément non borné :

$$(2)g_i(i) = \Psi_\alpha(d_-) - \Psi_\alpha(t) \quad (2)g_i(j) = \Psi_\alpha(d_-) + \Phi_\alpha(t).$$

Nous laissons au lecteur le soin d'écrire les matrices réduites $P_{u_{\pm}}^{c_{\pm}}$ et $P_{d_{\pm}}^{u_{\pm}}$ et de vérifier que lorsque $\dim(G_d) = 2$, la seconde génératrice ${}^{(2)}g$ n'intervient pas dans l'expression du s. g. actif \bar{P} qui est markovien.

§ 5 Semi-groupes réduits continus.

Étant donné un semi-groupe réduit Q , nous désignerons dans ce qui suit par S_{T_α} un intervalle sur lequel :

(a) $\text{Card}(E_\sigma^*) = \text{constante}$.

(b) Le s. g. réduit Q est identique à son semi-groupe actif \bar{Q} . Nous avons établi au paragraphe précédent l'existence de tels intervalles, dont la somme est partout dense dans l'intervalle S_T sur lequel le s. g. réduit Q est primitivement défini.

Ce paragraphe est consacré à la définition, sur un tel intervalle S_{T_α} , de s. g. équivalents au s. g. réduit Q et qui soient continus au sens suivant :

Définition 5.1. — Soit Q un s. g. réduit sur l'intervalle S_T . On dit que Q est continu en $u_+ \in S_T$ si pour toute génératrice $\alpha \in E_{u_+}^*$ il existe une section $i = (i_\sigma)_{\sigma > u_+}$ sur la famille $(E_\sigma^*)_{\sigma > u_+}$ telle que :

$$(5.1) \quad \lim_{\sigma \downarrow u_+} Q_\sigma^{u_+}(\alpha, i_\sigma) = 1 \quad \lim_{\sigma \downarrow u_+} Q_\sigma^{u_+}(\alpha, E_\sigma^* \setminus \{i_\sigma\}) = 0.$$

Semblablement, on dit que le s. g. réduit Q est continu en $v_- \in S_T$ si pour toute génératrice $\beta \in E_{v_-}^*$, il existe une section $i = (i_\sigma)_{\sigma < v_-}$ sur la famille $(E_\sigma^*)_{\sigma < v_-}$ telle que :

$$(5.2) \quad \lim_{\sigma \uparrow v_-} Q_\sigma^{v_-}(i_\sigma, \beta) = 1 \quad \lim_{\sigma \uparrow v_-} Q_\sigma^{v_-}(E_\sigma^* \setminus \{i\}, \beta) = 0.$$

Enfin, on dit que le s. g. réduit Q est continu sur l'intervalle S_T s'il est continu en tout point de l'intervalle S_T .

On remarquera ainsi que si un s. g. réduit Q est continu en $u_+ \in S_T$ et la génératrice $\alpha \in E_{u_+}^*$ étant fixée, deux sections i et j satisfaisant aux relations (5.1) coïncident au-dessus d'un voisinage $[u_+, \tau]$ à droite de u_+ .

Théorème 5.1. — Soit Q la réduction d'un s. g. généralisé, définie sur un intervalle S_{T_α} possédant les propriétés (a) et (b) ci-dessus. Sur tout intervalle compact $S_K \subset S_T$, le s. g. réduit Q est équivalent à un s. g. markovien à droite et à un s. g. markovien à gauche.

Démonstration. — Remarquons d'abord que pour tout $u_+ \in S_K$ (resp. $v_- \in S_K$), il existe un voisinage $[u_+, v_-]$ à droite de u_+ (resp. à gauche de v_-) sur lequel les lignes de matrices $Q_\sigma^{u_+}$ (resp. les colonnes des matrices $Q_\sigma^{v_-}$) sont linéairement indépendantes et donc sur lequel les matrices Q_σ^σ sont régulières. Il suffit, pour vérifier ce résultat, de raisonner par l'absurde comme au théorème 3.1.2.

Soit donc $[u_+, v_-]$ l'un de ces intervalles et supposons provisoirement la matrice diagonale D_{u_+} arbitraire, mais fixée. Posons alors :

$$(5.3) \quad D_\sigma(\cdot) = \sum_i D_{u_+}(i) Q_\sigma^{u_+}(i, \cdot) > 0 \quad \sigma \in [u_+, v_-]$$

la stricte positivité du second membre résultant de la régularité de la matrice $Q_\sigma^{u_+}$. Le s. g. généralisé $P_\tau^\sigma = D_\sigma Q_\tau^\sigma D_\tau^{-1}$ est alors markovien à gauche sur l'intervalle $[u_+, v_-]$.

Supposons maintenant fixée la matrice diagonale D_{v_-} par la relation (5.3), où $\sigma = v_-$ et définissons la matrice diagonale D_{v_+} en posant semblablement :

$$(5.4) \quad D_{v_+}(\cdot) = \sum_i D_{v_-}(i) Q_{v_+}^{v_-}(i, \cdot) > 0$$

la stricte positivité du second membre résultant maintenant de ce que le s. g. réduit Q est actif. La matrice $P_{v_+}^{v_-} = D_{v_-} Q_{v_+}^{v_-} D_{v_+}^{-1}$ est alors markovienne.

Soit alors $(S_{K_n})_{1 \leq n \leq p}$ une partition finie de l'intervalle compact S_K en de tels intervalles $S_{K_n} = [u_+^n, v_-^{n+1}]$. Il ne reste plus qu'à opérer, comme nous venons de l'indiquer, de proche en proche en partant de l'extrémité gauche de S_K , avec en cette extrémité une matrice diagonale (positive et régulière) arbitraire mais fixée. On définit ainsi au-dessus de l'intervalle S_K un s. g. markovien à gauche P équivalent au s. g. réduit Q .

On procéderait d'une manière semblable pour définir au-dessus de S_K un s. g. markovien à droite équivalent au s. g. réduit Q .

Théorème 5.2. — Tout s. g. réduit Q , défini sur un intervalle S_{T_x} jouissant des propriétés (a) et (b) et markovien à droite (resp. à gauche), est continu sauf peut-être sur un ensemble parfait non dense d'instantants de sortie (resp. d'entrée).

Démonstration. — Prenons par exemple le cas d'un s. g. réduit markovien à droite et montrons d'abord qu'un tel s. g. Q est continu en tout instant $s_+ \in S_{T_x}$. Il résulte du corollaire 4.1 que l'on a, pour tout couple $(i \neq j)$ d'éléments distincts de $E_{s_+}^*$ et pour toute section $k = (k_\sigma)_{\sigma > s_+}$:

$$(5.5) \quad \lim_{\sigma \downarrow s_+} \min [Q_\sigma^{s_+}(i, k), Q_\sigma^{s_+}(j, k)] = 0.$$

Posons alors $d = \text{Card}(E_o^*) = \text{constante}$. Pour tout nombre $\varepsilon \in]0, 2^{-1}[$, il existe un intervalle $[s_+, \tau)$ à droite de s_+ tel que, pour tout $\sigma \in [s_+, \tau)$ on ait lorsque $i \neq j$:

$$(5.6) \quad 0 \leq \min [Q_\sigma^{s_+}(i, \cdot), Q_\sigma^{s_+}(j, \cdot)] < \varepsilon(d - 1)^{-1}.$$

Ainsi, à tout élément $i_{s_+} \in E_{s_+}^*$, nous pouvons associer au-dessus de l'intervalle $[s_+, \tau)$ une section $i = (i_\sigma)_{s_+ \leq \sigma \leq \tau}$ telle que : 1° $Q_\sigma^{s_+}(i, i) > 1 - \varepsilon$ quel que soit $\sigma \in [s_+, \tau)$; 2° à deux éléments distincts $i_{s_+} \neq j_{s_+}$ de $E_{s_+}^*$ correspondent deux sections disjointes au-dessus de l'intervalle $[s_+, \tau)$. En effet, à tout $i_{s_+} \in E_{s_+}^*$, on peut associer en chaque instant $\sigma \in [s_+, \tau)$ au moins un $i_\sigma \in E_\sigma^*$ tel que :

$$Q_\sigma^{s_+}(i, i) \geq \varepsilon(d - 1)^{-1},$$

puisque dans le cas contraire on aurait $Q_\sigma^{s_+}(i, i) < \varepsilon(d - 1)^{-1} < 1$. Et cette application $i_{s_+} \rightarrow i_\sigma$, qui est injective d'après (5.6) est aussi surjective puisque $\text{Card}(E_{s_+}^*) = \text{Card}(E_o^*)$. Puisque alors $Q_\sigma^{s_+}(i, E_\sigma^* \setminus \{i_\sigma\}) < \varepsilon$, on en déduit qu'effectivement $Q_\sigma^{s_+}(i, i_\sigma) > 1 - \varepsilon$.

Nous allons maintenant montrer qu'en restreignant éventuellement les sections que nous venons de définir au-dessus d'un intervalle $[s_+, t_-] \subset [s_+, \tau)$, les relations de continuité (5.1) et (5.2) seront bien satisfaites quels que soient les instants $u_+, v_- \in [s_+, t_-]$.

Lemme 5.1. — Soit $s_+ \in S_\tau$ un instant en lequel le s. g. réduit Q est continu et $i = (i_\sigma)_{\sigma \geq s_+}$ une section pour laquelle la relation de continuité (5.1) est satisfaite. Pour tout nombre $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe un voisinage $[s_+, t_-]$ à droite de s_+ sur lequel, pour tout couple d'instant ($\sigma < \tau$), on a :

$$(5.7) \quad 1 - \varepsilon < Q_\sigma^o(i, i) < 1 + \varepsilon \quad s_+ \leq \sigma < \tau \leq t_-.$$

Démonstration. — Il existerait dans le cas contraire une suite $(s_n) \downarrow s_+$ et une suite de couple (σ_n, τ_n) tels que $s_+ < \sigma_n < \tau_n \leq s_n$ et pour lesquels on aurait exclusivement :

$$Q_{\tau_n}^{\sigma_n}(i, i) \leq 1 - \varepsilon \quad \text{ou} \quad Q_{\tau_n}^{\sigma_n}(i, i) \geq 1 + \varepsilon.$$

En passant à la limite sur n dans la relation $Q_{\tau_n}^{s_+} = Q_{\sigma_n}^{s_+} Q_{\tau_n}^{\sigma_n}$, on se trouverait alors en contradiction avec la relation (5.1).

Nous désignerons donc dans la suite par $[s_+, t_-]$ un intervalle sur lequel la relation (5.7) est satisfaite pour chacune des sections que nous venons de définir au-dessus de l'intervalle $[s_+, \tau)$ et par $E_{t_-}^{s_+}$ cet ensemble de sections.

Il est d'abord immédiat que les relations de continuité (5.1) sont satisfaites pour tout instant d'entrée $u_+ \in [s_+, t_-]$. Montrons alors qu'il en est de même pour chaque instant de sortie $v_- \in [s_+, t_-]$.

D'après la relation (5.7), $f_\sigma(\cdot) = \sum_{E_{s_+}^*} Q_\sigma^{s_+}(i_{s_+}, \cdot)$ est une loi d'entrée $f \in F_{u_+}$

telle que $f_\sigma \geq 1 - \varepsilon > 0$ quel que soit $\sigma \in]s_+, t_-]$. D'après le corollaire 4.1, on a donc pour tout couple $(i \neq j)$ de sections distinctes de $E_{t_-}^{s_+}$:

$$\lim_{\sigma \uparrow v_-} \min [Q_{v_-}^\sigma(k, i), Q_{v_-}^\sigma(k, j)] = 0$$

où $k = (k_\sigma)_{s_+ \leq \sigma \leq t_-}$ désigne une section quelconque. Ainsi, en prenant par exemple $k = j \neq i$, il résulte de la relation (5.6) que l'on a $\lim_{\sigma \uparrow v_-} Q_{v_-}^\sigma(j, i) = 0$.

Puisque $\text{Card}(E_\sigma^*) = d < \infty$, on a donc encore $\lim_{\sigma \uparrow v_-} Q_{v_-}^\sigma(E_\sigma^* \setminus \{i_\sigma\}, i) = 0$

et comme le s. g. Q est markovien, on a d'ailleurs aussi bien $\lim_{\sigma \uparrow v_-} Q_{v_-}^\sigma(i, i) = 1$.

Théorème 5.3. — Soit Q un s. g. réduit défini sur un intervalle S_{T_α} possédant les propriétés (a) et (b) ci-dessus. Il existe sur S_{T_α} des s. g. équivalents au s. g. donné Q et qui soient de plus continus.

Démonstration. — Il résulte des théorèmes 5.1 et 5.2 qu'à droite (à gauche) de tout instant $s_+ \in S_{T_\alpha}[t_- \in S_{T_\alpha}]$, on peut définir au-dessus d'un certain intervalle ouvert $[s_+, t_-]$ un s. g. continu markovien à droite [à gauche] et équivalent au s. g. donné Q.

Soit alors un recouvrement de l'intervalle S_{T_α} par de tels ouverts $[s_+, t_-]$, que l'on peut aussi bien supposer directement deux à deux disjoints. Le s. g. ainsi défini au-dessus de chacun de ces ouverts, donc défini au-dessus de l'intervalle S_{T_α} lui-même, est bien continu et équivalent au s. g. donné Q.

Définition 5.2. — Soit Q un s. g. réduit sur l'intervalle S_{T_α} . On dit qu'une section $i = (i_\sigma)_{\sigma \in S_{T_\alpha}}$ est continue en $u_+ \in S_{T_\alpha}$ si elle vérifie les relations de continuité :

$$\lim_{\sigma \downarrow u_+} Q_\sigma^{u_+}(i, i) = 1 \qquad \lim_{\sigma \downarrow u_+} Q_\sigma^{u_+}(i, E_\sigma^* \setminus \{i_\sigma\}) = 0.$$

On dit semblablement que la section $i = (i_\sigma)_{\sigma \in S_{T_\alpha}}$ est continue en $v_- \in S_{T_\alpha}$ si elle vérifie les relations :

$$\lim_{\sigma \uparrow v_-} Q_{v_-}^\sigma(i, i) = 1 \qquad \lim_{\sigma \uparrow v_-} Q_{v_-}^\sigma(E_\sigma^* \setminus \{i_\sigma\}, i) = 0$$

et qu'une section est continue sur l'intervalle S_{T_α} , si elle est continue en chaque instant de cet intervalle.

Remarquons que si deux sections coïncident à l'instant $u_+ \in S_{T_\alpha}$ [$v_- \in S_{T_\alpha}$], elles coïncident au-dessus d'un voisinage à droite de u_+ [à gauche de v_-]. De même, si deux sections continues sont distinctes à l'instant :

$$u_+ \in S_{T_\alpha} [v_- \in S_{T_\alpha}],$$

il existe un voisinage à droite de u_+ [à gauche de v_-] au-dessus duquel elles sont alors disjointes.

Définition 5.3. — Soit Q un s. g. continu défini sur la famille $(E_\sigma^*)_{\sigma \in S_{T_\alpha}}$. Nous appellerons base (ou support) des sections continues du s. g. Q toute famille de sections continues constituant une partition de la famille $(E_\sigma^*)_{\sigma \in S_{T_\alpha}}$. Si de plus tout élément d'une telle base est une section continue définie sur l'intervalle entier S_{T_α} , nous dirons que cette base constitue un « espace d'états fictifs ». Nous désignerons alors par le triple (Q, S_{T_α}, E) un s. g. continu Q muni sur l'intervalle S_{T_α} d'un espace d'états fictifs E .

On remarquera que nous avons établi, lors de la démonstration des théorèmes précédents, l'existence d'espaces d'états fictifs pour tout s. g. continu Q défini au-dessus d'un intervalle S_{T_α} jouissant des propriétés (a) et (b). On peut alors énoncer les résultats immédiats suivants :

Propositions 5.1. — Soit (Q, S_{T_α}, E) un s. g. continu. Pour que le s. g. équivalent $P_\tau^\sigma = D_\sigma Q_\tau^\sigma D_\tau^{-1}$ soit continu sur l'intervalle S_{T_α} , il faut et il suffit que l'application $D_\sigma : S_{T_\alpha} \times E \times E \rightarrow R^+$ soit continue.

Proposition 5.2. — Soit (Q, S_{T_α}, E) un s. g. continu. On a les relations :

$$\lim_{\sigma \uparrow v_-} Q_\tau^\sigma = I_E(\sigma < \tau < v_-) \qquad \lim_{\tau \downarrow u_+} Q_\tau^\sigma = I_E(u_+ < \sigma < \tau)$$

où I_E désigne l'application identique de E . De plus, on a :

$$\lim_{\sigma \uparrow u_-, \tau \downarrow v_+} Q_\tau^\sigma = Q_{v_+}^{u_-} \qquad (\sigma < u_- < v_+ < \tau)$$

et $Q_{u_+}^{u_-} = I_E$ sauf sur un ensemble de T_α (éventuellement partout dense) au plus dénombrable.

Terminons ce paragraphe en introduisant, afin de simplifier certains

énoncés ultérieurs, la notion de semi-groupe régulier. Étant donné un s. g. continu (Q, S_{T_α}, E) , il n'est pas assuré, en effet, que l'on ait d'une façon générale $Q_{u_+}^u(i, i) > 0$ pour tout état fictif $i \in E$ et tout instant $u \in T_\alpha$. On observera cependant que l'étude du s. g. continu (Q, S_{T_α}, E) se ramène aisément à celle de ce cas particulier car, d'après la continuité même du s. g. Q , il existe toujours une partition localement finie de l'intervalle S_{T_α} en intervalles ouverts $[s_+ t_-]$ sur chacun desquels cette condition est alors réalisée.

Définition 5.4. — Soit (Q, S_{T_α}, E) un s. g. continu. Nous dirons qu'il est régulier si son espace d'états fictifs E est uniquement constitué de sections i régulières au sens suivant : elles sont continues et, quel que soit l'instant $u \in T_\alpha$, on a $Q_{u_+}^u(i, i) > 0$.

§ 6 Construction du semi-groupe régulier (Q, S_{T_α}, E) .

6.1 Les mesures q_i et le semi-groupe primitif (P, S_{T_α}, E) . —

Proposition 6.1.1. — Soit (Q, S_{T_α}, E) un s. g. régulier, avec pour préciser $S_{T_\alpha} =]a_+, b_-]$. Pour tout nombre $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe une partition localement finie de l'intervalle S_{T_α} en intervalles partiels $[s_+^n, t_-^n]$ sur chacun desquels :

$$(6.1.1) \quad 1 - \varepsilon < Q_\tau^a(i, i) \leq Q_\tau^a(i, E) < 1 + \varepsilon \quad \text{quel que soit } i \in E.$$

$$(6.1.2) \quad 0 \leq Q_\tau^a(i, j) \leq \varepsilon$$

quel que soit le couple $(i \neq j) \in E \times E$.

Démonstration. — Elle repose sur le lemme suivant, qui nous sera utile dans la suite :

Lemme 6.1. — Soit Φ_v^u ($u < v$), une fonction d'intervalle sur S_{T_α} qui possède les propriétés :

$$(a) \quad \lim_{u \uparrow t_-} \Phi_v^u = 1 \quad u < v < t_-; t_- \neq b_-.$$

$$(b) \quad \lim_{v \downarrow t_+} \Phi_v^u = 1 \quad t_+ < u < ; t_+ \neq a_+.$$

$$(c) \quad \lim_{u \uparrow s_-; v \downarrow t_+} \Phi_v^u = \Phi_{t_+}^{s_-}. \quad u < s_- < t_+ < v.$$

Quel que soit $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe un recouvrement localement fini de l'intervalle $]a_+, b_-]$ en intervalles disjoints $[s_+, t_-]$ sur chacun desquels :

$$(6.1.3) \quad 1 - \varepsilon < \Phi_v^u < 1 + \varepsilon \quad s_+ < u < v < t_-.$$

En effet, étant donné le nombre $\varepsilon \in]0, 1[$, l'ensemble des instants $u \in T_\alpha$ pour lesquels l'une des relations :

$$(6.1.4) \quad \Phi_{u_+}^{u_-} \leq 1 - \varepsilon \quad \text{ou} \quad \Phi_{u_-}^{u_+} \geq 1 + \varepsilon$$

est satisfaite, est au plus dénombrable et ses points d'accumulation éventuels sont nécessairement aux extrémités a_+ et b_- de l'intervalle S_{T_α} . Ils déterminent donc une partition localement finie de l'intervalle $]a_+, b_-[$ et il revient au même de montrer notre assertion à l'intérieur de chacun des intervalles de cette partition.

Pour fixer les idées, soit donc $[s_+, t_-]$ l'un de ces intervalles. Si notre assertion était fautive, l'ensemble des couples $(u < v)$ pour lesquels l'une des relations ci-dessous serait satisfaite :

$$\Phi_v^u \leq 1 - \varepsilon \quad \text{ou} \quad \Phi_v^u \geq 1 + \varepsilon$$

serait adhérent, suivant le filtre des partitions finies de l'intervalle $[s_+, t_-]$ à des instants u_+ ou u_- ou à des couples (u_-, u_+) . Or, d'après les relations (a) et (b) la première éventualité est impossible. La seconde entraîne que, selon le cas et d'après la condition (c), l'une des relations (6.1.4) soit satisfaite, ce qui est impossible puisque l'ensemble de ces couples détermine la partition considérée de l'intervalle $[a_+, b_-]$.

La démonstration de la proposition 6.1 s'obtient alors en remarquant que les fonctions d'intervalle $Q_v^u(i, i)$, $Q_v^u(i, E)$ et $\exp[-Q_v^u(i, j)]$ ($i \neq j$) possèdent les propriétés (a) (b) et (c).

Nous allons maintenant utiliser ces résultats pour établir la proposition suivante qui nous servira pour établir dans le théorème 6.1 l'intégrabilité sur tout intervalle compact contenu dans $]a_+, b_-]$, de la fonction d'intervalle $-\log Q_v^u(i, i)$.

Proposition 6.1.2. — Soit $[s_+, t_-]$ un intervalle de S_{T_α} sur lequel les relations (6.1.1) et (6.1.2) sont satisfaites. Alors, pour toute section régulière $i \in E$ et pour tout couple (u, v) tel que $s_+ \leq u < v \leq t_-$, on a :

$$1 - 5\varepsilon < Q_{t_1}^u(i, i)Q_{t_2}^{t_1}(i, i) \dots Q_v^{t_n}(i, i) < 1 + \varepsilon$$

quelle que soit la partition finie $u < t_1 < \dots < t_n < v$ de l'intervalle $[u, v]$.

Démonstration. — D'après les relations (6.1.1) et (6.1.2), on a pour toute partition finie $\{u < t_1 < \dots < t_n < v\}$:

$$(6.1.5) \quad 1 - \varepsilon < Q_v^u(i, i) \\ = Q_{t_1}^u(i, i) \dots Q_v^{t_n}(i, i) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j \neq i} Q_{t_k}^u(i, i) \dots Q_{t_k}^{t_{k-1}}(i, i) Q_{t_{k+1}}^{t_k}(i, j) Q_v^{t_{k+1}}(j, i) \\ \leq Q_{t_1}^u(i, i) \dots Q_v^{t_n}(i, i) + \varepsilon [Q_{t_n}^u(i, E) - Q_{t_1}^u(i, i) \dots Q_v^{t_n}(i, i) / Q_v^{t_n}(i, i)].$$

On en déduit qu'effectivement $Q_{i_1}^u(i, i) \dots Q_{i_n}^u(i, i) > 1 - 5\varepsilon$. Notons cependant que cela n'a d'intérêt que lorsque $\varepsilon \in]0, 5^{-1}[$. D'autre part :

$$Q_{i_1}^u(i, i) \dots Q_{i_n}^u(i, i) \leq Q_{i_n}^u(i, i) < 1 + \varepsilon$$

ce qui achève la démonstration.

Théorème 6.1.1. — Sur tout intervalle compact $[u_+, v_-] \subset [a_+, b_-]$ et pour toute section régulière $i \in E$, la fonction d'intervalle $\log \frac{1}{Q_i^s(i, i)}$ est intégrable et on a, suivant le filtre \mathcal{F} des partitions finies de l'intervalle $[u_+, v_-]$

$$(6.1.6) \quad \lim_{\mathcal{F}} \uparrow \left[\log \frac{1}{Q_{i_1}^{u_+}(i, i)} + \dots + \log \frac{1}{Q_{i_n}^{v_-}(i, i)} \right] = \int_{u_+}^{v_-} q_i(du) < \infty.$$

Démonstration. — Il résulte de l'inégalité élémentaire :

$$Q_i^u(i, i)Q_i^t(i, i) \leq Q_i^v(i, i) \quad u < t < v$$

que les sommes figurant au premier membre de la relation (6.1.6) sont croissantes suivant le filtre \mathcal{F} des partitions finies de l'intervalle $[u_+, v_-]$.

Nous allons maintenant montrer que ces sommes sont uniformément bornées ce qui établira le théorème.

D'après la proposition 6.1, étant donné le nombre $\varepsilon \in]0, 1[$, l'ensemble des intervalles constituant une partition de $[u_+, v_-]$ et pour chacun desquels on a les relations (6.1.1) et (6.1.2) est fini. Il s'ensuit d'abord que les transitions $Q_{s_+}^s$ entre deux tels intervalles, pour lesquelles $Q_{s_+}^s(i, i) \leq 1 - \varepsilon$ est fini et comme en outre la relation (5.6) est satisfaite puisque le s. g. est supposé régulier, la somme correspondante est finie.

Ensuite, à l'intérieur de chacun des intervalles de cette partition, si on suppose avoir choisi *a priori* ε en sorte que $0 < \varepsilon < 5^{-1}$, les sommes correspondantes sont, d'après la proposition 6.2, uniformément majorées, ce qui achève la démonstration.

Théorème 6.1.2. — Soit (Q, S_{τ_α}, E) un s. g. régulier et soient $(q_i)_{i \in E}$ les mesures additives définies par la relation (6.1.6). La relation :

$$(6.1.7) \quad P_{i_0}^u(i, j) = \exp \left[- \int_u^v q_i(dt) \right] \cdot I(i, j)$$

définit un s. g. (P, S_{τ_α}, E) régulier, dominé par le s. g. généralisé Q ; de plus, (P, S_{τ_α}, E) est le s. g. diagonal maximal dominé par Q .

6.2 Les mesures q_{ij} . — *Théorème 6.2.1.* — Soit le s. g. régulier (Q, S_{T_α}, E) . Sur tout intervalle compact $[u_+, v_-] \subset S_{T_\alpha}$, la fonction d'intervalle $\Phi_v^u = -\log [\sup_{i \in E} Q_v^u(i, E)]$ est intégrable et on a, suivant le filtre \mathcal{F} des partitions finies de l'intervalle $[u_+, v_-]$:

$$(6.2.1) \quad -\infty > \int_{u_+}^{v_-} d\Phi = \lim_{\mathcal{F}} \downarrow [\Phi_{t_1}^u + \dots + \Phi_{v_-}^{t_n}] < \infty.$$

Démonstration. — Posons $\|Q_t^u\| = \sup_{i \in E} Q_t^u(i, E)$. Nous allons montrer que, suivant le filtre des partitions finies $\{u_+ < t_1 < \dots < t_n < v_-\}$ de l'intervalle $[u_+, v_-]$, on a :

$$(6.2.2) \quad \lim \uparrow (\|Q_{t_1}^{u_+}\| \cdot \|Q_{t_2}^{t_1}\| \dots \|Q_{v_-}^{t_n}\|) < \infty$$

ce qui démontrera bien le théorème.

Les produits figurants dans la relation (6.2.2) étant croissants suivant le filtre \mathcal{F} , la limite suivant ce filtre est unique. Il nous suffit donc de montrer que la fonction d'intervalle $\|Q_v^u\|$ est majorée par une fonction d'intervalle Ψ_v^u dont les produits $\Psi_{t_1}^{u_+} \cdot \Psi_{t_2}^{t_1} \dots \Psi_{v_-}^{t_n}$ convergent suivant \mathcal{F} .

D'après la proposition 6.1, il existe une partition finie de l'intervalle $[u_+, v_-]$ en intervalles partiels sur chacun desquels la relation (6.1.1) est satisfaite. Soit $[s_+, t_-]$ l'un de ces intervalles et soit $g \in G$, la fonction :

$$g_u(i) = Q_{t_-}^u(i, E) \quad s_+ \leq u < t_-; i \in E$$

ainsi d'après la relation (6.1.1), on a :

$$(6.2.3) \quad 1 - \varepsilon < g_u(i) < 1 + \varepsilon \quad s_+ \leq u < t_-; i \in E.$$

Il est donc possible de définir, suivant Feller [7], un nouveau s. g. régulier $(M, [s_+, t_-], E)$ par :

$$M_v^u(i, j) = g_u^{-1}(i) Q_v^u(i, j) g_v(j) \quad s_+ \leq u < v \leq t_-; i \in E$$

et comme ce s. g. est markovien, on a l'inégalité élémentaire :

$$M_v^u(i, E) = 1 - M_v^u(i, i) \leq -\log [M_v^u(i, i)].$$

Ainsi, compte tenu de la relation (6.2.3), on a :

$$Q_v^u(i, E) = Q_v^u(i, i) + g_u(i) \sum_{j \neq i} \frac{M_v^u(i, j)}{g_v(j)} < Q_v^u(i, i) - \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \log [M_v^u(i, i)]$$

et comme, pour tout $i \in E$, la fonction d'intervalle $-\log [M_v^u(i, i)]$ est intégrable, d'après le théorème 6.1, sur l'intervalle $[s_+, t_-]$, les produits :

$$\left[\sup_{i \in E} Q_v^u(i, i) ; \mathcal{F} \right] \quad \text{et} \quad \left[\sup_{i \in E} \left(Q_v^u(i, i) - \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \log M_v^u(i, i) \right) ; \mathcal{F} \right]$$

admettent une même limite finie.

La partition considérée de l'intervalle $[u_+, v_-]$ étant finie, le théorème est démontré.

Théorème 6.2.2. — Soit (Q, S_{τ_α}, E) un s. g. régulier. Sur tout intervalle compact $[u_+, v_-] \subset S_{\tau_\alpha}$ et pour tout couple $(i \neq j)$ d'éléments distincts de E , la fonction d'intervalle $Q_v^u(i, j)$ est intégrable et on a :

$$(6.2.4) \quad \int_{u_+}^{v_-} q_{ij}(dt) = \lim_{\mathcal{F}} [Q_{t_1}^{u_+}(i, j) + \dots + Q_{v_-}^{t_n}(i, j)] < \infty$$

suitant le filtre \mathcal{F} des partitions finies $\{u_+ < t_1 < \dots < t_n < v_-\}$ de l'intervalle $[u_+, v_-]$.

De plus, dans le cas d'un s. g. sous-markovien, on a l'inégalité :

$$(6.2.5) \quad \sum_{j \neq i} q_{ij}(du) \leq 1 - \exp [q_i(du)].$$

avec l'égalité stricte dans le cas d'un s. g. markovien.

Démonstration. — Nous allons établir ces résultats en considérant le s. g. sous-markovien :

$$(6.2.6) \quad \widehat{Q}_v^u = \exp \left[- \int_u^v d\Phi \right] \cdot Q_v^u$$

que, d'après le théorème 6.2.1, on peut associer au s. g. généralisé Q . Nous désignerons par \widehat{P}_v^u le s. g. primitif de \widehat{Q} .

Désignons par $(X_u)_{u \in S_{\tau_\alpha}}$ un processus représenté à chaque instant $u \in S_{\tau_\alpha}$ par un état $i \in E$ et dont l'évolution est donnée par la famille des probabilités de transition \widehat{Q}_v^u . Soit $\{ \pi_v^u(i, j) ; u < v \}$ la famille des probabilités :

$$\pi_v^u(i, j) = \text{pr} [X_v = j \text{ en un saut} \mid X_u = i]. \quad i \neq j \in E.$$

Il résulte alors des inégalités élémentaires :

$$\begin{aligned} \pi_v^u(i, j) &< \widehat{Q}_v^u(i, j) \leq -\log [\widehat{Q}_v^u(i, i)] \\ \pi_v^u(i, j) &= \pi_u^i(i, j) \widehat{P}_v^u(j, j) + \widehat{P}_u^i(i, i) \pi_v^u(i, j) < \pi_u^i(i, j) + \pi_v^u(i, j) \end{aligned}$$

qu'il existe sur T_α une mesure q_{ij} telle que :

$$\int_{u_+}^{v_-} q_{ij}(dt) = \lim \uparrow [\pi_{i_+}^{u_+}(i, j) + \dots + \pi_{v_-}^{i_n}(i, j)]$$

et que l'intégrale ci-dessus est finie. On achève alors la démonstration en remarquant que le s. g. \widehat{Q} étant régulier, on a :

$$(6.2.7) \quad \widehat{Q}_v^u(i, j) = \sum_k \int_u^v \widehat{P}_{i_-}^u(i, i) q_{ik}(dt) \widehat{Q}_v^{t_+}(k, j) + \widehat{P}_v^u(i, j)$$

ce qui donne bien, en passant à la limite suivant le filtre \mathcal{F} et compte tenu de (6.2.6), la relation (6.2.4) cherchée.

Quant à la relation (6.2.5) elle s'obtient immédiatement en remarquant que dans le cas sous-markovien on a :

$$\sum_{i \neq j} Q_v^u(i, j) \leq 1 - Q_v^u(i, i)$$

et en passant à la limite suivant le filtre \mathcal{F} .

6.3 Construction du s. g. (Q, S_{τ_α}, E) . — Soit :

$$(6.3.1) \quad P_v^u(i, j) = \exp \left[- \int_u^v q_i(dt) \right] \cdot I(i, j)$$

le s. g. primitif de Q et formons les matrices positives, définies par récurrence sur n :

$$(6.3.2) \quad \begin{aligned} {}^{(0)}P_v^u(i, j) &= P_v^u(i, j) \\ {}^{(n+1)}P_v^u(i, j) &= \sum_k \int_u^v P_{i_-}^u(i, i) q_{ik}(dt) {}^{(n)}P_v^{t_+}(k, j). \end{aligned}$$

Nous allons montrer par induction sur N que pour tout couple $(u < v)$; les matrices $\sum_0^N {}^{(n)}P_v^u(i, j)$ sont dominées par la matrice Q_v^u . Comme cela est manifestement vrai pour $N = 0$ (théorème 6.2), supposons que :

$$\sum_0^N {}^{(n)}P_v^u(i, j) \leq Q_v^u(i, j).$$

Il résulte de la régularité du s. g. Q que l'on a, pour tout couple ($u < v$) d'éléments de S_{τ_α} :

$$(6.3.3) \quad Q_v^u(i, j) = \sum_k \int_u^v P_{i-}^u(i, i) q_{ik}(dt) Q_v^{t+}(k, j) + P_v^u(i, j).$$

La propriété est alors vraie pour $N + 1$ d'après les relations :

$$\begin{aligned} \sum_0^{N+1} {}^{(n)}P_v^u(i, j) &= \sum_k \int_u^v P_{i-}^n(i, i) q_{ik}(dt) \left[\sum_0^N {}^{(n)}P_v^{t+}(k, j) \right] + P_v^u(i, j) \\ &\leq \sum_k \int_u^v P_{i-}^u(i, i) q_{ik}(dt) Q_v^{t+}(k, j) + P_v^u(i, j) = Q_v^u(i, j). \end{aligned}$$

Théorème 6.3.1. — La formule :

$$(6.3.4) \quad \tilde{P}_v^u = \sum_{n=0}^{\infty} {}^{(n)}P_v^u$$

définit un s. g. régulier (\tilde{P} , S_{τ_α} , E) de matrices positives qui représente le s. g. (Q, S_{τ_α} , E) sur l'intervalle S_{τ_α} , en ce sens que l'on a :

$$(6.3.5) \quad \tilde{P}_v^u = Q_v^u$$

pour tout couple d'instant (u, v) tels que $a_+ < u < v < b_-$.

Démonstration. — Il résulte de la relation (6.3.2), vérifiée pour tout N, que l'on a :

$$\tilde{P}_v^u(i, j) = \lim_N \uparrow \left(\sum_0^N {}^{(n)}P_v^u(i, j) \right) \leq Q_v^u(i, j)$$

ce qui montre que la relation (6.3.4) a un sens. La construction ci-dessus montre de plus que $\{ P_v^u, u < v \text{ dans } S_{\tau_\alpha} \}$ est un s. g. généralisé de matrices positives, puisque lorsque $a_+ < s < t < u < b_-$, on a :

$$(6.3.6) \quad \tilde{P}_t^s \tilde{P}_u^t = \sum_{m,n=0}^{\infty} {}^{(m)}P_t^s {}^{(n)}P_u^t = \sum_{m+n=0}^{\infty} {}^{(m+n)}\tilde{P}_u^s = \tilde{P}_u^s.$$

La régularité du s. g. \tilde{P} résulte des inégalités élémentaires :

$$(6.3.7) \quad P \leq \tilde{P} \leq Q.$$

Il reste à montrer la relation (6.3.5). Pour cela, remarquons que, d'après le théorème 6.2.1, il est équivalent de le montrer pour le s. g. markovien $Q_v^u = \exp \left[- \int_u^v d\Phi \right] Q_v^u$. Observons alors que d'après la relation (6.3.7) le s. g. P est sous-markovien et que si on pose :

$$e_v^u(i) = 1 - \tilde{P}_v^u(i, E) \quad i \in E$$

la régularité du s. g. \tilde{P} entraîne que la fonction d'intervalle $\exp [-e_v^u(i)]$ possède les propriétés (a) (b) et (c). Comme il en est de même des fonctions d'intervalles $\left\{ \exp \left(- \int_u^v q_i(ds) \right) ; i \in E \right\}$, il existe une partition localement finie de l'intervalle S_{T_α} telle que sur chacun des intervalles qui la constituent on ait :

$$0 \leq e_v^u(i) < \varepsilon$$

$$1 - \varepsilon < \exp \left[- \int_u^v q_i(ds) \right] \leq 1 \quad \text{sur } E.$$

Les relations :

$$e_v^u(i) = \sum_k \int_u^v P_{t_-}^u(i, k) q_{ik}(dt) e_v^+(k) < \varepsilon (1 - P_v^u(i, i)) < \varepsilon^2$$

montrent alors par itération que sur chacun de ces intervalles, le s. g. \tilde{P} est markovien. Comme de plus on a $e_{u_+}^u(i) = 0$ pour tout $u \in T_\alpha$ et tout $i \in E$, P est en fait markovien sur l'intervalle S_{T_α} lui-même. On achève alors la démonstration en remarquant que l'on a enfin :

$$1 < \tilde{P}_v^u(1, E) \leq Q_v^u(i, E) = 1 \quad i \in E ; a_+ < u < v < b_-.$$

REMARQUE. — La représentation que nous venons d'obtenir du s. g. réduit Q sur l'intervalle S_{T_α} n'est pas seulement valable si l'ensemble E des sections considérées sont régulières. Car en fait, il n'est pas nécessaire pour obtenir une telle représentation de supposer la condition :

$$Q_{t_+}^-(i, i) > 0 \quad i \in E ; t_\pm \in S_T$$

satisfaite. Nous avons déjà montré, en effet, que l'ensemble des intervalles à l'intérieur de chacun desquels cette condition est satisfaite est localement fini à l'intérieur de l'intervalle S_{T_α} . Si maintenant t est un instant pour lequel $Q_{t_+}^-(i, i) = 0$ et si l'on pose $q_i(dt) = \infty$, la représentation (6.3.4) reste valable en supposant l'ensemble E constitué de sections continues.

§ 7 La relation de dominance.

Définition 7.1. — Étant donné deux semi-groupes généralisés Q et Q' de matrices positives, définis respectivement sur les ensembles $(E_s)_{s \in T}$ et $(E'_s)_{s \in T}$, on dit que le s. g. généralisé Q domine le s. g. généralisé Q' (en notation $Q \geq Q'$) si :

- (a) $E_s \supset E'_s \quad s \in T$
- (b) $Q'_t(i, j) \geq Q'_t(i, j) \quad (i, j) \in E'_s \times E'_t; \quad s < t \text{ dans } T.$

Il sera d'ailleurs naturel dans ces conditions de prolonger d'emblée le domaine de définition du s. g. généralisé Q' aux ensembles $(E_s)_{s \in T}$ en posant :

$$Q'_t(i, j) = 0 \quad \text{lorsque} \quad (i, j) \in (E_s \times E_t) \setminus (E'_s \times E'_t).$$

Théorème 7.1. — Soit Q et Q' deux s. g. généralisés de matrices positives, tels que $Q \geq Q'$. Pour tout instant $v \in T$, il existe :

(a) une bande $\bar{G}_v \subset G_v$ telle que, pour tout élément de cette bande et tout instant $s < v$, on ait :

$$\lim_{t \uparrow v} \downarrow (Q'^s_t f_t) = 0;$$

(b) un sous-espace épais $\bar{G}'_v \subset G'_v$ tel que, pour tout élément $f' \in \bar{G}'_v$ et tout instant $s < v$, on ait :

$$\lim_{t \uparrow v} \uparrow (Q'_t f'_s) < \infty.$$

De plus, les sous-espaces épais \bar{G}_v et \bar{G}'_v sont isomorphes par les applications Φ_{v-} et Ψ_{v-} telles que :

$$(7.1) \quad \begin{aligned} [\Phi_{v-}(f)]_s &= \lim_{t \uparrow v} \downarrow (Q'^s_t f_t) & f \in \bar{G}_v \\ [\Psi_{v-}(f')]_s &= \lim_{t \uparrow v} \uparrow (Q'_t f'_s) & f' \in \bar{G}'_v \end{aligned}$$

et on a :

$$(7.2) \quad \Phi_{v-} \cdot \Phi_{v-} = I \text{ sur } \bar{G}_v \quad \text{et} \quad \Phi_{v-} \cdot \Psi_{v-} = I' \text{ sur } \bar{G}'_v$$

où I et I' désignent les applications identiques sur G_v et G'_v respectivement.

Démonstration. — Pour tout élément $f \in G_v$, les relations :

$$Q'^s_t f_t = Q'^s_t Q'^u_s f_u \geq Q'^s_u f_u$$

montrent que l'application $t \rightarrow Q'^s_t f_t (t < v)$ est non décroissante.

L'expression $[\Phi_{v_-}(f)]_s = \lim_{t \uparrow v} \downarrow (Q_t^s f_t)$ définit par suite un élément du cône de sortie G'_v .

Semblablement, pour tout élément $f' \in G'_v$, il reste des relations :

$$Q_t^s f'_t = Q_t^s Q_u^t f'_u \leq Q_u^s f'_u$$

que l'application $t \rightarrow Q_t^s f'_t (t < v)$ est non décroissante. L'expression :

$$[\Psi_{v_-}(f')]_s = \lim_{t \uparrow v} (Q_t^s f'_t)$$

définit par suite un élément de G_v .

De plus, il résulte des inégalités élémentaires :

$$\begin{aligned} f &\geq \Phi_{v_-}(f) = f' \\ f_s = Q_t^s f_t &\geq \lim_{t \uparrow v} \uparrow (Q_t^s f'_t) \end{aligned}$$

que l'on a :

$$(7.3) \quad \Psi_{v_-} \cdot \Phi_{v_-} \leq I_{G'_v}$$

Et de même, il résulte des inégalités :

$$\begin{aligned} f &= \Psi_{v_-}(f') \geq f' \\ \lim_{t \uparrow v} \downarrow (Q_t^s f_t) &\geq Q_t^s f'_t = f'_s \end{aligned}$$

que l'on a :

$$(7.4) \quad \Phi_{v_-} \cdot \Psi_{v_-} \geq I_{G'_v}$$

Puisque les applications Φ_{v_-} et Ψ_{v_-} sont manifestement additives et non décroissantes, il résulte du théorème 1.5.2 que les sous-espaces épais \overline{G}^1 et \overline{G}' sont isomorphes par les applications Φ_{v_-} et Ψ_{v_-} et que ces applications satisfont aux relations (7.2) ce qui achève la démonstration.

Exemple. — Soit sur la droite numérique le s. g. généralisé markovien $Q_t^s = 1$. Sur tout intervalle $T_\alpha =]a, b[$ sur lequel le s. g. généralisé $Q_t^s = f(s)f^{-1}(t)$, dominé par Q , est tel que $f(s)f^{-1}(t) = \det(Q_t^s) < 0$, la fonction strictement positive $s \rightarrow f(s)$ est non décroissante.

Si $\lim_{s \uparrow b} \uparrow f(s) < \infty$, l'application Φ_{b_-} est injective et les cônes de sortie G_b et G'_b sont isomorphes.

Si par contre $\lim_{s \uparrow b} \uparrow f(s) = \infty$, on voit que $G_b = \Phi_{b_-}^{-1}(0)$ et que d'autre par $G'_b = 0$.

Semblablement, on obtient pour les cônes d'entrée les résultats explicites suivants :

Théorème 7.2. — Soient Q et Q' deux s. g. généralisés de matrices positives, tels que $Q \geq Q'$. Pour tout instant $v \in T$, il existe :

(a) une bande $\bar{F}_v \subset F_v$ telle que, pour tout élément de cette bande et tout instant $t < v$, on ait :

$$\lim_{s \downarrow v} \downarrow (f_s Q_t^s) = 0;$$

(b) un sous-espace épais $\bar{F}'_v \subset F'_v$ tel que, pour tout élément $f' \in \bar{F}'_v$ et tout instant $t > v$, on ait :

$$\lim_{s \downarrow v} \uparrow (f'_s Q_t^s) < \infty.$$

De plus, les sous-espaces épais \bar{F}_v^\perp et \bar{F}'_v sont isomorphes par les applications Φ_{v+} et Ψ_{v+} telles que :

$$(7.5) \quad [\Phi_{v+}(f)]_t = \lim_{s \uparrow v} \downarrow (f_s Q_t^s) \quad f \in \bar{F}_v^\perp$$

$$(7.6) \quad [\Psi_{v+}(f')]_t = \lim_{s \downarrow v} \uparrow (f'_s Q_t^s) \quad f' \in \bar{F}'_v$$

et on a :

$$\Psi_{v+} \cdot \Phi_{v+} = I \text{ sur } \bar{F}_v^\perp \quad \text{et} \quad \Phi_{v+} \cdot \Psi_{v+} = I' \text{ sur } \bar{F}'_v$$

où I et I' désignent respectivement les applications identiques sur F_v et F'_v .

Nous supposons maintenant que le s. g. dominant est réduit, ou plus généralement, dominé par un s. g. réduit. Ce qui suit est donc en particulier valable pour un s. g. dominant actif.

Remarquons d'abord qu'il n'est pas vrai qu'en général tout s. g. dominé par un s. g. réduit, continu ou actif soit lui-même réduit, continu ou actif. Ainsi, par exemple, un s. g. markovien dont la réduction fait apparaître des lois de sorties non bornées est strictement dominé par cette réduction. Par exemple encore, tout s. g. généralisé $Q_\tau^\sigma = f(\sigma)f^{-1}(\tau)$ où l'application $\sigma \rightarrow f(\sigma)$ est non décroissante est dominé par le s. g. continu $Q_\tau^\sigma = 1$, sans être lui-même nécessairement continu. Et nous verrons d'ailleurs que les s. g. tabous, tels que nous les définissons ci-dessous, qui sont dominés par un s. g. actif, ne sont pas nécessairement actifs.

Les résultats ci-dessous vont cependant nous montrer qu'une telle situation est rare sur l'intervalle S_T .

Théorème 7.3. — Soit Q un s. g. réduit (ou plus généralement, dominé par un s. g. réduit) sur l'intervalle S_T et soit $Q' \leq Q$. Pour tout instant $u_+ \in S_T$ et pour tout $i \in E_{u_+}^*$, il existe un nombre $a_{u_+}^{-1}(i) \in [0, 1]$ tel que :

$$(7.7) \quad \lim_{\sigma \downarrow u_+} \uparrow \sum_{E_\sigma^*} Q_\sigma'^{u_+}(i, j) Q_\tau^\sigma(j, \cdot) = a_{u_+}^{-1}(i) Q_\tau^{u_+}(i, \cdot).$$

Semblablement, pour tout $v_- \in S_T$ et pour tout $j \in E_{v_-}^*$, il existe un nombre $a_{v_-}(j) \in [0, 1]$ tel que :

$$(7.8) \quad \lim_{\tau \uparrow v_-} \downarrow \sum_{E_\tau^*} Q_\tau^\sigma(\cdot, K) Q_{v_-}'^\tau(K, j) = a_{v_-}(j) Q_{v_-}^\sigma(\cdot, j).$$

Soit $A = (A_\sigma)_{\sigma \in S_T}$ la famille des ensembles $A_\sigma = \{i \in E_\sigma^* ; a_\sigma(i) > 0\}$. On a les relations :

$$(7.9) \quad E_\sigma'^* \supset A_\sigma \supset \bar{E}_\sigma'^*$$

avec l'égalité sur chacun des intervalles d'une famille dénombrable partout dense (S_{T_p}) , où le s. g. dominé Q' est actif et réduit.

Démonstration. — Il résulte de l'inégalité élémentaire :

$$\sum_{E_\sigma^*} Q_\sigma'^{u_+}(i, j) \Phi_\tau^\sigma(j, \cdot) \leq Q_\tau^{u_+}(i, \cdot)$$

que l'on a :

$$\lim_{\sigma \downarrow u_+} \uparrow (Q_\sigma'^{u_+} Q_\tau^\sigma)(i, \cdot) \leq Q_\tau^{u_+}(i, \cdot) < \infty.$$

Il existe ainsi un nombre $a_{u_+}^{-1}(i) \in [0, 1]$ tel que la relation (7.7) soit satisfaite et comme de plus l'application $\Psi_{u_+} | \bar{F}'_{u_+} : \bar{F}'_{u_+} \rightarrow \bar{F}_{u_+}^1$ est un isomorphisme, la famille $(Q_\sigma'^{u_+}(i, \cdot))_{i \in A_{u_+}}$ est constituée d'éléments extrémaux de \bar{F}'_{u_+} étrangers deux à deux.

On montrerait semblablement la relation (7.8) et que la famille $(Q_{v_-}'^\tau(\cdot, j))_{j \in A_{v_-}}$ est constituée d'éléments extrémaux de \bar{G}'_{v_-} étrangers deux à deux. Cela montre bien que l'on a :

$$E_\sigma'^* \supset A_\sigma \quad \sigma \in S_T.$$

En conservant sur les génératrices extrémales $(A_\sigma)_{\sigma \in S_T}$ les éléments :

$$(Q_\sigma'^{u_+}(i, \cdot))_{i \in A_{u_+}} \text{ et } (Q_{v_-}'^\tau(\cdot, j))_{j \in A_{v_-}}$$

respectivement, on peut donc définir une réduction de Q' que l'on notera $\text{red}(Q')$ et telle que :

$$\text{red}(Q') \geq Q'.$$

Montrons alors que le s. g. généralisé Q' domine le s. g. actif $\text{red}(Q')$. Pour cela, nous allons montrer par exemple que pour toute génératrice extrémale $j \in E_{u_+}^* \setminus A_{u_+}$, on a $Q_{u_+}^{\prime u_+}(\cdot, j) = 0$. Ou, ce qui est équivalent, que pour tout $i \in E_{u_-}^*$ les lois d'entrées $\{Q_{\sigma}^{\prime u_+}(i, \cdot); \sigma < u_+\}$ sont étrangères à la bande $\overline{F_{u_+}^{\perp}}$. En effet, dans le cas contraire, il existerait au moins une loi d'entrée $f' \in \overline{F_{u_+}^{\perp}}$ telle que $Q_{\sigma}^{\prime u_+}(i, \cdot) \geq f'_{\sigma}(\cdot)$. Puisque par définition de la bande $\overline{F_{u_+}^{\perp}}$, il existe un instant $\tau > u_+$ et un état $j \in E_{\tau}^*$, tel que :

$$\lim_{\sigma \downarrow u_+} \uparrow (f'_{\sigma} Q_{\sigma}^{\prime u_+})(j) = \infty$$

il en résulterait que :

$$Q_{\tau}^{\prime u_+}(i, j) \geq \lim_{\sigma \downarrow u_+} \uparrow (Q_{\sigma}^{\prime u_+} Q_{\sigma}^{\prime u_+})(i, j) \geq \lim_{\sigma \downarrow u_+} \uparrow (f'_{\sigma} Q_{\sigma}^{\prime u_+})(i, j) = \infty$$

ce qui est impossible. Ceci montre que pour tout $\sigma \in S_{\tau}$, $A_{\sigma} \subset \overline{E_{u_+}^*}$ et que l'on a ainsi :

$$\text{red}(Q') \geq Q' \geq \overline{\text{red}(Q')}.$$

D'après le théorème 4.6.1, il existe donc une partition au plus dénombrable de l'intervalle S_{τ} en intervalles partiels $S_{\tau\sigma}$ à l'intérieur de chacun desquels $\text{Card}(E_{\sigma}^*) = \text{const.}$, $\overline{E_{\sigma}^*} = A_{\sigma} = E_{\sigma}^*$ et $\text{red}(Q') = Q' = \overline{\text{red}(Q')}$, ce qui achève la démonstration.

Il résulte de la relation :

$$A_{\sigma} \supset E_{\sigma}^* \quad \sigma \in S_{\tau}$$

que la restriction aux ensembles $(A_{\sigma})_{\sigma \in S_{\tau}}$ de tout s. g. généralisé équivalent au s. g. dominé Q' , est lui-même un s. g. généralisé. En particulier, les éléments extrémaux :

$$(a_{u_+}(i) Q_{\cdot}^{\prime u_+}(i, \cdot))_{i \in A_{u_+}} \text{ et } (Q_{v_-}^{\prime}(\cdot, j) a_{v_-}^{-1}(j))_{j \in A_{v_-}},$$

qui sont respectivement les images par Φ_{u_+} et Φ_{v_-} des éléments extrémaux $(Q_{\cdot}^{\prime u_+}(i, \cdot))_{i \in A_{u_+}}$ et $(Q_{v_-}^{\prime}(\cdot, j))_{j \in A_{v_-}}$ des bandes $\overline{F_{u_+}^{\perp}}$ et $\overline{G_{v_-}^{\perp}}$ déterminent

un s. g. généralisé $\Phi(Q', Q')$ que nous appellerons la projection du s. g. réduit Q sur le s. g. dominé Q' . On a donc explicitement :

$$[\Phi(Q; Q')]_{\tau}^{\sigma} = \begin{cases} a_{\sigma}(i)Q'_{\tau}{}^{\sigma}(i, j)a_{\tau}^{-1}(j) & \text{si } (i, j) \in A_{\sigma} \times A_{\tau} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les résultats suivants sont alors immédiats :

Proposition 7.1. — Soit Q un s. g. réduit. A tout s. g. dominé $Q' \leq Q$, la projection $Q \rightarrow \Phi(Q', Q')$ associe au s. g. réduit Q un s. g. généralisé $\Phi(Q', Q')$ tel que :

$$\begin{aligned} (a) \quad & \Phi(Q; Q) = Q \\ (b) \quad & \Phi(Q; \Phi(Q; Q')) = \Phi(Q; Q') \end{aligned}$$

tel que de plus, si $Q'' \leq Q'$:

$$(c) \quad \Phi(Q; Q'') = \Phi(\Phi(Q; Q'); Q'').$$

Nous supposerons maintenant que le s. g. dominant est continu.

Définition 7.1. — Soit (Q, S_{τ}, E) un s. g. continu, on dira qu'une famille $A = (A_{\sigma})_{\sigma \in S_{\tau}}$ d'ensembles de E constitue un canal continu si l'application $\sigma \rightarrow 1_{A_{\sigma}}$ est continue, c'est-à-dire si les relations :

$$\lim_{\sigma \downarrow u_+} 1_{A_{\sigma}} = 1_{A_{u_+}} \quad \lim_{\tau \uparrow v_-} 1_{A_{\tau}} = 1_{A_{v_-}}$$

sont satisfaites, quels que soient les instants u_+ et v_- dans S_{τ} .

Théorème 7.4. — Soit (Q, S_{τ}, E) un s. g. continu et $Q' \leq Q$. Pour tout $i \in E$, on a les relations :

$$(7.10) \quad \lim_{\sigma \downarrow u_+} Q'_{\sigma}{}^{u_+}(i, i) = a_{u_+}^{-1}(i) \quad \lim_{\tau \uparrow v_-} Q'_{v_-}{}^{\tau}(i, i) = a_{v_-}(i).$$

De plus, sur chacun des intervalles $S_{\tau_{\beta}}$ défini au théorème 7.3 :

(a) le canal $A = (A_{\sigma})_{\sigma \in S_{\tau_{\beta}}}$ est continu ;

(b) la projection $\Phi(Q; Q')$ est un s. g. généralisé continu, dominé par Q . Si enfin le s. g. dominé est lui-même continu, on a $\Phi(Q; Q') = Q'$.

Démonstration. — Chacune des relations (7.10) résulte respectivement des relations (7.7) et (7.8), ainsi que de la continuité du s. g. dominant Q . Ainsi :

$$\forall i \in A_{u_+}, \lim_{\sigma \downarrow u_+} a_{\sigma}(i) = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in A_{v_-}, \lim_{\sigma \uparrow v_-} a_{\sigma}(i) = 1.$$

Cela entraîne que chacun des canaux $A = (A_\sigma)_{\sigma \in S_{T_\beta}}$ est continu; et que sur chacun de ces canaux, le s. g. $\Phi(Q; Q')$ est continu.

De plus, on a par exemple :

$$(7.11) \quad [\Phi(Q; Q')]_{v_-}^{u_+} = \lim_{\sigma \downarrow u_+, \tau \uparrow v_-} Q'_\tau{}^\sigma \leq Q_{v_-}^{u_+} \quad u_+ < v_- \text{ dans } S_{T_\beta}$$

et comme les couples $(u_+ < v_-)$ sont partout denses dans $S_{T_\beta} < S_{T_\beta}$, on a donc, dans S_{T_β} , $\Phi(Q; Q') \leq Q$ par prolongement des inégalités.

Enfin, si le s. g. dominé est lui-même continu, on déduit des relations élémentaires :

$$[\Phi(Q; Q')]_{v_-}^{u_+} \geq Q_{v_-}^{u_+} \quad [\Phi(Q; Q')]_{v_+}^{u_-} \leq Q_{v_+}^{u_-}$$

que l'on a par prolongement des inégalités $\Phi(Q; Q') = Q'$, ce qui achève la démonstration.

Nous allons maintenant caractériser les s. g. dominés par un s. g. continu donné.

Définition 7.2. — Étant donné un s. g. généralisé Q' dominé par le s. g. continu (Q, S_T, E) , on appellera canal continu A associé au s. g. dominé Q' , la famille $A = (A_\sigma)_{\sigma \in S_T}$ définie au théorème 7.3 et prolongée par continuité aux extrémités de chaque intervalle S_{T_β} .

Désignons par C^+ l'ensemble des fonctions positives, continues sur T . A toute fonction $f \in C^+$, nous associons son extension à l'ensemble S_T telle que, pour tout $u \in T$, on ait $f_{u_-} = f_u = f_{u_+}$. On désignera par S_{C^+} ce sous-ensemble des fonctions positives continues sur S_T .

Étant donné le canal continu A , on posera alors, pour tout $i \in E$:

$$\int_\sigma^\tau \wedge q_i(du) = \sup_{f \leq 1_A^{-1}(i), f \in S_{C^+}} \int_\sigma^\tau f_u q_i(du) \quad \sigma < \tau \text{ dans } S_T$$

et semblablement, pour tout couple $(i, j) \in E \times E$, on posera :

$$\int_\sigma^\tau \wedge q_{ij}(du) = \inf_{f \geq 1_A(i)1_A(j), f \in S_{C^+}} \int_\sigma^\tau f_u q_{ij}(du) \quad \sigma < \tau \text{ dans } S_T.$$

Par exemple, soit $A = (A_\sigma)_{\sigma \in S_T}$ le canal continu tel que $A_\sigma = E$ si $s_+ \leq \sigma \leq t_-$ et $A_\sigma = \emptyset$ lorsque $\sigma \leq s_-$ ou $\sigma \geq t_+$. Alors, sur l'intervalle $[s_+, t_-]$, ainsi qu'aux transitions instantanées (s_-, s_+) et (t_-, t_+) , les mesures $\wedge q_i$ et $\wedge q_{ij}$ sont respectivement identiques aux mesures q_i et q_{ij} . Tandis qu'à l'intérieur du canal complémentaire A^c , les mesures $\wedge q_i$ sont infinies et les mesures $\wedge q_{ij}$ sont nulles.

Théorème 7.5. — Soit (Q, S_τ, E) un s. g. continu et $Q' \leq Q$. Si A est le canal continu associé au s. g. dominé Q' , on a :

$$Q' \leq {}^A P \leq Q.$$

Démonstration. — Soit $A = (A_\sigma)_{\sigma \in S_\tau}$ le canal continu du s. g. dominé Q' . Le s. g. tabou ${}^A P$ est manifestement le s. g. maximal dont A soit le canal et qui soit continu sur chacun des intervalles S_{τ_σ} . On a donc :

$$\Phi(Q; Q') \leq {}^A P.$$

Il en résulte que, pour tout couple $(u_+ < v_-)$ dans $S_\tau < S_\tau$, on a :

$$Q'_{v_-}^{u_+} \leq [\Phi(Q; Q')]_{v_-}^{u_+} \leq {}^A P_{v_-}^{u_+}.$$

Comme de plus, on a manifestement :

$$Q'_{u_+}^{u_-} \leq {}^A P_{u_+}^{u_-}$$

puisque cette transition instantanée s'effectue en un saut au plus, le théorème est démontré.

§ 8 Étude aux extrémités d'un intervalle de régularité.

L'objet de ce paragraphe est l'étude des frontières d'entrée et de sortie d'un s. g. régulier (Q, S_{τ_α}, E) aux extrémités de son intervalle de régularité. Comme les résultats relatifs à l'entrée et à la sortie sont semblables, nous nous limiterons d'ailleurs, dans ce qui suit, à l'étude de la sortie.

Dans la première section de ce paragraphe, nous étendons au cas d'un s. g. régulier de matrices positives une définition, due à J. Neveu [12], des canaux de sortie (qu'il appelle plus simplement canaux) d'une chaîne de Markov, qu'elle soit ou non stationnaire et nous ramenons l'étude de la frontière de sortie à celle de ces canaux de sortie : dans la seconde section, nous donnons alors deux conditions, l'une suffisante, l'autre nécessaire, pour qu'un canal soit de sortie.

Comme cette étude s'adapte d'une façon immédiate à un s. g. généralisé continu, on pourra remarquer qu'elle donne aussi la représentation globale d'un s. g. réduit Q sur son intervalle de définition S_τ .

Soit (Q, S_{τ_α}, E) un s. g. régulier et désignons par $G(Q)$ son cône de sortie à l'extrémité b_- de l'intervalle S_{τ_α} . Suivant une idée due à Feller, remarquons que si pour toute fonction $f \in G(Q)$, on pose :

$$f Q_i^s(i, j) = \begin{cases} f_s^{-1}(i) Q_i^s(i, j) f_i(j) & \text{si } f_s(i) f_i(j) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors pour toute loi de sortie $\varphi \in G(fQ)$, on a $f\varphi \in G(Q)$. En outre, si on désigne par $G^*(fQ) \subset G(fQ)$ le sous-cône des lois de sorties telles que $0 \leq \varphi \leq 1$, on aura pour toute fonction $\varphi \in G^*(fQ)$, $f\varphi \leq f$. Et comme inversement, si $g \leq f$ est une loi de sortie du cône $G(Q)$, alors $g = f\varphi$, où $\varphi \in G^*(fQ)$, il en résulte que l'étude du sous-cône $G^*(fQ)$ est équivalente à celle du sous-cône convexe des lois de sorties du cône $G(Q)$ dominées par f .

Nous supposons donc dans la suite que le s. g. régulier donné (Q, S_{τ_α}, E) est lui-même markovien et nous en étudierons le cône $G^*(Q)$ de ses lois de sorties f telles que $0 \leq f \leq 1$, dont nous désignerons par E^* l'ensemble des génératrices extrémales.

8.1 Les canaux de sortie. — Soit $f = \{f_\sigma; \sigma \in S_{\tau_\alpha}\}$ une famille de fonctions définies sur E . On dira que f est sur-régulière à droite (ou plus simplement sur-régulière, ou Q -sur régulière si on veut préciser) lorsque :

$$(8.1.1) \quad f_\sigma \geq Q_\tau^\sigma f_\tau \quad \sigma < \tau \text{ dans } S_{\tau_\alpha}$$

et qu'elle est sous-régulière à droite (sous-régulière, Q -sous-régulière), lorsqu'au contraire :

$$(8.1.2) \quad f_\sigma \leq Q_\tau^\sigma f_\tau \quad \sigma < \tau \text{ dans } S_{\tau_\alpha}$$

On dira de plus que f est régulière (à droite) si elle vérifie simultanément les relations (8.1.1) et (8.1.2). Donc en particulier, les lois de sorties $f \in G^*(Q)$ sont régulières.

Théorème 8.1.1. — Soit $f = \{f_\sigma; \sigma \in S_{\tau_\alpha}\}$ une famille de fonctions uniformément bornées sur E . L'ensemble (non vide) des fonctions sur-régulières qui majorent f admet une borne inférieure sur-régulière, que l'on notera $\underline{\Phi}f$.

Semblablement, l'ensemble (non vide) des fonctions sous-régulières qui minorent f admet une borne supérieure sous-régulière $\overline{\Phi}f$.

De plus, les fonctions $\underline{\Phi}\overline{\Phi}f$ et $\overline{\Phi}\underline{\Phi}f$ sont régulières et on a :

$$(8.1.3) \quad (\underline{\Phi}\overline{\Phi}f)_\sigma = \limsup_{\tau \uparrow b} (Q_\tau^\sigma f_\tau) \quad \sigma < \tau \text{ dans } S_{\tau_\alpha}$$

$$(8.1.4) \quad (\overline{\Phi}\underline{\Phi}f)_\sigma = \liminf_{\tau \uparrow b} (Q_\tau^\sigma f_\tau) \quad \sigma < \tau \text{ dans } S_{\tau_\alpha}$$

Démonstration. — Posons :

$$(\overline{\Phi}f)_\sigma = \sup_{\tau \geq \sigma} (Q_\tau^\sigma f_\tau) \quad \sigma \leq \tau \text{ dans } S_{\tau_\alpha}$$

en convenant, pour préciser, que $Q_\sigma^\sigma f_\sigma = f_\sigma$ par définition. Il résulte des relations :

$$Q_\tau^\sigma(\bar{\Phi}f)_\tau = Q_\tau^\sigma \left(\sup_{u \geq \tau} Q_u^\tau f_u \right) \leq \sup_{u \geq \sigma} (Q_u^\sigma f_u) = (\bar{\Phi}f)_\sigma$$

que la fonction $\bar{\Phi}f$ est sur-régulière. D'autre part, pour toute fonction sur-régulière $g \geq f$, on a :

$$g_\sigma \geq \sup_{\tau \geq \sigma} (Q_\tau^\sigma g_\tau) > \sup_{\tau \geq \sigma} (Q_\tau^\sigma f_\tau) = (\bar{\Phi}f)_\sigma$$

ce qui montre bien que $\bar{\Phi}f$ est la plus petite fonction sur régulière qui majore f .

En posant également :

$$(\underline{\Phi}f)_\sigma = \inf_{\tau \geq \sigma} (Q_\tau^\sigma f_\tau) \quad \sigma \leq \tau \text{ dans } S_{\tau_\alpha}$$

on montrerait de même que $\underline{\Phi}f$ est la plus grande fonction sous-régulière qui minore f . De plus, lorsque g est sur-régulière, il résulte des inégalités élémentaires :

$$g_\sigma \geq Q_\tau^\sigma g_\tau \geq Q_\tau^\sigma Q_u^\tau g_u = Q_u^\sigma g_u$$

que l'on a :

$$\underline{\Phi}g = \lim_{\tau \uparrow b} \downarrow (Q_\tau^\sigma g_\tau).$$

Ainsi, $\underline{\Phi}g$ est une fonction régulière, ce qui montre bien la relation (8.1.3).

On montrerait semblablement la relation (8.1.4).

Théorème 8.1.2. — Soit (Q, S_{τ_α}, E) un s. g. régulier markovien à droite. Pour toute fonction $f = \{f_\sigma; \sigma \in S_{\tau_\alpha}\}$ uniformément bornée sur S_{τ_α} , il existe sur $E_{b_-}^*$ deux fonctions \bar{f} et \underline{f} bornées, telles que :

$$(8.1.5) \quad Q_{b_-}^\sigma \bar{f} = (\bar{\Phi} \bar{f})_\sigma.$$

$$(8.1.6) \quad Q_{b_-}^\sigma \underline{f} = (\underline{\Phi} \underline{f})_\sigma.$$

Cela résulte immédiatement du théorème 4.1. Remarquons, cependant, que si nous avons supposé le s. g. régulier (Q, S_{τ_α}, E) markovien, nous n'avons pas étendu cette convention à l'extrémité b_- de l'intervalle S_{τ_α} . Mais la fonction $1 = \{1_{E_\sigma}; \sigma \in S_{\tau_\alpha}\}$ étant régulière, on a $\bar{1} = \underline{1}$ et d'après les relations ci-dessus :

$$(8.1.7) \quad Q_{b_-}^\sigma \bar{1} = Q_{b_-}^\sigma 1 = 1$$

on conviendra donc dans la suite de poser :

$$\bar{1} = \underline{1} = 1_{E^*}$$

ce qui fixe les éléments sur les génératrices extrémales du cône $G^*(Q)$ et détermine ainsi les matrices, maintenant markoviennes, $Q_{b_-}^\sigma$.

Soit $G \supset G^*(Q)$ l'ensemble des fonctions $f = \{f_\sigma; \sigma \in S_T\}$ définies sur E , telle que :

$$(8.1.8) \quad \bar{f} = \underline{f} \quad \sup_{\sigma} \sup_{i \in E} |f_\sigma|(i) < \infty$$

et $h : G \rightarrow C(E^*)$ l'application de G sur l'ensemble $C(E^*)$ des fonctions (continues) sur E^* , telles que :

$$(8.1.9) \quad h \circ f = \bar{f} = \underline{f}.$$

Nous désignons par $(X_\sigma)_{\sigma \in S_T}$ un processus représenté à chaque instant $\sigma \in S_T$ par un état $i \in E$ et dont l'évolution est donnée par la famille des probabilités de transition $Q_\sigma(i, \cdot)$. Il résulte de la continuité du s. g. généralisé Q que ce processus $(X_\sigma)_{\sigma \in S_T}$ est continu au sens presque sûr. Ainsi, pour toute fonction f continue, le processus $(f \circ X)_{\sigma \in S_T}$ est séparable.

En particulier, si la fonction f est régulière et bornée, $(f \circ X)_{\sigma \in S_T}$ est une martingale séparable bornée. Désignons alors par $X(f)$ la limite au sens presque sûr :

$$(8.1.10) \quad X(f) = \lim_{\sigma \uparrow b_-} \text{p. s. } (f \circ X)_\sigma.$$

Théorème 8.1.3. — Soit (Q, S_T, E) un s. g. markovien continu. Il existe une variable aléatoire X , prenant ses valeurs sur l'ensemble E^* des génératrices extrémales du cône $G^*(Q)$ des lois de sorties bornées, telle que, pour toute loi de sortie bornée f :

$$(8.1.11) \quad X(f)^{\text{p. s.}} = (h \circ f)(X).$$

Démonstration. — Il suffit de vérifier que l'application $f \rightarrow (X(f))$ est compatible avec la structure du cône réticulé $G^*(Q)$ et pour cela, de montrer comme dans [11] que pour tout couple (f, g) de fonctions régulières bornées, on a :

$$X(f \vee g) = \sup [X(f), X(g)].$$

Posons $f^+ = f \wedge 0$ et $[X(f)]^+ = \sup [X(f), 0]$ et montrons, ce qui est équivalent, que l'on a au sens presque sûr :

$$(8.1.12) \quad [X(f)]^+ = X(f^+).$$

Désignons par A_σ la σ -algèbre des événements non postérieurs à l'instant σ . Puisque :

$$E[[X(f)]^+ | A_\sigma] = \lim_{\tau \uparrow b} [Q_\tau^\sigma \sup (f_\tau, 0)](X_\sigma) = (f^+ \circ X)_\sigma$$

il suffit de faire tendre σ vers b_- pour obtenir la relation cherchée.

Théorème 8.1.4. — Soit (Q, S_τ, E) un s. g. markovien continu. Il existe une variable aléatoire X , prenant ses valeurs sur E^* , telle que, pour toute fonction continue $f = \{f_\sigma; \sigma \in S_\tau\}$ uniformément bornée, on ait au sens presque sûr :

$$(8.1.13) \quad \limsup_{\sigma \uparrow b_-} (f \circ X)_\sigma = \overline{f(X)} \text{ p. s.}$$

$$(8.1.14) \quad \liminf_{\sigma \uparrow b_-} (f \circ X)_\sigma = \underline{f(X)} \text{ p. s.}$$

Démonstration. — Soit X la variable aléatoire définie par la relation (8.1.11) et posons :

$$Y_\sigma = E \left[\sup_{\tau \geq \sigma} (f \circ X)_\tau \mid A_\sigma \right].$$

Ainsi, $(Y_\sigma)_{\sigma \in S_\tau}$ constitue une sur-martingale séparable bornée, minorée par la sur-martingale $(\overline{\Phi f \circ X})_{\sigma \in S_\tau}$. On a donc les relations :

$$E \left[\sup_{u \geq \tau} (f \circ X)_u \mid A_\sigma \right] = \sum_E Q_\tau^\sigma(\cdot, j) E \left[\sup_{u \geq \tau} (f \circ X)_u \mid X_\tau = j \right] \geq \sum_E Q_\tau^\sigma(\cdot, j) (\overline{\Phi f})_\tau(j)$$

et lorsque $\tau \uparrow b$, on obtient :

$$E \left[\limsup_{\tau} (f \circ X)_\tau \mid A_\sigma \right] \geq (\underline{\Phi f})_\sigma.$$

Lorsque maintenant $\sigma \uparrow b_-$, il résulte d'un théorème de Doob sur la convergence des sur-martingales que l'on a :

$$\limsup_{\tau} (f \circ X)_\tau \geq \lim_{\tau} (\underline{\Phi f \circ X})_\tau = \overline{f(X)}.$$

Inversement, il résulte des relations :

$$f \leq \overline{\Phi f}$$

$$\overline{(\overline{\Phi f})} = (\overline{\Phi f}) = \overline{f}$$

que l'on a :

$$\limsup_{\tau} (f \circ X)_\tau \leq \limsup_{\tau} (\overline{\Phi f \circ X})_\tau = \lim_{\tau} (\overline{\Phi f \circ X})_\tau = \overline{f(X)}.$$

La relation (8.1.13) est donc vérifiée et on procéderait semblablement pour l'autre.

Soit maintenant $A = (A_\sigma)_{\sigma \in S_T}$ un canal continu et 1_A son indicateur. D'après le théorème précédent, nous aurons au sens presque sûr :

$$1[X_\tau \in A_\tau \text{ pour une suite d'instants } \tau \text{ adhérente à } b_-] \\ = \limsup_\tau (1_A \circ X)_\tau = \overline{1_A}(X)$$

$$1[X_\tau \in A_\tau \text{ pour tout instant d'un voisinage à gauche de } b_-] \\ = \liminf_\tau (1_A \circ X)_\tau = \underline{1_A}(X).$$

Et puisque les fonctions $\overline{1_A}$ et $\underline{1_A}$ ne peuvent prendre que les valeurs 0 et 1, ce sont les indicateurs de deux sous-ensembles de E^* . Ceci nous amène à poser la définition suivante, due à J. Neveu [12] dans le cas des chaînes de Markov :

Définition 8.1. — Un canal continu $A = (A_\sigma)_{\sigma \in S_T}$ est dit de sortie pour le s. g. markovien (Q, S_T, E) lorsque son indicateur est un élément de G , c'est-à-dire lorsque :

$$\underline{1_A} = \overline{1_A} = h \circ 1_A.$$

Deux canaux continus A et B sont dits équivalents lorsque $h \circ 1_A = h \circ 1_B$. Tout canal continu dont l'indicateur est équivalent à l'élément nul de G est dit vide.

Inversement, soit $A^* \subset E^*$ et désignons par $f = \{f_\sigma; \sigma \in S_T\}$ la fonction régulière telle que :

$$f_\sigma(\cdot) = Q_{b_-}^\sigma(\cdot, A^*).$$

Pour tout nombre $\varepsilon \in]0, 1[$, arbitraire mais fixé, définissons les ensembles $A_\sigma \subset E$ tels que :

$$A_\sigma = \{i; f_\sigma(i) \geq 1 - \varepsilon\}$$

et désignons par $1_A = (1_{A_\sigma})_{\sigma \in S_T}$ l'indicateur de ce canal continu $A = (A_\sigma)_{\sigma \in S_T}$.

Nous allons montrer que $1_A \in G$ et plus précisément que l'on a :

$$h \circ 1_A = 1_{A^*},$$

Cela résulte immédiatement des relations :

$$0 < (1 - \varepsilon)1_{A_\sigma} < f_\sigma \quad \text{et} \quad 0 < \varepsilon(1_E - 1_A)_\sigma < (1_E - f)_\sigma$$

d'où l'on déduit respectivement que l'on a :

$$0 \leq (1 - \varepsilon)\overline{1_A} \leq 1_{A^*} \quad \text{et} \quad 0 \leq \varepsilon(1_{E^*} - \underline{1_A}) \leq 1_{E^*} - 1_{A^*}$$

où $\overline{1_A}$ désigne indifféremment l'une ou l'autre des fonctions 1_A et $\overline{1_A}$. Il en résulte d'ailleurs que l'on a :

$$f_\alpha(\cdot) = \lim_{\tau \uparrow b_-} Q_\tau^\alpha(\cdot, A_\tau).$$

Enfin, remarquons que cette correspondance entre les classes de canaux de sortie et les parties de E^* est compatible avec les opérations de réunion et d'intersection, comme cela résulte immédiatement du théorème 8.1.4. Nous avons donc montré le résultat suivant :

Théorème 8.1. — Soit (Q, S_τ, E) un s. g. markovien continu et E^* l'ensemble des génératrices extrémales du cône de ses lois de sortie bornées. Il existe un isomorphisme entre :

- a) l'algèbre de Boole des parties de E^* ;
- b) l'algèbre de Boole des classes de canaux de sortie.

8.2 Étude des canaux de sortie continus. — Soit (P, S_τ, E) un s. g. sous-markovien continu sur E , dominé par (Q, S_τ, E) et désignons par $P_{q_i}, P_{q_{ij}}$ les mesures qui lui sont associées dans sa représentation (cf. § 6). Introduisons alors les notions suivantes :

- a) Nous dirons d'abord que l'élément $i \in E$ est P-ergodique lorsque :

$$\int^b P_{q_i}(dt) < \infty.$$

- b) De plus, sur l'ensemble E , soit la relation transitive faible : $\ll i \gg^P j$ lorsqu'il existe une chaîne $\{i = k_1, \dots, k_p = j\}$ d'éléments de E dont tout couple d'éléments consécutifs $(k_n, k_{n+1})_{1 \leq n < p}$ est tel que :

$$\int^b P_{q_{k_n k_{n+1}}}(dt) < \infty \gg.$$

Nous dirons qu'une partie $A \subset E$ est P-faiblement fermée si, pour tout $i \in A$, l'ensemble (éventuellement vide) des éléments $j \in E$ tels que $i \gg^P j$ est contenu dans A . Ainsi, tout élément P-ergodique constitue à lui seul une partie de E P-faiblement fermée, d'ailleurs minimale. Ainsi encore, la partie vide de E est considérée comme P-faiblement fermée.

- c) D'autre part, soit encore sur E la relation transitive forte : $\ll i \gg^P j$ lorsqu'il existe une chaîne $\{i = k_1, \dots, k_p = j\}$ d'éléments de E dont tout couple d'éléments consécutifs (k_n, k_{n+1}) est tel que :

$$\liminf_{\tau \uparrow b_-} \frac{\int^\tau P_{q_{k_n k_{n+1}}}(dt)}{\int^\tau [1 - \exp[-P_{q_{k_n}}(dt)]]} = \alpha > 0 \gg.$$

Nous dirons qu'une partie A de E est P -fortement fermée si, pour tout $i \in A$, l'ensemble (éventuellement vide) des éléments $j \in E$ tels que $i \gg^P j$ est contenu dans A et qu'elle est P -fortement saturée si, pour tout $i \in A$, on a :

$$\int^{b_-} {}^P q_i(dt) < \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\tau \uparrow b_-} \left[\sum_{j \neq i} \frac{\int^{\tau} {}^P q_{ij}(dt)}{\int^{\tau} [1 - \exp[-{}^P q_i(dt)]]} \right] = 1.$$

Ainsi, toute partie $A \subset E$ P -fortement saturée est non vide et P -fortement fermée.

d) Enfin, lorsque les notions ci-dessus seront relatives au s. g. continu markovien (Q, S_{τ}, E) lui-même, nous dirons simplement élément ergodique, ensemble faiblement, fortement fermé ou fortement saturé. Toute partie $A \subset E$ non vide fortement fermée est donc fortement saturée.

Définition 8.2.1. — Soit (Q, S_{τ}, E) un s. g. continu. Le canal de sortie $A = (A_{\tau})_{\tau \in S_{\tau}}$ est dit stationnaire lorsque la limite $\lim_{\tau \uparrow b_-} 1_{A_{\tau}}$ existe. Deux canaux de sortie stationnaires sont dits équivalents lorsqu'ils sont équivalents en tant que canaux de sortie.

Théorème 8.2.1. — Soit (Q, S_{τ}, E) un s. g. markovien continu. Toute partie de E faiblement fermée non vide contient un canal de sortie stationnaire non vide et tout canal de sortie stationnaire non vide $A = (A_{\tau})_{\tau \in S_{\tau}}$ a pour limite une partie $B = \lim_{\tau \uparrow b_-} A_{\tau}$ de E fortement saturée.

Démonstration. — Soit $A \subset E$ et désignons encore par A l'application $A : S_{\tau} \rightarrow \mathfrak{P}(E)$ constante et égale $A \subset E$. Étant donné le s. g. tabou ${}^A P$ associé à ce canal, nous rappelons que nous posons :

$${}^A e_{\sigma} = \lim_{\tau \uparrow b_-} \downarrow ({}^A P_{\tau}^{\sigma} 1).$$

Supposons donc que $A \subset E$ est faiblement fermée et montrons que le canal stationnaire A est un canal de sortie non vide. Pour cela, établissons d'abord que $\lim_{\tau \uparrow b_-} (1_A - {}^A e_{\tau}) = 0$. Lorsque $i \notin A$, on a ${}^A e_{\tau}(i) = 1_A(i) = 0$.

D'autre part, comme le s. g. tabou ${}^A P \leq Q$ est sous-markovien, on a pour tout $i \in A$:

$$0 \leq (1_A - {}^A e_{\sigma})(i) = \sum_{k \notin A} \sum_{j \in A} \int_{\sigma}^{b_-} {}^A P_{i_-}^{\sigma}(i, j) q_{jk}(dt) \leq \sum_{k \notin A} \sum_{j \in A} \int_{\sigma}^{b_-} q_{jk}(dt).$$

Puisque A est faiblement fermée, on a donc bien encore, lorsque :

$$i \in A, \quad \lim_{\sigma \uparrow b_-} (1_A - {}^A e_{\sigma})(i) = 0.$$

Maintenant, puisque la fonction $\wedge e$ et $\wedge P$ -régulière, elle est en particulier Q -sous-régulière. Ainsi, d'après un théorème de convergence des surmartingales, les limites ci-dessous existent au sens presque sûr et sont égales :

$$\lim_{\tau \uparrow b_-} (\wedge e \circ X)_\tau = \lim_{\tau \uparrow b_-} (1_A \circ X)_\tau.$$

On a donc bien $1_{\wedge A} = \overline{1_A}$, ce qui montre que A est un canal de sortie et comme $\lim_{\tau} \wedge e_\tau = 1_A \neq 0$, ce canal n'est pas vide.

Inversement, soit $A : S_\tau \rightarrow \mathfrak{B}(E)$ un canal stationnaire non vide que sans nuire à la généralité nous pouvons supposer constant, égal à $A \subset E$ et montrons que cette partie A de E est fortement saturée.

Lemme 8.2.1. — Soit (Q, S_τ, E) un s. g. continu. Pour toute mesure q , (q_i ou q_{ij}), soit $q = {}^1q + {}^2q$ la décomposition canonique en sa composante atomique et sa composante diffuse. Pour toute fonction régulière f , on a :

$$(8.2) \quad f_\tau(i) - f_\sigma(i) = \int_\sigma^\tau f_u(i) {}^2q_i(du) - \sum_{j \neq i} \int_\sigma^\tau f_u(j) {}^2q_{ij}(du) + \sum_{\sigma < u < \tau} \left[[1 - \exp(-{}^1q_i(du))] f_{u+}(i) - \sum_{j \neq i} f_{u+}(j) {}^1q_{ij}(du) \right].$$

Démonstration. — Posons $P_v^u = \sum_{n \geq 1} {}^{(n)}P_v^u$, et décomposons la représentation du s. g. continu Q en sorte que :

$$Q = {}^{(0)}P + P.$$

Pour tout couple $(u_1 < u_2)$ d'instants de l'intervalle S_τ , on a donc :

$$f_{u_2}(i) - f_{u_1}(i) = [1 - {}^{(0)}P_{u_1}^{u_2}(i, i)] f_{u_1}(i) - \sum_{j \neq i} P_{u_1}^{u_2}(i, j) f_{u_1}(j)$$

d'où résulte bien la relation cherchée en passant à la limite suivant le filtre des partitions finies de l'intervalle $[\sigma, \tau]$.

Associés maintenant au canal stationnaire A le s. g. continu $\wedge P$ tel que :

$$\wedge P = \wedge P + \sum_{i \notin A} {}^{(i)}P$$

et soit $\wedge e$ la fonction $\wedge P$ -régulière telle que :

$$(\wedge e)_\sigma = \lim_{\tau \uparrow b_-} \downarrow (\wedge P_\tau^\sigma 1).$$

Cette fonction ${}^A P$ -régulière satisfait donc à une relation du type (8.2), où d'ailleurs, lorsque $i \in A$, les mesures q_i et q_{ij} sont effectivement celles du s. g. continu Q . Puisque maintenant les restrictions au canal A des fonctions ${}^A e$ et ${}^A e_\tau$ sont identiques, on a $\lim_{\tau \uparrow b_-} {}^A e_\tau(i) = 1$ pour tout $i \in A$. Donc, dans la relation correspondante (8.2), le membre de gauche converge lorsque $\tau \uparrow b_-$. Il doit alors en être de même du membre de droite.

Si donc un élément $i \in A$ est ergodique, le membre de droite converge effectivement. Si par contre $i \in A \setminus {}^Q D$, l'ensemble des éléments $j \in E$ tels que $i \overset{Q}{\gg} j$ est nécessairement contenu dans A , ce qui montre que A est fortement saturée.

Adaptons maintenant la démonstration du théorème ci-dessus au cas des canaux de sortie les plus généraux. Soit $A = (A_\tau)_{\tau \in S_\tau}$ un canal continu. Nous dirons d'abord qu'il est faiblement fermé latéralement si pour tout $i \in E$, on a :

$$\sum_{j \neq i} \int^{b_-} 1_{A_\tau}(i) [q_{ij}(dt) - {}^A p q_{ij}(dt)] < \infty.$$

D'autre part, soit (S_τ) la famille dénombrable des intervalles fermés $S_\tau = [u_+^n, v_-^n]$ sur chacun desquels l'application $A : S_\tau \rightarrow \mathfrak{B}(E)$ est constante. Cette famille d'intervalles constitue une partition localement finie de l'intervalle S_τ . De plus, soit A_n le sous-ensemble de E tel que $A_n = A_\tau$ lorsque $\tau \in S_\tau$ et posons $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$. Nous dirons que le canal continu A est faiblement fermé radialement s'il existe une suite (τ_n) d'instantants tels que $\tau_n \in]u_+^n, v_-^n[$, tels que de plus :

$$\sum_n \sum_{i \in A_n} {}^A P_{u_+^n}^{\tau_n}(i, B_n) < \infty$$

et nous dirons que le canal continu A est faiblement fermé s'il est faiblement fermé latéralement et radialement.

Définition 8.2.2. — Soit $A = (A_\tau)_{\tau \in S_\tau}$ un canal continu. On dit qu'il est fortement saturé si E est ${}^A P$ -fortement saturé, autrement dit si pour tout $i \in E$, l'une ou l'autre des relations :

$$\int^{b_-} {}^A p q_i(du) < \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\tau \uparrow b_-} \left[\sum_{j \neq i} \frac{\int^\tau {}^A p q_{ij}(du)}{\int^\tau [1 - \exp[-{}^A p q_i(du)]]} \right] = 1$$

est satisfaite.

Théorème 8.2.2. — Soit (Q, S_T, E) un s. g. markovien continu. Tout canal continu faiblement fermé contient un canal de sortie non vide et tout canal de sortie non vide est lui-même fortement saturé.

Démonstration. — Soit d'abord A un canal continu faiblement fermé et montrons qu'il contient un canal de sortie continu non vide. Puisque la fonction $\wedge e$ est $\wedge P$ -régulière, quel que soit le nombre $\varepsilon \in]0, 1[$, le canal continu $B = (B_\tau)_{\tau \in S_T}$ tel que $B_\tau = \{i; \wedge e_\tau(i) \geq 1 - \varepsilon\}$ est un canal de sortie pour le s. g. tabou $\wedge P$ et donc pour le s. g. dominant Q . En effet, puisque $\wedge e \in G^+$, il résulte des inégalités élémentaires :

$$0 \leq (1 - \varepsilon)B_\tau \leq \wedge e_\tau \qquad 0 \leq \varepsilon(1_E - 1_{B_\tau}) \leq 1_E - \wedge e_\tau$$

que l'on a $1_B \in G^+$ et $h(1_B) = h(\wedge e)$. De plus, il résulte des relations :

$$\begin{aligned} 0 &\leq 1_{A_\sigma}(i) - \wedge e_\sigma(i) \\ &= \sum_{k \notin A_{t_+}} \sum_{j \in A_{t_-}} \int_\sigma^{b_-} \wedge P_{t_-}^\sigma(i, j) q_{jk}(dt) + \sum_n \sum_{j \in A_{\tau_n}} \wedge P_{\tau_n}^\sigma(i, j) \wedge P_{u_n^+}^{\tau_n}(j, B_n) \\ &\leq \sum_{j, k} \int_\sigma^{b_-} 1_{A_{t_-}}(j) 1_{A_{t_+}}(k) q_{jk}(dt) + \sum_n \sum_{i \in A_{\tau_n}} \wedge P_{u_n^+}^{\tau_n}(i, B_n) \end{aligned}$$

et de l'hypothèse que le canal A est fermé, que le canal de sortie $B \subset A$ n'est pas vide.

Inversement, étant donné un canal de sortie continu non vide A , montrons qu'il contient un canal continu fortement saturé. Soit :

$$\wedge P = \wedge P \wedge \{^{(i)}P\}_{i \in E}$$

le s. g. minimal qui majore le s. g. tabou $\wedge P$ et chacun des s. g. tabous $\{^{(i)}P$. Il suffit dès lors de reprendre la fin de la démonstration du théorème 8.2.1.

§ 9 Cas stationnaire.

Le s. g. généralisé $P = \{P_t^s; s < t \text{ dans } T\}$ est dit stationnaire si tous les ensembles $(E_s)_{s \in T}$ sont identiques à un même ensemble non vide que l'on notera Ω , et si les matrices P_t^s ne dépendent que de la différence $t - s$. En appliquant au cas d'un s. g. stationnaire sur un ensemble Ω fini la théorie que nous venons d'exposer, nous allons retrouver brièvement certains résultats dus à Doebelin [6].

(a) Nous supposons d'abord que le s. g. stationnaire P donné est markovien. Les cônes d'entrée $(F_t)_{t \in T}$ sont isomorphes à un même cône convexe réticulé de dimension finie et il en est de même des cônes de sortie $(G_t)_{t \in T}$. De plus, il résulte encore de la stationnarité que toute réduction de P sur l'intervalle S_T est active et régularisable (cf. proposition 5.2). Il existe donc un ensemble E de sections $i = (i_\tau)_{\tau \in S_T}$ constantes — et donc continues — telles que de plus la réduction continue et stationnaire qui lui est associée soit markovienne. Cet ensemble E est alors unique.

Pour tout $t \in T$, désignons donc explicitement par $(Q_u^{t+}(i, \cdot))_{i \in E}$ la famille finie, non vide, des lois d'entrées $(i_+)_i \in E$ portées par les génératrices extrémales du cône d'entrée F_t , chacune de ces lois d'entrées étant une famille de probabilités sur Ω . Puisque $\{P_u^t(\omega, \cdot); u < t\}$ est pour t fixé un élément de ce cône, il existe une fonction $g_j(\omega)$, définie sur E , telle que :

$$(9.1) \quad P_u^t(\omega, \cdot) = \sum_{j \in E} g_j(\omega) Q_u^{t+}(j, \cdot)$$

telle que de plus, pour tout $\omega \in \Omega$, on ait :

$$(9.2) \quad \sum_E g_i(\omega) = 1.$$

Semblablement, désignons par $(Q_s^t(\cdot, j))_{j \in E}$ la famille finie, non vide, des lois de sorties $(i_-)_i \in E$ portées par les génératrices extrémales du cône de sortie G_t , $Q_s^t(\omega, \cdot)$ étant, pour tout $s \in T$ et pour tout $\omega \in \Omega$ fixés, une probabilité sur E . Puisque $\{P_t^s(\cdot, \omega); s < t\}$ est, pour tout t fixé, un élément de ce cône, il existe une famille $(f_i)_{i \in E}$ de probabilités sur Ω , telle que :

$$(9.3) \quad P_t^s(\cdot, \omega) = \sum_i Q_{i-}^s(\cdot, i) f_i(\omega).$$

Nous désignerons par $(\Omega_i)_{i \in E}$ la famille des supports respectifs de ces mesures $(f_i)_{i \in E}$ et nous allons maintenant montrer que ces supports sont nécessairement disjoints deux à deux.

Puisque la réduction stationnaire et markovienne Q que nous venons de déterminer est non seulement continue, mais encore régulière, nous avons :

$$(9.4) \quad Q_{i+}^t(i, j) = \sum_{\Omega} f_i(\omega) g_j(\omega) = I_E(i, j)$$

et de cette dernière relation, il résulte que la fonction $\omega \rightarrow g_i(\omega)$ vaut 1 sur Ω_i et est nulle sur chacun des Ω_j ($j \neq i$). Il s'ensuit bien que les supports $(\Omega_i)_{i \in E}$ sont disjoints deux à deux.

Posons alors :

$$(9.5) \quad A(\omega, \omega') = \sum_E g_i(\omega) f_i(\omega').$$

Il résulte encore de la seconde relation (9.4) que cette matrice markovienne définie sur Ω est idempotente. De plus, le lecteur identifiera aisément les fonctions $(g_i)_{i \in E}$ aux éléments extrémaux du cône convexe des fonctions positives, définies sur Ω telles que :

$$(9.6) \quad g = Ag \quad \sum_E g = 1$$

et de même, les probabilités $(f_i)_{i \in E}$ sur Ω aux éléments extrémaux du cône convexe des mesures sur Ω , positives, telles que :

$$(9.7) \quad f = fA \quad \sum_{\Omega} f_i(\omega) = 1.$$

Observons encore que d'après les relations (9.1) (9.3) et (9.4), on a :

$$(9.8) \quad P_t^s = AP_t^s = P_t^s A$$

et qu'enfin, d'après la relation :

$$P_t^s(\omega, \omega') = \sum_{i,j} g_i(\omega) Q_{t-}^{s+}(i, j) f_j(\omega')$$

il résulte de la continuité du s. g. réduit Q que l'on a :

$$(9.9) \quad \lim_{t \downarrow s} P_t^s = \lim_{s \uparrow t} P_t^s = A.$$

Dans [6], Doeblin suit une voie opposée. Il démontre d'abord cette dernière relation et cela en utilisant pour les puissances entières d'une matrice une identité que l'on trouvera dans [9]. La matrice markovienne A ainsi définie étant idempotente, les propriétés classiques de ces matrices (cf. [13]) lui permettent de définir les $(\Omega_i)_{i \in E}$ et sur ces groupements, qu'il dit « instantanés », un s. g. markovien stationnaire. Il montre, enfin, que le processus associé est sur ces groupements un processus de sauts.

Explicitons d'ailleurs la représentation du s. g. réduit Q . Il résulte de la relation (9.4) que l'on peut à nouveau identifier les instants t_- et t_+ . On

considère ainsi q_i et q_{ij} comme des mesures additives sur T , d'ailleurs invariantes par translation. En posant :

$$q_i(du) = q_i du, \quad q_{ij}(du) = q_{ij} du,$$

puis :

$$(9.10) \quad \begin{aligned} {}^{(0)}P_i^s(i, j) &= \exp[-q_i(t-s)]I(i, j). \\ {}^{(n+1)}P_i^s(i, j) &= \sum_{k \neq i} \int_s^t \exp[-q_i(u-s)] q_{ik} {}^{(n)}P_k^u(k, j) du \\ &= \sum_{k \neq j} \int_s^t {}^{(n)}P_k^s(i, k) q_{kj} \exp[-q_i(t-u)] du \end{aligned}$$

on retrouve la représentation classique :

$$(9.11) \quad Q_t^s = \sum_{n \geq 0} {}^{(n)}P_t^s.$$

(b) Dans le cas maintenant où le s. g. P donné n'est pas markovien, il résulte encore de la stationnarité que toute réduction sur l'intervalle S_τ est active et régularisable. On désignera encore par E un ensemble de sections continues sur les génératrices extrémales des cônes d'entrée et de sortie, telles que la réduction qu'elles déterminent soit stationnaire et continue. Puisque les cônes d'entrée et de sortie sont isomorphes et isométriques à un même cône convexe réticulé J , on peut prendre par exemple pour E un ensemble de sections $i : S_\tau \rightarrow J$ constantes et plus généralement des sections exponentielles telles que $i_\tau = i_\sigma \exp[-\chi_i(\tau - \sigma)]$, $-\chi_i$ étant un nombre réel quelconque.

Les relations (9.1) et (9.3) définissent encore des fonctions $(g \cdot (\omega))_{\omega \in \Omega}$ et des mesures $(f_i)_{i \in E}$, positives et qui satisfont à la relation (9.4). La matrice A est ainsi positive et idempotente. Montrons alors que les parties actives des supports respectifs $(\Omega_i)_{i \in E}$ des mesures $(f_i)_{i \in E}$ sont disjointes deux à deux.

Pour cela, désignons par Γ_i le support de la fonction g_i . Il résulte de la relation (9.4) que, pour tout $i \in E$, Γ_i est disjoint des Ω_j ($j \neq i$) et que semblablement Ω_i est disjoint des Γ_j ($j \neq i$). Ainsi, les seules intersections $(\Gamma_i \cap \Omega_i)_{i \in E}$ sont non vides, puisqu'alors la relation (9.4) se réduit

$$\text{pour tout } i \in E \text{ à } \sum_{\Omega_i \cap \Gamma_i} f_i(\omega) g_i(\omega) = 1.$$

Ainsi, toujours d'après la relation (9.4), les ensembles $(\Gamma_i \cap \Omega_i)_{i \in E}$ sont disjoints deux à deux, ce qui achève la démonstration.

Enfin, comme dans le cas markovien, on a encore les relations (9.8) et (9.9) et on retrouve d'autre part la représentation (9.11).

CHAPITRE III

§ 10 Semi-groupes généralisés de type bistochastique.

10.1 **Introduction.** — Ce chapitre est consacré à une extension des résultats précédents à une certaine classe de s. g. généralisés de matrices positives définis sur une famille $(E_u)_{u \in T}$ d'ensembles discrets non vides, chacun de puissance au plus dénombrable. Pour simplifier certaines notations, nous conviendrons que l'intervalle T est la droite numérique elle-même, achevée ou non.

Étant donné le s. g. généralisé Q de matrices positives défini sur la famille $(E_u)_{u \in T}$, nous reprendrons les définitions données au § 3 des cônes F_t et G_t . De plus, on désignera par F_t^1 le sous-ensemble de F_t des familles $f = \{f_u; u > t\}$ de mesures positives sur les $(E_u)_{u > t}$ tel que :

$$\|f\|_{t+}^1 = \sup_{u > t} \sum_{i \in E_u} f_u(i) < \infty$$

et on désignera semblablement par G_t^1 le sous-ensemble de G_t des familles $g = \{g_u; u < t\}$ de fonctions positives définies sur les $(E_u)_{u < t}$ tel que :

$$\|g\|_{t-}^1 = \sup_{u < t} \sum_{i \in E_u} g_u(i) < \infty.$$

Les résultats des théorèmes 3.1.1 et 3.1.2, énoncés pour les cônes F_t et G_t , sont valables aussi pour les cônes F_t^1 et G_t^1 , qui sont en particulier convexes et complètement réticulés.

Définition 10.1.1. — Étant donné le s. g. généralisé Q de matrices positives défini sur la famille $(E_u)_{u \in T}$, on dit qu'il est de type bistochastique s'il existe $\Phi \in F_{\infty+}$, $\gamma \in G_{\infty-}$ et deux nombres λ et μ finis, strictement positifs, pour lesquels :

$$(10.1.1) \quad \lambda \leq \Phi_t(\cdot), \gamma_t(\cdot) \leq \mu \text{ sur } E_t$$

quel que soit l'instant $t \in T$.

Notons qu'en particulier les s. g. généralisés bistochastiques sont de type bistochastique, ce qui justifie notre terminologie. Nous pouvons, d'ailleurs, reformuler la définition précédente en introduisant la notion suivante :

Étant donné deux s. g. généralisés P et Q de matrices positives définis sur la même famille $(E_u)_{u \in T}$, on dira qu'ils sont équivalents uniformément s'il existe deux nombres λ et μ finis, strictement positifs et une famille $(D_u)_{u \in T}$ de matrices diagonales, telles que :

$$(10.1.2) \quad P_v^\mu = D_u Q_v^\mu D_v^{-1} \quad \lambda I_u \leq D_u \leq \mu I_u$$

où I_u désigne la matrice identique sur E_u .

Montrons alors que pour qu'un s. g. généralisé Q de matrices positives soit de type bistochastique, il faut et il suffit qu'il soit équivalent uniformément à un s. g. généralisé markovien à droite et à un s. g. généralisé markovien à gauche.

En effet, soit $\alpha \in F_{\infty+}$ satisfaisant à la condition (10.1.1) et posons :

$$D_u(i, j) = \alpha_u(i) I_u(i, j).$$

Le s. g. $P_v^\mu = D_u Q_v^\mu D_v^{-1}$ est alors markovien à gauche et uniformément équivalent à Q et nous avons un résultat semblable avec $\beta \in G_{\infty-}$ en posant maintenant $D_u^{-1}(i, j) = \beta_u(i) I_u(i, j)$. Inversement, si par exemple le s. g. généralisé Q est équivalent uniformément à un s. g. markovien à gauche P, nous avons :

$$1 = \sum_i P_v^\mu(i, \cdot) = \sum_i D_u(i, i) Q_v^\mu(i, \cdot) D_v^{-1}(\cdot, \cdot).$$

En posant alors $\alpha_u(i) = D_u(i, i)$, on voit que $\alpha \in F_{\infty+}$ et que α satisfait à la condition (10.1.1); on ferait une remarque semblable en supposant le s. g. Q équivalent uniformément à un s. g. markovien à droite. Voici une conséquence immédiate de cette nouvelle définition :

Proposition 10.1.1. — Soit Q un s. g. généralisé de type bistochastique, défini sur la famille $(E_u)_{u \in T}$. Pour tout couple (f^1, f^2) $[(g^1, g^2)]$ d'éléments étrangers du cône $F_i^1[G_i^1]$ et pour toute section $i = (i_u)_{u \in T}$, on a :

$$\lim_{u \uparrow t} \min (f_u^1(i), f_u^2(i)) = [\lim_{u \uparrow t} \min (g_u^1(i), g_u^2(i))] = 0.$$

10.2 Les cônes fondamentaux F_i^1 et G_i^1 . — Nous allons d'abord établir que la frontière de Choquet de chacun des cônes fondamentaux F_i^1 et G_i^1 d'un s. g. de type bistochastique a, au plus, la puissance du dénombrable.

Désignons par $E_{i+}^1[E_{i-}^1]$ l'ensemble des génératrices extrémales du cône $F_i^1[G_i^1]$. Pour tout $f \in F_i^1[g \in G_i^1]$, on pose :

$$\|f\|_{i+}^\infty = \sup_{i \in E_u; u > t} f_i(i) < \infty \quad [\|g\|_{i-}^\infty = \sup_{i \in E_u; u < t} g_i(i) < \infty].$$

On désigne par $\tilde{F}_t^1[\tilde{G}_t^1]$ l'ensemble constitué des éléments de $F_t^1[G_t^1]$ pour lesquels :

$$\|f\|_{t_+}^\infty \leq 1 [\|g\|_{t_-}^\infty \leq 1].$$

Proposition 10.2.1. — Soit Q un s. g. généralisé de type bistochastique, défini sur la famille $(E_u)_{u \in T}$. On a les relations :

$$(10.2.1) \quad \text{Card}(E_{t_-}^1) \leq \liminf_{u \uparrow t} \text{Card}(E_u).$$

$$(10.2.2) \quad \text{Card}(E_{t_+}^1) \leq \liminf_{u \downarrow t} \text{Card}(E_u).$$

Démonstration. — Ces deux relations étant semblables, montrons par exemple la première et supposons pour cela le s. g. généralisé Q markovien à droite, puisque s'il n'en était pas ainsi, il suffirait de considérer un s. g. généralisé markovien à droite qui lui soit équivalent uniformément. Dans ces conditions et en reprenant la définition donnée au § 3.2 du cône $G_t \supset G_t^1$, la fonction e égale à un partout sur chacun des espaces $(E_u)_{u < t}$ et qui majore donc chacun des éléments de \tilde{G}_t^1 , appartient à G_t .

Soit g^α l'élément maximal de \tilde{G}_t^1 porté par la génératrice $\alpha \in E_t^1$ et donc tel que $\|g^\alpha\|_{t_-}^\infty = 1$. Le nombre $\varepsilon \in]0, 1[$ étant fixé, on lui associe le canal $K^\alpha = (K_u^\alpha)_{u < t}$ constitué des ensembles $K_u^\alpha = \{i; i \in E_u \text{ et } g_u^\alpha \geq 1 - \varepsilon\}$. Puisque, si $\sup_{i \in E_u} g_u^\alpha(i) < 1 - \varepsilon$, on a encore $g_u^\alpha(\cdot) = (Q_u^\alpha g_u^\alpha)(\cdot) < 1 - \varepsilon$, il existe un intervalle $(s, t[$ sur lequel aucun des ensembles K_u^α n'est vide, sans quoi on aurait $\|g^\alpha\|_{t_-}^\infty \leq 1 - \varepsilon$, ce qui est contraire à la définition de g^α .

Soit maintenant une suite $(s_n) \uparrow t$ et fixons le nombre $\varepsilon \in]0, 2^{-1}[$. On désigne par $A_{n,\varepsilon}$ l'ensemble des génératrices $\alpha \in E_{t_-}^1$ pour lesquelles chacun des canaux $(K^\alpha)_{\alpha \in A_{n,\varepsilon}}$ n'est constitué d'aucun ensemble vide sur l'intervalle $(s_n, t[$. Puisque pour toute génératrice extrémale $\beta = \alpha$, on a $g^\beta \leq e - g^\alpha$ ces canaux sont deux à deux disjoints. On a donc la relation :

$$\text{Card}(A_{n,\varepsilon}) \leq \liminf_{u \uparrow t_-} \text{Card}(E_n)$$

et donc enfin, puisque $E_{t_-}^1 = \lim_n \uparrow A_{n,\varepsilon}$, la relation cherchée :

$$\text{Card}(E_{t_-}^1) = \lim_n \uparrow \text{Card}(A_{n,\varepsilon}) \leq \liminf_{u \uparrow t} \text{Card}(E_u).$$

Remarquons qu'il n'est pas possible d'améliorer ce résultat. Par exemple, le seul s. g. généralisé Q bistochastique, dont le déterminant $\det(Q_t^1)$

soit identiquement nul, que l'on peut construire sur des ensembles $(E_u)_{u \in T}$ constitués chacun de deux éléments, est le s. g. $Q_t^s = 2^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. A chaque instant $t \in T$, les cônes F_t^1 et G_t^1 sont constitués chacun d'une seule génératrice extrémale et les relations 10.2.1 et 10.2.2 sont donc ici des inégalités strictes.

Montrons maintenant que les théorèmes de G. Choquet [4] et [5], sur l'existence et l'unicité des représentations intégrales au moyen des éléments extrémaux dans les cônes convexes, permettent d'effectuer la représentation intégrale des éléments des cônes fondamentaux F_t^1 et G_t^1 . Le théorème d'unicité s'applique manifestement puisque chacun de ces cônes fondamentaux est complètement réticulé. Le lemme suivant montre alors que l'on peut réaliser les conditions du théorème d'existence :

Lemme 10.2.1. — Soit $\mathcal{F}_t^1[\mathcal{G}_t^1]$ l'ensemble $F_t^1 - F_t^1[G_t^1 - G_t^1]$ des différences de deux éléments du cône $F_t^1[G_t^1]$. On peut munir $\mathcal{F}_t^1[\mathcal{G}_t^1]$ d'une topologie \mathcal{T} d'espace vectoriel localement convexe séparé, pour laquelle le cône convexe complètement réticulé $F_t^1[G_t^1]$ est métrisable et localement compact.

Démonstration. — Soit par exemple le cône F_t^1 . Puisqu'il est constitué d'éléments bornés au sens de la norme $\|f\|_{t,+}^\infty$, il suffit d'ailleurs de montrer ce lemme pour le sous-ensemble \tilde{F}_t^1 des éléments de F_t^1 tels que $\|f\|_{t,+}^\infty \leq 1$.

Supposons de plus le s. g. généralisé Q markovien à gauche et soit \mathcal{T} la topologie définie sur \mathcal{F}_t^1 par la famille des semi-normes :

$$(10.2.3) \quad \|f\|_u^K = \max_{i \in K} |f_u(i)| \quad f \in \mathcal{F}_t^1; u > t$$

où K parcourt l'ensemble des parties finies de E_n . Cette famille de semi-normes sépare évidemment les éléments de \mathcal{F}_t^1 .

Montrons d'abord que \mathcal{T} est métrisable sur $\tilde{\mathcal{F}}_t^1$ et pour cela, qu'elle peut y être définie par une famille dénombrable de semi-normes. Soit g un élément fixé de \tilde{F}_t^1 , et V le voisinage dans \tilde{F}_t^1 des éléments f tels que $\|f - g\|_v^K < \varepsilon$, où $v > t$, la partie finie $K \subset E_v$ et le nombre $\varepsilon > 0$ sont fixés. Pour tout $u \in]t, v[$ fixé, il existe une partie finie $K' \subset E_u$ et un nombre $\varepsilon' > 0$ tels que l'ensemble des éléments $f \in \tilde{F}_t^1$ pour lesquels $\|f - g\|_v^{K'} < \varepsilon'$ constitue un voisinage de g plus fin que V . En effet, soit K' toute partie finie, mais fixée, de E_u telle que, pour tout $i \in K$:

$$Q_v^u(K', i) \leq 1 \leq Q_v^u(K', i) + \varepsilon/2.$$

On aura donc pour tout $f \in \tilde{F}_t^1$ et tout $i \in K$:

$$\sum_{\kappa'} f_u(j) Q_v^u(j, i) \leq f_v(i) \leq \sum_{\kappa'} f_u(j) Q_v^u(j, i) + \varepsilon/2$$

et donc enfin :

$$|f_u(i) - g_u(i)| \leq \sum_{\kappa'} |f_u(j) - g_u(j)| Q_v^u(j, i) + \varepsilon/2.$$

Ainsi, si l'on prend $\varepsilon' = \varepsilon/2$, on aura bien $W \subset V$. Soit alors une suite d'instantanés $S = (u_n) \downarrow t$ et $\mathcal{T}_S \subset \mathcal{T}$ la topologie définie par la famille des semi-normes (10.2.3), où $u \in S$. La topologie \mathcal{T}_S est métrisable et comme d'après ce qui précède $\mathcal{T}_S \supset \mathcal{T}$ sur \tilde{F}_t^1 , les topologies \mathcal{T} et \mathcal{T}_S sont identiques sur \tilde{F}_t^1 .

Montrons maintenant que \tilde{F}_t^1 , muni de la topologie \mathcal{T} , est localement compact. Étant donné $g \in \tilde{F}_t^1$, soit \bar{V} l'ensemble des éléments $f \in \tilde{F}_t^1$ pour lesquels $\|f - g\|_v^K \leq \varepsilon$, où $v > t$, la partie finie $K \subset E_v$ et le nombre $\varepsilon > 0$ sont fixés. De toute suite (f^m) d'éléments de \bar{V} , montrons alors que l'on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de \bar{V} .

Pour cela, reprenons la suite $S = (u_n) \downarrow t$. Par procédé diagonal, on peut extraire de (f^m) une sous-suite — qu'aussi bien nous supposons être la suite (f^m) elle-même — pour laquelle $f_u(i) = \lim_m f_u^m(i)$ existe, quel que soit $u \in S$ et $i \in E_u$.

Il résulte alors du théorème de Lebesgue sur la convergence dominée que pour tout $v > t$, cette limite $f_v = \lim_m f_v^m$ existe encore. En effet, soit un instant $u \in S$ tel que $u < v$. Les éléments de \tilde{F}_t^1 sont dominés par :

$$e = \{e_u; u < t\} \quad (\text{où } e_u(i) = 1 \text{ quel que soit } u > t \text{ et } i \in E_u)$$

qui, puisque le s. g. Q est supposé markovien à gauche, est un élément du cône F_t . On a donc :

$$\sum_{E_u} f_u(i) Q_v^u(i, \cdot) = \lim_m \sum_{E_u} f_u^m(i) Q_v^u(i, \cdot) = \lim_m f_v^m(\cdot) = f_v(\cdot).$$

Ces relations montrent de plus que $f \in F_t$. Il est alors évident qu'en fait $f \in \bar{V} \subset \tilde{F}_t^1$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Ainsi, les conditions d'applications des théorèmes de G. Choquet [4] et [5] sont bien satisfaites : on peut effectuer la représentation intégrale des

cônes fondamentaux F_i^1 et G_i^1 au moyen de leurs éléments extrémaux. Il existe donc une famille dénombrable d'après la proposition 10.2.1, d'éléments $(Q_u^{t+}(\alpha, \cdot))_{\alpha \in E_{i+}^1}$ du cône F_i^1 déterminés chacun à une constante positive multiplicative près, telle que l'élément f le plus général du cône F_i^1 est donné par :

$$f_u(\cdot) = \sum_{E_{i+}^1} \mu(\alpha) Q_u^{t+}(\alpha, \cdot)$$

où μ est une mesure positive sur E_{i+}^1 , cette représentation étant de plus unique.

Semblablement, il existe une famille dénombrable $(Q_{i-}^u(\cdot, \beta))_{\beta \in E_{i-}^1}$ d'éléments du cône G_i^1 déterminés chacun à une constante multiplicative près, telle que l'élément g le plus général du cône G_i^1 est donné par :

$$g_u(\cdot) = \sum_{E_i^1} Q_{i-}^u(\cdot, \beta) \nu(\beta)$$

où ν est une mesure positive sur E_i^1 cette représentation étant elle aussi unique.

10.3 La réduction. — Les opérations de réduction décrites dans le cas fini au § 4 s'étendent donc sans modification au cas d'un s. g. de type bistochastique. Tout s. g. généralisé $Q_{v\pm}^{u\pm}$ ainsi défini sur la famille $(E_{u\pm}^1)_{u \in T}$ est encore dit une réduction de s. g. généralisé Q donné et les réductions d'un même s. g. de type bistochastique donné sont équivalentes au sens de la définition donnée au § 4.5.1.

On remarquera cependant qu'il n'est pas vrai qu'en général un s. g. de type bistochastique admette des réductions qui soient elles-mêmes de type bistochastique. On a seulement le résultat affaibli suivant :

Proposition 10.3.1. — Soit Q un s. g. de type bistochastique, défini sur la famille $(E_u)_{u \in T}$ et soient $\Phi \in F_{\infty+}$, $\gamma \in G_{\infty-}$ et deux nombres λ et μ finis, strictement positifs, tels que :

$$\lambda \leq \Phi_u(\cdot), \quad \gamma_u(\cdot) \leq \mu \text{ sur } E_u (u \in T).$$

Il existe alors un prolongement du s. g. donné Q sur la famille $(E_{u\pm}^1)_{u \in T}$ induisant sur cette famille un prolongement de Φ (en tant que loi d'entrée) et de γ (en tant que loi de sortie) tels que :

$$0 \leq \lambda \leq \Phi_{u\pm}(\cdot), \quad \gamma_{u\pm}(\cdot) \leq \mu \text{ sur } E_{u\pm}^1 (u \in T).$$

Démonstration. — Nous pouvons supposer sans nuire à la généralité le s. g. donné Q markovien à droite. Soit $\Phi \in F_{\infty+}$ la loi d'entrée telle que $\Phi_u(\cdot) \geq \lambda$ sur $E_u (u \in T)$. Montrons alors que le s. g. donné Q peut se prolonger à la famille $(E_{u\pm}^1)_{u \in T}$ en un s. g. markovien à droite et que le prolongement correspondant de la loi d'entrée Φ est bien tel que $\Phi_{u\pm}(\cdot) \geq \lambda$ sur $E_{u\pm}^1 (u \in T)$.

On prolonge le s. g. donné Q et la loi d'entrée Φ à la famille $(E_{u\pm}^1)_{u \in T}$ en prenant, pour tout $\alpha \in E_{u+}^1$, l'élément extrémal $Q_t^{u+}(\alpha, \cdot)$ tel que :

$$Q_t^{u+}(\alpha, E_t) \equiv 1$$

quel que soit $t > u$ et en posant $\Phi_{u+} = \Phi_u Q_{u+}^u$.

Puisque le s. g. $P_v^u = \Phi_u Q_v^u \Phi_v^{-1}$ défini sur la famille $(E_u)_{u \in T} + E_{u+}^1$ est markovien à gauche, pour tout $\alpha \in E_{u+}^1$ il existe (cf. la démonstration de la proposition 10.2.1) une section $i = (i_t)_{t > u}$ sur la famille $(E_t)_{t > u}$ telle que $\lim_{t \uparrow u+} P_t^{u+}(\alpha, i) = 1$. Il résulte alors des relations élémentaires :

$$\Phi_{u+}(\alpha) = (P_t^{u+} \Phi_t)(\alpha) \geq P_t^{u+}(\alpha, i) \Phi_t(i) \geq \lambda P_t^{u+}(\alpha, i)$$

et d'un passage à la limite, que l'on a $\Phi_{u+}(\alpha) \geq \lambda$.

D'autre part, prolongeons le s. g. markovien à gauche $P_v^u = \Phi_u Q_v^u \Phi_v^{-1}$ sur la famille $(E_{u-}^1)_{v \in T}$ en prenant, pour tout $\beta \in E_{u-}^1$, l'élément extrémal $P_{u-}^s(\cdot, \beta)$ tel que $P_{u-}^s(E_s, \beta) = 1$ quel que soit $s < u$ et prolongeons de même Φ en posant $\Phi_{u-} = P_{u-}^u \Phi_u$. On vérifie alors que Φ est loi d'entrée du s. g. markovien à droite $Q_v^u = \Phi_u^{-1} P_v^u \Phi_v$ défini sur la famille $(E_u)_{u \in T} + (E_{u\pm}^1)_{u \in T}$. Pour tout $\beta \in E_{u-}^1$, il existe donc une section $i = (i_s)_{s < u}$ sur les $(E_s)_{s < u}$ telle que :

$$\lim_{s \uparrow u-} Q_{u-}^s(i, \beta) = 1.$$

Il résulte alors des relations élémentaires :

$$\Phi_{u-}(\beta) = (\Phi_s Q_{u-}^s)(\beta) \geq \Phi_s(i) Q_{u-}^s(i, \beta) \geq \lambda Q_{u-}^s(i, \beta)$$

et d'un passage à la limite, que l'on a bien encore $\Phi_{u-}(\beta) \geq \lambda$.

Proposition 10.3.2. — Soit Q un s. g. généralisé de type bistochastique, défini sur la famille $(E_u)_{u \in T}$. On a exclusivement :

- (a) soit $\text{Card}(E_u) = \infty$ dénombrable quel que soit $u \in T$;
- (b) soit $\sup_{u \in T} \text{Card}(E_u) < \infty$.

Démonstration. — Soient P et P' deux s. g. uniformément équivalents au s. g. donné Q et markoviens respectivement à droite et à gauche. Il existe donc deux nombres λ et μ finis, strictement positifs et une famille $(D_u)_{u \in T}$ de matrices diagonales, tels que $P'_v = D_u P_v D_v^{-1}$ et $\lambda \leq D_u(i, i)$, $D_v(i, i) \leq \mu$. On en déduit que :

$$\lambda \mu^{-1} \sum_{i,j} P_v^\mu(i, j) \leq \sum_{i,j} P'_v^\mu(i, j) \leq \mu \lambda^{-1} \sum_{i,j} P_v^\mu(i, j)$$

ce que l'on peut aussi bien écrire :

$$\lambda \mu^{-1} \text{Card}(E_u) \leq \text{Card}(E_v) \leq \mu \lambda^{-1} \text{Card}(E_u).$$

Il en résulte bien que l'on a (a) ou (b) exclusivement.

Théorème 10.3.1. — Soit Q un s. g. de type bistochastique, défini sur la famille $(E_u)_{u \in T}$ et soit $E_{i_+}^1 [E_{i_-}^1]$ l'ensemble des génératrices extrémales du cône fondamental $F_i^1 [G_i^1]$. On a exclusivement :

(a) soit $\text{Card}(E_{u_\pm}^1) = \infty$ dénombrables quel que soit $u \in T$;

(b) soit $\sup_{u \in T} \text{Card}(E_{u_\pm}^1) < \infty$ et dans ce dernier cas il existe une famille finie d'ouverts non tous vides $(T^n)_{n \geq 1}$ ne se chevauchant pas et tels que :

1° $\text{Card}(E_{u_\pm}^1) = n$ pour tout $u \in T^n$;

2° $\bar{T} = \overline{\sum_{n \geq 1} T^n}$.

Enfin, dans tous les cas, on a les relations :

$$(10.3.1) \quad \text{Card}(E_{u_+}^1) \leq \liminf_{i_\pm \downarrow u_+} \text{Card}(E_{i_\pm}^1).$$

$$(10.3.2) \quad \text{Card}(E_{u_-}^1) \leq \liminf_{i_\pm \uparrow u_-} \text{Card}(E_{i_\pm}^1).$$

Démonstration. — D'après l'étude faite au chapitre précédent, la proposition (b) est satisfaite lorsque $\sup_{u \in T} \text{Card}(E_u) < \infty$. Montrons alors que si $\text{Card}(E_u) = \infty$ dénombrable quel que soit $u \in T$, c'est la proposition (a) qui est nécessairement satisfaite, ce qui, compte tenu de la proposition 10.3.2 achèvera la démonstration du théorème.

Pour cela, supposons le s. g. donné Q markovien à droite et soit $\Phi \in F_{\infty,+}$, la loi d'entrée telle que $\lambda \leq \Phi_u(\cdot) \leq \mu$ sur $E_u (u \in T)$. D'après la proposition 10.3.1 on peut construire un prolongement du s. g. donné Q et de la loi d'entrée Φ sur la famille $(E_{u_+})_{u \in T}$ en sorte que le s. g. ainsi défini sur

la famille $(E_u)_{u \in E} + (E_{u+}^1)_{u \in T}$ soit markovien à droite et que Φ en soit une loi d'entrée. On aura donc :

$$\sum_{\alpha \in E_{u+}^1} \Phi_{u+}(\alpha) = \sum_{i \in E_t} \Phi_t(i) \geq \lambda \text{Card}(E_t)$$

et puisque nous supposons que $\text{Card}(E_t) = \infty$, il s'ensuit que :

$$\sum_{\alpha \in E_{u+}^1} \Phi_{u+}(\alpha) = \infty.$$

Montrons qu'il en résulte que $\text{Card}(E_{u+}^1) = \infty$. En effet, puisque $P_t^{\mu+}(\alpha, \cdot)$ est un élément (extrémal) du cône fondamental F_u^1 , on a $P_t^{\mu+}(\alpha, E_t) < \infty$ quel que soit $t > u$. Comme d'autre part $\Phi_t(\cdot) \leq \mu < \infty$ sur E_t , on a :

$$\Phi_{u+}(\alpha) = (P_t^{\mu+} \Phi_t)(\alpha) < \infty$$

pour tout $\alpha \in E_{u+}^1$. Mais alors $\text{Card}(E_{u+}^1) < \infty$ entraînerait que :

$$\sum_{\alpha \in E_{u+}^1} \Phi_{u+}(\alpha) < \infty,$$

ce qui est une contradiction.

Les relations (10.3.1) et (10.3.2) sont donc par là-même démontrées, mais on peut observer qu'elles peuvent se montrer directement. En effet, supposons le s. g. donné Q markovien à droite et prolongé à la famille $(E_{u+}^1)_{u \in T}$ en sorte que la restriction du s. g. obtenu à cette famille soit markovienne à droite. Pour établir la relation (10.3.2), il suffit alors de reprendre le raisonnement utilisé pour montrer la proposition 10.2.1.

Invertissons alors l'ordre de la démonstration du théorème ci-dessus afin de montrer dans quelle mesure les relations (10.3.1) et (10.3.2) induisent les propriétés (a) et (b) et pour cela montrons d'abord le résultat suivant :

Proposition 10.3.3. — Soit T un intervalle de la droite numérique et $t \rightarrow d_t$ une fonction définie sur T , à valeurs entières strictement positives, ou infinies, telle que de plus :

$$(10.3.3) \quad d_t \leq \liminf_{s \downarrow t} d_s \quad s, t \in T.$$

Il existe sur T une famille dénombrable $(T^n)_{1 \leq n < \infty}$ d'ouverts non tous vides ne se chevauchant pas telle que $\bar{T} = \overline{\sum_{1 \leq n < \infty} T^n}$ et pour laquelle on a de plus :

- (a) lorsque $1 \leq n < \infty$, $d_t = n$ pour tout $t \in T^n$;
 (b) lorsque $n = \infty$, $\lim_{s \downarrow t} d_s = \infty$ quel que soit $t \in T^\infty$.

Démonstration. — Pour tout entier fini strictement positif n , posons :

$$D_n = (t; t \in T \text{ et } d_t = n) \quad \text{et} \quad T^n = \overset{\circ}{D}_n.$$

On a donc bien $d_t = n$ lorsque $t \in T^n$. Soit maintenant $D_\infty = T \setminus \sum_{1 \leq n < \infty} D_n$ et

posons $T^\infty = \overset{\circ}{D}_\infty$. On a donc bien $\bar{T} = \overline{\sum_{1 \leq u \leq \infty} T^u}$. Montrons alors que

lorsque t parcourt l'ouvert T^∞ , on a $\lim_{s \downarrow t} d_s = \infty$. Cela est évident si $d_t = \infty$ d'après la relation (10.3.3) elle-même, mais d_t peut aussi bien être fini.

Cependant l'ouvert T^∞ est disjoint de l'ouvert $\sum_{1 \leq n < \infty} T^n$. Donc t ne peut pas être adhérent à $\sum_{1 \leq n < \infty} T^n$. Ainsi, quel que soit l'intervalle $[t, u)$ et

l'entier $N \geq 1$, il existe un instant $s \in [t, u)$ tel que $d_s > N$. Car dans le cas contraire, il existerait un entier $N \geq 1$ et un intervalle $[t, u)$ sur lequel on aurait $d_s \leq N$. Mais alors (cf. th. 3.1.3) l'ouvert $\sum_{1 \leq n \leq N} T^n$ serait dense dans $[t, u)$, ce qui est impossible. La proposition est donc démontrée.

Nous avons noté que sur T^∞ , la fonction d_t n'est pas identiquement infinie nécessairement. Voici un exemple d'une telle fonction sur l'intervalle $T = [0, 1]$. On pose :

$$d_t = \begin{cases} \infty & \text{si } t \text{ n'est pas un nombre dyadique} \\ p & \text{si } t = \sum_{1 \leq n \leq p} \frac{\alpha_n}{2^n} (\alpha_n = 0 \text{ ou } 1; \alpha_p = 1) \end{cases}$$

et on remarquera que $T = \bar{T}^\infty$.

Reprenons alors la démonstration du théorème 10.3.1. D'après la proposition 10.3.2, il existe sur T une famille dénombrable $(T^n)_{1 \leq n < \infty} [(T^n)_{1 \leq n < \infty}]$ d'ouverts ne se chevauchant pas, telle que :

1° lorsque $1 \leq n < \infty$, la puissance de chaque ensemble $E_{u+}^1 [E_{u-}^1]$ est égale à n pour tout $u \in T_+^n [T_-^n]$;

2° lorsque $n = \infty$, on a :

$$\lim_{t_+ \downarrow u_+} \text{Card} (E_{t_+}^1) = \infty \quad [\quad \lim_{t_- \uparrow u_-} \text{Card} (E_{t_-}^1) = \infty] \quad \text{pour tout } u \in T_+^\infty [T_-^\infty].$$

Il résulte donc des relations (10.3.1) et (10.3.2) que lorsque :

$$1 \leq m \neq n \leq \infty,$$

on a $T_+^m \cap T_-^n = \emptyset$. Comme, d'autre part, $\bar{T} = \overline{\sum_{1 \leq n \leq \infty} T_+^n} = \overline{\sum_{1 \leq n \leq \infty} T_-^n}$, on voit qu'en posant $T^n = T_+^n \cap T_-^n$ ($1 \leq n \leq \infty$) on aura bien encore :

$$\bar{T} = \overline{\sum_{1 \leq n \leq \infty} T^n}.$$

On achève alors en montrant, comme dans la première démonstration que l'on a soit $T^\infty = T$, soit $T^\infty = \emptyset$.

10.4 Semi-groupes de type bistochastique continu. — Puisque chaque ouvert T^n ($1 \leq n \leq \infty$) est la somme dénombrable de ses composantes connexes, l'ouvert T^∞ étant d'ailleurs lui-même connexe, nous venons d'établir l'existence d'une famille dénombrable d'intervalles ouverts (T_α^n) , dont la somme est partout dense dans T , sur chacun desquels la puissance de l'ensemble $E_{u_\pm}^1$ ($u \in T_\alpha^n$) est soit finie et constante, soit infinie dénombrable identiquement.

Puisque d'ailleurs le cas d'un intervalle sur lequel cette puissance est finie et constante a déjà été étudié au chapitre II, nous supposons maintenant implicitement que nous considérons un intervalle ouvert T^∞ sur lequel la puissance de l'ensemble $E_{u_\pm}^1$ ($u \in T^\infty$) est infinie dénombrable identiquement.

Reprenons alors les définitions données au § 5 d'une section et d'un s. g. réduit continu. Nous rappellerons brièvement qu'étant donné un s. g. réduit Q défini sur un intervalle S_T , on dit que ce s. g. Q est continu en $u_+ \in S_T$ si, pour toute génératrice $\alpha \in E_{u_+}^1$, il existe une section $i = (i_\sigma)_{\sigma > u_+}$ sur la famille $(E_\sigma^1)_{\sigma > u_+}$ telle que :

$$\lim_{\sigma \downarrow u_+} Q_\sigma^{\mu_+}(\alpha, i_\sigma) = 1 \quad \lim_{\sigma \downarrow u_+} Q_\sigma^{\mu_+}(\alpha, E_\sigma^1 \setminus \{i\}) = 0.$$

Si, de plus $i_{u_+} = \alpha$, on dira alors que la section $i = (i_\sigma)_{\sigma \geq u_+}$ ci-dessus et ainsi prolongée à l'instant u_+ , est continue en $u_+ \in S_T$. La définition de la continuité en $v_- \in S_T$ est analogue et l'on dira qu'un s. g. ou une section sont continus, s'ils sont continus en tout instant de l'intervalle S_T .

Or, dans le cas d'un s. g. réduit de type bistochastique défini sur un intervalle $S_{r,\infty}$, le théorème 5.3 que nous avons énoncé dans le cas fini n'est plus valable, car il n'existe pas en général de s. g. équivalent à un s. g. réduit de type bistochastique donné et qui soit de plus continu. En voici d'ailleurs un exemple. Désignons par Z l'ensemble des entiers relatifs et définissons un s. g. markovien P sur $Z \times [0, 1]$ de la façon suivante :

1° pour $n = 0$, on pose $q_0(dt) = 0$;

2° pour tout entier $n > 0$ et lorsque $\frac{p-1}{2^n} \leq t < \frac{p}{2^n}$ ($1 \leq p \leq 2^n$), on pose :

$$q_n(dt) = q_{-n}(dt) = \frac{dt}{p^{2^{-n}-t}}.$$

En outre, on conviendra de définir les mesures positives $q_{mn}(dt)$ (avec $m \neq n \in Z$) en sorte que $\sum_{n \in Z \setminus m} q_{mn}(dt) = q_m(dt)$. On définit ensuite par induction sur r les matrices :

$$\begin{aligned} {}^{(0)}P_t^s(m, n) &= \exp \left[- \int_s^t q_m(du) \right] I(m, n) & (m, n) \in ZXZ \\ {}^{(r+1)}P_t^s(m, n) &= \sum_p \int_s^t {}^{(0)}P_u^s(m, p) q_{mp}(du) {}^{(r)}P_t^u(p, n). \end{aligned}$$

La formule $P_t^s = \sum_{r \geq 0} {}^{(r)}P_t^s$ définit alors sur $Z \times [0, 1]$ un s. g. markovien à droite de type bistochastique, dont aucune réduction n'est continue sur un sous-intervalle quelconque du segment $[0, 1]$.

Montrons maintenant qu'à tout s. g. réduit de type bistochastique défini sur la famille de génératrices extrémales $(E_\sigma^1)_{\sigma \in S_T}$ et continu sur l'intervalle S_T , nous pouvons associer un s. g. continu minimal (cf. th. 10.4.2). On notera, cependant, que dans le cas général, un tel s. g. minimal ne représente pas nécessairement le s. g. continu donné.

Soit E l'ensemble des sections continues sur la famille $(E_\sigma^1)_{\sigma \in S_T}$. Notons que si deux sections continues coïncident à l'instant $u_+ \in S_T[v_- \in S_T]$, elles coïncident encore au-dessus d'un voisinage à droite de u_+ [à gauche de v_-]. On appellera base (ou support) de E toute famille $\mathfrak{S} \subset E$ de sections continues constituant une partition de la famille $(E_\sigma^1)_{\sigma \in S_T}$. Nous désignerons par le triple (Q, S_T, \mathfrak{S}) le s. g. continu Q auquel est associé sur l'intervalle S_T une base \mathfrak{S} de ses sections continues.

(a) *Les mesures q_i .*

Lemme 10.4.1. — Soit $(Q, S_\tau, \mathfrak{S})$ un s. g. réduit de type bistochastique continu. Pour toute section continue $i \in \mathfrak{S}$ et pour tout nombre $\varepsilon \in]0, 1[$ il existe une partition dénombrable et localement finie, de l'intervalle S_τ en intervalles partiels $[u_+^n, v_-^n]$ sur chacun desquels on a les relations :

$$1 - \varepsilon < Q_\tau^\sigma(i, i) \leq Q_\tau^\sigma(i, E_\tau^1), Q_\tau^\sigma(E_\sigma^1, i) < 1 + \varepsilon.$$

La démonstration résulte immédiatement de ce que les fonctions d'intervalle $Q_\tau^\sigma(i, i)$, $Q_\tau^\sigma(i, E_\tau^1)$ et $Q_\tau^\sigma(E_\sigma^1, i)$ possédant les propriétés (a) (b) et (c) du lemme 6.1.

Proposition 10.4.1. — Soit $(Q, S_\tau, \mathfrak{S})$ un s. g. réduit de type bistochastique continu. Pour toute section continue $i \in \mathfrak{S}$, il existe une partition localement finie de l'intervalle S_τ en intervalles partiels $[u_+^n, v_-^n]$ sur chacun desquels la fonction d'intervalle $-\log [Q_\tau^\sigma(i, i)]$ est intégrable. Plus précisément, on a suivant le filtre \mathcal{F} des partitions finies de l'intervalle :

$$[\sigma, \tau] \subset [u_+^n, v_-^n]$$

$$(10.4.1) \quad \lim_{\mathcal{F}} \uparrow [-\log Q_\tau^\sigma(i, i) - \dots - \log Q_\tau^\tau(i, i)] = \int_\sigma^\tau q_i(dv) < \infty.$$

La démonstration est identique à celle que nous vous avons donnée pour le cas fini (cf. proposition 6.1.2); les majorations effectuées étant maintenant justifiées par le lemme 10.4.1.

Théorème 10.4.1. — Soit $(Q, S_\tau, \mathfrak{S})$ un s. g. réduit de type bistochastique continu. La relation :

$$P_\tau^\sigma(\alpha, \beta) = \sum_{\substack{i \in \mathfrak{S} \\ i_\sigma = \alpha; i_\tau = \beta}} \exp \left[- \int_\sigma^\tau q_i(dv) \right] \quad \alpha \in E_\sigma^1; \beta \in E_\tau^1$$

définit sur la famille $(E_{u_\pm}^1)_{u \in T}$ un s. g. continu P dominé par le s. g. continu $(Q, S_\tau, \mathfrak{S})$.

Démonstration. — Étant donné le couple $(\alpha, \beta) \in E_\sigma^1 \times E_\tau^1$ ($\sigma < \tau$), soit :

$$[\alpha, \beta] = \{ i; i \in \mathfrak{S} \quad \text{et} \quad i_\sigma = \alpha, \quad i_\tau = \beta \}.$$

Si l'on munit l'ensemble de ces crochets des lois de réunion et d'intersection, notées respectivement $+$ et \times , il résulte alors de la relation immédiate :

$$[\alpha, \gamma] = \sum_{\beta \in E_\sigma^1} [\alpha, \beta] \times [\beta, \gamma] \quad \alpha \in E_\sigma^1, \gamma \in E_\tau^1; \rho < \sigma < \tau$$

que la famille $P = (P_\tau^\sigma)_{\sigma < \tau}$ possède la propriété de s. g. généralisé. La dominance du s. g. P par le s. g. Q est d'ailleurs immédiate. On a donc, pour toute section continue et tout $u_+ \in S_\tau$:

$$\exp \left[- \int_{u_+}^\sigma q_i(dv) \right] \leq P_\sigma^{u_+}(i, i) \leq Q_\sigma^{u_+}(i, i)$$

et puisque, d'après la proposition 10.4.1, on a $\lim_{\sigma \downarrow u_+} \int_{u_+}^\sigma q_i(dv) = 0$, on en déduit que $\lim_{\sigma \downarrow u_+} P_\sigma^{u_+}(i, i) = 1$. On montrerait semblablement que pour tout $v_- \in S_\tau$, $\lim_{\sigma \uparrow v_-} P_\sigma^{v_-}(i, i) = 1$. Ainsi, toute section $i \in \mathfrak{S}$ est continue pour le s. g. P, qui est donc lui-même continu.

(b) Les mesures q_{ij} .

Étant données deux sections continues $i, j \in \mathfrak{S}$, on désignera par $q_{ij}(\sigma, \tau)$ la fonction d'intervalle, définie sur $S_\tau < S_\tau$, telle que :

$$q_{ij}(\sigma, \tau) = \begin{cases} Q_\tau^\sigma(i, j) & \text{si } i_\sigma \neq j_\sigma \text{ et } i_\tau \neq j_\tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 10.4.2. — Soit $(Q, S_\tau, \mathfrak{S})$ un s. g. réduit de type bistochastique continu. Pour tout couple $(i, j) \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$, la fonction d'intervalle $q_{ij}(\sigma, \tau)$ est intégrable sur tout intervalle compact de S_τ et on a, suivant le filtre \mathcal{F} des partitions finies d'un tel intervalle $[\sigma, \tau]$:

$$(10.4.4) \quad 0 \leq \int_\sigma^\tau q_{ij}(dv) = \lim_{\mathcal{F}} [q_{ij}(\sigma, \tau_1) + \dots + q_{ij}(\tau_n, \tau)] < \infty.$$

La démonstration de ce résultat est identique à celle du théorème 6.2.2. Désignons enfin par χ_{ij} la composante diffuse de la mesure q_{ij} définie ci-dessus et formons les matrices positives ($\alpha \in E_\sigma^1$ et $\beta \in E_\tau^1$) :

$$\begin{aligned} {}^{(0)}P_\tau^\sigma(\alpha, \beta) &= P_\tau^\sigma(\alpha, \beta). \\ {}^{(n+1)}P_\tau^\sigma(\alpha, \beta) &= \sum_{i, j \in \mathfrak{S}} \int_0^t P_{u_-}^\sigma(\alpha, i) \chi_{ij}(du) {}^{(n)}P_\tau^{u_+}(j, \beta). \end{aligned}$$

Théorème 10.4.2. — La formule :

$$\tilde{P}_\sigma^\tau = \sum_{n \geq 0} {}^{(n)}P_\tau^\sigma$$

définit un s. g. continu \tilde{P} de matrices positives, dominé par le s. g. continu $(Q, S_\tau, \mathfrak{S})$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. BIRKHOFF, Lattice Theory. *Amer. Math. Soc. Colloquium*, Publ. 25, 1948.
- [2] D. BLACKWELL, On transient Markov Processes with a countable number of states stationary transition probabilities. *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 26, n° 4, décembre 1955, p. 654-658.
- [3] N. BOURBAKI, Intégration, Livre 6, chapitre 2, *Éléments de Mathématiques*, Paris, Hermann, 1952.
- [4] G. CHOQUET, Unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes réticulés. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 243, 1956, p. 555-557.
- [5] G. CHOQUET, Existence des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 243, 1956, p. 699-702.
- [6] W. DOEBLIN, Sur l'équation matricielle $A^{(t+s)} = A^{(t)}A^{(s)}$ et ses applications au calcul des probabilités. *Bull. Sci. Math.*, t. 64, 1938, p. 21-32 et 1940, p. 35-37.
- [7] W. FELLER, Boundaries induced by non-negative matrices. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 83, 1956, p. 19-54.
- [8] W. FELLER, On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations. *Ann. of math.*, t. 65 (2), 1957.
- [9] M. FRECHET, *Recherches théoriques modernes sur le Calcul des Probabilités*. II. Paris, Gauthier-Villars, 1937.
- [10] J. NEVEU, Lattice Methods. *Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, vol. 2, 1961, p. 347-391.
- [11] J. NEVEU, Sur le comportement asymptotique des chaînes de Markov. *Coll. Internat. C. N. R. S.*, Paris, 1959.
- [12] J. NEVEU, Sur le comportement asymptotique des chaînes de Markov. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 245, 1957, p. 493-496.
- [13] J. NEVEU, Une généralisation des processus à accroissements positifs indépendants. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 1960-1961.
- [14] F. RIESZ et B. SZ.-NAGY, *Leçons d'Analyse fonctionnelle*, Akademiai Kiado Budapest, 1952.

(Manuscrit reçu le 2 octobre 1964).
