

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN DELPORTE

Fonctions aléatoires presque sûrement continues sur un intervalle fermé

Annales de l'I. H. P., section B, tome 1, n° 2 (1964-1965), p. 111-215

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1964__1_2_111_0

© Gauthier-Villars, 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Fonctions aléatoires presque sûrement continues sur un intervalle fermé

par

Jean DELPORTE

(Faculté Libre des Sciences de Lille
et Institut Supérieur d'Électronique du Nord).

SOMMAIRE. — Étude générale de la construction de fonctions aléatoires normales presque sûrement continues définies par leur covariance. En préliminaire, examen détaillé des fonctions continues sur l'ensemble dyadique \mathcal{D} de $[0, 1]$ et de l'extension de ces fonctions sous la forme de fonctions continues sur $[0, 1]$ par la méthode de la base de Schauder.

Généralisation à tous les espaces de Banach du critère de convergence forte presque sûre des séries de variables aléatoires indépendantes de A. N. Kolmogoroff.

Définition de deux méthodes de construction des fonctions aléatoires normales continues et conditions suffisantes formulées en termes de module de continuité de leur covariance.

ABSTRACT. — The topics of this paper is essentially the construction of almost surely continuous gaussian random functions defined by their covariance. We start by a detailed consideration of functions continuous on the dyadic set \mathcal{D} of $[0, 1]$ and the extension of this function to a continuous function upon $[0, 1]$ by Schauder's basis method.

Then, we generalize the Kolmogoroff's criterion of almost sure convergence of series of independent random variables to all Banach spaces.

We define then two methods of construction of gaussian continuous functions and give sufficient conditions in terms of the modulus of continuity of their covariance.

CHAPITRE PREMIER

**PROPRIÉTÉS DES ESPACES DE BANACH
A BASE MONOTONE**

Dans ce chapitre, nous rappelons d'abord au paragraphe 1.1 quelques généralités relatives aux espaces de Banach ; les paragraphes 1.2 et 1.3 sont consacrés aux notions de base dénombrable et de base monotone ; le paragraphe 1.4 établit quelques propriétés des espaces de Banach à base monotone, propriétés qui seront utilisées au chapitre suivant.

1.1 Généralités relatives aux espaces de Banach.

Un espace vectoriel normé est dit espace de Banach s'il est complet pour la topologie induite par sa norme ; une fonctionnelle linéaire x^* est alors une application linéaire bornée de \mathfrak{X} dans le corps K de définition et l'ensemble \mathfrak{X}^* des fonctionnelles linéaires définies sur \mathfrak{X} constitue un nouvel espace de Banach dit espace dual de \mathfrak{X} .

S. Banach ([1], p. 55) a prouvé qu'à tout $X \in \mathfrak{X}$, correspond une fonctionnelle linéaire x_x^* de norme 1, telle que $x_x^*(X) = \|X\|$; nous utiliserons ce résultat au chapitre III.

Nous supposons connues dans tout ce qui suit les notions de convergence forte et de convergence faible ainsi que la notion d'espace produit d'un ensemble fini ou dénombrable d'espaces de Banach.

En particulier si l'on désigne par $\mathfrak{X} = \prod_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{X}_i$ l'espace produit d'une infinité dénombrable d'espaces de Banach et par $\mathfrak{X}_{(p)}$ l'ensemble des éléments de \mathfrak{X} tels que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|_{(n)}^p < +\infty \quad (1) \qquad p \geq 1,$$

on vérifie facilement que $\mathfrak{X}_{(p)}$ possède lui-même la structure d'espace de Banach, sa norme étant définie par :

$$\|x\| = \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|_{(n)}^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

(1) $\|x_n\|_{(n)}$ désignant la norme de x_n dans l'espace \mathfrak{X}_n .

1.2. Espaces de Banach à base de Schauder.

DÉFINITION. — *Un espace de Banach \mathfrak{X} est dit à base de Schauder ([I], p. 110-114, [I0], p. 67), s'il existe une suite $\{e_n\}$ d'éléments de \mathfrak{X} , telle que, à tout $x \in \mathfrak{X}$ corresponde une suite unique d'éléments du corps \mathbf{K} de définition (\mathbf{R} ou \mathbf{C}) :*

$$\{\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n \dots\}$$

telle que, posant $x_n = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 \dots + \eta_n e_n$, la suite x_n converge fortement vers x .

Un tel espace est toujours *séparable*, c'est-à-dire qu'il existe une suite $\{y_n\}$ d'éléments de \mathfrak{X} , dense dans \mathfrak{X} .

Les exemples les plus connus d'espaces de Banach à base de Schauder sont les suivants ([I], p. 110-114, [I0], p. 67) :

1° l'espace l^p ($p \geq 1$) des suites de nombres réels (ou complexes) de p -ème puissance sommable;

2° l'espace (c) des suites convergentes et l'espace (c_0) des suites convergeant vers zéro, sous espaces fermés de l'espace de Banach (m) des suites bornées;

3° l'espace $C[0, 1]$ des fonctions continues sur $[0, 1]$ et à valeurs dans \mathbf{R} , espace complet pour la norme de la convergence uniforme. Nous verrons au paragraphe 2.3 que cet espace est isomorphe isométriquement à un sous-espace fermé de (m) .

1.3. Espaces de Banach à base monotone.

DÉFINITION. — *Étant donné un espace de Banach \mathfrak{X} , à base de Schauder (e_n) , cette base est dite monotone (M. M. Day [I0], p. 67), si pour tout $x \in \mathfrak{X}$:*

$$\|x_n\| \text{ croît avec } n;$$

x_n désignant le vecteur $\eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 \dots + \eta_n e_n$ défini au paragraphe précédent.

On vérifie facilement que c'est le cas pour les exemples signalés ci-dessus, notamment pour $C[0, 1]$ comme on le démontrera au chapitre II.

1.4. Propriétés fondamentales des espaces de Banach à base monotone.

PROPOSITION 1.4.1. — *Étant donné un espace de Banach \mathfrak{X} , à base monotone (e_n) et une suite $\{\eta_n\}$ de scalaires, pour que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \eta_n e_n$ converge*

fortement vers un élément $x \in \mathfrak{X}$, il faut et il suffit que, étant donné une suite croissante quelconque $n_1, n_2 \dots n_k \dots$ d'entiers positifs, tendant vers l'infini, la sous-suite de sommes partielles $x_{n_1}, x_{n_2} \dots x_{n_k} \dots$ converge fortement.

La condition est évidemment nécessaire; elle est suffisante : en effet, à deux entiers positifs quelconques m et n tels que $m > n$, il est toujours possible de faire correspondre deux éléments n_k et n_{k+h} de la suite, tels que : $n_k \leq n < n_{k+1}$, $n_{k+h} \leq m < n_{k+h+1}$.

Il en résulte que :

$$\|x_m - x_n\| \leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_{k+h}} - x_{n_k}\| + \|x_m - x_{n_{k+h}}\|.$$

La base (e_n) étant monotone, on est donc en droit d'écrire l'inégalité

$$\|x_n - x_{n_k}\| = \left\| \sum_{i=n_k+1}^n \eta_i e_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \eta_i e_i \right\|$$

d'où

$$\|x_n - x_{n_k}\| \leq \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|$$

$$\|x_m - x_n\| \leq \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| + \|x_{n_{k+h}} - x_{n_k}\| + \|x_{n_{k+h+1}} - x_{n_{k+h}}\|$$

ce qui assure la conclusion.

Nous en déduisons la seconde proposition suivante.

PROPOSITION 1.4.2. — Si \mathfrak{X} désigne un espace de Banach à base monotone $\{e_n\}$ et $\{\eta_n\}$ une suite de nombres réels (resp. complexes), pour que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \eta_n e_n$ converge fortement vers un élément $x \in \mathfrak{X}$, il faut et il suffit qu'il existe une suite d'entiers positifs $n_1, n_2 \dots n_k \dots$, tendant en croissant vers l'infini,

lorsque k tend en croissant vers l'infini, telle que $\sum_{k=1}^{+\infty} \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| < +\infty$

(où conventionnellement nous posons $n_0 = 0$, $x_0 = 0$).

Il résulte de la proposition 1.4.1 que cette condition est suffisante; montrons qu'elle est nécessaire. Soit x un élément quelconque de \mathfrak{X} ; par

hypothèse $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ où $x_n = \sum_{j=1}^n \eta_j e_j$. Il existe donc

un entier n_k tel que :

$$n \geq n_k \Rightarrow \|x_n - x\| \leq \frac{1}{(k+1)^{1+\alpha}} \quad \alpha > 0.$$

La suite $\{n_k\}$ ainsi déterminée est non décroissante; on peut d'ailleurs la remplacer par une suite strictement croissante n'_k en posant :

$$n'_1 = n_1 \quad n'_k = \sup [n_k, n'_{k-1} + 1].$$

La base (e_n) étant monotone, on aura donc :

$$\|x_{n'_{k+1}} - x_{n'_k}\| \leq \|x - x_{n'_k}\| \leq \frac{1}{(k+1)^{1+\alpha}} \text{ ce qui assure la conclusion } (2^a).$$

Si l'on se fixe la suite $\{n_k\}$ définie ci-dessus, on en déduit une condition suffisante de convergence forte.

Remarquant alors que $(\eta_{n_{k+1}}, \eta_{n_{k+2}}, \dots, \eta_{n_{k+1}})$ définit un vecteur de l'espace à $n_{k+1} - n_k$ dimensions et que la quantité $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|$ constitue une norme pour ce vecteur, on déduit de la remarque finale du paragraphe 1.1 relative aux produits infinis d'espaces de Banach la proposition suivante.

PROPOSITION 1.4.3. — 1° Si, étant donné une suite $\{n_k\}$ croissante d'entiers positifs, telle que $n_k \rightarrow +\infty$ lorsque $k \rightarrow +\infty$, la sous-suite $\{x_{n_k}\}$ de sommes partielles est telle que :

$$(1.4.3.1) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| < +\infty$$

alors la convergence forte de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \eta_n e_n$ est assurée.

2° De plus, l'ensemble des $x \in \mathfrak{X}$ vérifiant la propriété (1.4.3.1) pour une suite $\{n_k\}$ fixée, constitue un espace de Banach $\Lambda(n_k)$ de norme définie par :

$$(1.4.3.2) \quad \|x\|_{\Lambda(n_k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\|$$

et l'on a de plus : $\|x\| \leq \|x\|_{\Lambda(n_k)}$.

(2) On peut d'ailleurs remplacer dans l'énoncé de 14.2 la condition :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| < +\infty$$

par la condition plus restrictive $\sum_{k=1}^{+\infty} \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\|^r < +\infty$ ($r \leq 1$). Ce résultat sera utilisé au chapitre III, § 3.3.

Remarque 1. — Il en résulte de cette dernière inégalité et du fait que \mathfrak{X} et $\Lambda(n_k)$ constituent des espaces de Banach pour les normes $\|x\|$ et $\|x\|_{\Lambda(n_k)}$ respectivement, que la convergence forte au sens de $\Lambda(n_k)$ implique la convergence forte au sens de \mathfrak{X} . Cette remarque sera utilisée aux chapitres V et VI.

Remarque 2. — Si l'on se donne deux suites $\{n'_k\}$ et $\{n_k\}$ dont l'une est à croissance plus rapide que l'autre, il semble intuitif que le critère (1.4.3.1) donnera une condition moins restrictive pour celle des suites dont la croissance est la plus rapide. Cette remarque peut être précisée comme suit.

THÉOREME 1.4.4. — 1° *Étant donné deux suites $\{n'_k\}$ et $\{n_k\}$, si à partir d'un certain rang, on a constamment :*

$$n'_k \leq n_h < n'_{k+1} \leq n_{h+1}, \quad \text{alors} \quad \Lambda(n'_k) = \Lambda(n_k).$$

2° *Si l'on a, à partir d'un certain rang :*

$$n'_k \leq n_{h_k} < n_{h_k+1} \dots < n_{h_k+r} < n'_{k+1} \quad (r \geq 2) \quad \text{alors} \quad \Lambda(n_k) \subset \Lambda(n'_k).$$

Dans la première hypothèse, on peut écrire l'inégalité :

$$\|x_{n'_{k+1}} - x_{n'_k}\| \leq \|x_{n_h} - x_{n'_k}\| + \|x_{n'_{k+1}} - x_{n_h}\| \leq 2\|x_{n_h} - x_{n_{h-1}}\| + \|x_{n_{h+1}} - x_{n_h}\|$$

$$\text{d'où} \quad \|x_{n'_{k+1}} - x_{n'_k}\| \leq 2[\|x_{n_h} - x_{n_{h-1}}\| + \|x_{n_{h+1}} - x_{n_h}\|].$$

Une inégalité analogue est valable en échangeant les rôles des deux suites; l'équivalence annoncée en résulte.

Dans la seconde hypothèse, on peut reprendre l'inégalité ci-dessus et en déduire plus généralement que :

$$\|x_{n'_{k+1}} - x_{n'_k}\| \leq 2 \sum_{j=0}^{r+1} \|x_{n_{h_k+j}} - x_{n_{h_k+j-1}}\|;$$

d'où résulte que $\Lambda(n_k) \subset \Lambda(n'_k)$ (°).

(°) Notons qu'il s'agit là d'une relation d'inclusion au sens large : on vérifie par exemple facilement que les deux critères :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \|x_{n_{rk}} - x_{n_{r(k-1)}}\| < +\infty$$

sont équivalents (r désignant un entier ≥ 1).

CHAPITRE II

ÉTUDE DE L'ESPACE DE BANACH $C_0[0, 1]$

2.0 Introduction. Résultats généraux et notations.

2.0.1 Nous nous proposons dans ce chapitre de donner des conditions suffisantes pour qu'une fonction définie sur un sous-ensemble dense de $[0, 1]$ y soit uniformément continue; cette fonction pourra alors être prolongée d'une manière et d'une seule en une fonction uniformément continue sur $[0, 1]$.

Pour réaliser cette extension, nous utiliserons un théorème de J. Schauder [57] selon lequel toute fonction continue sur $[0, 1]$ est la somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur $[0, 1]$, ces fonctions constituant une base monotone de l'espace de Banach $C_0[0, 1]$.

Les propriétés de cette série ont été étudiées par J. Kampé de Férrière [40] [42] qui a donné des conditions suffisantes de convergence uniforme de cette série; nous nous proposons d'étendre ces conditions sous forme d'un critère général.

Nous nous limiterons, sans restreindre la généralité⁽¹⁾, à l'étude de l'espace de Banach $C_0[0, 1]$ des fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs nulles en 0 et 1, espace normé à l'aide de la norme de la convergence uniforme :

$$\|x\| = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t)|.$$

Le paragraphe 2.1 rappelle la démonstration de J. Schauder; le paragraphe 2.2 est consacré à la démonstration de quelques lemmes, ce qui nous permet au paragraphe 2.3 d'établir l'équivalence des conditions de continuité uniforme sur \mathcal{D} et de convergence uniforme de la série de Schauder et de donner des conditions suffisantes générales de continuité uniforme sur \mathcal{D} ; le paragraphe 2.4 est consacré à la recherche de majorations du module de continuité.

Les résultats essentiels de ce chapitre sont ceux du paragraphe 2.3; ils seront utilisés au chapitre V pour la construction de fonctions aléatoires continues.

(¹) A toute fonction $x \in C[0, 1]$ correspond une et une seule fonction $x_1 \in C_0[0, 1]$ définie par $x_1(t) = x(t) - tx(1) - (1-t)x(0)$, ce qui permet d'étendre les résultats obtenus à $C[0, 1]$ et $C[a, b]$.

2.0.2 Rappel des notations relatives à l'ensemble dyadique.

Nous désignerons (voir J. Kampé de Fériet [40], p. 142-144) par N_q (q entier positif) l'ensemble des entiers n tels que $2^{q-1} \leq n < 2^q$.

A tout entier n correspond alors un et un seul couple d'entiers (p_n, q_n) tels que $n = 2^{q_n-1} + p_n$.

Désignant l'intervalle $[0, 1[$ par J_1 , nous considérerons la suite d'intervalles semi-ouverts $J_1, J_2 \dots J_n \dots$ définis par :

$$J_n = \left\{ t ; \frac{p_n}{2^{q_n-1}} \leq t < \frac{p_n + 1}{2^{q_n-1}} \right\} \quad (2).$$

L'ensemble des J_n tels que $n \in N_q$ constitue la *partition dyadique d'ordre q* de J_1 ; on vérifie facilement que :

$$\bigcup_{n \in N_q} J_n = J_1 ; \quad J_m \cap J_n = \emptyset \quad (m \neq n ; m \text{ et } n \in N_q) ; \quad J_{2n} \cup J_{2n+1} = J_n.$$

Le n -ème point dyadique $t_n = \frac{2p + 1}{2^q}$ sera milieu de l'intervalle J_n et l'ensemble dénombrable *dense* de $[0, 1]$

$$\mathcal{D} = \{ t_1, t_2 \dots t_n \dots \}$$

constitue l'ensemble des points dyadiques ou *ensemble dyadique*.

Pour tout point $t \in [0, 1]$, il existe un développement dyadique unique :

$$(2.0.2.A) \quad t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k} \quad (a_k = 0 \text{ ou } 1),$$

l'unicité étant vérifiée si l'on convient de choisir le développement fini pour tout $t \in \mathcal{D}$; alors t appartient à un intervalle déterminé J_{n_q} de la subdivision dyadique d'ordre q et il est possible d'écrire

$$\{ t \} = \bigcap_{q=1}^{+\infty} J_{n_q}.$$

Plus généralement, si $\{ q_k \}$ désigne une suite croissante quelconque d'entiers positifs, tendant vers l'infini lorsque k tend vers l'infini, on voit

(2) Pour simplifier les notations, nous noterons désormais p et q au lieu de p_n et q_n , étant entendu qu'il s'agit là des quantités correspondant à l'entier n .

facilement en regroupant les termes de (2.0.2.A) qu'à tout point $t \in [0, 1]$ correspond un développement unique :

$$(2.0.2.B) \quad t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{l_k}{2^{qk}}, \text{ où } l_k \text{ entier tel que } 0 \leq l_k < 2^{qk-q_{k-1}}$$

(nous poserons conventionnellement $q_0 = 0$).

2.0.3 Fonctions triangulaires.

Définissons alors la suite de fonctions triangulaires $\{e_n(t)\}$ par : $e_n(t) = 0$ si $t \notin J_n$; $e_n(t) = 2^q(t - p 2^{1-q})$ si $t \in J_{2n}$; $e_n(t) = 2^q[(p + 1) 2^{1-q} - t]$ si $t \in J_{2n+1}$.

On vérifie facilement que $e_n(t) \geq 0$ et que $e_n(t) \in C_0[0, 1]$; $e_n(t_j) = \delta_{nj}$ pour $1 \leq j \leq n$ (où δ_{nj} désigne le symbole de Kronecker). La courbe représentative de $e_n(t)$ se compose de deux segments de l'axe Ot et d'un triangle isocèle de sommet $(t_n, 1)$ et de base J_n . Nous allons rétablir dans le paragraphe 2.1 la preuve du fait que les fonctions $e_n(t)$ constituent une base monotone de l'espace $C_0[0, 1]$.

2.1 Le développement de toute fonction appartenant à $C_0[0, 1]$ en série de fonctions triangulaires ⁽³⁾ (voir J. Schauder [57], Ljusternik et Sobolev [50], p. 149-151, J. Kampé de Fériet [40], p. 142-146, Mahlon M. Day [10], p. 60-211).

J. Schauder a démontré la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1.1.1. — *La suite $\{e_n\} = \{e_n(t)\}$ constitue une base pour l'espace de Banach $C_0[0, 1]$, la suite de constantes r_n qui correspond biunivoquement à tout point $x = x(t) \in C_0[0, 1]$ étant définie par :*

$$(2.1.1.1) \quad r_n = x\left(\frac{2p+1}{2^q}\right) - \frac{1}{2} \left[x\left(\frac{p}{2^{q-1}}\right) + x\left(\frac{p+1}{2^{q-1}}\right) \right].$$

Une démonstration détaillée de ce théorème a été donnée par J. Kampé de Fériet ([40], p. 145-146); nous nous bornons ici à reproduire les lemmes 7.1 à 7.5 de son mémoire qui constituent la preuve de ce théorème.

⁽³⁾ Comme le note J. Kampé de Fériet, l'idée de ce développement se trouve déjà dans E. Borel [6] mais en dehors des références citées, le résultat signalé ne semble pas avoir retenu l'attention des analystes; d'une manière assez curieuse, cette méthode semble plutôt avoir été utilisée par les probabilistes (par ex. E. Slutsky [59], p. 190-195 et P. Lévy [47], p. 8).

LEMME 7.1. — *Quelles que soient les constantes η_n , la courbe*

$$x = x_n(t) = \eta_1 e_1(t) + \eta_2 e_2(t) \dots + \eta_n e_n(t)$$

est une ligne polygonale P_n ayant $(n + 1)$ côtés dont les sommets ont pour abscisses $0, 1, t_1 \dots t_n$ et pour ordonnées :

$$x_n(0) = 0, \quad x_n(1) = 0, \quad x_n(t_1) \dots x_n(t_n).$$

LEMME 7.2. — *Quelles que soient les constantes η_m , les lignes polygonales P_{n-1} et P_n ont en commun les sommets d'abscisses $0, 1, \dots, t_{n-1}$; on passe de P_{n-1} à P_n en remplaçant le côté AB de P_{n-1} qui se projette selon J_n par un triangle ABC dont le sommet C a pour abscisse t_n milieu de J_n ; η_n représente la différence d'ordonnées entre le sommet C de P_n et le milieu C' du côté AB de P_{n-1} .*

$$\eta_n = x_n\left(\frac{2p+1}{2^q}\right) - \frac{1}{2} \left[x_{n-1}\left(\frac{p}{2^{q-1}}\right) + x_{n-1}\left(\frac{p+1}{2^{q-1}}\right) \right].$$

LEMME 7.3. — *Quelles que soient les constantes η_n , pour tout $t \in \mathfrak{D}$, la série :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \eta_n e_n(t)$$

se réduit à un nombre fini de termes ; sa somme $S(t)$ est toujours définie sur l'ensemble dyadique \mathfrak{D} et $S(t_n) = x_n(t_n) = x_{n+k}(t_n) \quad k \geq 0$.

LEMME 7.4. — *Les constantes η_n ne dépendent que des valeurs de $x(t)$ sur l'ensemble dyadique \mathfrak{D} , à deux fonctions, telles que : $x(t) = y(t)$ pour tout $t \in \mathfrak{D}$ correspond une même suite de constantes η_n .*

LEMME 7.5. — *Si les constantes η_n sont définies par (2.1.1.1), on a, quelle que soit la fonction réelle $x(t)$:*

$$x(t_n) = x_n(t_n) = x_{n+k}(t_n) \quad k \geq 0,$$

les $n + 2$ points $x(0) x(1) \dots x(t_n)$ coïncidant avec les sommets de la ligne polygonale P_n , on a donc $x(t) = S(t)$ pour tout $t \in \mathfrak{D}$.

La convergence uniforme de la série vers $x(t)$ pour tout $x(t) \in C_0[0, 1]$ découle alors du fait que la distance entre un côté de la ligne polygonale P_n et la courbe tend uniformément vers zéro, ce qui est évident en vertu de la

continuité de $x(t)$. Ce résultat sera précisé au paragraphe 2.3 en explicitant la condition de continuité uniforme sur \mathcal{D} .

Il résulte également des lemmes 7.1 à 7.5 que P_n ayant pour sommets les points de coordonnées $(t_j, x(t_j))$ pour $1 \leq j \leq n$:

$$(2.1.1.2) \quad \|x_n\| = \sup_{1 \leq j \leq n} |x(t_j)|.$$

Cette norme croît donc avec l'entier n et l'on a :

$$(2.1.1.3) \quad \|x\| = \sup_{t \in \mathcal{D}} |x(t)|.$$

On a ainsi redémontré le résultat connu suivant (Mahlon M. Day [10], p. 69).

THÉORÈME 2.1.1.2. — *Les fonctions $e_n(t)$ constituent une base monotone de l'espace de Banach $C_0[0, 1]$.*

2.1.2 Conséquences du caractère monotone de la base $e_n(t)$.

COROLLAIRE 2.1.2.1. — *L'espace de Banach $C_0[0, 1]$ est isomorphe isométriquement à un sous-espace fermé de l'espace (m) des suites bornées.*

Soit $x(t)$ un élément de $C_0[0, 1]$; considérons la suite des valeurs de cette fonction sur \mathcal{D} .

$x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n) \dots$; cette suite est bornée et l'on a :

$$\|x\| = \sup_{n \geq 1} |x(t_n)|.$$

Le vecteur ainsi défini appartient donc à l'espace (m) ; donc, à toute fonction continue correspond un vecteur de l'espace (m) ayant même norme; la correspondance est linéaire et conserve la norme; $C_0[0, 1]$ étant fermé correspond donc biunivoquement à un certain sous-espace fermé de (m) . La condition pour qu'un vecteur de (m) appartienne à ce sous-espace n'est autre que la condition de continuité uniforme sur \mathcal{D} (*) qui sera définie plus loin.

Nous pouvons appliquer sans changement toutes les propriétés des espaces de Banach à base monotone démontrées au chapitre précédent.

Nous allons introduire dans ce but quelques notations.

Reprenant d'abord les notations de J. Kampé de Fériet ([40], p. 150) nous désignons par B_q la quantité :

$$B_q = \sup_{n \in \mathbb{N}_q} |\eta_n|.$$

(*) Nous avons déjà prouvé ce résultat dans notre Note [12]; de même si l'on considère une fonction $x(t) \in C[0, 1]$, sa norme est définie par $\|x\| = \sup [|x(0)|, |x(1)|, \dots, |x(t_n)| \dots]$ et le résultat précédent s'applique.

Soit alors :

$$B_{q,h} = \left\| x_{2^q+h-1}(t) - x_{2^q-1}(t) \right\|$$

il résulte de 2.1.1.2 que :

(2.1.2.1)

$$B_{q,h} = \sup_{2^q \leq j < 2^{q+h}} |x_{2^q+h-1}(t_j) - x_{2^q-1}(t_j)| = \sup_{2^q \leq j < 2^{q+h}} |x(t_j) - x_{2^q-1}(t_j)|.$$

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1.2.2. — *La condition nécessaire et suffisante de convergence uniforme de la série de Schauder est donnée par :*

$$(2.1.2.2) \quad \lim_{q \text{ et } h \rightarrow +\infty} B_{q,h} = 0.$$

Ce théorème est une conséquence immédiate de la proposition 1.4.1 établie au chapitre précédent; il en découle en effet que la condition nécessaire et suffisante de convergence forte de la série de Schauder n'est rien d'autre que la convergence uniforme de la sous-suite $x_1(t), x_3(t), \dots, x_{2^q-1}(t), \dots$, d'où (2.1.2.2).

Remarque 1. — L'avantage de ce résultat est évident; il permet de ne considérer que les lignes polygonales $P_{2^q-1}(t)$ au lieu des lignes $P_n(t)$ ce qui permet de passer successivement d'une subdivision à l'autre et donne une forme plus simple aux conditions de convergence uniforme.

Remarque 2. — On peut même aller plus loin en utilisant cette proposition 1.4.1 : il est inutile d'envisager les subdivisions une par une. Si $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots$ désigne une suite croissante d'entiers positifs, tendant vers l'infini lorsque k tend vers l'infini, il faut et il suffit que la suite de lignes polygonales correspondant aux subdivisions d'ordre q_1, q_2, \dots, q_k , converge uniformément, soit :

$$(2.1.2.2') \quad \lim_{k, h \rightarrow +\infty} B_{q_k, q_k+h-q_k} = 0.$$

Ceci nous suggère la possibilité d'utiliser également la proposition 1.4.2.

Pour ceci, introduisons un nouveau symbole : $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots$ désignant une suite définie comme ci-dessus, posons :

$$B'_{q_k} = \left\| x_{2^{q_k+1}-1}(t) - x_{2^{q_k}-1}(t) \right\| = \sup_j |x(t_j) - x_{2^{q_k}-1}(t_j)| \text{ où } 2^{q_k} \leq j < 2^{q_k+1}.$$

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant qui est une conséquence immédiate de 1.4.2 et 1.4.3.

THÉORÈME 2.1.2.3. — 1° Si la suite de constantes η_n est telle que :

$$(2.1.2.3) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} B'_{q_k} < +\infty \text{ (}^{\circ})$$

alors la série de Schauder converge uniformément.

2° Réciproquement à tout $x \in C_0[0, 1]$ correspond nécessairement une suite $q_1 q_2 \dots q_k \dots$ croissant vers $+\infty$, telle que la série (2.1.2.3) converge.

3° Étant donné une suite $q_1 q_2 \dots q_k \dots$ fixée, l'ensemble des $x(t) \in C_0[0, 1]$ vérifiant la condition (2.1.2.3) constitue un sous-espace de $C_0[0, 1]$; ce sous-espace $\Lambda(q_k)$ constitue lui-même un espace de Banach si l'on y définit la norme par :

$$\|x\|_{\Lambda(q_k)} = \sum_{k=0}^{+\infty} B'_{q_k} \quad \text{et l'on a de plus} \quad \|x\| \leq \|x\|_{\Lambda(q_k)}.$$

COROLLAIRE 2.1.2.4 (J. Kampé de Fériet [40], p. 151). — Étant donné

une suite de constantes η_n telles que $\sum_{q=1}^{+\infty} B_q < +\infty$ alors la série de Schauder converge absolument et uniformément.

Il résulte en effet des propriétés des fonctions $e_n(t)$ que pour $n \in N_q$ une seule des fonctions $e_n(t)$ est non nulle donc :

$$\left\| \sum_{n \in N_q} \eta_n e_n(t) \right\| = \|x_{2^q-1}(t) - x_{2^{q-1}-1}(t)\| = \sup_{n \in N_q} |\eta_n|$$

d'où la convergence absolue et uniforme de la série de Schauder.

Remarque. — La base $e_n(t)$ étant monotone, nous pouvons écrire l'inégalité

$$(2.1.2.4) \quad \text{donc :} \quad B_{q+1} = \|x_{2^{q+1}-1}(t) - x_{2^q-1}(t)\| \leq \|x_{2^{q+k}-1}(t) - x_{2^q-1}(t)\|$$

$$\underline{B_{q+1} \leq B_{q,k}}$$

2.2 Notations nouvelles et lemmes auxiliaires.

2.2.1 Nous reprenons d'abord les notations et méthodes de J. Kampé de Fériet; désignons par :

$$\xi_n = x\left(\frac{p+1}{2^{q-1}}\right) - x\left(\frac{p}{2^{q-1}}\right) \quad n \in N_q$$

(⁵) Si $k = 0$, nous posons $q_0 = 0$, $x_0 = 0$, d'où $B'_{q_0} = \|x_{2^{q_1-1}}(t)\|$.

$$A_q = \sup_{n \in N_q} |\xi_n|.$$

Nous rappelons d'abord les relations et inégalités suivantes (J. Kampé de Fériet [40], p. 147).

$$(2.2.1.1) \quad \xi_1 = 0; \quad \xi_2 = -\xi_3 = \eta_1; \quad \xi_{2n} + \xi_{2n+1} = \xi_n; \quad \xi_{2n} - \xi_{2n+1} = 2\eta_n$$

d'où résultent les inégalités.

$$(2.2.1.2) \quad B_q \leq A_{q+1}.$$

$$(2.2.1.3) \quad A_1 = 0 \quad A_2 = B_1 \quad A_{q+1} \leq \frac{1}{2} A_q + B_q.$$

$$(2.2.1.4) \quad A_{q+1} \leq \sum_{j=1}^q \frac{1}{2^{q-j}} B_j.$$

$$(2.2.1.5) \quad \sum_{j=1}^q B_j \leq \sum_{j=1}^q A_{j+1} \leq 2 \sum_{j=1}^q B_j.$$

On en déduit le lemme suivant :

LEMME 2.2.1.

1° Les conditions $A_q \rightarrow 0$ et $B_q \rightarrow 0$ sont équivalentes.

2° Les conditions $\sum_{q=1}^{+\infty} A_q < +\infty$ et $\sum_{q=1}^{+\infty} B_q < +\infty$ sont équivalentes.

Le premier point est une conséquence immédiate de (2.2.1.2), (2.2.1.4) et du lemme de Toeplitz (M. Loève [51], p. 238).

Le 2° résulte de 2.2.1.5.

2.2.2 Si $x(t)$ désigne une fonction définie sur \mathcal{D} , nulle en 0 et 1, désignons par $A_{q,h}$ la quantité

$$(2.2.2.1) \quad A_{q,h} = \sup_{p,l} \left| x\left(\frac{p}{2^q} + \frac{l}{2^{q+h}}\right) - x\left(\frac{p}{2^q}\right) \right| \quad (6)$$

où p et l sont des entiers tels que :

$$0 \leq p < 2^q \quad 1 \leq l \leq 2^h;$$

$B_{q,h}$ désignant la quantité définie en 2.1.2.1 soit :

$$B_{q,h} = \sup_{2^q \leq j < 2^{q+h}} |x(t_j) - x_{2^q-1}(t_j)|,$$

(6) On remarquera qu'avec les notations précédentes, on a $B_{q+1} = B_{q,1}$ et $A_{q+1} = A_{q,0}$.

nous prouvons les lemmes suivants :

LEMME 2.2.2.A $B_{q,h} \leq 2A_{q,h}$.

LEMME 2.2.2.B $A_{q,h} \leq B_{q,h} + A_{q+1}$.

LEMME 2.2.2.C $\lim_{q \text{ et } h \rightarrow +\infty} B_{q,h} = 0 \iff \lim_{q \text{ et } h \rightarrow +\infty} A_{q,h} = 0$.

Le principe général de la démonstration sera le suivant : à chacun des points t_j appartenant à une subdivision d'ordre compris entre $q + 1$ et $q + h$, donc de la forme $\frac{p}{2^q} + \frac{l}{2^{q+h}}$, nous pouvons associer deux points t'_j et t''_j appartenant à des subdivisions d'ordre inférieur ou égal à q , tels que :

$$\frac{p}{2^q} = t'_j < t_j \leq t''_j = \frac{p+1}{2^q}.$$

Si A, B, C désignent respectivement sur la ligne polygonale d'ordre $2^q - 1$ les points d'abscisses t'_j , t''_j et t_j , nous avons :

$$x(t_j) = x_{2^{q+h-1}}(t_j) ; \quad x(t'_j) = x_{2^{q-1}}(t'_j) ; \quad x(t''_j) = x_{2^{q-1}}(t''_j) ;$$

le point C étant en outre situé sur le segment AB, nous avons l'inégalité suivante :

$$|x_{2^{q-1}}(t_j) - x(t'_j)| \leq |x(t''_j) - x(t'_j)| \leq A_{q+1}.$$

La preuve de la première inégalité est alors simple car :

$$B_{q,h} = \sup_j |x(t_j) - x_{2^{q-1}}(t_j)| \leq \sup_j |x(t_j) - x(t'_j)| + A_{q+1}.$$

Remarquant que : $A_{q+1} \leq A_{q,h}$, il vient donc : $B_{q,h} \leq 2A_{q,h}$, soit la première inégalité.

Pour prouver le second lemme, nous pouvons poser :

$$t'_j = \frac{p}{2^q}, \quad t_j = \frac{p}{2^q} + \frac{l}{2^{q+h}} \quad \text{dans la définition de } A_{q,h}.$$

De l'inégalité :

$$|x(t_j) - x(t'_j)| \leq |x(t_j) - x_{2^{q-1}}(t_j)| + |x_{2^{q-1}}(t_j) - x(t'_j)|,$$

on déduit en passant aux bornes supérieures : $A_{q,h} \leq B_{q,h} + A_{q+1}$ ce qui établit la seconde inégalité.

Le troisième lemme en résulte : la première inégalité montre que :

$$\lim_{q \text{ et } h \rightarrow +\infty} A_{q,h} = 0 \implies \lim_{q \text{ et } h \rightarrow +\infty} B_{q,h} = 0 ;$$

pour établir la réciproque, il suffit d'utiliser (2.1.2.4) et les lemmes 2.2.1 et 2.2.2.B : l'inégalité (2.1.2.4) montre que :

$$\lim_{q \text{ et } h \rightarrow +\infty} B_{q,h} = 0 \implies \lim_{q \rightarrow +\infty} B_{q+1} = 0$$

d'où $\lim_{q \rightarrow +\infty} A_{q+1} = 0$ (lemme 2.2.1) et la conclusion en découle.

2.2.3 Les résultats précédents joints à ceux du théorème 2.1.2.3 montrent qu'il n'est nullement nécessaire de considérer les subdivisions dyadiques une à une; on peut se borner à en examiner une sous-suite $q_1 \dots q_k \dots$ croissant vers $+\infty$ et la condition :

$$\lim_{q \text{ et } h \rightarrow +\infty} A_{q,h} = 0 \text{ équivaut à : } \lim_{k \text{ et } h \rightarrow +\infty} A_{q_k, q_k + h - q_k} = 0.$$

Cette analogie nous amène à essayer de reformuler le théorème 2.1.2.3 en termes analogues à ceux donnés ci-dessus.

Les quantités définies dans ce théorème sont, en effet, des combinaisons linéaires de différences secondes portant sur les valeurs de $x(t)$ sur \mathbb{D} ; nous allons plutôt faire intervenir les différences premières plus maniables.

$q_1 q_2 \dots q_k \dots$ désignant une suite définie comme en 2.1.2, posons :

$$A'_{q_k} = \sup_{p,l} \left| x\left(\frac{p}{2^{q_k}} + \frac{l}{2^{q_k+1}}\right) - x\left(\frac{p}{2^{q_k}}\right) \right|$$

où p et l entiers tels que :

$$0 \leq p < 2^{q_k}, \quad 1 \leq l \leq 2^{q_k+1} - 2^{q_k}.$$

Nous nous proposons d'établir le lemme fondamental suivant :

LEMME 2.2.3. — *Les conditions :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} A'_{q_k} < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} B'_{q_k} < +\infty$$

sont équivalentes.

Ce résultat découle immédiatement des trois lemmes suivants que nous allons établir :

$$\text{LEMME 2.2.3.A} \quad B'_{q_k} \leq 2A'_{q_k}.$$

$$\text{LEMME 2.2.3.B} \quad A'_{q_0} = B'_{q_0}.$$

$$A'_{q_k} \leq B'_{q_k} + 2 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2^{q_{j+1}}}{2^{q_k}} B'_{q_j}.$$

LEMME 2.2.3.C
$$\sum_{k=0}^{+\infty} B'_{q_k} \leq 2 \sum_{k=0}^{+\infty} A'_{q_k} \leq 10 \sum_{k=0}^{+\infty} B'_{q_k}.$$

Le lemme 2.2.3.A est une simple transposition de 2.2.2.A; le second est un peu plus complexe.

Le premier résultat est aisé à prouver car :

$$A'_{q_0} = \sup_p \left| x\left(\frac{p}{2^{q_1}}\right) \right|$$

et :
$$B'_{q_0} = \sup_p \left| x_{2^{q_1-1}}\left(\frac{p}{2^{q_1}}\right) \right| = \sup_p \left| x\left(\frac{p}{2^{q_1}}\right) \right|$$

d'après les propriétés déjà vues des lignes polygonales P_n .

Pour prouver la seconde inégalité, nous posons pour simplifier les notations

$$t'_k = \frac{p}{2^{q_k}} \quad \text{et} \quad t''_k = \frac{p}{2^{q_k}} + \frac{l}{2^{q_{k+1}}}, \quad y_j(t) = x_{2^{q_{j+1}-1}}(t) - x_{2^{q_{j-1}}} (t).$$

Étant donné les définitions de t'_k et t''_k , nous obtenons donc :

$$x(t'_k) = \sum_{j=0}^{k-1} y_j(t'_k) \quad \text{et} \quad x(t''_k) = \sum_{j=0}^k y_j(t''_k)$$

car, t'_k et $t''_k \in \mathbb{D}$, les termes d'ordre supérieur à k disparaissent dans le développement en série de Schauder.

Il vient donc l'inégalité :

$$|x(t'_k) - x(t''_k)| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |y_j(t'_k) - y_j(t''_k)| + |y_k(t''_k)|.$$

Le dernier terme étant majoré par B'_{q_k} , il nous suffit de majorer la somme restante.

Or, sur la ligne polygonale représentant $y_j(t)$, t''_k et t'_k sont sur un même segment de droite d'extrémités τ'_j et τ''_j avec :

$$\tau''_j = \tau'_j + \frac{1}{2^{q_{j+1}}},$$

d'où résulte l'inégalité :

$$|y_j(t'_k) - y_j(t''_k)| \leq \frac{2^{q_{j+1}}}{2^{q_k}} |y_j(\tau'_j) - y_j(\tau''_j)| \leq \frac{2^{1+q_{j+1}}}{2^{q_k}} \|y_j\|$$

soit :
$$\sup_{p,l} |y_j(t'_k) - y_j(t''_k)| \leq \frac{2^{1+q_{j+1}}}{2^{q_k}} B'_{q_j}.$$

Sommant toutes ces inégalités, nous obtenons ainsi le résultat annoncé. Nous prouvons maintenant le troisième lemme.

L'inégalité de gauche est évidente; de plus, la suite $\{q_k\}$ étant croissante est telle que $q_{k+1} \geq q_k + 1$ d'où $q_{k+r} \geq q_k + r$.

Sommant les inégalités du lemme 2.2.3.B, il vient :

$$\sum_{k=0}^{\kappa} A'_{q_k} \leq B'_{a_0} \left[1 + 2 \cdot \frac{2^{q_1}}{2^{q_1}} \dots + 2 \frac{2^{q_1}}{2^{q_\kappa}} \right] + B'_{a_1} \left[1 + 2 \cdot \frac{2^{q_2}}{2^{q_2}} \dots + \frac{2^{q_2}}{2^{q_\kappa}} \right] \\ \dots + B'_{q_k} \left[1 + 2 \cdot \frac{2^{q_k}}{2^{q_k}} \dots + 2 \frac{2^{q_k}}{2^{q_\kappa}} \right] \dots + B'_{q_\kappa};$$

le coefficient de B'_{q_k} est alors majoré par :

$$1 + 2 \left(1 + \frac{1}{2} \dots + \frac{1}{2^{\kappa-k}} \right) \leq 5. \text{ Ceci permet de conclure.}$$

L'utilisation de la sous-suite $q_k = k$ permet de retrouver le résultat du lemme 2.2.1; nous y avons désigné par :

$$A_q \text{ la quantité : } \sup_{0 \leq p \leq 2^q - 1} \left| x \left(\frac{p+1}{2^q} \right) - x \left(\frac{p}{2^q} \right) \right|;$$

d'après les notations précédentes, nous serons amenés à désigner par A'_q la quantité :

$$\sup_{0 \leq p \leq 2^{q+1} - 1} \left| x \left(\frac{p+1}{2^q} \right) - x \left(\frac{p}{2^q} \right) \right| \left| x \left(\frac{2p+1}{2^{q+1}} \right) - x \left(\frac{p}{2^q} \right) \right|$$

il est donc possible d'écrire l'inégalité :

$$A_{q+1} \leq A'_q \leq A_{q+1} + A_{q+2}.$$

Ceci prouve qu'il s'agit là d'un simple changement de notations qui ne modifie en rien la force du critère.

2.3 Conditions de continuité uniforme sur l'ensemble dyadique.

Les résultats qui précèdent nous permettent maintenant de caractériser la continuité uniforme sur l'ensemble dyadique \mathcal{D} . Si cette condition est vérifiée, le développement en série de Schauder nous fournira la méthode d'extension à $[0, 1]$ de la fonction uniformément continue ainsi définie sur \mathcal{D} .

2.3.1 *Équivalence des conditions de continuité uniforme sur \mathcal{D} et de la convergence uniforme de la série de Schauder.*

PROPOSITION 2.3.1. — 1° Pour que la série de Schauder converge uniformément, il faut et il suffit que : $\lim_{q \text{ et } h \rightarrow +\infty} B_{q,h} = 0$.

2° Cette condition équivaut à : $\lim_{q \text{ et } h \rightarrow +\infty} A_{q,h} = 0$, c'est-à-dire à la continuité uniforme de $x(t)$ sur \mathcal{D} (?).

Le premier point a été prouvé au théorème 2.1.2.2 et l'équivalence des deux conditions résulte du lemme 2.2.2.C. Il nous suffit de montrer que la condition $\lim_{q \text{ et } h \rightarrow +\infty} A_{q,h} = 0$ n'est autre que la condition nécessaire et suffisante de continuité uniforme sur \mathcal{D} .

Le fait qu'elle soit nécessaire est évident; de plus, la condition implique qu'il existe $q(\varepsilon)$ tel que $q \geq q(\varepsilon) \implies A_{q,h} \leq \varepsilon$ pour tout h . Soit alors deux points dyadiques quelconques t_j et t'_j tels que :

$$t'_j - t_j \geq \frac{1}{2^{q+h}}, \quad t_j < t'_j \leq t_j + \frac{1}{2^q}.$$

Il est alors possible d'insérer deux points dyadiques τ'_j et τ''_j , appartenant à des subdivisions d'ordre inférieur ou égal à q , tels que :

$$\tau'_j \leq t_j \leq \tau''_j \leq t'_j \leq \tau''_j + \frac{1}{2^q} \quad \text{ou} \quad \tau'_j \leq t_j \leq t'_j \leq \tau''_j;$$

un calcul élémentaire montre que $|x(t'_j) - x(t_j)| \leq 3 A_{q,h}$ ce qui assure la conclusion.

J. Kamp de Fériet [42] avait donné une autre forme à la condition de continuité uniforme : choisissant sur $[0,1]$ deux points $\frac{p}{2^{q+h}}$ et $\frac{p'}{2^{q+h}}$ tels que $0 < \frac{p'+1}{2^{q+h}} - \frac{p}{2^{q+h}} \leq \frac{1}{2^q}$, il avait montré qu'en posant :

$$\widehat{A}_{q,h} = \sup_{p,p'} \left| x\left(\frac{p'+1}{2^{q+h}}\right) - x\left(\frac{p}{2^{q+h}}\right) \right|,$$

la condition de continuité uniforme sur \mathcal{D} s'exprimait par $\lim_{q \text{ et } h \rightarrow +\infty} \widehat{A}_{q,h} = 0$.

(?) La première forme explicite de cette condition semble avoir été donnée par T. Broden [7], p. 1 à 5.

On vérifie facilement que $A_{q,h} \leq \widehat{A}_{q,h} \leq 3 A_{q,h}$ ⁽⁸⁾, ce qui montre l'équivalence des procédés; nous préférons toutefois employer la quantité $A_{q,h}$ plus maniable et utilisant un nombre de termes moins élevé.

Le paragraphe qui va suivre va nous donner des conditions d'un manie- ment encore plus aisé.

2.3.2 Autres formes des conditions de continuité uniforme sur \mathcal{D} .

Réunissant les résultats du théorème 2.1.2.3 et du lemme 2.2.3, nous obtenons les propositions suivantes :

PROPOSITION 2.3.2.A. — *Étant donné une fonction $x(t)$ définie sur l'ensemble \mathcal{D} pour que cette fonction soit uniformément continue sur l'ensemble dyadique \mathcal{D} , il faut et il suffit qu'il existe une suite d'entiers positifs $\{q_k\}$, croissante tendant vers l'infini lorsque k tend vers l'infini, telle que :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} A'_{q_k} < +\infty \quad \text{ou équivalamment} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} B'_{q_k} < +\infty \quad (9).$$

PROPOSITION 2.3.2.B. — *1° Étant donné une fonction $x(t)$ définie sur \mathcal{D} , s'il existe une suite $\{q_k\}$ telle que $\sum_{k=0}^{\infty} A'_{q_k} < +\infty$ alors la fonction est uniformément continue sur \mathcal{D} .*

2° Étant donné une suite $\{q_k\}$ fixe définie comme ci-dessus, l'ensemble des $x(t) \in C_0[0, 1]$ telles que $\sum_{k=0}^{+\infty} A'_{q_k} < +\infty$ constitue un espace de Banach

$\Lambda(q_k)$ pour les deux normes équivalentes $\sum_{k=0}^{\infty} A'_{q_k}$ et $\sum_{k=0}^{\infty} B'_{q_k}$, chacune de ces normes étant supérieure à la norme de la convergence uniforme.

L'équivalence des deux normes résulte du lemme 2.2.3.C.

⁽⁸⁾ L'inégalité de gauche est triviale; pour prouver l'inégalité de droite, on peut associer à $\frac{p}{2q+h}$ les points t'_j et t''_j définis en 2.2.2. Il suffit alors d'examiner les deux éventualités : $t'_j \leq \frac{p}{2q+h} < \frac{p'+1}{2q+h} \leq t''_j$ et $t'_j \leq \frac{p}{2q+h} < t''_j \leq \frac{p'+1}{2q+h}$.

⁽⁹⁾ Comme on l'a vu au chapitre premier, il serait possible de remplacer $\sum_{k=0}^{\infty} A'_{q_k}$ (respectivement B'_{q_k}) par $\sum_{k=0}^{\infty} A'_{q_k r}$ (respectivement $B'_{q_k r}$) où $r \leq 1$. Nous utiliserons ce résultat au chapitre V, § 5.2.

Remarque 1. — Les suites $\{q_k\}$ choisies dans l'énoncé du critère 2.3.2. B peuvent être très variées; nous avons utilisé dans une note antérieure [15] la suite $q_k = k^r$; comme on le verra aux chapitres V et VI, la suite $q_k = 2^k$ fournit les meilleurs résultats pour l'étude des fonctions aléatoires normales ⁽¹⁰⁾.

Les remarques qui mènent au théorème 1.4.4 s'appliquent ici sans changement; si nous considérons par exemple les suites $q_k = k$, $q_k = k^r$, $q_k = 2^k$, on aura par ordre de généralité croissante :

$$\Lambda(k) \subset \Lambda(k^r) \subset \Lambda(2^k).$$

Appartiendront au premier espace toutes les fonctions lipschitziennes d'ordre α et plus généralement toutes les fonctions dont le module de continuité est inférieur ou égal à $A[1 + |\log |h||]^{-1-\varepsilon}$. Dans tous les cas, la convergence forte dans ces divers sous-espaces implique, comme on l'a vu, la convergence uniforme dans $C_0[0, 1]$.

Remarque 2. — Si nous comparons la méthode précédente avec celle définie par J. Kampé de Fériet, nous sommes amenés aux remarques suivantes.

Le principe de la méthode de J. Kampé de Fériet est le suivant : si t

désigne un point non dyadique dont le développement s'écrit $t = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{a_q}{2^q}$,

alors posant $t'_q = \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{2^j}$, t est limite à droite de la suite t'_q et limite à gauche

de la suite t''_q définie par $t''_q = t'_q + \frac{1}{2^q}$.

Poser alors la condition $\sum_{q=1}^{\infty} A_q < +\infty$ équivaut à supposer que :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}_q} \left| x\left(t'_{q-1} + \frac{1}{2^q}\right) - x(t'_{q-1}) \right| < +\infty$$

et :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}_q} \left| x\left(t'_{q-1} + \frac{1}{2^{q-1}}\right) - x\left(t'_{q-1} + \frac{1}{2^q}\right) \right| < +\infty$$

⁽¹⁰⁾ L'emploi de sous-suites d'ordre plus élevé avait déjà été utilisé par E. Slutsky ([59], p. 191) qui en avait fait usage pour démontrer un théorème que nous étudierons au chapitre V. Toutefois, l'auteur étudiait les fonctions aléatoires en général et, comme on le verra, c'est dans l'étude des fonctions normales que cette méthode trouve son champ principal d'application.

simultanément. La valeur de $x(t)$ est donc obtenue comme limite uniforme simultanée des suites $x(t_{q-1})$ et $x(t'_{q-1})$.

Notre méthode revient à écrire le développement dyadique de t sous la

forme $t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1_k}{2^{q_k}}$ comme il a été vu en 2.0.2 ; posant :

$$t'_{q_k} = \sum_{j=1}^k \frac{1_j}{2^{q_j}}, \quad t''_{q_k} = t'_{q_k} + \frac{1}{2^{q_k}}$$

nous avons montré qu'étant donné une fonction $x(t)$ continue sur \mathfrak{D} , il existe toujours une suite $\{q_k\}$ telle que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sup_{t'_{q_k}, t_{k+1}} \left| x\left(t'_{q_k} + \frac{1_{k+1}}{2^{q_{k+1}}}\right) - x(t'_{q_k}) \right| < +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sup_{t'_{q_k}, t_{k+1}} \left| x(t''_{q_k}) - x\left(t'_{q_k} + \frac{1_{k+1}}{2^{q_{k+1}}}\right) \right| < +\infty$$

simultanément. $x(t)$ est donc obtenue d'une manière plus générale comme limite uniforme en t des suites $x(t'_{q_k})$ et $x(t''_{q_k})$.

2.4 Majorations du module de continuité.

Nous pouvons déduire de la méthode précédente, des majorations du module de continuité, majorations utilisées au chapitre V.

Les propriétés des fonctions triangulaires nous avaient permis dans une note antérieure [14] de montrer que :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} 2^{q\beta} \sup_{n \in \mathbb{N}_q} |\eta_n| < +\infty \quad \forall \beta < \alpha \implies x(t) \in \text{Lip}(\alpha - \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$$

nous reprenons cette étude par une méthode différente qui nous permettra d'obtenir des résultats plus précis.

On sait que le *module de continuité* $\varpi(h)$ d'une fonction $x(t)$ continue sur $[a, b]$ est défini par :

$$\varpi(h) = \sup |x(t) - x(s)| \quad \text{pour } t \text{ et } s \in [a, b], |t - s| \leq h;$$

c'est une fonction croissante de h , tendant vers zéro lorsque $h \rightarrow 0$. Soit $\varphi(h)$ une fonction non négative, non décroissante de h pour h suffisamment petit, tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 2.4. — *Étant donné une suite $q_1, q_2 \dots q_k \dots$ croissant vers $+\infty$. Si :*

$$(2.4) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} [\varphi(2^{-q_{k+1}})]^{-1} A'_{q_k} < +\infty.$$

Alors : 1° pour h suffisamment petit : $|x(t+h) - x(t)| \leq C\varphi(h)$;

2° plus précisément si $h \rightarrow 0$: $\omega(h) = o(\varphi(h))$.

Supposons que $\frac{1}{2^{q_{k+1}}} \leq h < \frac{1}{2^{q_k}}$ et soit t et s deux points de $[0,1]$ tels que $s < t \leq s+h$. Soit $t'_k = \frac{p}{2^{q_k}}$ et $t''_k = t'_k + \frac{1}{2^{q_k}}$ tels que $t'_k \leq s < t''_k$.

Deux éventualités sont alors possibles :

$$t'_k \leq s < t \leq t''_k; \quad t'_k \leq s < t''_k \leq t < t''_k + \frac{1}{2^{q_k}}.$$

Du développement $s = t'_k + \frac{1_{k+1}}{2^{q_{k+1}}} + \frac{1_{k+2}}{2^{q_{k+2}}} \dots$, nous déduisons l'inégalité

$$|x(s) - x(t'_k)| \leq \sum_{j=k}^{+\infty} A'_{q_j} \text{ d'où résulte dans tous les cas l'inégalité :}$$

$$|x(t) - x(s)| \leq 3 \sum_{j=k}^{+\infty} A'_{q_j} \leq 3 \varphi(h) \sum_{j=k}^{+\infty} \left[\varphi \left(\frac{1}{2^{q_{j+1}}} \right) \right]^{-1} A'_{q_j}$$

en remarquant que $\varphi(h) \geq \varphi \left(\frac{1}{2^{q_{j+1}}} \right) \quad \forall j \geq k$.

Si $h \rightarrow 0$, $q_k \rightarrow \infty$ et la convergence de la série (2.4) montre que :

$$\omega(h) = o(\varphi(h)).$$

Si h reste positif, nous pouvons écrire l'inégalité :

$$|x(t) - x(s)| \leq C\varphi(h) \text{ où } C = 3 \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\varphi \left(\frac{1}{2^{q_{k+1}}} \right) \right]^{-1} A'_{q_k} \text{ pour } |t-s| \leq h.$$

CHAPITRE III

**CRITÈRES DE CONVERGENCE FORTE PRESQUE SURE
DES SÉRIES D'ÉLÉMENTS ALÉATOIRES
A VALEURS DANS UN ESPACE DE BANACH**

3.0 Le présent chapitre est essentiel pour l'objet du présent travail.

Après avoir rappelé succinctement au paragraphe 3.1 les quelques notions de théorie des probabilités qui nous seront utiles, nous étudions au paragraphe 3.2 le problème de la convergence presque sûre des séries d'éléments aléatoires indépendants à valeurs dans un espace de Banach \mathfrak{X} et prouvons qu'il est possible de généraliser un critère bien connu de A. N. Kolmogoroff ; ce résultat, intéressant en lui-même, nous permettra surtout au chapitre VI d'étudier la convergence uniforme presque sûre des séries de fonctions aléatoires indépendantes, presque sûrement continues, but du présent travail. Les paragraphes 3.3, 3.4 et 3.5 servent de même à préparer l'étude de la continuité presque sûre des fonctions aléatoires, ce qui était le second objectif de ce travail ; à ce titre, le paragraphe 3.3 formule des conditions suffisantes de convergence forte presque sûre du développement en série de Schauder dans une base monotone ; le paragraphe 3.5 établit une inégalité qui jouera un rôle fondamental dans l'étude de la continuité presque sûre des fonctions aléatoires normales ; enfin le paragraphe 3.4 étudie des conditions nécessaires et des conditions suffisantes de convergence presque sûre d'une suite de variables aléatoires normales vers zéro, résultats qui seront également utilisés au chapitre V.

3.1 Notions succinctes sur les variables aléatoires et éléments aléatoires.

3.1.0 Nous rappelons d'abord les définitions suivantes (voir par exemple M. Loève [51] (p. 149-267), P. Halmos [30] (p. 184-203)).

Un *espace de probabilité* $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ est par définition le triplet de l'*ensemble* Ω , d'une σ -*algèbre* \mathfrak{S} de parties dites mesurables (ou *événements*) de Ω et d'une *mesure probabiliste* P définie sur \mathfrak{S} .

Une *variable aléatoire* $x(\omega)$ est alors une fonction définie sur Ω et à valeurs dans \mathbb{R} , telle que l'image inverse de tout borélien de \mathbb{R} appartienne à \mathfrak{S} ,

autrement dit une fonction mesurable. Elle induit une mesure probabiliste ν sur R en posant :

$$\nu(A) = P(x^{-1}(A)) \quad \text{quel que soit } A \text{ borélien.}$$

L'espérance mathématique de $x(\omega)$ n'est autre que l'intégrale de Lebesgue de $x(\omega)$ sur Ω par rapport à la mesure P .

$$E[x(\omega)] = \int_{\Omega} x(\omega) dP.$$

Elle peut encore s'exprimer par l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes.

$$\int_{\mathbb{R}} x dF(x) \quad \text{où } F(x) = \text{Prob } [X \leq x] \text{ fonction de répartition.}$$

Nous noterons en particulier l'inégalité suivante qui interviendra fréquemment.

$$(3.1.0.A) \quad E^{\beta} |x(\omega) + y(\omega)|^r \leq E^{\beta} |x(\omega)|^r + E^{\beta} |y(\omega)|^r$$

où $\beta = \min \left(1, \frac{1}{r} \right)$ (M. Loève [51], pp. 155-156).

On désignera alors par $L^r(\Omega)$ l'ensemble des variables aléatoires $x(\omega)$ telles que

$$\int_{\Omega} |x(\omega)|^r dP < +\infty.$$

3.1.1 Étant donné une suite finie de variables aléatoires $x_1(\omega), x_2(\omega) \dots x_n(\omega)$, désignons par $x(\omega)$ le vecteur aléatoire de R^n de composantes $x_1(\omega) \dots x_n(\omega)$. La donnée de la loi de probabilité permet de définir une mesure probabiliste sur R^n notée ν en posant $\nu(C) = \text{Prob } [\omega \in x^{-1}(C)]$ $\forall C$ sous-ensemble borélien de R^n . On définira de même les mesures marginales $\nu_1, \nu_2 \dots \nu_i \dots \nu_n$ sur R en posant $\nu_i(A) = \text{Prob } [\omega \in x_i^{-1}(A)]$ $\forall A$ sous-ensemble borélien de R .

Les variables aléatoires $x_1(\omega) \dots x_n(\omega)$ sont dites indépendantes si : $\nu = \nu_1 \times \nu_2 \dots \times \nu_n$ mesure produit, autrement dit si pour tout rectangle borélien de R^n , $C = A_1 \times A_2 \dots \times A_n$: $\nu(C) = \nu_1(A_1) \times \nu_2(A_2) \dots \times \nu_n(A_n)$.

Cette notion d'indépendance s'étend aux suites infinies de variables aléatoires comme suit : étant donné une suite infinie dénombrable $x_1(\omega) \dots x_n(\omega) \dots$ de variables aléatoires, si $I = (i_1, i_2 \dots i_n)$ sous-ensemble fini d'indices, les variables aléatoires $x_{i_1}(\omega) \dots x_{i_n}(\omega)$ sont indépendantes, alors les variables aléatoires $x_1(\omega) \dots x_n(\omega) \dots$ sont dites indépendantes.

A. N. Kolmogoroff [43] a alors prouvé le théorème suivant que nous nous proposons de généraliser au paragraphe suivant :

THÉORÈME 3.1.1.A. — Si $\{x_n(\omega)\}$ désigne une suite infinie de variables aléatoires indépendantes, d'espérances mathématiques nulles, de variances σ_n^2 ,

alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_n^2 < +\infty \implies \sum_{n=1}^{+\infty} x_n(\omega)$ converge presque sûrement.

Bien que le résultat qui suit ne fasse pas mention de l'indépendance, nous le citons également car il fournira un critère très simple de convergence des séries à éléments aléatoires.

THÉORÈME 3.1.1.B (voir par exemple P. Halmos [30], p. 114, M. Loève [51], p. 173, J. Kampé de Fériet [40], p. 132). — Si $\{x_n(\omega)\}$ désigne une suite de variables aléatoires intégrables, telles que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} E |x_n(\omega)| < +\infty \quad \text{alors :} \quad \text{Prob} \left[\omega ; \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n(\omega)| < +\infty \right] = 1.$$

3.1.2 L'extension de la notion de variable aléatoire aux espaces abstraits a été réalisée par M. Fréchet (voir notamment [25], [26], [27], [28]), S. Doss ([20] et E. Mourier [54]).

Selon M. Fréchet, si \mathfrak{X} désigne un espace abstrait sur lequel est définie une σ -algèbre de parties \mathcal{S} et \mathbb{P} une probabilité définie sur l'ensemble $(\mathfrak{X}, \mathcal{S}, \mathbb{P})$ définit un espace de probabilité, l'ensemble des déterminations de x sur cet espace de probabilité définissant l'élément aléatoire.

R. Fortet et E. Mourier ont étudié les propriétés des *éléments aléatoires à valeurs dans un espace de Banach* \mathfrak{X} ; nous rappelons ici les définitions et propriétés que nous serons appelés à utiliser.

Selon E. Mourier, si x est un élément aléatoire à valeurs dans \mathfrak{X} , la mesure \mathbb{P} est une *L-mesure* si $x^*(x)$ est une variable aléatoire quelle que soit la fonctionnelle linéaire x^* ; si tel est le cas et si \mathfrak{X} est séparable, E. Mourier a en outre montré [54] (p. 168) que la *norme* $\|x\|$ est également mesurable. L'espérance mathématique de x , si elle existe, est alors définie par l'élément y de \mathfrak{X} , nécessairement unique tel que $x^*(y) = E[x^*(x)] \quad \forall x^* \in \mathfrak{X}^*$.

L'élément aléatoire x sera dit laplacien (M. Fréchet [28]) si $x^*(x)$ est une variable aléatoire normale $\forall x^* \in \mathfrak{X}^*$.

La notion d'*indépendance de deux éléments aléatoires* a été définie par E. Mourier ([54] p. 174) comme suit :

Si x_1 et x_2 désignent deux éléments aléatoires à valeurs dans les espaces de Banach \mathfrak{X}_1 et \mathfrak{X}_2 , de σ -algèbres \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 , si $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3$ désignent les mesures

définies sur $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ respectivement, x_1 et x_2 sont dits indépendants si :

$P_3[x_1 \in A_1; x_2 \in A_2] = P_1[x_1 \in A_1] \times P_2[x_2 \in A_2] \quad \forall A_1 \in \mathcal{F}_1 \text{ et } A_2 \in \mathcal{F}_2,$
 ou encore équivalamment (E. Mourier [54], p. 227) si $\forall x_1^* \in \mathcal{X}_1^*$ et $x_2^* \in \mathcal{X}_2^*,$
 $x_1^*(x_1)$ et $x_2^*(x_2)$ sont des variables aléatoires indépendantes.

3.1.3 J. Kampé de Fériet (voir [36], [37], [38], [39], [40]) a appliqué les notions qui précèdent à la construction de mesures probabilistes sur les espaces de Banach à base dénombrable : il a montré qu'un tel espace était toujours isomorphe isométriquement à un sous-espace Ω de l'espace \mathbb{R}^∞ (respectivement \mathbb{C}^∞) des suites dénombrables de nombres réels (resp. complexes) $[\eta_1 \dots \eta_n \dots]$ et il a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il soit possible de construire une telle mesure.

Si cette construction est possible, il a montré que la mesure ainsi définie est nécessairement une L-mesure; de plus, les espaces envisagés étant séparables, la norme $\|x\|$ est toujours mesurable.

Il a ensuite appliqué ces résultats à la construction de mesures probabilistes sur $C_0[0, 1]$ et $C[0, 1]$; nous retrouverons ses méthodes au paragraphe 3.3 relatif au cas plus spécial des espaces à base monotone; nous essaierons ensuite de généraliser ses résultats relatifs à $C_0[0, 1]$ au chapitre V.

3.2 Extension à tout espace de Banach d'un critère de convergence forte presque sûre.

3.2.0 Nous nous proposons de généraliser aux éléments aléatoires indépendants à valeurs dans un espace de Banach \mathcal{X} , le critère de convergence presque sûre déduit du théorème 3.1.1.A. Nous remarquerons d'abord que ce critère peut s'étendre sans difficulté à l'espace \mathbb{R}^k sous plusieurs formes d'ailleurs équivalentes.

Critère A : Si $x_n(\omega) = [\xi_{n1}(\omega) \dots \xi_{nk}(\omega)]$ désigne une suite d'éléments aléatoires indépendants de \mathbb{R}^k tels que : $\xi_{n,j}(\omega) \in L^2(\Omega), E[\xi_{n,j}(\omega)] = 0,$

alors, la condition : $\sum_{n=1}^{\infty} E[\xi_{n,j}^2(\omega)] < \infty \quad j = 1, 2 \dots k$

implique la convergence presque sûre des séries : $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_{n,j}(\omega), \quad j = 1, 2 \dots k.$

Posant alors $\|x_n(\omega)\|_{(1)}^2 = \sum_{j=1}^k |\xi_{n,j}(\omega)|^2$, on voit facilement que ce critère équivaut à :

Critère B : $\sum_1^{\infty} E \|x_n(\omega)\|_{(1)}^2 < +\infty \Rightarrow \sum_1^{\infty} x_n(\omega)$ converge presque sûrement.

Or, si $x(\omega)$ et $y(\omega)$ sont deux éléments aléatoires indépendants de \mathbb{R}^k d'espérances mathématiques nulles, on vérifie facilement que

$$E \|x(\omega) + y(\omega)\|_{(1)}^2 = E \|x(\omega)\|_{(1)}^2 + E \|y(\omega)\|_{(1)}^2$$

ce qui permet d'énoncer le critère sous la forme suivante :

Critère B' :

$$\lim_{n \text{ et } h \rightarrow +\infty} E \|S_{n+h}(\omega) - S_n(\omega)\|_{(1)}^2 = 0 \Rightarrow \lim_{n \text{ et } h \rightarrow +\infty} \|S_{n+h}(\omega) - S_n(\omega)\|_{(1)} = 0$$

presque sûrement ⁽¹⁾.

Remarquant alors, que, sur \mathbb{R}^k , toutes les normes sont équivalentes, on peut en déduire la présentation la plus générale de ce critère :

Critère C : Si $\{x_n(\omega)\}$ désigne une suite infinie d'éléments aléatoires indépendants à valeurs dans \mathbb{R}^k , d'espérances mathématiques nulles, alors :

$$\lim_{n \text{ et } h \rightarrow +\infty} E \|S_{n+h}(\omega) - S_n(\omega)\|^2 = 0 \text{ implique : } \lim_{n \text{ et } h \rightarrow +\infty} \|S_{n+h}(\omega) - S_n(\omega)\| = 0$$

presque sûrement.

Cette dernière proposition, convenablement généralisée, nous fournira le critère de convergence forte demandé.

3.2.1 L'objet essentiel de ce qui suit est de trouver un critère de convergence forte presque sûre pour les séries d'éléments aléatoires indépendants à valeurs dans l'espace de Banach $C[a, b]$... Les critères [A] et [B] précédents sembleraient à première vue devoir se transposer sous la forme suivante :

Étant donné une suite $\{x_n(t, \omega)\}$ d'éléments aléatoires indépendants, à valeurs dans l'espace de Banach $C[a, b]$, d'espérances mathématiques nulles, la condition

⁽¹⁾ Étant donné une suite $\{x_n(\omega)\}$ d'éléments aléatoires, nous désignerons désormais par $S_n(\omega)$ la somme $x_1(\omega) + x_2(\omega) \dots + x_n(\omega)$.

$$(A_1) \sum_{n=1}^{+\infty} E[x_n^2(t, \omega)] < +\infty \quad \text{uniformément en } t$$

ou

$$(B_1) \sum_{n=1}^{+\infty} E[\|x_n(t, \omega)\|^2] < +\infty$$

implique la convergence uniforme presque sûre de la série $\sum_1^\infty x_n(t, \omega)$.

Comme on le verra au chapitre VI, le critère (A₁) est insuffisant, il n'implique le résultat qu'à condition d'y ajouter certaines hypothèses.

Quant au critère (B₁) nous ne savons pas s'il s'applique à C[a, b]; toutefois comme on va le voir, il ne s'applique pas à un espace de Banach quelconque.

3.2.2 Le premier problème posé est le suivant : *étant donné une suite {x_n(ω)} d'éléments aléatoires indépendants définis sur X, d'espérances mathématiques nulles, la condition*

$$\sum_{n=1}^{\infty} E \|x_n(\omega)\|^2 < +\infty$$

implique-t-elle la convergence forte presque sûre de la série

$$\sum_1^{+\infty} x_n(\omega) ?$$

La question ainsi posée a été résolue par l'affirmative pour tout espace de Hilbert. J. Kampé de Fériet et G. Birkhoff ([4], p. 335) ont en effet établi le théorème suivant :

« Si $\sum_1^{+\infty} x_n(\omega)$ désigne une série infinie d'éléments aléatoires indépendants, d'espérances mathématiques nulles, prenant leurs valeurs dans un espace de Hilbert \mathcal{H} , alors :

$$\sum_1^{+\infty} E \|x_n(\omega)\|^2 < +\infty \implies \sum_1^{+\infty} x_n(\omega)$$

converge fortement presque sûrement vers un élément aléatoire x(ω), d'espérance mathématique nulle, de variance

$$E \|x(\omega)\|^2 = \sum_1^{+\infty} E \|x_n(\omega)\|^2. \gg$$

Nous pouvons étendre ce résultat à une catégorie plus large d'espaces de Banach de la manière suivante : admettons provisoirement le résultat suivant qui sera démontré par la suite, à savoir que la condition

$$\lim_{n \text{ et } h \rightarrow +\infty} E \|S_{n+h}(\omega) - S_n(\omega)\|^2 = 0,$$

implique la convergence forte presque sûre de toute série d'éléments aléatoires indépendants, à valeurs dans un espace de Banach \mathfrak{X} , d'espérances mathématiques nulles.

Supposons alors que l'espace de Banach \mathfrak{X} soit un espace de type \mathfrak{G} au sens de R. Fortet et E. Mourier ([23], [24], p. 65-66 et R. Fortet [22], p. 189), c'est-à-dire tel qu'il existe un nombre $A > 0$ et une application g de \mathfrak{X} dans \mathfrak{X}^* , dite canonique, faisant correspondre à tout $X \in \mathfrak{X}$ un élément $x_x^* = g(X) \in \mathfrak{X}^*$ tel que :

$$\|x_x^*(\mathfrak{X})\|_* = \|X\|, \quad x_x^*(X) = \|X\|^2 \quad (2).$$

$$\|x_x^* - x_y^*\|_* \leq A \|X - Y\| \quad \forall X \text{ et } Y \in \mathfrak{X}.$$

Tout espace de Hilbert est évidemment de type \mathfrak{G} , mais cette catégorie inclut également les espaces L^p (où $p \geq 2$), la constante A la meilleure étant telle que $A = (p-1)2^{p-2}$.

R. Fortet et E. Mourier ont prouvé que si $x_1(\omega) \dots x_n(\omega)$ sont des éléments aléatoires indépendants à valeurs dans un espace de Banach de type \mathfrak{G} , d'espérances mathématiques nulles, tels que :

$$E \|x_j(\omega)\|^2 < +\infty \quad \forall j, \quad \text{alors :} \quad E \left\| \sum_{j=1}^n x_j(\omega) \right\|^2 \leq A \sum_{j=1}^n E \|x_j(\omega)\|^2.$$

On peut donc en déduire le théorème suivant :

THÉORÈME 3.2.2. — *Si $\{x_n(\omega)\}$ désigne une suite d'éléments aléatoires indépendants, à valeurs dans un espace de Banach \mathfrak{X} de type \mathfrak{G} , d'espérances mathématiques nulles et tels que :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} E \|x_n(\omega)\|^2 < +\infty \quad (3)$$

alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(\omega)$ converge fortement presque sûrement.

(2) Ces deux premières conditions sont vérifiées pour tout espace de Banach comme on le voit facilement en utilisant le théorème de Hahn-Banach déjà cité; seule la troisième condition particularise les espaces \mathfrak{G} .

(3) On supposera dans tout ce qui suit que les mesures correspondant aux éléments aléatoires sont des L-mesures et que $\| \sum_{i \in I} x_i(\omega) \|$ est mesurable pour tout sous-ensemble fini I . Cette condition sera toujours sous-entendue.

Nous prouvons maintenant à l'aide d'un exemple déjà donné [12] que ce critère ne peut être étendu à un espace de Banach quelconque.

Considérons l'espace l^p (cf. paragraphe 1.2) où $1 \leq p < 2$; soit $\{\xi_n(\omega)\}$ une suite de variables aléatoires normales, indépendantes, d'espérances mathématiques nulles, de variances σ_n^2 telles que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_n^p = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_n^2 < +\infty.$$

Les propriétés des variables aléatoires normales permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} E |\xi_n(\omega)|^r = K_r \sigma_n^r &\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} E |\xi_n(\omega)|^{2p} < +\infty \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} E \left| |\xi_n(\omega)|^p - E |\xi_n(\omega)|^p \right|^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Appliquant le critère 3.1.1.A (théorème de Kolmogoroff), on en déduit que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} [|\xi_n(\omega)|^p - E |\xi_n(\omega)|^p]$ converge presque sûrement ; or :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} E |\xi_n(\omega)|^p = +\infty, \quad \text{donc} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_n(\omega)|^p = +\infty \text{ presque sûrement.}$$

Ceci étant prouvé, considérons la suite d'éléments aléatoires indépendants, à valeurs dans l^p , d'espérances mathématiques nulles, définie par $x_n(\omega) = \xi_n(\omega)e_n$ où $\{e_n\}$ désigne la base de Schauder de l^p .

On a donc : $E \|x_n(\omega)\|^2 = \sigma_n^2$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} E \|x_n(\omega)\|^2 < +\infty$; or, la

somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(\omega)$ définit le vecteur aléatoire de \mathbb{R}^∞ :

$x(\omega) = [\xi_1(\omega) \dots \xi_n(\omega) \dots]$ qui presque sûrement n'appartient pas à l^p .

La convergence faible (donc *a fortiori* la convergence forte) n'est pas assurée ce qui prouve que le théorème 3.2.2 ne peut être généralisé à tout espace de Banach.

(4) K_r est une constante numérique indépendante de n , en fait :

$$K_r = 2^{\frac{r+1}{2}} \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right) (2\pi)^{-\frac{1}{2}}.$$

3.2.3 Ne pouvant étendre le critère de A. N. Kolmogoroff sous la forme 3.2.B à tout espace de Banach \mathfrak{X} , nous nous proposons de reprendre la forme 3.2.C de ce critère en la généralisant comme suit :

Soit $\{x_n(\omega)\}$ une suite infinie d'éléments aléatoires indépendants à valeurs dans \mathfrak{X} , d'espérances mathématiques nulles, tels que : $\|x_n(\omega)\| \in L^r(\Omega)$, $r \geq 1 \mid \forall n$. Alors, la condition :

(3.2.3.A) $\lim_{n \text{ et } h \rightarrow +\infty} E \|S_{n+h}(\omega) - S_n(\omega)\|^r = 0$ pour un $r \geq 1$ implique la

convergence forte presque sûre de la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n(\omega)$.

L'idée de ce critère nous a été fournie par une généralisation de l'inégalité de Kolmogoroff signalée par M. Loève [51], p. 263. L'auteur y indique que si deux variables aléatoires $x(\omega)$ et $y(\omega)$ sont indépendantes et d'espérances mathématiques nulles et si A désigne un événement défini uniquement en termes de la variable aléatoire $x(\omega)$, alors, on a l'inégalité suivante :

$$E[|x(\omega)|^r \mid A] \leq E[|x(\omega) + y(\omega)|^r \mid A] \quad r \geq 1 ;$$

reprenant alors la méthode de démonstration de l'inégalité de Kolmogoroff, on prouve facilement que celle-ci se généralise sous la forme :

$$\text{Prob} [\omega ; \sup_{1 \leq k \leq n} |S_k(\omega)| \geq \varepsilon] \leq \frac{1}{\varepsilon^r} E |S_n(\omega)|^r \quad r \geq 1$$

d'où résulte le critère de convergence presque sûre des séries de variables aléatoires indépendantes, d'espérances mathématiques nulles :

$$\lim_{n \text{ et } h \rightarrow +\infty} E |S_{n+h}(\omega) - S_n(\omega)|^r = 0 \implies \lim_{n \text{ et } h \rightarrow +\infty} |S_{n+h}(\omega) - S_n(\omega)| = 0$$

presque sûrement.

Étendant cette méthode, nous avons d'abord démontré que le critère (3.2.3.A) s'appliquait à l'espace de Banach (m) et à ses sous-espaces fermés [11]; nous avons ensuite montré que le résultat s'appliquait aux espaces $C_0[0, 1]$ et $C[0, 1]$ en utilisant l'isomorphisme isométrique existant entre ces espaces et deux sous-espaces fermés de (m) [12]; modifiant ensuite la démonstration, il nous a enfin été possible de donner une démonstration générale [17] que nous reproduisons maintenant en y ajoutant quelques remarques complémentaires.

3.2.4 Soit $x(\omega)$ et $y(\omega)$ deux éléments aléatoires indépendants à valeurs dans l'espace de Banach \mathfrak{X} , d'espérances mathématiques nulles, tels que : $\|x(\omega)\|$ et $\|y(\omega)\| \in L^r(\Omega)$.

Désignons par ν_1 et ν_2 les L-mesures induites par $x(\omega)$ et $y(\omega)$ sur \mathfrak{X} ; pour ω fixé $\in \Omega$ la valeur prise par l'élément aléatoire $x(\omega)$ (respectivement $y(\omega)$) est un élément de \mathfrak{X} que nous noterons X (respectivement Y). Si ω varie, X (respectivement Y) est un élément aléatoire de \mathfrak{X} caractérisé par le triplet $(\mathfrak{X}, S_x, \nu_1)$ (respectivement $(\mathfrak{X}, S_y, \nu_2)$).

Nous prouvons le lemme fondamental suivant :

LEMME 3.2.4. A. — $E[\|x(\omega)\|^r | A] \leq E[\|x(\omega) + y(\omega)\|^r | A]$, $r \geq 1$ ou équivalentement : $E[\|X\|^r | A] \leq E[\|X + Y\|^r | A]$, A désignant un événement défini uniquement à partir de l'élément aléatoire $x(\omega)$.

1° D'après le théorème de Hahn Banach rappelé en 1.1, à tout X fixé correspond une fonctionnelle linéaire x_x^* de norme égale à un, telle que : $x_x^*(X) = \|X\|$; on a de plus pour tout Y : $|x_x^*(X + Y)| \leq \|X + Y\|$.

L'élément Y étant supposé aléatoire, nous intégrons alors $x_x^*(X + Y)$ par rapport à la mesure ν_2 sur \mathfrak{X} ; X et Y étant indépendants, X et x_x^* sont fixes dans cette intégration, d'où :

$$E[x_x^*(X) | X] = \int_{\mathfrak{X}} x_x^*(X) d\nu_2 = \|X\| ; \quad E[x_x^*(Y) | X] = \int_{\mathfrak{X}} x_x^*(Y) d\nu_2 = 0$$

car, x_x^* joue le rôle d'une fonctionnelle fixe et Y est d'espérance mathématique nulle.

(Nous avons introduit en fait les symboles d'espérance conditionnelle car c'est bien là ce que nous donne cette intégration.)

D'où :
$$E[x_x^*(X + Y) | X] = \|X\|$$

et en définitive :
$$\|X\| = |E[x_x^*(X + Y) | X]| \leq E[|x_x^*(X + Y)| | X]$$

d'où résulte, d'après l'inégalité précédemment écrite, que :

$$\|X\| \leq E[\|X + Y\| | X].$$

Utilisant alors l'inégalité de Hölder, il vient :

$$\|X\|^r \leq E[\|X + Y\|^r | X] \quad r \geq 1.$$

soit une inégalité entre deux fonctions de X.

2° Soit alors A un sous-ensemble ν_1 -mesurable de \mathfrak{X} c'est-à-dire un élément de S_x , événement défini uniquement à partir de X; intégrant l'inégalité précédente par rapport à la mesure ν_1 sur A, il vient l'inégalité demandée.

Nous pouvons maintenant étendre l'inégalité de Kolmogoroff.

THÉORÈME 3.2.4.B. — Soit $\{x_j(\omega)\}$ $j = 1, 2 \dots n$, une suite d'éléments aléatoires indépendants, à valeurs dans \mathfrak{X} , d'espérances mathématiques nulles, tels que : $\|x_j(\omega)\| \in L^r(\Omega)$, $r \geq 1$ pour $j = 1, 2 \dots n$.

Alors, on a l'inégalité de Kolmogoroff généralisée :

$$\text{Prob} [\omega ; \sup_{1 \leq k \leq n} \|S_k(\omega)\| \geq \varepsilon] \leq \frac{1}{\varepsilon^r} E \|S_n(\omega)\|^r \quad \left(\text{où } S_n(\omega) = \sum_{j=1}^n x_j(\omega) \right).$$

Définissons les sous-ensembles mesurables suivants :

$$A = [\omega ; \sup_{1 \leq k \leq n} \|S_k(\omega)\| < \varepsilon] ; \quad B = A' = \Omega - A ;$$

$$B_k = [\omega ; \sup_{1 \leq j \leq k-1} \|S_j(\omega)\| < \varepsilon ; \|S_k(\omega)\| \geq \varepsilon].$$

Les sous-ensembles B_k réalisent une partition de B :

$$\bigcup_{k=1}^n B_k = B \quad B_k \cap B_l = \emptyset \quad \text{pour } k \neq l,$$

B_k étant défini uniquement en fonction de $S_k(\omega)$, le lemme 3.2.4.A s'applique et donne $E[\|S_k(\omega)\|^r | B_k] \leq E[\|S_n(\omega)\|^r | B_k]$.

Utilisant l'inégalité de Markoff (Loève [51], p. 158), il vient :

$$P[B_k] \leq \frac{1}{\varepsilon^r} E[\|S_k(\omega)\|^r | B_k] \leq \frac{1}{\varepsilon^r} E[\|S_n(\omega)\|^r | B_k].$$

Sommant ces inégalités de $k = 1$ à n , il vient donc :

$$P[B] = \sum_{k=1}^n P[B_k] \leq \sum_{k=1}^n \frac{E[\|S_n(\omega)\|^r | B_k]}{\varepsilon^r} = \frac{E[\|S_n(\omega)\|^r | B]}{\varepsilon^r} \leq \frac{E\|S_n(\omega)\|^r}{\varepsilon^r}.$$

Il nous est maintenant possible d'étendre le critère de convergence forte presque sûre sous la forme suivante.

PROPOSITION 3.2.4.C. — Soit $\{x_j(\omega)\}$ une suite infinie d'éléments aléatoires indépendants à valeurs dans \mathfrak{X} , d'espérances mathématiques nulles. Alors la condition

$$\lim_{n \text{ et } h \rightarrow \infty} E \|S_{n+h}(\omega) - S_n(\omega)\|^r = 0 \quad (6) \quad \text{pour un } r \geq 1$$

implique la convergence forte presque sûre de la série $\sum_{j=1}^{+\infty} x_j(\omega)$.

(6) En fait ce critère peut être considéré comme un cas particulier d'un critère plus général dû à J. Geffroy (*C. R. Acad. S.*, t. 249, 1959, p. 1180-1182) de la même manière que le critère de Kolmogoroff est un cas particulier du théorème de Paul Lévy sur la convergence presque sûre des séries de variables aléatoires indépendantes.

La condition nécessaire et suffisante de convergence forte presque sûre de la série s'écrit :

$$\text{Prob} [\omega ; \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq 1} \| S_{n+k}(\omega) - S_n(\omega) \| \geq \varepsilon] = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 ;$$

or, cette quantité est majorée par :

$$\inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq 1} \text{Prob} [\omega ; \sup_{1 \leq j \leq k} \| S_{n+j}(\omega) - S_n(\omega) \| \geq \varepsilon].$$

Utilisant l'inégalité de Kolmogoroff généralisée, il vient donc :

$$\text{Prob} [\omega ; \sup_{1 \leq j \leq k} \| S_{n+j}(\omega) - S_n(\omega) \| \geq \varepsilon] \leq \frac{E \| S_{n+k}(\omega) - S_n(\omega) \|^r}{\varepsilon^r}$$

quantité tendant vers zéro par hypothèse quand n et k tendent vers l'infini ce qui prouve le théorème.

COROLLAIRE 3.2.4.D. — *Si la condition précédente est réalisée, alors :*

$$x(\omega) = \sum_1^\infty x_n(\omega) \in L^p(\Omega) \quad 1 \leq p \leq r$$

et
$$E \| x(\omega) \|^p = \lim_{n \rightarrow +\infty} E \| S_n(\omega) \|^p.$$

Par hypothèse $\| x(\omega) - S_n(\omega) \| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ presque sûrement; il en est évidemment de même de la quantité $\| \| x(\omega) \| - \| S_n(\omega) \| \|$ qui converge donc en probabilité; la condition 3.2.3.A implique que :

$$\lim_{n \text{ et } k \rightarrow +\infty} E | \| S_{n+k}(\omega) \| - \| S_n(\omega) \| |^r = 0$$

donc il existe $\alpha(\omega)$ tel que : $\alpha(\omega) \in L^r(\Omega)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E | \alpha(\omega) - \| S_n(\omega) \| |^r = 0, \quad E | \alpha(\omega) |^r = \lim_{n \rightarrow +\infty} E \| S_n(\omega) \|^r.$$

La convergence en moyenne d'ordre r impliquant la convergence en probabilité, il en résulte que $\| S_n(\omega) \|$ tend en probabilité à la fois vers $\alpha(\omega)$ et $\| x(\omega) \|$ ce qui entraîne l'égalité presque sûre de ces deux quantités et prouve le théorème si $p = r$; le résultat est vrai a fortiori si $p \leq r$.

Comme on le verra ci-dessous, on a de plus :

$$E \| x(\omega) \|^r = \sup_{n \geq 1} E \| S_n(\omega) \|^r.$$

3.2.5 Nous pouvons maintenant déduire quelques conséquences plus profondes du lemme 3.2.4.A.

COROLLAIRE 3.2.5.A. — 1° Si $x(\omega)$ et $y(\omega)$ sont deux éléments aléatoires indépendants à valeurs dans \mathfrak{X} , d'espérances mathématiques nulles

$$E \|x(\omega)\|^r \leq E \|x(\omega) + y(\omega)\|^r \quad r \geq 1.$$

2° Si $\{x_n(\omega)\}$ désigne une suite d'éléments aléatoires indépendants à valeurs dans \mathfrak{X} , d'espérances mathématiques nulles, posant $S_n(\omega) = \sum_{j=1}^n x_j(\omega)$, on en déduit que $E \|S_m(\omega) - S_n(\omega)\|^r$ croît avec m et décroît lorsque n croît ($r \geq 1$; $m > n$).

Pour démontrer le premier point, il suffit de poser : $A = \Omega$ dans le lemme 3.2.4.A, le deuxième point est alors immédiat.

Il nous est maintenant possible de transposer ici en bloc les méthodes employées dans la théorie des bases monotones. Remarquons toutefois d'abord qu'il résulte du corollaire 3.2.4.D et du résultat précédent le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.2.5.B. — Si $\{x_n(\omega)\}$ désigne une suite d'éléments aléatoires indépendants, d'espérances mathématiques nulles, tels que :

$$\lim_{n \text{ et } k \rightarrow \infty} E \|S_{n+k}(\omega) - S_n(\omega)\|^r = 0 \quad r \geq 1,$$

alors : $S_n(\omega) \rightarrow x(\omega)$ presque sûrement et $E \|S_n(\omega)\|^r$ tend en croissant vers $E \|x(\omega)\|^r$.

Soit alors $n_1 n_2 \dots n_k \dots$ une suite croissante quelconque d'entiers positifs, tendant vers l'infini lorsque k tend vers l'infini.

Utilisant la méthode de 1.4.1 et 1.4.2 nous déduisons les résultats suivants :

THÉORÈME 3.2.5.C. — Pour que le critère de convergence forte presque sûre :

$$\lim_{n \text{ et } k \rightarrow +\infty} E \|S_{n+k}(\omega) - S_n(\omega)\|^r = 0 \quad \text{soit satisfait, il faut et il suffit :}$$

1° qu'il existe une sous-suite $\{n_k\}$ croissant vers $+\infty$, telle que :

$$(I) \quad \lim_{k \text{ et } h \rightarrow \infty} E \|S_{n_k+h}(\omega) - S_{n_k}(\omega)\|^r = 0;$$

2° qu'il existe une sous-suite $\{n_k\}$ croissant vers $+\infty$ telle que :

$$(II) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} E^{1/r} \|S_{n_{k+1}}(\omega) - S_{n_k}(\omega)\|^r < +\infty \quad (r \geq 1).$$

La preuve de ce deuxième point résulte de l'inégalité déjà signalée :

$$E^{1/r} | x(\omega) + y(\omega) |^r \leq E^{1/r} | x(\omega) |^r + E^{1/r} | y(\omega) |^r.$$

Remarques. — 1° Si l'on se fixe la suite (n_k) , on en déduit que la condition (II) ci-dessus implique la convergence forte presque sûre de la série; dans le cas général, si on n'introduit pas l'hypothèse de l'indépendance, on pourra seulement affirmer la convergence presque sûre de la série :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \| S_{n_{k+1}}(\omega) - S_{n_k}(\omega) \|,$$

c'est-à-dire la convergence forte presque sûre d'une sous-suite de sommes partielles (Théorème 3.1.1.B).

L'hypothèse d'indépendance des éléments aléatoires nous permet de conclure à un résultat beaucoup plus fort, à savoir la convergence forte presque sûre de toutes les sommes partielles.

2° Les résultats du théorème précédent s'appliquent en particulier à l'espace de Banach $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ et nous fournissent donc le nouveau critère de convergence presque sûre suivant.

Étant donné une suite infinie $\{ x_n(\omega) \}$ de variables aléatoires indépendantes d'espérances mathématiques nulles, s'il existe une sous-suite $\{ n_k \}$ tendant en croissant vers $+\infty$, telle que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} E^{1/r} | S_{n_{k+1}}(\omega) - S_{n_k}(\omega) |^r < +\infty, \quad |r \geq 1$$

alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n(\omega)$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire $x(\omega)$, d'espérance mathématique nulle, appartenant à $L^r(\Omega)$ et telle que :

$$E | x(\omega) |^r = \lim_{n \rightarrow \infty} E | S_n(\omega) |^r.$$

3.3 Critères de convergence forte presque sûre dans un espace de Banach à base monotone.

Soit \mathfrak{X} un espace de Banach à base monotone (e_n) et supposons-nous donnée une suite de variables aléatoires $\{ \eta_n(\omega) \}$ pourvues de moments jusqu'à l'ordre r .

Nous nous proposons de donner des conditions suffisantes de convergence forte presque sûre de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \eta_n(\omega) e_n$ vers un élément aléatoire de \mathfrak{X} .

Équivalamment (J. Kampé de Fériet [40], p. 128-133), ceci revient à définir sur l'espace des suites $(\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_n \ \dots)$ une mesure probabiliste, telle que la mesure de \mathfrak{X} soit égale à 1; on sait que \mathfrak{X} peut être mis en correspondance biunivoque avec un sous-espace de \mathbb{R}^∞ (resp. \mathbb{C}^∞).

Les critères que nous allons obtenir sont très voisins de ceux obtenus au paragraphe précédent; ils pourront être appliqués à l'étude de la continuité presque sûre des fonctions aléatoires au chapitre V.

Nous prouvons d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME 3.3.A. — *La convergence forte presque sûre de la série $\sum_1^\infty \eta_n(\omega) e_n$ équivaut à la convergence forte en probabilité soit :*

$$(3.3.1) \quad \lim_{n \text{ et } k \rightarrow +\infty} \text{Prob} [\omega ; \|x_{n+k}(\omega) - x_n(\omega)\| \geq \varepsilon] = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

($x_n(\omega)$ désignant la n -ème somme partielle de la série).

Il est bien connu (Loève [51], p. 116) que la convergence presque sûre, implique la convergence en probabilité. Réciproquement, la condition de convergence forte presque sûre s'exprime par :

$$\text{Prob} [\omega ; \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq 1} \|x_{n+k}(\omega) - x_n(\omega)\| \geq \varepsilon] = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 ;$$

elle sera vérifiée si :

$$\inf_{n \geq 1} \text{Prob} [\omega ; \sup_{k \geq 1} \|x_{n+k}(\omega) - x_n(\omega)\| \geq \varepsilon] = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Or la base de \mathfrak{X} étant monotone, $\|x_{n+k}(\omega) - x_n(\omega)\|$ croît avec l'entier k ce qui implique l'égalité :

$$\text{Prob} [\omega ; \sup_{k \geq 1} \|x_{n+k}(\omega) - x_n(\omega)\| \geq \varepsilon] = \sup_{k \geq 1} \text{Prob} [\omega ; \|x_{n+k}(\omega) - x_n(\omega)\| \geq \varepsilon]$$

et la conclusion en découle.

On sait d'ailleurs que la convergence en probabilité implique la convergence presque sûre d'une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ (M. Loève [51], p. 116). Ce dernier résultat se transpose sans changement en termes de convergence forte dans un espace de Banach; mais comme on l'a vu en 1.4.1, la convergence forte presque sûre de la sous-suite $x_{n_k}(\omega)$ implique la convergence forte presque sûre de la série dans l'espace \mathfrak{X} .

On déduit du théorème précédent et de cette remarque, le corollaire suivant

COROLLAIRE 3.3.B. — *La convergence forte presque sûre de la série*

$$\sum_1^{\infty} \eta_n(\omega) e_n$$
équivaut à la convergence forte en probabilité d'une sous-suite
de sommes partielles $\{x_{n_k}(\omega)\}$ *(* $n_k \uparrow + \infty$ *lorsque* $k \uparrow + \infty$ *) soit :*

$$(3.3.2) \quad \lim_{k \text{ et } h \rightarrow \infty} \text{Prob} [\omega ; \|x_{n_{k+h}}(\omega) - x_{n_k}(\omega)\| \geq \varepsilon] = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Nous prouvons maintenant le théorème fondamental suivant qui sera utilisé en 5.3 et 5.4 pour étudier la continuité presque sûre des fonctions aléatoires.

PROPOSITION 3.3.C. — *1° Si la suite de sommes partielles converge fortement en moyenne d'ordre r, c'est-à-dire si :*

$$(3.3.3) \quad \lim_{n \text{ et } k \rightarrow \infty} E \|x_{n+k}(\omega) - x_n(\omega)\|^r = 0 \quad r > 0,$$

alors, elle converge fortement presque sûrement.

2° Cette condition (3.3.3) équivaut aux conditions suivantes :

a)
$$(3.3.4) \quad \lim_{k \text{ et } h \rightarrow + \infty} E \|x_{n_{k+h}}(\omega) - x_{n_k}(\omega)\|^r = 0 \quad r > 0;$$

b) *il existe une sous-suite d'entiers positifs* $\{n_k\}$ *croissant vers* $+\infty$ *telle que :*

$$(3.3.5) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} E^\beta \|x_{n_{k+1}}(\omega) - x_{n_k}(\omega)\|^r < +\infty ; \beta = \min \left(1, \frac{1}{r}\right).$$

3° Si la condition (3.3.5) est vérifiée pour une sous-suite $\{n_k\}$ *fixée, alors presque sûrement la série converge fortement dans l'espace de Banach* $\Lambda(n_k)$ *des éléments de* \mathfrak{X} *tels que :*

$$(3.3.6) \quad \|x\|_{\Lambda(n_k)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < +\infty.$$

De plus : $\|x(\omega)\|^r$ *et* $\|x(\omega)\|_{\Lambda(n_k)}^r \in L(\Omega)$ *et l'on a :*

$$(3.3.7) \quad E^\beta \|x(\omega)\|^r \leq E^\beta \|x(\omega)\|_{\Lambda(n_k)}^r \leq \sum_{k=0}^{+\infty} E^\beta \|x_{n_{k+1}}(\omega) - x_{n_k}(\omega)\|^r.$$

Le 1° est une conséquence immédiate de 3.3.A et de l'inégalité de Markoff.

L'équivalence de (3.3.3), (3.3.4), (3.3.5) résulte du caractère monotone de la base (e_n) et de l'inégalité :

$$E^\beta |X + Y|^r \leq E^\beta |X|^r + E^\beta |Y|^r \quad (\text{M. Loève [51], pp. 155-156})$$

il suffit de transposer la méthode des paragraphes 1.4 et 3.2.

Dans tous les cas, que la base $\{e_n\}$ soit monotone ou non, le critère (3.3.5) implique en vertu de 3.1.1.B :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|x_{n_{k+1}}(\omega) - x_{n_k}(\omega)\|^r < +\infty \text{ presque sûrement si } r \leq 1 \text{ et,}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|x_{n_{k+1}}(\omega) - x_{n_k}(\omega)\| < +\infty \text{ presque sûrement quel que soit } r > 0.$$

Ceci implique donc en général la convergence forte presque sûre de la sous-suite $\{x_{n_k}(\omega)\}$ vers un élément aléatoire $x(\omega) \in \mathfrak{X}$; mais, ici, d'après 1.4, il y a convergence forte presque sûre de la série et équivalence des critères (3.3.3) et (3.3.5) ce qui n'était nullement évident *a priori*.

Le 3^o résulte de la remarque précédente et des théorèmes sur l'intégration des suites croissantes de fonctions intégrables.

3.4 Convergence presque sûre vers zéro d'une suite de variables aléatoires normales.

3.4.0 Nous rappelons ici brièvement à la fois une condition nécessaire et une condition suffisante de convergence presque sûre vers zéro d'une suite infinie de variables aléatoires normales $\{x_n(\omega)\}$, d'espérances mathématiques nulles, de variances $\sigma_1^2 \dots \sigma_n^2$.

La condition nécessaire s'exprime par :

$$(3.4.A) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = 0$$

la condition suffisante s'exprime par :

$$(3.4.B) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \text{Erf} \frac{\varepsilon}{\sigma_n \sqrt{2}} \right] < +\infty \quad \forall \varepsilon > 0$$

ou équivalamment :

$$(3.4.B') \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_n \exp \left[\frac{-\varepsilon^2}{2\sigma_n^2} \right] < +\infty \quad \forall \varepsilon > 0$$

cette condition s'avérant également nécessaire si les variables aléatoires $x_n(\omega)$ sont indépendantes.

3.4.1 *Condition nécessaire et suffisante de convergence presque sûre vers zéro d'une suite quelconque de variables aléatoires.*

Si $\{x_n(\omega)\}$ désigne une suite infinie de variables aléatoires, la condition nécessaire et suffisante de convergence presque sûre vers zéro de cette suite s'exprime par :

$$(3.4.11) \quad \text{Prob} [\omega ; \limsup_{n \rightarrow +\infty} \{ \omega ; |x_n(\omega)| \geq \varepsilon \}] = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

ou, équivalentement :

$$(3.4.12) \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Prob} \left[\bigcap_{n=1}^N \bigcup_{m \geq n} \{ \omega ; |x_m(\omega)| \geq \varepsilon \} \right] = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

(voir par exemple M. Loève [51], p. 18).

Une condition suffisante de convergence presque sûre vers zéro sera donc donnée par :

$$(3.4.13) \quad \lim_{n \text{ et } k \rightarrow +\infty} \sum_{m=n+1}^{n+k} \text{Prob} [\omega ; |x_m(\omega)| \geq \varepsilon] = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

ce qui équivaut à la convergence de la série :

$$(3.4.14) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Prob} [\omega ; |x_n(\omega)| \geq \varepsilon] \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

Réciproquement, il résulte du lemme de Borel-Cantelli (M. Loève [51], p. 228) que cette dernière condition est également nécessaire si les variables aléatoires étudiées sont indépendantes.

3.4.2 *Convergence presque sûre vers zéro des suites de variables aléatoires normales.*

Soit $\{x_n(\omega)\}$ une suite de variables aléatoires normales, tendant presque sûrement vers zéro et désignons respectivement par $\{m_n\}$ et $\{\sigma_n^2\}$ les suites de leurs espérances mathématiques et de leurs variances. On peut énoncer le lemme suivant :

LEMME 3.4.2. A

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(\omega) = 0 \text{ presque sûrement} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n^2 = 0.$$

Ce résultat découle directement du fait que la suite $\varphi_n(u)$ des fonctions caractéristiques converge vers 1 sur tout intervalle en u de longueur finie.

Or : $\varphi_n(u) = E [\exp iux_n(\omega)] = \exp \left[ium_n - \frac{u^2\sigma_n^2}{2} \right]$, ce qui prouve le résultat.

On supposera désormais que $m_n = 0 \forall n$, sans restreindre la généralité.

LEMME 3.4.2.B. — Si la suite de variables aléatoires normales $x_n(\omega)$ d'espérances mathématiques nulles, de variance σ_n^2 est telle que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \operatorname{Erf} \frac{\varepsilon}{\sigma_n \sqrt{2}} \right] < +\infty$$

ou équivalamment
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_n \exp \left[-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma_n^2} \right] < +\infty$$

alors la suite $\{x_n(\omega)\}$ converge presque sûrement vers zéro quand $n \rightarrow +\infty$. Cette condition suffisante est également nécessaire si les variables aléatoires $x_n(\omega)$ sont indépendantes.

Le résultat précédent est une conséquence immédiate du paragraphe 3.4.1 ; la remarque finale de ce paragraphe permet également de conclure à la nécessité de cette condition si les variables $x_n(\omega)$ sont indépendantes. La forme équivalente résulte simplement de l'expression asymptotique de la fonction d'erreur.

Remarque. — Les résultats des deux lemmes précédents seront utilisés au chapitre V ; il est à peine besoin de noter que les conditions (3.4.A) et (3.4.B) ne sont nullement équivalentes et que la condition $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = 0$ n'implique pas en général la convergence presque sûre vers zéro.

Si par exemple $\{x_n(\omega)\}$ désigne une suite de variables aléatoires indépendantes, d'espérances mathématiques nulles, de variances $\sigma_n^2 = \frac{1}{L(n+1)}$, on vérifie facilement que la condition 3.4.B n'est pas vérifiée si $\varepsilon \leq \sqrt{2}$.

Cette remarque sera utilisée au chapitre V pour illustrer le fait que la continuité de la covariance est une condition nécessaire mais non suffisante de continuité presque sûre d'une fonction aléatoire normale.

3.5 Inégalités relatives au supremum de m variables aléatoires.

3.5.1 Inégalités générales.

LEMME 3.5.1.A. — Soit $\{x_i(\omega)\} i = 1, 2 \dots m$, m variables aléatoires telles que : $|x_i(\omega)|^r \in L(\Omega) \forall i (r > 0)$. Alors, posant $Z(\omega) = \sup_{1 \leq i \leq m} |x_i(\omega)|$, $\beta = \min(1, 1/r)$, on a l'inégalité suivante :

$$(3.5.1.A) \quad E^\beta[Z(\omega)]^r \leq m^\beta \sup_{1 \leq i \leq m} E^\beta |x_i(\omega)|^r.$$

De l'inégalité : $[Z(\omega)]^r \leq \sum_1^m |x_i(\omega)|^r$; il résulte que :

$$E[Z(\omega)]^r \leq \sum_1^m E|x_i(\omega)|^r \leq m \sup_{1 \leq i \leq m} E|x_i(\omega)|^r$$

d'où l'inégalité demandée.

Ce résultat avait déjà été utilisé par J. Kampé de Fériet ([40], p. 151); le résultat qui suit, plus précis, a été donné sans preuve dans une note antérieure [15].

LEMME 3.5.1.B. — Soit $\{x_i(\omega)\}$ $i = 1, 2, \dots, m$, m variables aléatoires intégrables et $Z(\omega) = \sup_{1 \leq i \leq m} |x_i(\omega)|$.

Pour tout $c \geq 0$, on a l'inégalité suivante :

$$(3.5.1.B) \quad E[Z(\omega)] \leq c + m \sup_{1 \leq i \leq m} E[|x_i(\omega)| \mid |x_i(\omega)| \geq c].$$

Définissons les sous-ensembles mesurables suivants :

$$A = [\omega ; Z(\omega) < c] ; \quad B = A' = [\omega ; Z(\omega) \geq c] ; \quad C_j = [\omega ; Z(\omega) = |x_j(\omega)|] ; \\ D_j = B \cap C_j = [\omega ; Z(\omega) = |x_j(\omega)| \geq c] ; \quad E_j = [\omega ; |x_j(\omega)| \geq c].$$

Nous obtenons les relations suivantes :

$$D_j \subset E_j \quad \bigcup_{j=1}^m C_j = \Omega \Rightarrow \bigcup_{j=1}^m D_j = B$$

d'où résultent les inégalités suivantes :

$$\int_B Z(\omega) dP \leq \sum_{j=1}^m \int_{D_j} Z(\omega) dP = \sum_{j=1}^m \int_{D_j} |x_j(\omega)| dP \\ \leq \sum_{j=1}^m \int_{E_j} |x_j(\omega)| dP \leq m \sup_{1 \leq j \leq m} E[|x_j(\omega)| \mid E_j].$$

Il résulte évidemment de la définition de A que $E[Z(\omega) \mid A] \leq c$.

Réunissant ces deux inégalités, nous obtenons (3.5.1.B).

3.5.2 Inégalités relatives au supremum de m variables aléatoires normales.

Le lemme 3.5.1.B peut être appliqué au cas de m variables aléatoires normales pour obtenir une inégalité beaucoup plus fine que celle donnée par 3.5.1.A.

On verra d'ailleurs que cette inégalité est la plus fine possible si on se limite à la connaissance des variances.

Soit $x_1(\omega), x_2(\omega) \dots x_m(\omega)$, m variables aléatoires normales, d'espérances mathématiques nulles, de variances respectives $\sigma_1^2, \sigma_2^2 \dots \sigma_m^2$; posant

$$s_m = \sup_{1 \leq i \leq m} \sigma_i$$

il vient le théorème suivant.

THÉORÈME 3.5.2.A. — Si $\{x_i(\omega)\}$ $i = 1, 2 \dots m$ désigne une suite finie de variables aléatoires normales, d'espérances nulles, alors pour tout $r \geq 1$, on a l'inégalité :

$$E^{1/r} [\sup_j |x_j(\omega)|^r] \leq C_r s_m (\text{Log } (m+1))^{1/2}.$$

C_r , désignant une constante numérique ne dépendant que de r .

Utilisons le lemme 3.5.1.B, il vient :

$$E[|x_j(\omega)|^r | |x_j(\omega)| \geq c] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_j} \int_c^{+\infty} \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma_j^2}\right] u^r du.$$

Si $r = 1$, cette quantité peut être calculée directement et donne :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_j \exp\left[-\frac{c^2}{2\sigma_j^2}\right] \text{ quantité majorée par } \sqrt{\frac{2}{\pi}} s_m \exp\left[-\frac{c^2}{2s_m^2}\right].$$

D'où résulte l'inégalité :

$$E[\sup_{1 \leq j \leq m} |x_j(\omega)|] \leq c + m \sqrt{\frac{2}{\pi}} s_m \exp\left[-\frac{c^2}{2s_m^2}\right].$$

Recherchant alors la valeur de c telle que l'inégalité ci-dessus soit la meilleure possible, on trouve que c doit être de l'ordre de grandeur de $s_m \sqrt{2 \text{Log } m}$.

Choissant cette dernière valeur, il vient :

$$E[\sup_j |x_j(\omega)|] \leq s_m \sqrt{2 \text{Log } m} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} s_m \leq 2s_m \sqrt{2[\sqrt{\text{Log } (m+1)}]} \quad m \geq 1.$$

La seconde inégalité se prouve de manière analogue : on a en effet d'après l'inégalité de Schwarz :

$$\begin{aligned} E[|x_j(\omega)|^r | |x_j(\omega)| \geq c] &\leq E^{1/2}[|x_j(\omega)|^{2r-1}]^{1/2} \times E^{1/2}[|x_j(\omega)| | |x_j(\omega)| \geq c] \\ &\leq C'_r \sigma_j^r \exp\left[-\frac{c^2}{4\sigma_j^2}\right] \leq C'_r s_m^r \exp\left[-\frac{c^2}{4s_m^2}\right]. \end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité $|a + b|^{1/r} \leq |a|^{1/r} + |b|^{1/r}$ $r \geq 1$ il vient donc

$$E^{1/r} [\sup_j |x_j(\omega)|^r] \leq c + m^{1/r} K'_r s_m \exp \left[-\frac{c^2}{4rs_m^2} \right],$$

choisissant alors $c = 2s_m \sqrt{\text{Log } m}$, on aboutit au résultat.

Nous utiliserons ce résultat au chapitre V; notons que cette inégalité est la meilleure possible (6) en l'absence de renseignements relatifs au degré de liaison entre les variables, autrement dit si on se limite à la connaissance des variances. Nous prouvons en effet le théorème suivant.

THÉORÈME 3.5.2.B. — *Si $\{x_i(\omega)\}$ $i = 1, 2 \dots m$ désigne une suite de variables aléatoires normales, indépendantes, d'espérances mathématiques nulles, de variances égales à 1, alors :*

$$E^{1/r} [\sup_{1 \leq j \leq m} |x_j(\omega)|^r] = 0 (\sqrt{\text{Log } m}) \quad \text{pour } m \text{ suffisamment grand.}$$

Il suffit de démontrer ce résultat pour $r = 1$ vu l'inégalité :

$$E^{1/r} |x(\omega)|^r \geq E |x(\omega)| \quad r \geq 1.$$

Posons comme précédemment $Z(\omega) = \sup_j |x_j(\omega)|$; la loi de probabilité de Z est définie par

$$F(z) = \text{Prob} [Z(\omega) \leq z] = \text{Erf} \left[\frac{z}{\sqrt{2}} \right]^m \quad \text{où} \quad \text{Erf} \left(\frac{z}{\sqrt{2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt$$

il en résulte que :

$$E[Z(\omega)] = \int_0^{+\infty} z dF(z) = 2m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u \text{Erf}^{m-1}(u) e^{-u^2} du.$$

Pour tout $c \geq 0$ nous pouvons écrire l'inégalité suivante :

$$E[Z(\omega)] \geq 2m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_c^{+\infty} u \text{Erf}^{m-1}(u) e^{-u^2} du \geq \frac{2m\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} [\text{Erf } c]^{m-1} \int_c^{+\infty} u e^{-u^2} du$$

$$\text{d'où pour tout } c \geq 0, \text{ on a } E[Z(\omega)] \geq m \sqrt{\frac{2}{\pi}} [\text{Erf } c]^{m-1} e^{-c^2}.$$

La quantité c ayant été choisie quelconque, posons alors :

$$c = c_m = \left[\text{Log } m - \frac{1}{2} \text{Log log } m \right]^{1/2}; \quad e^{-c_m^2} = \frac{\sqrt{\text{Log } m}}{m}.$$

(6) Nous ne cherchons pas ici une borne précise mais seulement une indication sur l'ordre de grandeur de ces quantités quand $m \rightarrow +\infty$.

Or, pour m suffisamment grand :

$$\operatorname{Erf} c_m \simeq 1 - \frac{1}{c_m \sqrt{\pi}}; \quad e^{-c_m^2} \simeq 1 - \frac{1}{m \sqrt{\pi}}$$

$$[\operatorname{Erf} c_m]^{m-1} \simeq \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right] + o\left(\frac{1}{m}\right).$$

Il en résulte donc bien que $E[Z(\omega)] \geq \sqrt{\frac{2 \operatorname{Log} m}{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)$
ce qui, joint à l'inégalité du théorème 3.5.2.A, assure la conclusion.

CHAPITRE IV

ÉTUDE DES COVARIANCES CONTINUES

4.0 Introduction.

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'élaborer une théorie des covariances continues analogue à celle donnée pour les fonctions continues au chapitre II. Plus précisément, nous nous proposons, étant donné une covariance définie sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ (où \mathcal{D} désigne l'ensemble dyadique de $[0, 1]$) d'exprimer la condition nécessaire et suffisante pour que cette covariance soit uniformément continue sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

Si cette condition est remplie, il est alors possible de prolonger cette fonction en une covariance $\Gamma(t, s)$ continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$; nous nous proposerons donc ensuite de montrer comment il est possible de réaliser cette extension, en prouvant que $\Gamma(t, s)$ est limite uniforme d'une suite de covariances continues $\Gamma_n(t, s)$ formées à l'aide des valeurs de $\Gamma(t, s)$ sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

Les conditions nécessaires et suffisantes de continuité uniforme sont très voisines de celles obtenues pour les fonctions continues; nous chercherons à les formuler et donnerons pour terminer des majorations du module de continuité de cette covariance. Avant d'entreprendre cette étude, nous commencerons par rappeler brièvement les définitions et propriétés des covariances qui seront utilisées ici.

4.1 Définitions générales et propriétés des covariances.

4.1.1 Étant donné une fonction aléatoire $x(t, \omega)$ définie sur $T \times \Omega$ et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , T désignant un sous-ensemble dénombrable ou non de \mathbb{R} et $(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, cette fonction est dite *du second ordre* si :

$$x(t, \omega) \in L^2(\Omega) \quad \forall t \in T.$$

La covariance de $x(t, \omega)$ est alors définie par :

$$\Gamma(t, s) = E[y(t, \omega) y^*(s, \omega)] \quad (1) \quad \text{où } y(t, \omega) = x(t, \omega) - E[x(t, \omega)].$$

Sans restreindre la généralité, nous supposons désormais que : $E[x(t, \omega)] = 0 \quad \forall t \in T$, cette restriction n'ayant aucune influence sur la valeur de la covariance.

4.1.2 Parmi les diverses propriétés des covariances, la plus essentielle est d'être des *fonctions de type défini positif*.

Plus précisément (M. Loève [51], p. 466-467, J. L. Doob [19], p. 72) $\Gamma(t, s)$ est une covariance si et seulement si pour tout sous-ensemble fini de valeurs de t , $T_N = (t'_1, t'_2, \dots, t'_N) \subset T$

$$(4.1.2) \quad \sum_{i,j=1}^N \Gamma(t'_i, t'_j) \lambda_i \lambda_j^* \geq 0 \quad \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^N.$$

Dans tout ce qui suit, nous supposons que $x(t, \omega)$ est à valeurs réelles; il en sera de même de $\Gamma(t, s)$; les résultats obtenus dans ce qui suit s'étendant immédiatement au cas complexe.

4.1.3 *Du caractère défini positif* découlent les conséquences suivantes (M. Loève [51], p. 466-469).

4.1.3.A Si $\Gamma(t, s)$ est à valeurs complexes $\Gamma(t, s) = \Gamma^*(s, t)$ cette propriété se traduisant par la symétrie $\Gamma(t, s) = \Gamma(s, t)$ dans le cas réel d'après (4.1.2).

4.1.3.B $\Gamma(t, t) \geq 0$.

4.1.3.C *Inégalité de Schwarz* $|\Gamma(t, s)|^2 \leq \Gamma(t, t) \times \Gamma(s, s)$.

4.1.4 Nous introduisons maintenant la quantité suivante qui jouera un rôle essentiel dans ce chapitre et dans ceux qui suivent :

soit
$$\gamma(t, s) = E |x(t, \omega) - x(s, \omega)|^2.$$

(1) Nous désignons dans tout ce qui suit par z^* le conjugué de z .

Cette quantité nécessairement non négative s'exprime par :

$$\gamma(t, s) = \Gamma(t, t) + \Gamma(s, s) - 2 \operatorname{Re} \Gamma(t, s)$$

dans le cas complexe et dans le cas réel par $\Gamma(t, t) + \Gamma(s, s) - 2\Gamma(t, s)$.

Nous savons de plus que l'ensemble $L^2(\Omega)$ des variables aléatoires telles que $E |x^2(\omega)| < +\infty$ constitue un espace vectoriel, sur lequel on peut définir une norme égale à $[E |x^2(\omega)|]^{1/2}$ (2) (M. Loève [51], p. 160).

Dès lors, nous pouvons considérer $\gamma^{1/2}(t, s)$ comme définissant une distance entre les variables aléatoires $x(t, \omega)$ et $x(s, \omega)$; on peut donc lui appliquer toutes les propriétés des distances : nous pourrions par exemple écrire l'inégalité :

$$\gamma^{1/2}(t'_1, t'_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \gamma^{1/2}(t'_i, t'_{i+1}),$$

qui va jouer dans ce qui suit le même rôle que l'inégalité $|x(t'_1) - x(t'_n)| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |x(t'_i) - x(t'_{i+1})|$.

4.1.5 Si $\Gamma(t, t) \in L^2[a, b]$, alors la covariance $\Gamma(t, s)$ est un *noyau symétrique défini positif*; à ce titre, elle admet toujours au moins une valeur propre et une fonction propre, solutions de l'équation intégrale :

$$\lambda \varphi(t) = \int_a^b \Gamma(t, s) \varphi(s) ds$$

(où $\varphi(s)$ non équivalente à 0); de plus, les fonctions propres correspondant à deux valeurs propres distinctes sont orthogonales.

Si, de plus $\Gamma(t, s)$ est continue sur $[a, b] \times [a, b]$ et si $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n \dots$ désigne la suite des valeurs propres, nécessairement non négatives, telles que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \geq \lambda_n \dots$, si $\{\varphi_n(t)\}$ désigne la suite orthonormée des fonctions propres, alors d'après le théorème de Mercer ([53], [61], p. 544).

$\Gamma(t, s)$ est la somme d'une série uniformément convergente de covariances continues sous la forme :

$$\Gamma(t, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \varphi_n(t) \varphi_n^*(s).$$

Nous retrouverons cette propriété au chapitre VI.

4.1.6 On notera également que la classe des covariances est fermée vis-à-vis des opérations d'addition, de multiplication, de produit par un scalaire positif et de passage à la limite (M. Loève [51] p. 466-468).

Il en résulte notamment que la classe des covariances continues sur

(2) Si l'on convient de considérer deux variables aléatoires égales presque sûrement comme identiques.

$[a, b] \times [a, b]$ constitue un cône convexe et fermé de l'espace de Banach $C[a, b] \times [a, b]$ des fonctions continues sur $[a, b] \times [a, b]$, la norme étant définie sur cet espace par :

$$\|f(t, s)\| = \sup |f(t, s)| \quad (t, s) \in [a, b] \times [a, b].$$

4.1.7 A toute covariance réelle définie sur $T \times T$ correspond une fonction aléatoire normale $x(t, \omega)$ définie sur $T \times \Omega$ et à valeurs dans \mathbb{R} , d'espérance mathématique nulle et de covariance $\Gamma(t, s)$.

Pour prouver ceci (M. Loève [5I], p. 466, J. L. Doob [19], p. 72) on montre que si $T_N = (t'_1 \dots t'_N) \subset T$ est un sous-ensemble fini quelconque de T et si l'on pose : $\Gamma_{ij} = \Gamma(t'_i, t'_j)$, alors il existe un vecteur aléatoire normal de \mathbb{R}^N : $x_N(\omega) = [x(t'_1, \omega) \dots x(t'_N, \omega)]$ d'espérance mathématique nulle, de matrice des covariances :

$$\Gamma_N = (\Gamma_{ij}) \quad i, j = 1, 2 \dots N.$$

Cette définition est cohérente au sens de A. N. Kolmogoroff en ce sens que si $T_M \subset T_N$ et si $x_M(\omega)$ désigne le vecteur aléatoire normal correspondant à T_M , alors la loi de probabilité de $x_M(\omega)$ coïncide avec la loi marginale obtenue à partir de la distribution de $x_N(\omega)$. Cette condition de cohérence étant satisfaite, il en découle qu'il est possible de caractériser la loi temporelle de la fonction aléatoire normale $x(t, \omega)$ ceci que T soit dénombrable ou non.

Il en résulte notamment que la connaissance d'une covariance définie sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$, nulle en $(0, 0)$ et $(1, 1)$ (donc en $(0, t_j)$ et $(1, t_j)$ d'après l'inégalité de Schwarz) permet de caractériser la suite de variables aléatoires normales $x(t_j, \omega)$ ($t_j \in \mathcal{D}$) d'espérances mathématiques nulles et telles que, posant :

$$x_i(\omega) = x(t_i, \omega) ; \quad E[x_i(\omega)x_j(\omega)] = \Gamma(t_i, t_j) = \Gamma_{ij}.$$

On notera que $x(0, \omega) = x(1, \omega) = 0$ presque sûrement.

4.2 Conditions nécessaires et suffisantes de continuité uniforme sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ d'une covariance réelle.

4.2.0 Nous supposons dorénavant que la covariance est nulle en $(0, 0)$ et $(1, 1)$, sinon, il suffirait de remplacer $\Gamma(t, s)$ par $\Gamma_1(t, s)$ covariance de $x_1(t, \omega)$ définie sur \mathcal{D} par :

$$x_1(t, \omega) = x(t, \omega) - tx(1, \omega) - (1 - t)x(0, \omega) \quad (*)$$

(*) On a explicitement : $\Gamma_1(t, s) = \Gamma(t, s) + ts \Gamma(1, 1) + (1 - t)(1 - s) \Gamma(0, 0) - t \Gamma(1, s) - s \Gamma(1, t) - (1 - t) \Gamma(s, 0) - (1 - s) \Gamma(t, 0) + t(1 - s) \Gamma(1, 0) + s(1 - t) \Gamma(1, 0)$.

les propriétés trouvées pour $\Gamma_1(t, s)$ restant valables pour $\Gamma(t, s)$. La connaissance de la suite de variables aléatoires normales $x(t_n, \omega)$ permet alors d'écrire formellement la série de Schauder aléatoire :

$$(4.2.0.1) \quad S(t, \omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} \eta_n(\omega) e_n(t)$$

où $\eta_n(\omega)$ est définie par :

$$(4.2.0.2) \quad \eta_n(\omega) = x\left(\frac{2p+1}{2^q}, \omega\right) - \frac{1}{2} \left[x\left(\frac{p}{2^{q-1}}, \omega\right) + x\left(\frac{p+1}{2^{q-1}}, \omega\right) \right].$$

Pour tout point dyadique t_n , on a donc d'après 2.1.1 (lemme 7.5) :

$$S(t_n, \omega) = x(t_n, \omega).$$

Posons $\gamma_{ij} = E[\eta_i(\omega) \eta_j(\omega)]$; γ_{ij} est combinaison linéaire de valeurs de $\Gamma(t_i, t_j)$. Réciproquement, la connaissance des quantités γ_{ij} permet de déterminer les valeurs de $\Gamma(t, s)$ sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$. Posons à cet effet :

$$(4.2.0.3) \quad x_n(t, \omega) = \sum_1^n \eta_j(\omega) e_j(t); \quad \Gamma_n(t, s) = \sum_{i,j=1}^n \gamma_{ij} e_i(t) e_j(s),$$

covariance de $x_n(t, \omega)$.

Pour $(t_h, t_k) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, $1 \leq h$ et $k \leq n$,

$$x_n(t_h, \omega) = S(t_h, \omega) = x(t_h, \omega) \quad \text{donc :} \quad \Gamma_n(t_h, t_k) = \Gamma(t_h, t_k).$$

Les covariances $\Gamma_n(t, s)$ que nous venons ainsi d'introduire sont représentées par des portions de paraboloides et ont pour valeurs aux points (t_h, t_k) les valeurs $\Gamma(t_h, t_k)$ si $1 \leq h$ et $k \leq n$.

Passant de n à $n+1$, ces valeurs se conservent pour ceux des points étudiés à l'étape antérieure.

Cette analogie avec les résultats du chapitre II nous suggère l'éventualité de résultats analogues.

Or, on le verra, la théorie est rigoureusement similaire en ce sens que la condition nécessaire et suffisante de continuité uniforme de $\Gamma(t, s)$ sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ équivaut à la convergence uniforme de la suite $\Gamma_n(t, s)$ vers une covariance continue $\Gamma(t, s)$ réalisant l'extension requise à $[0, 1] \times [0, 1]$.

4.2.1 Propriétés caractéristiques des covariances continues.

PROPRIÉTÉ 4.2.1.A. — Pour toute covariance continue sur $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ (*)

$$\|\Gamma(t, s)\| = \|\Gamma(t, t)\| \quad \text{soit :} \quad \sup_{(t,s) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}} |\Gamma(t, s)| = \sup_{t \in \mathbb{T}} \Gamma(t, t).$$

(*) La propriété est également vraie si $\Gamma(t, s)$ est bornée sur $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$.

L'inégalité $\| \Gamma(t, t) \| \leq \| \Gamma(t, s) \|$ est évidente, la réciproque résulte de l'inégalité de Schwarz (4.1.3.C).

On retrouve ici une propriété connue des formes quadratiques définies positives (A. E. Taylor [60], p. 323).

PROPRIÉTÉ 4.2.1.B. — *Pour qu'une covariance soit continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$ (respectivement $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$), il faut et il suffit (M. Loève [51], p. 469-470) qu'elle le soit sur la diagonale, c'est-à-dire plus précisément que :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \gamma(t + h, t) = 0 \quad \forall t, \text{ et } t + h \in [0, 1] \text{ (respectivement } \mathcal{D})$$

(voir 4.1.4 pour la définition de $\gamma(t, s)$). Nous poserons maintenant la définition suivante :

DÉFINITION 4.2.1.C. — *On appellera module de continuité d'une covariance $\Gamma(t, s)$ continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$, la quantité définie par :*

$$\varphi(h) = \sup \gamma^{1/2}(t, s) \quad t \text{ et } s \in [0, 1], \quad |t - s| \leq h.$$

Nous avons choisi cette définition (au lieu de $\sup \gamma(t, s)$) étant donné les analogies signalées entre $\gamma^{1/2}(t, s)$ et $|x(t) - x(s)|$, ceci de manière à rendre plus évidentes les analogies entre la théorie des covariances continues et celles des fonctions continues d'une variable.

Nous arrivons maintenant à la *propriété fondamentale qui va nous permettre de transposer aux covariances continues l'ensemble des résultats du chapitre II.*

PROPOSITION 4.2.1.D. — *Si $\Gamma_n(t, s) = \sum_{i,j=1}^n \gamma_{ij} e_i(t) e_j(s)$*

alors : $\| \Gamma_n(t, s) \| = \sup \Gamma(t_k, t_k) \quad 1 \leq k \leq n.$

La démonstration résulte des remarques suivantes :

1° D'après (4.2.1.A) $\| \Gamma_n(t, s) \| = \| \Gamma_n(t, t) \|$. Il nous suffit donc d'étudier cette dernière fonction.

2° Or l'expression de $\Gamma_n(t, t)$ montre que la *courbe représentative de cette fonction est tout entière située au-dessus de l'axe des t et formée d'arcs de parabole ayant pour extrémités deux points dyadiques*. Plus précisément, si $n \in \mathbb{N}_q$, nous avons deux possibilités : tout d'abord les arcs C_j où $2^q \leq j \leq 2n + 1$ d'extrémités $\frac{j - 2^q}{2^q}$ et $\frac{j + 1 - 2^q}{2^q}$, puis les arcs C_i où $n + 1 \leq i \leq 2^q - 1$, d'extrémités : $\frac{i - 2^{q-1}}{2^{q-1}}$ et $\frac{i + 1 - 2^{q-1}}{2^{q-1}}$.

Nous allons montrer que *chacun de ces arcs est convexe*, ce qui assurera la propriété.

2° Étant donné un des intervalles dyadiques J_m où $m \leq n$

$$x_n(t, \omega) = \eta_1(\omega)e_1(t) + \dots + \eta_{n_q}(\omega)e_{n_q}(t)$$

donc, si $t \in J_{2m}$ (respectivement J_{2m+1}) :

$$x_n(t, \omega) = a_{2m}(\omega)t + b_{2m}(\omega) \text{ (respectivement } a_{2m+1}(\omega)t + b_{2m+1}(\omega)).$$

Deux éventualités sont alors possibles :

soit $E[a_{2m}^2(\omega)] = 0 \implies a_{2m}(\omega) = 0$ presque sûrement,

dans ce cas, la courbe représentative de $\Gamma_n(t, s)$ sur cet intervalle est un segment de droite parallèle à l'axe des t ; soit $E[a_{2m}^2(\omega)] = A_{2m} > 0$, alors $\Gamma_n(t, t) = A_{2m}t^2 + 2B_{2m}t + C_{2m} \geq 0 \quad \forall t \in J_{2m}$; A_{2m} étant positif, la convexité est assurée.

Finalement la courbe représentative de $\Gamma_n(t, t)$ est formée d'arcs de parabole convexes et la propriété devient évidente.

COROLLAIRE 4.2.1.E. — $\|\Gamma_n(t, s)\|$ croît avec l'entier n .

Cette propriété est l'analogie de cette donnée en 2.1.1.2 pour les fonctions continues.

4.2.2 Conséquences des propriétés 4.2.1.D et 4.2.1.E.

Il va maintenant nous être possible de transférer en bloc un certain nombre de propriétés établies aux chapitres I et II en remplaçant dans leur démonstration, la quantité $|x(t)|$ par $E^{1/2}|x(t, \omega)|^2$.

THÉORÈME 4.2.2.A. — Si $x_n(t, \omega) = \sum_{j=1}^n \eta_j(\omega)e_j(t)$, la condition nécessaire et suffisante pour que $\|E|(x_{n+k}(t, \omega) - x_n(t, \omega))^2\|^{1/2} \rightarrow 0$ quand n et k tendent vers l'infini est qu'il existe une suite d'entiers positifs $\{n_k\}$ croissant vers l'infini, telle que $\|E|(x_{n_k+h}(t, \omega) - x_{n_k}(t, \omega))^2\|^{1/2} \rightarrow 0$ quand k et h tendent vers l'infini.

La démonstration est la même que celle donnée en 1.4.1. Comme on le verra plus loin, cette condition équivaut à la continuité uniforme de $\Gamma(t, s)$ sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

Par souci de commodité, on pourra en particulier comme au chapitre II choisir une suite d'entiers $\{n_k\}$ telle que : $n_k = 2^{q_k} - 1$ où $q_0 = 0 < q_1 \dots < q_k < q_{k+1}$, q_k tendant vers l'infini lorsque k tend vers l'infini.

Nous introduisons maintenant les notations suivantes analogues à celles données au chapitre II.

$$G_q = \sup_{n \in \mathbb{N}_q} \gamma^{1/2} \left(\frac{p}{2^{q-1}}, \frac{p+1}{2^{q-1}} \right), \quad n = 2^{q-1} + p; \quad H_q = \sup_{n \in \mathbb{N}_q} E^{1/2} |\gamma_n(\omega)|^2;$$

$$G_{q,h} = \sup_{p,l} \gamma^{1/2} \left(\frac{p}{2^q}, \frac{p}{2^q} + \frac{l}{2^{q+h}} \right)$$

où p et l entiers tels que : $0 \leq p \leq 2^q - 1$ $1 \leq l \leq 2^h$

$$H_{q,h} = \left\| E^{1/2} (x_{2^{q+1-1}}(t, \omega) - x_{2^{q-1}}(t, \omega))^2 \right\|$$

$$= \sup_{2^q \leq j < 2^{q+h}} E^{1/2} (x(t_j, \omega) - x_{2^{q-1}}(t_j, \omega))^2, t_j \in \mathcal{D}; \quad G'_{q,k} = \sup_{p,l} \gamma^{1/2} \left(\frac{p}{2^{qk}}, \frac{p}{2^{qk}} + \frac{l}{2^{qk+1}} \right)$$

où p et l entiers, tels que : $0 \leq p \leq 2^{qk} - 1$ $1 \leq l \leq 2^{qk+1-2qk}$.

$$H'_{q,k} = \left\| E^{1/2} (x_{2^{qk+1-1}}(t, \omega) - x_{2^{qk-1}}(t, \omega))^2 \right\|$$

$$= \sup_{2^{qk} \leq j < 2^{qk+1}} E^{1/2} (x(t_j, \omega) - x_{2^{qk-1}}(t_j, \omega))^2, t_j \in \mathcal{D}.$$

Ces six quantités correspondent respectivement aux symboles $A_q, B_q, A_{q,h}, B_{q,h}, A'_{q,k}, B'_{q,k}$ introduits en 2.1.2 et 2.2.1. Nous pouvons reproduire tous les résultats établis dans ces deux paragraphes en les transposant; les démonstrations étant absolument les mêmes seront donc omises.

THÉORÈME 4.2.2.B (analogue de 2.1.2.2). — *La condition nécessaire et suffisante pour que $\| E(x_{n+k}(t, \omega) - x_n(t, \omega))^2 \| \rightarrow 0$ quand n et $k \rightarrow +\infty$ s'exprime par $\lim_{q \text{ et } h \rightarrow +\infty} H_{q,h} = 0$.*

THÉORÈME 4.2.2.C (analogue de 2.1.2.3). — *Pour que la condition précédente soit satisfaite, il faut et il suffit qu'il existe une suite q_1, q_2, \dots, q_k tendant en croissant vers l'infini, telle que*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} H'_{q_k} < = \infty.$$

COROLLAIRE 4.2.2.D (analogue de 2.1.2.4). — *Si la covariance $\Gamma(t, s)$ définie sur \mathcal{D} est telle que $\sum_{q=1}^{+\infty} H_q < +\infty$, alors $\Gamma(t, s)$ est continue sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$; son extension à $[0, 1] \times [0, 1]$ est définie par la somme de la série double absolument et uniformément convergente en t et s .*

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_{mn} e_m(t) e_n(s).$$

Pour t et s fixés, un seul des produits $e_m(t) e_n(s)$ est non nul d'après les propriétés des fonctions triangulaires; il nous suffit donc de montrer que :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{q'=1}^{+\infty} \sup_{m \in N_q, n \in N_{q'}} |\gamma_{mn}| < \infty$$

or : $\sup_{m \in N_q, n \in N_{q'}} |\gamma_{m,n}| \leq H_q \cdot H_{q'}$ d'après l'inégalité de Schwarz.

La série double converge absolument et uniformément vers une covariance $\Gamma_1(t, s)$ coïncidant sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ avec les valeurs de $\Gamma(t, s)$ d'après 4.2.0; c'est donc l'extension recherchée.

Restant dans ce dernier cas, on peut également écrire le théorème suivant, analogue du lemme 2.2.1.

THÉORÈME 4.2.2.E.

1° Les conditions $G_q \rightarrow 0$ et $H_q \rightarrow 0$ sont équivalentes ;

2° Les conditions $\sum_{q=1}^{+\infty} G_q < +\infty$ et $\sum_{q=1}^{+\infty} H_q < +\infty$ sont équivalentes.

Enfin, et c'est là le point le plus important, on peut transposer mot pour mot les lemmes des paragraphes 2.2.2 et 2.2.3 sous la forme suivante :

THÉORÈME 4.2.2.F (analogue des lemmes 2.2.2.A à 2.2.2.C).

1° $H_{q,h} \leq 2G_{q,h}$.

2° $H_{q,h} \rightarrow 0$ quand q et $h \rightarrow +\infty$ si et seulement si $\lim_{q \text{ et } h \rightarrow +\infty} G_{q,h} = 0$.

THÉORÈME 4.2.2.G.

1° Les conditions $\sum_{k=0}^{+\infty} G'_{q_k} < +\infty$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} H'_{q_k} < +\infty$ sont équivalentes.

2° On a de plus les inégalités suivantes :

$$H'_{q_k} \leq 2G'_{q_k} ; \quad G'_{q_k} \leq H'_{q_k} + 2 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2^{q_j+1}}{2^{q_k}} H'_{q_j}.$$

Nous pouvons maintenant étudier la continuité uniforme sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

4.2.3 Conditions nécessaires et suffisantes de continuité uniforme d'une covariance définie sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

PROPOSITION 4.2.3.A. — La condition nécessaire et suffisante pour que $\Gamma(t, s)$ covariance définie sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ y soit uniformément continue est que :

$$\lim_{q \text{ et } h \rightarrow +\infty} G_{q,h} = 0 \text{ ou équivalamment } \lim_{q \text{ et } h \rightarrow +\infty} H_{q,h} = 0.$$

L'équivalence annoncée résultant de 4.2.2.F, il nous suffit de montrer que la condition $\lim_{q \text{ et } h \rightarrow \infty} \sup_{p,l} \gamma\left(\frac{p}{2^q}, \frac{p}{2^q} + \frac{l}{2^{q+h}}\right) = 0$ pour p et l entiers, tels que : $0 \leq p < 2^q$, $1 \leq l \leq 2^h$, est nécessaire et suffisante pour la continuité uniforme de $\Gamma(t, s)$ sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

Cette condition est évidemment nécessaire; elle est également suffisante car si elle est réalisée, il existe $q(\epsilon)$ tel que :

$$q \geq q(\epsilon) \implies G_{q,h} \leq \epsilon \quad \forall h \geq 1.$$

Soit alors deux points dyadiques quelconques t_j et t'_j tels que : $|t_j - t'_j| \leq \frac{1}{2^{q(\epsilon)}}$. Nous pouvons alors trouver un point $\frac{p}{2^{q(\epsilon)}} = \tau_j$ tel que : $\tau_j \leq t_j < t'_j$ en supposant $t'_j > t_j$; soit alors $\tau'_j = \tau_j + \frac{1}{2^{q(\epsilon)}}$ deux éventualités sont possibles : $\tau_j \leq t_j < t'_j \leq \tau'_j$ et $\tau_j \leq t_j < \tau'_j \leq t'_j < \tau'_j + \frac{1}{2^{q(\epsilon)}}$.

Dans le premier cas, nous aurons :

$$\gamma^{1/2}(t_j, t'_j) \leq \gamma^{1/2}(\tau_j, t_j) + \gamma^{1/2}(\tau_j, t'_j);$$

dans le second cas, nous pouvons également écrire :

$$\gamma^{1/2}(t_j, t'_j) \leq \gamma^{1/2}(\tau_j, t_j) + \gamma^{1/2}(\tau_j, \tau'_j) + \gamma^{1/2}(\tau'_j, t'_j).$$

Or, l'on a nécessairement ⁽⁵⁾ : $t_j = \tau_j + \frac{l}{2^{q+h}}$, $t'_j = \tau'_j + \frac{l'}{2^{q+h}}$ donc $\gamma^{1/2}(t_j, t'_j) \leq 3G_{q,h} \leq 3\epsilon$ ce qui prouve le résultat.

COROLLAIRE 4.2.3.B. — La condition nécessaire et suffisante de continuité uniforme de $\Gamma(t, s)$ est donnée par :

$$\lim_{n \text{ et } k \rightarrow +\infty} \|E(x_{n+k}(t, \omega) - x_n(t, \omega))^2\| = 0.$$

Ceci résulte de 4.2.2.B et du théorème précédent; ce résultat sera utilisé au paragraphe suivant pour définir la méthode d'extension de $\Gamma(t, s)$ à $[0, 1] \times [0, 1]$.

⁽⁵⁾ Tout au moins dans le second cas, on vérifie facilement l'inégalité dans le premier cas.

Les théorèmes 4.2.2.C, 4.2.2.G et la proposition 4.2.3.A nous permettent d'énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 4.2.3.C. — 1° *Étant donné une covariance $\Gamma(t, s)$ continue sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ il existe toujours une suite d'entiers positifs $\{q_k\}$ croissant vers $+\infty$, telle que*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} H'_{q_k} < +\infty \quad \text{ou équivalentement} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} G'_{q_k} < +\infty.$$

2° *Réciproquement, si pour une telle suite $\{q_k\}$ fixée, l'une de ces deux conditions est réalisée, alors la covariance $\Gamma(t, s)$ est uniformément continue sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.*

4.2.4 *Méthode d'extension de $\Gamma(t, s)$ en une covariance continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$.*

Nous prouvons maintenant le théorème fondamental suivant.

PROPOSITION 4.2.4. — *La covariance $\Gamma(t, s)$ définie sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ y est uniformément continue si et seulement si la suite de covariances $\Gamma_n(t, s)$ définies par :*

$$\Gamma_n(t, s) = \sum_{i,j=1}^n \gamma_{ij} e_i(t) e_j(s)$$

converge uniformément; sa limite $\Gamma(t, s)$ continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$ réalise l'extension à $[0, 1] \times [0, 1]$ de la covariance uniformément continue sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

La condition est évidemment suffisante; il est évident que la limite est une covariance continue et nous avons vu que :

$$\Gamma_n(t_h, t_k) = \Gamma(t_h, t_k) \quad \text{pour} \quad 1 \leq h \text{ et } k \leq n, (t_h, t_k) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D};$$

c'est donc bien l'extension demandée. Il reste à prouver qu'elle est nécessaire. Nous avons vu au corollaire 4.2.3.B que la condition de continuité uniforme sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ équivaut à :

$$\lim_{n \text{ et } k \rightarrow +\infty} \|E(x_{n+k}(t, \omega) - x_n(t, \omega))^2\| = 0.$$

Nous pouvons tout d'abord en déduire que $\|\Gamma_n(t, s)\| = \|\Gamma_n(t, t)\| \leq M, \forall n$; il découle en effet de l'inégalité :

$$\|E^{1/2}(x_{n+k}(t, \omega))^2\| \leq \|E^{1/2}(x_n(t, \omega))^2\| + \|E^{1/2}(x_{n+k}(t, \omega) - x_n(t, \omega))^2\|$$

que pour $n \geq N(\epsilon)$, posant $n = N + k$, on a bien :

$$\| \Gamma_n(t, s) \|^{1/2} \leq \| \Gamma_N(t, s) \|^{1/2} + \epsilon = M^{1/2}.$$

Utilisant alors l'inégalité de Schwarz, il vient :

$$\begin{aligned} \| \Gamma_{n+k}(t, s) - \Gamma_n(t, s) \| &\leq \| E[x_{n+k}(t, \omega)(x_{n+k}(s, \omega) - x_n(s, \omega))] \| \\ + \| E[x_n(s, \omega)(x_{n+k}(t, \omega) - x_n(t, \omega))] \| &\leq 2\sqrt{M} \| E(x_{n+k}(t, \omega) - x_n(t, \omega))^2 \|^{1/2} \end{aligned}$$

d'où la conclusion.

Remarque 1. — Si nous considérons le tableau doublement infini constitué par les quantités $\gamma_{ij}e_i(t)e_j(s)$, on voit que $\Gamma(t, s)$ est obtenue à l'aide d'une sommation par carrés de la série double définie par ce tableau.

Remarque 2. — On notera l'analogie entre le développement en série de Schauder et le développement donné ici; dans les deux cas, nous ne savons pas pour le moment, s'il y a convergence absolue ou non. Dans le cas de l'espace $C_0[0, 1]$, on sait toutefois que la convergence n'est pas inconditionnelle (M. M. Day [10], p. 77).

4.3 Majorations du module de continuité d'une covariance.

4.3.1 Transposant la méthode du paragraphe 2.4 on en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME 4.3.1. — *La suite $\{q_k\}$ et les quantités G'_{q_k} étant définies comme en 4.2.2, si $\psi(h)$ désigne une fonction non négative, non décroissante pour $h > 0$ suffisamment petit, tendant vers zéro lorsque h tend vers zéro et telle que :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left[\psi\left(\frac{1}{2^{q_k+1}}\right) \right]^{-1} G'_{q_k} < +\infty$$

alors, pour h suffisamment petit :

- 1° $\gamma^{1/2}(t, s) \leq c\psi(h)$ pour $|t - s| \leq h$.
- 2° $\sup_{|t-s| \leq h} \gamma^{1/2}(t, s) = o(\psi(h))$ quand $h \rightarrow 0$.

4.3.2 Comme on le verra, au chapitre suivant, les conditions :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{q_{k+1}} G'_{q_k} < +\infty \quad \text{ou} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{q_{k+1}} H'_{q_k} < +\infty$$

impliquent la continuité presque sûre sur \mathcal{D} de la fonction aléatoire normale, d'espérance mathématique nulle qui admet pour covariance $\Gamma(t, s)$. Nous

nous proposons, en terminant ce chapitre, de montrer que ces conditions sont équivalentes si : $\frac{q_{k+1}}{q_k} \leq C$; cette limitation n'est d'ailleurs pas gênante car, comme on le verra, les seules sous-suites $\{q_k\}$, offrant un intérêt pour l'étude de la continuité presque sûre, possèdent cette propriété.

Ceci nous permettra par ailleurs, de choisir la première condition plus maniable, sans perte de généralité.

Pour démontrer ce résultat, nous prouvons d'abord les deux lemmes suivants :

LEMME 4.3.2.A. — Pour $q_k \geq 2, q_{k+1} : q_k \leq 2^{q_{k+1}-q_k}$.

LEMME 4.3.2.B. — Si $q_{r+1} \geq 2$ et $q_{k+1} : q_k \leq C$, alors :

$$\alpha_r = \sum_{j=r+1}^k \sqrt{q_j} \frac{2^{q_{r+1}}}{2^{q_j}} \leq K \sqrt{q_{r+1}} \quad \forall k \text{ et } r.$$

La preuve du premier lemme résulte de l'inégalité élémentaire $\log(1+x) \leq x$ on a en effet $\log q_{k+1} : q_k \leq \frac{q_{k+1} - q_k}{q_k} \leq (q_{k+1} - q_k) \log 2$.

Utilisant les hypothèses du second lemme, on a successivement :

$$\alpha_r = \sqrt{q_{r+1}} \sum_{j=r+1}^k \sqrt{\frac{q_j}{q_{r+1}}} \frac{2^{q_{r+1}}}{2^{q_j}} \leq \sqrt{q_{r+1}} \sum_{j=r+1}^{+\infty} \frac{1}{[2^{q_j - q_{r+1}}]^{1/2}}$$

or : $q_j - q_{r+1} \geq j - (r + 1)$ ce qui prouve le lemme.

Il nous est maintenant possible de prouver le théorème suivant.

THÉORÈME 4.3.3.C. — Si $q_{k+1} : q_k \leq C$, alors les conditions :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{q_{k+1}} G'_{q_k} < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{q_{k+1}} H'_{q_k} < +\infty \text{ sont équivalentes.}$$

En vertu de l'hypothèse faite, il suffit de prouver l'équivalence des conditions :

(I)
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{q_k} G'_{q_k} < +\infty, \text{ et}$$

(II)
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{q_k} H'_{q_k} < +\infty.$$

Éliminant au besoin un certain nombre de termes, on peut supposer $q_1 \geq 2$. L'inégalité $H'_{q_k} \leq 2G'_{q_k}$ du théorème 4.2.2.G montre que (I) \implies (II).

Réciproquement, il découle du même théorème que $G'_{q_0} = H'_{q_0}$,

$$G'_{q_k} \leq 2 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2^{q_{j+1}}}{2^{q_k}} H'_{q_j} + H'_{q_k}, \text{ d'où résultent les inégalités :}$$

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^k \sqrt{q_h} G'_{q_h} &\leq \sum_{h=0}^k \sqrt{q_h} H'_{q_h} + 2 \sum_{h=1}^k \sqrt{q_h} \left(\sum_{j=0}^{h-1} \frac{2^{q_{j+1}}}{2^{q_h}} H'_{q_j} \right) \\ &\leq \sum_{h=0}^k \sqrt{q_h} H'_{q_h} + 2 \sum_{r=0}^{k-1} H'_{q_r} \left(\sum_{j=r+1}^k \sqrt{q_j} \frac{2^{q_{r+1}}}{2^{q_j}} \right). \end{aligned}$$

Utilisant le lemme 4.3.2.B, il vient donc :

$$\sum_{h=0}^k \sqrt{q_h} G'_{q_h} \leq \sum_{h=0}^k \sqrt{q_h} H'_{q_h} + 2K \sum_{r=0}^{k-1} \sqrt{q_{r+1}} H'_{q_r}$$

ce qui prouve le résultat annoncé.

Il résulte d'ailleurs du théorème 4.3.1 que cette condition implique que

$$\sup_{|t-s| \leq h} \gamma(t, s) = o(|\log |h||^{-1}).$$

CHAPITRE V

CONTINUITÉ PRESQUE SURE DES FONCTIONS ALÉATOIRES

5.0 Introduction.

Le présent chapitre a pour but essentiel de déterminer des conditions suffisantes de continuité uniforme presque sûre d'une fonction aléatoire. Plus précisément, nous définissons sur $[a, b]$ une fonction aléatoire par sa loi temporelle, cette fonction aléatoire étant supposée *continue en probabilité*. Nous recherchons alors des conditions suffisantes de continuité uniforme presque sûre pour un sous-ensemble dénombrable dense de $[a, b]$; nous prouvons ensuite que l'extension continue à $[a, b]$ est égale presque sûrement pour un t donné à la fonction $x(t, \omega)$ de départ et a donc même loi temporelle; elle coïncide donc avec la version séparable de cette fonction aléatoire au sens de J. L. Doob [19].

Nous rappelons d'abord en 5.1 quelques résultats généraux relatifs aux fonctions aléatoires et aux divers types de continuité; le paragraphe 5.2 utilise les résultats de 3.3 pour donner dans le cas général des conditions suffisantes de continuité presque sûre des fonctions aléatoires; nous retrouvons ainsi en les généralisant et en les précisant certains résultats établis par A. N. Kolmogoroff et E. Slutsky [59] et J. Kampé de Fériet ([40] et [42]). Le paragraphe 5.3 étudie de même la continuité presque sûre des fonctions aléatoires normales, les critères de continuité uniforme presque sûre s'exprimant en fonction du module de continuité de la covariance; cette étude nous permet de majorer dans chacun des cas le moment d'ordre r de la norme des fonctions considérées, cette majoration jouant un rôle essentiel au chapitre VI; nous donnons enfin des évaluations du module de continuité selon un point de vue qui nous paraît nouveau et en déduisons un théorème sur les développements en série de Fourier des fonctions considérées.

Le résultat essentiel de ce chapitre nous paraît être celui du paragraphe 5.3 relatif à la continuité presque sûre des fonctions aléatoires normales.

5.1 Généralités sur la continuité presque sûre des fonctions aléatoires.

5.1.1 *Définition 5.1.1.A* (A. Fuchs [29], p. 158). — Soit I un sous-ensemble borélien de \mathbb{R} muni de la mesure de Lebesgue et $(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité; on appelle fonction aléatoire réelle $x(t, \omega)$ une application de $I \times \Omega$ dans \mathbb{R} ; cette application étant telle que $x(t, \omega)$ soit mesurable en ω pour chaque t fixé.

Une telle définition fait intervenir le hasard de manière permanente et coïncide avec la notion de fonction aléatoire au sens large introduite par E. Slutsky [59] (voir également R. Fortet [21], p. 135). On peut aussi et ce sera notre méthode, définir une fonction aléatoire par une limite presque sûre d'une suite d'approximations $y_n(t, \omega)$ correspondant à une suite d'observations de plus en plus fines; cette méthode avait également été considérée par E. Slutsky qui en avait déduit le théorème suivant ([59], p. 190, théorème 3).

Si $x(t, \omega)$ désigne une fonction aléatoire continue en probabilité sur $[a, b]$, alors cette fonction est pour un t donné équivalente à une fonction de Baire d'ordre inférieur ou égal à deux.

L'auteur considérait à cet effet les valeurs de la fonction aléatoire sur un sous-ensemble dense dénombrable de $[a, b]$; choisissant par exemple l'en-

semble dyadique de $[0, 1]$ et appelant $y_q(t, \omega)$ la fonction telle que

$$x\left(\frac{p}{2^q}, \omega\right) = y_q\left(\frac{p}{2^q}, \omega\right)$$

pour p entier tel que $0 \leq p \leq 2^q$; $y_q(t)$ étant linéaire pour $\frac{p}{2^q} \leq t \leq \frac{p+1}{2^q}$ ($p = 0, 1 \dots 2^q - 1$). Slutsky prouvait que pour presque tout ω la suite $y_q(t, \omega)$ convergeait pour presque tout t vers une fonction aléatoire $y(t, \omega)$ telle que pour un t fixé : $\text{Prob} [\omega, x(t, \omega) = y(t, \omega)] = 1$.

L'intérêt de cette seconde méthode apparaît encore davantage si l'on tient compte du fait mis en évidence par Doobs ([19], p. 51) que la donnée de la seule loi temporelle est insuffisante pour résoudre la plupart des problèmes relatifs aux fonctions aléatoires. C'est ainsi par exemple que la continuité presque sûre (« globale » selon la terminologie de A. Fuchs [29], p. 172) d'une fonction aléatoire $x(t, \omega)$ sur un compact $[a, b]$ fait intervenir des opérations non dénombrables sur les sous-ensembles mesurables de Ω ; l'ensemble des points de Ω pour lesquels la fonction $x(t, \omega)$ est continue sur $[a, b]$ ne définit donc pas a priori un événement.

Pour obvier à cet inconvénient, Doob a alors introduit la notion de séparabilité d'un processus stochastique comme suit ([19], p. 52).

DÉFINITION 5.1.1.B. — Si $x(t, \omega)$ désigne une fonction aléatoire définie sur $T \times \Omega$ et à valeurs dans R .

Le processus stochastique $x(t, \omega)$ est dit séparable relativement à la classe des intervalles fermés s'il existe une suite dénombrable $\{t_j\}$ dense dans T , telle que presque sûrement, pour tout intervalle ouvert I :

$$\sup_{t \in I \cap T} x(t, \omega) = \sup_{t_j \in I \cap T} x(t_j, \omega) \quad \text{et} \quad \inf_{t \in I \cap T} x(t, \omega) = \inf_{t_j \in I \cap T} x(t_j, \omega).$$

J. L. Doob a alors démontré le théorème suivant ([19], p. 57, théorème 2.4). Étant donné un processus stochastique $x(t, \omega)$ ($t \in T$), il existe toujours un processus $\tilde{x}(t, \omega)$ défini sur le même espace Ω , séparable relativement à la classe des fermés et tel que : $\text{Prob} [\omega; x(t, \omega) = \tilde{x}(t, \omega)] = 1$ pour un t quelconque appartenant à T .

Si le processus $x(t, \omega)$ est continu en probabilité pour tout t , alors $\tilde{x}(t, \omega)$ est mesurable $m \times P$ et toute suite $\{t_j\}$ dense dans $T = [a, b]$ satisfait aux conditions de séparabilité ⁽¹⁾ (Doob [19], p. 54 et 61, théorèmes 2.2 et 2.6).

Selon la terminologie de J. L. Doob, $\tilde{x}(t, \omega)$ est dite version séparable du processus $x(t, \omega)$; on peut résumer très schématiquement la notion de

⁽¹⁾ m désignant la mesure de Lebesgue sur $[a, b]$.

séparabilité en disant que la donnée de la loi de probabilité sur un sous-ensemble dénombrable dense de $[a, b]$ suffit pour caractériser ce processus.

5.1.2 Nous rappelons ici les définitions suivantes introduites par E. Slutsky [59] (p. 185) et reproduites par A. Fuchs [29] (p. 161).

DÉFINITION 5.1.2.A. — On dit que la fonction aléatoire réelle $x(t, \omega)$ ($t \in \mathbb{R}$) est localement continue en probabilité au point t_0 si à tout couple $(\varepsilon, \eta) > 0$, on peut associer un voisinage ouvert $I(t_0, \varepsilon, \eta)$ de t_0 tel que :

$$\text{Prob} [\omega ; |x(t, \omega) - x(t_0, \omega)| \geq \varepsilon] < \eta \quad \forall t \in I(t_0, \varepsilon, \eta).$$

E. Slutsky ([59], p. 186) a alors démontré le théorème suivant.

THÉORÈME 5.1.2.B. — Si la fonction aléatoire $x(t, \omega)$ est localement continue en probabilité en tout point d'un intervalle compact $[a, b]$, elle est nécessairement uniformément continue en probabilité dans cet intervalle; c'est-à-dire que la mesure du voisinage ouvert $I(t_0, \varepsilon, \eta)$ peut être choisie indépendamment de t_0 .

On notera en particulier qu'il en est bien ainsi si $x(t, \omega) \in L^r(\Omega)$ pour tout t et si $E |x(t, \omega) - x(t+h, \omega)|^r \rightarrow 0$ uniformément en h pour tous t et $t+h \in [a, b]$.

5.1.3 Nous pouvons maintenant définir notre méthode.

Si $x(t, \omega)$ est une fonction presque sûrement continue sur $[0, 1]$, nulle en 0 et 1, elle est somme de la série de Schauder presque sûrement uniformément convergente

$\sum_{n=1}^{+\infty} \eta_n(\omega) e_n(t)$, les variables $\eta_n(\omega)$ se déduisant des

valeurs aléatoires de $x(t, \omega)$ sur \mathcal{D} . De plus, comme on l'a vu en 2.3.1, la convergence uniforme presque sûre de la série de Schauder équivaut à la continuité uniforme presque sûre sur \mathcal{D} .

Or cette dernière condition est un événement dont on peut parfaitement définir la probabilité.

Nous avons vu en 2.3.1 que cette condition s'exprime par :

$$\inf_{q \geq 1} \sup_{k \geq 1} \sup_{p, l} \left| x\left(\frac{p}{2^q} + \frac{l}{2^{q+k}}, \omega\right) - x\left(\frac{p}{2^q}, \omega\right) \right| = 0$$

pour p et l entiers tels que $0 \leq p \leq 2^q$, $1 \leq l \leq 2^k$.

Il est facile de voir que la réalisation de cet événement s'exprime en termes d'unions et d'intersections dénombrables d'ensembles mesurables.

Il résulte alors des théorèmes de Doob cités plus haut le théorème suivant.

THÉORÈME 5.1.3.A. — Soit $x(t, \omega)$ une fonction aléatoire presque sûrement continue sur $[0, 1]$, alors :

- 1° $x(t, \omega)$ est continue en probabilité pour tout t ,
- 2° le processus $x(t, \omega)$ est séparable et mesurable $m \times P$.

Le premier point est évident; la séparabilité du processus découle du fait que

$$(2.1.1.2) \quad \sup_{t \in [0,1]} x(t, \omega) = \sup_{t \in \mathcal{D}} x(t, \omega), \quad \inf_{t \in [0,1]} x(t, \omega) = \inf_{t \in \mathcal{D}} x(t, \omega);$$

on peut facilement adapter la démonstration donnée en 2.1.1.2 pour prouver que la conclusion reste valable si l'on remplace $[0, 1]$ par $I \cap [0, 1]$ où I est un ouvert. La mesurabilité $m \times P$ de $x(t, \omega)$ résulte alors du théorème de Doob cité plus haut; elle peut d'ailleurs être prouvée directement si l'on remarque que $x(t, \omega)$ est limite d'une suite de sommes de fonctions mesurables $m \times P$.

Notre méthode sera donc la suivante : nous nous donnerons une fonction aléatoire $x(t, \omega)$ continue en probabilité pour tout $t \in [0, 1]$; la loi temporelle nous permettra de définir la suite de variables aléatoires $x(t_n, \omega)$ $t_n \in \mathcal{D}$, nous définirons alors une condition suffisante (C) impliquant la continuité presque sûre de la suite $\{ x(t_n, \omega) \}$ sur \mathcal{D} . L'extension continue à $[0, 1]$ constituera alors la version séparable et mesurable $m \times P$ de $x(t, \omega)$.

Nous résumons cette méthode par le théorème suivant.

THÉORÈME 5.1.3.B. — Soit $x(t, \omega)$ une fonction localement continue en probabilité pour tout $t \in [0, 1]$, nulle en 0 et 1 ⁽²⁾, telle que la suite $\{ x(t_n, \omega) \}$ soit presque sûrement continue sur \mathcal{D} . Alors :

$$1^\circ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \eta_n(\omega) e_n(t) \text{ converge uniformément en } t \text{ presque sûrement vers une}$$

fonction aléatoire $x(t, \omega)$ mesurable $m \times P$, presque sûrement continue sur $[0, 1]$.

2° $x(t, \omega)$ est équivalente en probabilité pour un t donné à la fonction de départ $x(t, \omega)$ et a donc même loi temporelle.

⁽²⁾ Cette condition n'est nullement essentielle; tous les résultats qui suivent s'étendent facilement à l'espace $C[a, b]$. Ils s'étendent également au cas où $x(t, \omega)$ est à valeurs complexes.

5.2 Conditions suffisantes de continuité presque sûre des fonctions aléatoires.

5.2.0 Utilisons en les adaptant les notations définies en 2.1.2.2 et 2.2.3 soit :

$$A'_{q_k}(\omega) = \sup_{p,l} \left| x\left(\frac{p}{2^{q_k}} + \frac{l}{2^{q_{k+1}}}, \omega\right) - x\left(\frac{p}{2^{q_k}}, \omega\right) \right|$$

où p et l entiers tels que $0 \leq p < 2^{q_k}$, $1 \leq l \leq 2^{q_{k+1}-q_k}$.

$$B'_{q_k}(\omega) = \sup_{2^{q_k} \leq j < 2^{q_{k+1}}} |x_{2^{q_{k+1}-1}}(t_j, \omega) - x_{2^{q_k-1}}(t_j, \omega)|$$

$$A_q(\omega) = \sup_{0 \leq p < 2^{q-1}} |\xi_p(\omega)| = \sup_p \left| x\left(\frac{p+1}{2^{q-1}}, \omega\right) - x\left(\frac{p}{2^{q-1}}, \omega\right) \right|;$$

$$B_q(\omega) = \sup_{n \in \mathbb{N}_q} |\eta_n(\omega)|$$

($q_0 = 0 < q_1 < q_2 \dots < q_k < q_{k+1}$ $q_k \rightarrow +\infty$ lorsque $k \rightarrow +\infty$).

Utilisant les propositions 2.3.2.A et 2.3.2.B établies pour $C_0[0, 1]$ et la proposition générale 3.3.C relative à la convergence presque sûre des séries de Schauder à coefficients aléatoires dans les espaces à base monotone, il vient :

PROPOSITION 5.2.0.A. — Soit $x(t, \omega)$ une fonction aléatoire réelle définie sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$, telle que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} E^\beta [A'_{q_k}(\omega)]^r < +\infty \quad \text{ou équivalamment :}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} E^\beta [B'_{q_k}(\omega)]^r < +\infty \quad \text{où } r > 0, \beta = \min \left[1, \frac{1}{r} \right].$$

Alors :

1° $x(t, \omega)$ est presque sûrement continue sur \mathcal{D} et peut être prolongée en une fonction presque sûrement continue sur $[0, 1]$, nulle en 0 et 1, cette extension étant réalisée par la série de Schauder presque sûrement uniformément convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \eta_n(\omega) e_n(t).$$

2° On a de plus :
$$\sum_{k=0}^{\infty} [A_{q_k}(\omega)]^\alpha < +\infty \quad \text{presque sûrement}$$

ou équivalamment
$$\sum_{k=0}^{\infty} [B'_{q_k}(\omega)]^\alpha < +\infty \quad \text{presque sûrement}$$

(où $\alpha = \inf [1, r]$).

3° La fonction $x(t, \omega)$ ainsi définie appartient donc presque sûrement à l'espace de Banach $\Lambda(q_k)$ des éléments de $C_0[0, 1]$ tels que :

$$\|x(t)\|_{\Lambda(q_k)} = \sum_{k=0}^{\infty} A'_{q_k} < +\infty.$$

4° On peut écrire l'inégalité :

$$E^\beta \|x(t, \omega)\|^r \leq E^\beta \|x(t, \omega)\|_{\Lambda(q_k)}^r \leq \sum_{k=0}^{+\infty} E^\beta [A'_{q_k}(\omega)]^r.$$

5° La fonction aléatoire $x(t, \omega)$ est telle que sur $[0, 1]$

$$\lim_{h \rightarrow 0} E |x(t+h, \omega) - x(t, \omega)|^r = 0 \quad \text{uniformément en } t.$$

Les conditions imposées impliquent la deuxième conclusion du théorème 3.1.1.B d'où résultent alors le 3° et le 1°. L'intégrabilité des normes résulte du résultat établi en 3.3.C (relation (3.3.7) ainsi que les inégalités écrites.

Pour prouver le 5°, nous reprenons la méthode donnée en 2.4; si h est tel que $\frac{1}{2^{q_{k+1}}} \leq |h| < \frac{1}{2^{q_k}}$, il en résulte que :

$$|x(t+h, \omega) - x(t, \omega)| \leq 2 \sum_{j=k}^{+\infty} A'_{q_j}(\omega)$$

d'où :
$$E^\beta |x(t+h, \omega) - x(t, \omega)|^r \leq 2 \sum_{j=k}^{+\infty} E^\beta (A'_{q_j}(\omega))^r.$$

Le terme de droite tend vers zéro avec h étant donné la convergence de

la série $\sum_{k=0}^{+\infty} E^\beta (A'_{q_k}(\omega))^r$; ceci achève la démonstration.

Le critère ainsi énoncé est tout à fait général et s'appliquera en particulier aux fonctions aléatoires normales au paragraphe 5.3. Le critère suivant

établi par M. J. Kampé de Fériet ([40], p. 150 et [43]) en est un cas particulier dans le cas de la suite $q_k = k$.

COROLLAIRE 5.2.0.B. — *Les conditions équivalentes :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} E^\beta [A_q(\omega)]^r < +\infty \quad \text{ou} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} E^\beta [B_q(\omega)]^r < +\infty, \quad \beta = \min \left(1, \frac{1}{r} \right)$$

impliquent la continuité presque sûre de $x(t, \omega)$ sur \mathcal{D} , donc la convergence presque sûre de la série de Schauder vers une fonction presque sûrement continue sur $[0, 1]$ (et tous les résultats de la proposition 5.2.0.A en y remplaçant q_k par k).

Nous allons maintenant nous borner à ce dernier cas en en déduisant un certain nombre de conséquences ⁽³⁾.

5.2.1 Nous avons vu au lemme 3.5.1.A que si $\{x_i(\omega)\} = i = 1, 2 \dots m$ désigne une suite de variables aléatoires $\in L^r(\Omega)$ alors :

$$E^\beta \left[\sup_{1 \leq i \leq m} |x_i(\omega)|^r \right] \leq m^\beta \sup_{1 \leq i \leq m} E^\beta |x_i(\omega)|^r.$$

Posons alors :

$$L_q^{(r)} = \sup_{n \in \mathbb{N}_q} E^\beta |\xi_n(\omega)|^r \quad M_q^{(r)} = \sup_{n \in \mathbb{N}_q} E^\beta |\eta_n(\omega)|^r$$

et utilisons l'inégalité ci-dessus : il vient donc

$$E^\beta [A_q(\omega)]^r = E^\beta \left[\sup_{n \in \mathbb{N}_q} |\xi_n(\omega)|^r \right] \leq 2^{\beta(q-1)} L_q^{(r)}$$

$$E^\beta [B_q(\omega)]^r = E^\beta \left[\sup_{n \in \mathbb{N}_q} |\eta_n(\omega)|^r \right] \leq 2^{\beta(q-1)} M_q^{(r)}.$$

Le résultat qui suit découle alors directement du corollaire 5.2.0.B déjà prouvé par J. Kampé de Fériet [40] (p. 151) dans le cas $r \geq 1$.

PROPOSITION 5.2.1.A. — *Si $x(t, \omega)$ désigne une fonction aléatoire définie sur \mathcal{D} , telle que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite*

$$\sum_{q=1}^{+\infty} 2^{\beta(q-1)} L_q^{(r)} < +\infty \quad \text{ou} \quad \sum_{q=1}^{+\infty} 2^{\beta(q-1)} M_q^{(r)} < +\infty \quad r > 0, \quad B = \min \left(1, \frac{1}{r} \right) \quad (4)$$

⁽³⁾ On vérifie facilement que la considération de suites $\{q_k\}$ plus générales n'apporte aucune amélioration dans ce qui suit; il en est tout autrement dans le cas des fonctions aléatoires normales.

⁽⁴⁾ On vérifie facilement que ces conditions sont équivalentes si $r > 1$ en reprenant la méthode de 2.2.1 transposée en termes de moments d'ordre r .

alors, nous obtenons les conséquences suivantes :

1° $\sum_{q=1}^{+\infty} A_q(\omega) < +\infty$ presque sûrement d'où $x(t, \omega)$ est presque sûrement

continue sur \mathfrak{D} et la série de Schauder $\sum_{n=1}^{+\infty} \eta_n(\omega) e_n(t)$ converge donc uniformément presque sûrement sur $[0,1]$ vers une fonction $x(t, \omega)$ presque sûrement continue.

2° Cette fonction appartient presque sûrement à l'espace de Banach $\Lambda(q)$ des éléments de $C_0[0, 1]$ tels que :

$$\|x(t)\|_{\Lambda(q)} = \sum_{q=1}^{+\infty} A_q < +\infty.$$

3° $\|x(t, \omega)\|$ et $\|x(t, \omega)\|_{\Lambda(q)} \in L^r(\Omega)$ et l'on a :

$$E^{\beta} \|x(t, \omega)\|^r \leq E^{\beta} \|x(t, \omega)\|_{\Lambda(q)}^r \leq \sum_{q=1}^{+\infty} 2^{(q-1)\beta} L_q^{(r)} \text{ (5)}.$$

4° $E|x(t+h, \omega) - x(t, \omega)|^r = o(|h|)$ quand $h \rightarrow 0$.

Seul le quatrième point reste à prouver; supposons t et $t+h$ ($t < t+h$) fixés, il est alors possible de trouver q tel que $\frac{1}{2^{q+1}} \leq h < \frac{1}{2^q}$. Deux cas sont alors possibles :

$$\frac{p}{2^q} \leq t < t+h \leq \frac{p+1}{2^q} \quad \text{ou} \quad \frac{p}{2^q} \leq t < \frac{p+1}{2^q} \leq t+h < \frac{p+2}{2^q}.$$

Nous pouvons écrire d'après ce qui précède l'expression de $x(t, \omega)$ et $x(t+h, \omega)$ sous la forme de deux séries presque sûrement convergentes :

$$x(t, \omega) = x\left(\frac{p}{2^q}, \omega\right) + \sum_{j=q+2}^{+\infty} \xi_{n_j}(\omega)$$

$$x(t+h, \omega) = x\left(\frac{p}{2^q}, \omega\right) + a_1 \left[x\left(\frac{p+1}{2^q}, \omega\right) - x\left(\frac{p}{2^q}, \omega\right) \right] + \sum_{i=q+2}^{+\infty} \xi_{n_i}(\omega)$$

($a_1 = 0$ ou 1)

(5) $\|x(t, \omega)\|$ désigne la norme habituelle de la convergence uniforme.

d'où résulte l'inégalité :

$$|x(t+h, \omega) - x(t, \omega)| \leq \sum_{j=q+2}^{+\infty} |\xi_{n_j}(\omega)| + \sum_{j=q+1}^{+\infty} |\xi_{n_j}(\omega)| \leq 2 \sum_{j=q+1}^{+\infty} A_j(\omega).$$

Cette dernière série majorante appartient à $L^r(\Omega)$; il nous est donc possible d'écrire :

$$E^\beta |x(t+h, \omega) - x(t, \omega)|^r \leq \sum_{j=q+2}^{+\infty} E^\beta |\xi_{n_j}(\omega)|^r + \sum_{j=q+1}^{+\infty} E^\beta |\xi_{n_j}(\omega)|^r.$$

Or : $E^\beta |\xi_{n_q}(\omega)|^r \leq L_q^{(r)}$ d'après la définition de cette quantité ; il en résulte l'inégalité :

$$E^\beta |x(t+h, \omega) - x(t, \omega)|^r \leq 2 \sum_{j=q+1}^{+\infty} L_j^{(r)} \leq \frac{2}{2^{\beta(q+1)}} \sum_{j=q+1}^{+\infty} 2^{\beta j} L_j^{(r)}$$

$$E^\beta |x(t+h, \omega) - x(t, \omega)|^r \leq 2 |h|^\beta \sum_{j=q+1}^{+\infty} 2^{\beta j} L_j^{(r)}.$$

La série $\sum_{q=1}^{+\infty} 2^{\beta q} L_q^{(r)}$ étant convergente, la quantité $\sum_{j=q+1}^{+\infty} 2^{\beta j} L_j^{(r)}$ tend vers 0 avec $1/q$ donc avec h ; il en résulte donc bien que :

$$E^\beta |x(t+h, \omega) - x(t, \omega)|^r = o(|h|)$$

si ce critère est vérifié.

Le premier résultat avait d'ailleurs déjà été prouvé dans le cas où $r \geq 1$ par J. Kampé de Fériet ([40], p. 151).

5.2.2 En sens inverse, il nous est maintenant possible d'en déduire un résultat classique de A. N. Kolmogoroff et E. Slutsky ⁽⁶⁾.

COROLLAIRE 5.2.2.A. — Soit $x(t, \omega)$ une fonction aléatoire définie sur $[0, 1]$, telle que $\forall t$ et $t+h \in [0, 1]$, pour $|h| \leq \delta$:

$$E |x(t+h, \omega) - x(t, \omega)|^r \leq C\varphi(|h|) \quad \text{où :} \quad \varphi(h) = |h|^{1+\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0) \quad (7)$$

ou $|h| [|\log |h||]^{-\alpha-\varepsilon}$ ⁽⁸⁾ avec $\alpha = \sup(1, r)$.

⁽⁶⁾ Ce théorème a été prouvé pour la première fois par A. N. Kolmogoroff dans une conférence donnée à l'Université de Moscou en 1934; la démonstration est reproduite dans le mémoire de E. Slutsky [59] (p. 193).

⁽⁷⁾ Selon R. L. Dobrushin [18] (p. 92), des contre-exemples auraient été donnés prouvant qu'il n'était pas possible de faire $\varepsilon = 0$ dans le cas général.

⁽⁸⁾ Cette seconde forme de $\varphi(h)$ résulte de M. Loève [52] dans le traité de M. P. Lévy cité (p. 329-331).

Alors la version séparable $\tilde{x}(t, \omega)$ du processus $x(t, \omega)$ est presque sûrement continue et possède toutes les propriétés énoncées au théorème 5.3.1.A.

Il nous est possible de compléter ce résultat en y ajoutant quelques précisions sur le module de continuité de la fonction aléatoire $\tilde{x}(t, \omega)$ ainsi définie.

COROLLAIRE 5.2.2.B. — Si $E |x(t+h, \omega) - x(t, \omega)|^r \leq C |h|^{1+\varepsilon}$ (respectivement $C |h| [|\log |h||]^{-\alpha-\varepsilon}$) alors si $\varepsilon' < \varepsilon$, $\gamma = \sup \left[1, \frac{1}{r}\right]$, la version séparable $\tilde{x}(t, \omega)$ est telle que presque sûrement :

$$|\tilde{x}(t+h, \omega) - \tilde{x}(t, \omega)| = o [|\log |h||^{(1+\varepsilon)\gamma} |h|^{\varepsilon/r}]$$

(respectivement $o (|\log |h||^{-\varepsilon'/r})$).

Ce résultat découle du théorème suivant plus général :

THÉORÈME 5.2.2.C. — Si la fonction aléatoire $x(t, \omega)$ est telle que :

$$(I) \quad \sum_{q=1}^{+\infty} \left(\varphi \left[\frac{1}{2^{q+1}} \right] \right)^{-1} E^\beta [A_q(\omega)]^r < +\infty \quad \text{ou :}$$

$$(II) \quad \sum_{q=1}^{+\infty} 2^{q\beta} \left(\varphi \left[\frac{1}{2^{q+1}} \right] \right)^{-1} L_q^{(r)} < +\infty$$

alors, presque sûrement :

1° $|x(t+h, \omega) - x(t, \omega)| \leq A(\omega) [\varphi(|h|)]^\gamma$ où $\gamma = \sup \left(\frac{1}{r}, 1 \right)$, $A(\omega) \in L^r(\Omega)$, ceci pour $|h| \leq \delta$ fixe suffisamment petit.

2° $|x(t+h, \omega) - x(t, \omega)| = o(|\varphi(|h|)|^\gamma)$ quand $h \rightarrow 0$.

Ce résultat est valable si $\varphi(h)$ est supposée non décroissante pour $h \geq 0$ et tend vers zéro lorsque $h \rightarrow 0$ par valeurs positives.

Étant donné les conditions (I) ou (II) et le critère de convergence presque sûre 3.1.1.B, il en résulte que, presque sûrement :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \left[\varphi \left(\frac{1}{2^{q+1}} \right) \right]^{-1} A_r^q(\omega) < +\infty \quad \text{si } r \leq 1$$

Une généralisation intéressante des résultats précédents a été donnée par N. N. Chentsov [8] (p. 140) sous la forme suivante :

Si $E [|x(t_1, \omega) - x(t_2, \omega)|^p |x(t_2, \omega) - x(t_3, \omega)|^q] < C |t_1 - t_3|^{1+r}$, $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$, $t_1 < t_2 < t_3$, alors la version séparable n'a pas de discontinuités de seconde espèce, ceci presque sûrement.

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \left[\varphi \left(\frac{1}{2^{q+1}} \right) \right]^{-1} A_q(\omega) < +\infty \quad \text{si } r \geq 1$$

soit, dans tous les cas :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \left[\varphi \left(\frac{1}{2^{q+1}} \right) \right]^{-\gamma} A_q(\omega) < +\infty, \quad \gamma = \sup \left[1, \frac{1}{r} \right].$$

Désignant par $a(\omega)$ cette quantité, les conditions imposées montrent que $a(\omega) \in L^r(\Omega)$. Posant alors $A(\omega) = 3a(\omega)$, le résultat énoncé est une conséquence immédiate du théorème 2.4.

5.3 Continuité presque sûre des fonctions aléatoires normales possédant une covariance continue donnée.

Reprenant la méthode du paragraphe précédent, nous nous donnons une covariance $\Gamma(t, s)$ continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$ nulle sur la frontière; les valeurs de cette covariance nous permettent de définir la suite de variables aléatoires normales $x(t_n, \omega)$ ($t_n \in \mathcal{D}$), d'espérances mathématiques nulles, admettant pour covariance les valeurs de $\Gamma(t, s)$ sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

Nous recherchons alors des conditions suffisantes de continuité uniforme presque sûre sur \mathcal{D} de cette suite, *conditions traduites en termes de module de continuité de la covariance*; l'extension continue à $[0, 1]$ de cette fonction admet alors une covariance continue (5.3.1.A) coïncidant avec $\Gamma(t, s)$ sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ donc partout sur $[0, 1] \times [0, 1]$. Le résultat essentiel est le suivant :

Si $\Gamma(t, s)$ est une covariance continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$, telle que :

$$\gamma(t+h, t) = \Gamma(t+h, t+h) + \Gamma(t, t) - 2\Gamma(t, t+h) \leq \varphi(|h|)$$

$$\text{où } \varphi(|h|) = C[|\log|h||]^{-1-\varepsilon} \text{ ou } C[|\log|h||]^{-1} \times |\log|\log|h||^{-2-\varepsilon}$$

pour h suffisamment petit alors la version séparable $x(t, \omega)$ de la fonction normale d'espérance mathématique nulle, de covariance $\Gamma(t, s)$, est presque sûrement continue.

Nous verrons que ce résultat ne peut être substantiellement amélioré dans le cadre de cette étude générale ⁽⁹⁾.

Nous commencerons par donner des conditions nécessaires mais non suffisantes de continuité presque sûre, puis étudierons des conditions suffi-

⁽⁹⁾ Ceci en l'absence de renseignements plus précis sur la nature de la fonction aléatoire; si $\Gamma(t, s) = g(t)g(s)$, $x(t, \omega) = g(t)\xi(\omega)$ est presque sûrement continue si et seulement si $g(t)$ donc $\Gamma(t, s)$ est continue ($\xi(\omega)$ variable aléatoire normale réduite).

santes; nous concluons en donnant quelques précisions relatives au module de continuité.

Les résultats de ce paragraphe généralisent et précisent ceux de nos notes antérieures [13] et [15].

5.3.1 *Conditions nécessaires de continuité uniforme presque sûre d'une fonction aléatoire normale.*

THÉORÈME 5.3.1.A. — Si $x(t, \omega)$ désigne une fonction aléatoire normale presque sûrement continue en un point t (ou sur un intervalle $[a, b]$ ou un sous-ensemble dense Δ de cet intervalle), alors :

- 1° $E[x(t, \omega)]$ est continue au point t (resp. sur $[a, b]$ ou Δ);
- 2° $\Gamma(t, s)$ est continue au point (t, t) (resp. sur $[a, b] \times [a, b]$ ou $\Delta \times \Delta$).

Considérons en effet une suite quelconque de points de $[a, b]$ $\tau_1, \tau_2 \dots \tau_n \dots$ tendant vers t ; par hypothèse la suite de variables aléatoires normales $v_n(\omega) = x(\tau_n, \omega) - x(t, \omega)$ tend presque sûrement vers zéro; il résulte donc du lemme 3.4.2.A que :

$$E(v_n(\omega)) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad E[(v_n(\omega)) - E(v_n(\omega))]^2 \rightarrow 0$$

ceci quelle que soit la suite $\tau_1 \dots \tau_n$, donc $E(x(\tau_n, \omega)) \rightarrow E(x(t, \omega))$; la seconde quantité n'est autre que $\Gamma(\tau_n, \tau_n) - 2\Gamma(\tau_n, t) + \Gamma(t, t)$ qui tend également vers zéro quelle que soit la suite (τ_n) envisagée.

Ceci prouve que la continuité est nécessaire.

On pourra désormais supposer dans tout ce qui suit que :

$E[x(t, \omega)] = m(t) \equiv 0$; si tel n'est pas le cas, il suffira de remplacer $x(t, \omega)$ par $y(t, \omega) = x(t, \omega) - m(t)$ qui a même covariance.

Dans le cas où $x(t, \omega)$ est continue sur $[0, 1]$ presque sûrement, on peut reprendre le théorème précédent sous une autre forme en utilisant les résultats du chapitre IV, théorème 4.2.4.

Définissons par $x_n(t, \omega) = \sum_{j=1}^n \eta_j(\omega)e_j(t)$ la $n^{\text{ième}}$ somme de Schauder de

covariance $\Gamma_n(t, s)$ définie par $\Gamma_n(t, s) = \sum_{i,j=1}^n \gamma_{ij}e_i(t)e_j(s)$.

La continuité de $\Gamma(t, s)$ équivaut à la convergence uniforme de la suite $\Gamma_n(t, s)$ vers $\Gamma(t, s)$; donc la convergence uniforme presque sûre de la suite de fonctions aléatoires normales $x_n(t, \omega)$, implique la convergence uniforme de la suite des covariances.

Ceci n'est d'ailleurs qu'un cas particulier du théorème suivant plus général qui interviendra au chapitre suivant.

THÉORÈME 5.3.1.B. — Si $\{x_n(t, \omega)\}$ désigne une suite de fonctions aléatoires normales presque sûrement continues sur $[a, b]$, convergeant uniformément presque sûrement vers $x(t, \omega)$, alors :

1° $E[x_n(t, \omega)] \rightarrow E[x(t, \omega)]$ uniformément en t .

2° $\Gamma_n(t, s) \rightarrow \Gamma(t, s)$ uniformément en t et s .

Introduisons les variables aléatoires suivantes :

$$v_n(t, \omega) = x_n(t, \omega) - x(t, \omega).$$

$$u_n(\omega) = \sup_{t \in [a, b]} |\exp(iv_n(t, \omega)) - 1| = \|\exp(iv_n(t, \omega)) - 1\|.$$

Par hypothèse $u_n(\omega)$ tend vers zéro presque sûrement en étant majorée par 2, donc :

$$E[u_n(\omega)] \rightarrow 0$$

d'où : $\|E(\exp(iv_n(t, \omega)) - 1)\| \leq E|u_n(\omega)| \rightarrow 0$.

Or : $E(\exp(iv_n(t, \omega)) - 1) = \exp\left[im_n(t) - \frac{\sigma_n^2(t)}{2}\right]$

où : $m_n(t) = E[x_n(t, \omega) - x(t, \omega)]$, $\sigma_n^2(t) = \text{Variance}(x_n(t, \omega) - x(t, \omega))$.

Donc $m_n(t)$ et $\sigma_n(t)$ tendent vers zéro uniformément. Posant :

$$y_n(t, \omega) = x_n(t, \omega) - m_n(t); \quad y(t, \omega) = x(t, \omega) - m(t),$$

et utilisant l'inégalité élémentaire :

$$\|E^{1/2}|y_n^2(t, \omega)| - E^{1/2}|y^2(t, \omega)|\| \leq \|\sigma_n(t)\|,$$

on voit que $\Gamma_n(t, t) \rightarrow \Gamma(t, t)$ uniformément en t .

Remplaçant alors dans ce qui précède $x_n(t, \omega)$ et $x(t, \omega)$ par $x_n(t, \omega) - x_n(s, \omega)$ et $x(t, \omega) - x(s, \omega)$, on montre de même que :

$$\Gamma_n(t, t) - 2\Gamma_n(t, s) + \Gamma_n(s, s) \rightarrow \Gamma(t, t) - 2\Gamma(t, s) + \Gamma(s, s)$$

uniformément en t et s , ce qui achève la démonstration.

La réciproque de ces deux théorèmes est inexacte comme le prouve l'exemple suivant que nous devons à M. Kampé de Fériet.

Considérons la série de Schauder aléatoire $\sum_{q=0}^{+\infty} \eta_{2^q}(\omega) e_{2^q}(t)$ où $\eta_{2^q}(\omega)$

désigne une suite de variables aléatoires normales indépendantes, d'espérances mathématiques nulles, de variances $\sigma_q^2 \rightarrow 0$ lorsque $q \rightarrow +\infty$.

La somme de cette série est bien définie pour tout $t \in \mathcal{D}$; de plus, les méthodes du chapitre II montrent que si nous posons :

$$y_q(t, \omega) = \sum_{j=0}^q \eta_{2^j}(\omega) e_{2^j}(t), \quad \text{alors pour un } \omega \text{ fixé,}$$

la suite $\{y_q(t, \omega)\}$ de sommes partielles est représentée par une suite de lignes polygonales $P_0 P_1 P_2 \dots P_q$, la ligne P_{q+1} se déduisant de la ligne P_q en remplaçant la droite OA_q de sommets O et A_q , par le triangle $OA_{q+1}A_q$ (le point A_q ayant pour coordonnées $\frac{1}{2^q}$ et $x\left(\frac{1}{2^q}, \omega\right)$). Dès lors, $y_{q+1}(t, \omega) = y_q(t, \omega)$

pour tout $t \geq \frac{1}{2^q}$; la condition de continuité presque sûre de $x(t, \omega)$ équivaut donc à :

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \eta_{2^q}(\omega) = 0 \text{ presque sûrement.}$$

De même $y_q(t, \omega)$ a pour covariance $\Gamma_q(t, s) = \sum_{j=0}^q \sigma_j^2 e_{2^j}(t) e_{2^j}(s)$; il résulte du chapitre IV que la condition nécessaire et suffisante de continuité de la covariance limite est donnée par $\sum_{q=0}^{+\infty} \sigma_q^2 e_{2^q}(t) < +\infty$ uniformément en t .

Cette dernière série est majorée par $\sum_{q=0}^{\infty} \sigma_q^2 e_{2^q}(t)$ d'où la condition nécessaire et suffisante de convergence uniforme de la série des covariances est donnée par $\lim_{q \rightarrow +\infty} \sigma_q = 0$.

En résumé, pour que la fonction aléatoire somme de la série de Schauder soit continue, il faut et il suffit que $\lim_{q \rightarrow +\infty} \eta_{2^q}(\omega) = 0$ presque sûrement.

Pour que sa covariance soit continue, il faut et il suffit que $\lim_{q \rightarrow +\infty} \sigma_q = 0$.

Or, comme on l'a vu en 3.4.3, ces conditions ne sont nullement équivalentes car de l'indépendance des variables $\eta_{2^q}(\omega)$, il résulte que la condition nécessaire et suffisante de convergence presque sûre vers zéro est donnée par :

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \sigma_q \exp \left[-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma_q^2} \right] < +\infty \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Il est alors facile (voir 3.4.3 remarque finale) de donner un exemple où $\sigma_q \rightarrow 0$ bien que la série diverge.

5.3.2 Conditions suffisantes de continuité uniforme presque sûre sur \mathcal{D} .

Nous reprenons les notations de 5.2.0 et de 4.2.2, soit :

$$A'_{q_k}(\omega) = \sup_{p,l} \left| x\left(\frac{p}{2^{q_k}} + \frac{l}{2^{q_{k+1}}}, \omega\right) - x\left(\frac{p}{2^{q_k}}, \omega\right) \right|$$

$$G'_{q_k} = \sup_{p,l} E^{1/2} \left| x\left(\frac{p}{2^{q_k}} + \frac{l}{2^{q_{k+1}}}, \omega\right) - x\left(\frac{p}{2^{q_k}}, \omega\right) \right|^2$$

pour p et l entiers tels que $0 \leq p < 2^{q_k}$, $1 \leq l \leq 2^{q_{k+1}-q_k}$.

$$B'_{q_k}(\omega) = \sup_j |x(t_j, \omega) - x_{2^{q_{k-1}}}(t_j, \omega)|$$

$$H'_{q_k} = \sup_j (E |x(t_j, \omega) - x_{2^{q_{k-1}}}(t_j, \omega)|^2)^{1/2}, \text{ pour } t_j \in \mathcal{D} | 2^{q_k} \leq j < 2^{q_{k+1}}.$$

$A'_{q_k}(\omega)$ et $B'_{q_k}(\omega)$ sont respectivement supremums de $2^{q_{k+1}}$ et $2^{q_{k+1}} - 2^{q_k}$ variables aléatoires normales d'espérances mathématiques nulles.

Appliquant l'inégalité du théorème 3.5.2.A

$$E^{1/r} \left[\sup_{1 \leq j \leq m} |x_j(\omega)|^r \right] \leq C_r [\log(m+1)]^{1/2} \sup_{1 \leq j \leq m} \sigma_j, \quad r \geq 1,$$

il vient facilement :

$$E^{1/r} [A'_{q_k}(\omega)]^r \leq K'_r \sqrt{q_{k+1}} G'_{q_k}, \quad E^{1/r} [B'_{q_k}(\omega)]^r \leq K''_r \sqrt{q_{k+1}} H'_{q_k}$$

K'_r et K''_r désignant des constantes numériques.

Utilisant alors la proposition 5.2.0.A, il vient :

PROPOSITION 5.3.2. — Soit $\Gamma(t, s)$ une covariance continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$, nulle sur la frontière telle que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{q_{k+1}} G'_{q_k} < +\infty \quad \text{ou} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{q_{k+1}} H'_{q_k} < +\infty \quad (10).$$

Alors :

1° La suite de variables aléatoires normales $x(t_n, \omega)$, d'espérances mathématiques nulles, vérifie presque sûrement les conditions :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} A'_{q_k}(\omega) < +\infty \quad \text{ou} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} B'_{q_k}(\omega) < +\infty.$$

(10) On a vu en 4.3.3.C que ces conditions sont équivalentes si $\frac{q_{k+1}}{q_k} \leq C$ ce qui correspond aux cas pratiquement étudiés ci-dessous.

2° Elle est donc presque sûrement continue sur \mathcal{D} et peut être étendue en une fonction $x(t, \omega)$ presque sûrement continue sur $[0, 1]$, nulle en 0 et 1, d'espérance nulle et de covariance $\Gamma(t, s)$.

3° Cette extension est réalisée par la série de Schauder presque sûrement

uniformément convergente
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \eta_n(\omega) e_n(t).$$

4° Si $\|x(t, \omega)\|$ et $\|x(t, \omega)\|_{\Lambda(q_k)}$ désignent les normes définies en 5.2.0.A, ces normes $\in L^r(\Omega) \forall r \geq 1$ et vérifient les inégalités :

$$E^{1/r} \|x(t, \omega)\|^r \leq E^{1/r} \|x(t, \omega)\|_{\Lambda(q_k)}^r \leq K_r' \sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{q_{k+1}} G'_{q_k}.$$

Cet énoncé appelle les remarques suivantes.

Remarque 1. — La dernière égalité est fondamentale; elle nous permettra d'étudier au chapitre suivant la convergence uniforme presque sûre des séries de fonctions aléatoires normales.

Remarque 2. — La première conclusion prouve que nos conditions reviennent à concentrer toute la mesure probabiliste dans un certain sous-espace $\Lambda(q_k)$ de l'espace $C_0[0, 1]$.

La convergence uniforme presque sûre de la série de Schauder résulte alors de la convergence forte presque sûre dans ce sous-espace. Nous retrouverons un point de vue analogue au chapitre suivant.

Remarque 3. — Comme on l'a vu en 4.3.3.C, la première condition implique notamment que $\sup_{|t-s| \leq h} \gamma(t, s) = o(|\log |h||^{-1})$.

Nous allons donc maintenant étudier, par ordre de généralité croissante des classes de plus en plus étendues de covariance vérifiant ces propriétés.

5.3.3 Exemples de covariances continues admettant une fonction aléatoire normale presque sûrement continue.

1° Choissant la suite $q_k = k$, on vérifie facilement que les propriétés énoncées ci-dessus sont vraies si :

$$\gamma(t, t+h) \leq C|h|^\alpha \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad \text{ou} \quad C[|\log |h||]^{-3-\varepsilon}, \\ C[|\log |h||]^{-3} [\log |\log |h||]^{-2-\varepsilon}, \text{ etc.} \quad (\varepsilon > 0).$$

On a ainsi une infinité de critères logarithmiques.

Dans chacun de ces cas, on a presque sûrement
$$\sum_{q=1}^{\infty} A_q(\omega) < +\infty$$

soit la convergence forte presque sûre dans l'espace de Banach $\Lambda(q)$. De plus, la série de Schauder définissant $x(t, \omega)$ est aussi absolument convergente.

A cette classe de fonctions aléatoires appartient notamment la fonction aléatoire du mouvement brownien comme l'ont montré P. Lévy ([47] et [48]) et J. Kampé de Fériet ([40] et [41]).

La condition $\gamma(t, t+h) \leq C[|\log|h||]^{-3-\varepsilon}$ avait d'ailleurs été déjà donnée par Yu K. Belyaev en se basant sur le lemme de Borel-Cantelli ([3], p. 341).

2° Utilisant la suite $q_k = k^r$ (où $r > \frac{2}{\varepsilon}$), il nous a été possible dans notre Note [15] d'étendre les résultats précédents au cas suivant :

$$\gamma(t, t+h) \leq C|\log|h||^{-1-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

Tous les résultats du théorème 4.3.2 s'appliquent en se plaçant dans l'espace de Banach $\Lambda(q^r)$.

Yu K. Belyaev [3] se basant sur les travaux de G. Hunt [31] avait prouvé un résultat très voisin dans le cas des processus stationnaires ⁽¹¹⁾ et estimait que la généralisation au cas d'une fonction aléatoire normale quelconque était très vraisemblable; le résultat nous semble toutefois nouveau.

3° Enfin, utilisant la suite $q_k = 2^k$, on aboutit ici encore à une infinité de critères logarithmiques et il ne semble guère possible d'aller au-delà. Notre critère s'énoncera dans ce cas sous la forme suivante :

Si $\gamma(t, t+h) \leq \varphi(|h|)$ où $\varphi(|h|)$ est définie par

$$C[|\log|h||^{-1}|\log|\log|h||]^{-2-\varepsilon}$$

ou : $C[|\log|h||^{-1}|\log|\log|h||^{-2}|\log|\log|\log|h||]^{-2-\varepsilon}$, etc.

alors la fonction aléatoire normale $x(t, \omega)$ somme de la série de Schauder est presque sûrement continue. Équivalamment ceci revient à concentrer une masse égale à 1 sur l'espace de Banach $\Lambda(2^k)$.

4° L'emploi de sous-suites d'ordre plus élevé mène à des critères plus restrictifs. En l'absence de renseignements complémentaires sur la nature du processus, il semble donc difficile d'améliorer ces résultats par notre méthode.

De plus, selon Yu K. Belyaev [2], étant donné une corrélation continue telle que $R(0) - R(h) \geq \frac{A}{|\log|h||}$ alors si la corrélation est concave, la version séparable du processus stationnaire correspondant est presque

⁽¹¹⁾ La condition posée par Belyaev était un peu plus restrictive, il remplaçait $\gamma(t, t+h)$ par $|\Gamma(t, t+h) - \Gamma(t, t)|$.

sûrement non bornée dans tout intervalle fini. Ceci montre que l'étude de la continuité presque sûre à partir du module de continuité de la covariance ne peut être substantiellement améliorée.

5.3.4 *Majorations du module de continuité.*

L'étude du module de continuité d'une fonction aléatoire peut être conduite de deux manières distinctes.

On peut tout d'abord montrer qu'à partir d'une certaine valeur fixe, on a pour presque tout ω

$$|x(t+h, \omega) - x(t, \omega)| \leq a(\omega) \varphi(|t-s|) \quad \text{pour } |t-s| \leq \delta;$$

$\varphi(h)$ désignant une fonction positive, tendant vers zéro, lorsque h tend vers zéro et $a(\omega)$ désignant une variable aléatoire obéissant à certaines conditions (par exemple de posséder des moments jusqu'à un ordre suffisamment élevé).

C'est la méthode que nous avons utilisée au paragraphe 5.2.2.

On peut aussi montrer qu'à partir d'une certaine valeur $\delta(\omega)$ aléatoire mais presque sûrement non nulle, on a :

$$|x(t, \omega) - x(s, \omega)| \leq \varphi(|t-s|) \quad \text{pour } |t-s| \leq \delta(\omega)$$

$\varphi(h)$ étant une fonction certaine possédant les propriétés définies ci-dessus.

Cette seconde méthode a en général été adoptée pour l'étude des fonctions aléatoires car elle se présente tout naturellement comme conséquence de l'emploi du lemme de Borel-Cantelli.

Les principaux résultats en la matière sont ceux relatifs à la fonction du mouvement brownien de Wiener-Lévy : N. Wiener [55] avait montré que cette fonction était presque sûrement lipschitzienne d'ordre $\alpha < \frac{1}{2}$ et non lipschitzienne d'ordre $\alpha > \frac{1}{2}$; ces résultats ont été précisés par A. N. Kolmogoroff [44] puis par P. Lévy ([48], p. 166-173, [49]) qui, utilisant la fonction

$\varphi_c(|h|) = c \sqrt{2|h| \log \frac{1}{|h|}}$ montra que pour tout $c > 1$, on avait presque sûrement $|x(t+h, \omega) - x(t, \omega)| \leq \varphi_c(|h|)$ pour $|h| \leq \delta(\omega)$ aléatoire, cette relation n'étant presque sûrement pas vérifiée si $c < 1$.

Des précisions relatives au cas $c = 1$ ont été données par T. Sirao [58] et un critère général a été dégagé par T. Sirao, Erdős et K. L. Chung [9].

Des études analogues ont été entreprises pour les équations différentielles stochastiques (voir par exemple A. Fuchs [29]) et les processus stationnaires (G. Hunt [31], Yu K. Belyaev [2]...).

On peut aussi étendre à certaines fonctions normales la méthode du lemme de Borel-Cantelli telle qu'elle est définie par exemple dans P. Lévy ([48],

p. 166-173) et R. Fortet et A. Blanc-Lapierre ([5], p. 118-122). On obtient ainsi des évaluations précises du module de continuité si :

$$\gamma(t, t+h) \leq C|h|^{2\alpha} \text{ ou } C|h|^{2\alpha} [|\log|h||]^{-1}.$$

On montre facilement dans ce dernier cas que la fonction $\in \text{Lip}(\alpha)$ presque sûrement (Yu K. Belyaev [2]).

Nous avons essayé de prolonger ces méthodes dans le cas où :

$$\gamma(t, t+h) \leq C|\log|h||^{-1-\varepsilon}$$

mais les évaluations obtenues sont assez peu précises. Nous nous proposons donc de reprendre le problème par la première méthode citée plus haut. Pour ceci, nous désignons par $\varphi(h)$ une fonction non négative pour $h \geq 0$, non décroissante pour $h \leq \delta$, tendant vers zéro lorsque h tend vers zéro par valeurs positives et prouvons le théorème suivant.

THÉORÈME 5.3.4.A. — Soit $\Gamma(t, s)$ une covariance continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$, telle que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{q_{k+1}} \left[\varphi \left(\frac{1}{2^{q_{k+1}}} \right) \right]^{-1} G'_{q_k} < +\infty.$$

Alors, presque sûrement, pour $|t-s| \leq \delta$ fixe.

1° $|x(t, \omega) - x(s, \omega)| \leq A(\omega) \varphi(|t-s|)$ où $A(\omega) \in L^r(\Omega) \forall r \geq 1$.

2° $|x(t, \omega) - x(s, \omega)| = o(\varphi(|t-s|))$ quand $|t-s| \rightarrow 0$.

Cette condition implique en effet que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left[\varphi \left(\frac{1}{2^{q_{k+1}}} \right) \right]^{-1} E^{1/r} (A'_{q_k}(\omega))^r < +\infty \quad \forall r \geq 1$$

d'après les inégalités rappelées au paragraphe précédent.

Il en résulte donc que presque sûrement

$$a(\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\varphi \left(\frac{1}{2^{q_{k+1}}} \right) \right]^{-1} A'_{q_k}(\omega) < +\infty$$

et que $a(\omega) \in L^r(\Omega)$. $\forall r \geq 1$.

Posant alors $A(\omega) = 3a(\omega)$, la conclusion résulte du théorème 2.4.

Nous donnons quelques exemples à titre de comparaison avec la méthode habituellement employée : les résultats sont dans l'ensemble moins précis mais il est difficile de comparer les deux méthodes dont les principes sont essentiellement différents.

Exemple 1. — Si $\gamma(t, t + h) \leq C |h|^{2\alpha}$.

Choisissons la suite $q_k = k$, on trouve que presque sûrement quand $h \rightarrow 0$, $|x(t + h, \omega) - x(t, \omega)| = o(|h|^\alpha |\log |h||^{\frac{3}{2} + \epsilon})$.

Ce résultat améliore celui de notre Note [14] où nous avons montré que sur $[0, 1]$, $|x(t + h, \omega) - x(t, \omega)| \leq A(\omega) |h|^\beta$ pour tout $\beta < \alpha$.

La méthode de P. Lévy mènerait à une évaluation de l'ordre suivant :

$$|x(t + h, \omega) - x(t, \omega)| \leq C \sqrt[2]{\left| \log \frac{1}{|h|} \right|} |h|^{2\alpha}.$$

Exemple 2. — Si $\gamma(t, t + h) \leq C |\log |h||^{-1-\epsilon}$ choisissons la suite $q_k = 2^k$, alors, presque sûrement :

$$\varphi(|h|) = o\left(\frac{|\log |\log |h||^{1+\alpha}}{|\log |h||^{\epsilon/2}}\right) \quad \alpha > 0.$$

En particulier si $\gamma(t, t + h) \leq C |\log |h||^{-3-\epsilon}$, on en déduit que

$$\varphi(|h|) = o(|\log |h||^{-1}).$$

Nous pouvons déduire de ce fait une conséquence immédiate.

5.3.5 Développements en série de Fourier des fonctions aléatoires normales.

Si $x(t)$ désigne une fonction périodique continue telle que :

$$|\log |h|| \varpi(|h|) \rightarrow 0 \quad \text{quand } h \rightarrow 0$$

($\varpi(|h|)$ désignant le module de continuité), alors il résulte du test de Dini-Lipschitz que le développement en série de Fourier de $x(t)$ converge uniformément (A. Zygmund [62], p. 63). On en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME 5.3.5.A. — Soit $\Gamma(t, s)$ une covariance continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$, nulle sur la frontière telle que $\gamma(t, t + h) = O(|\log |h||^{-3-\epsilon})$, quand $h \rightarrow 0$.

Alors la version séparable $x(t, \omega)$ du processus gaussien correspondant est développable en série de Fourier presque sûrement uniformément convergente.

Ce dernier théorème ne peut être substantiellement amélioré, on sait en effet (A. Zygmund [62], p. 302) qu'il existe une fonction $g(t)$ dont le module de continuité est de l'ordre de $\frac{1}{|\log |h||}$, telle que la série de Fourier associée diverge en un point donné.

Considérons alors la covariance $\Gamma(t, s) = g(t)g(s)$.

On a : $\gamma(t, t + h) = O(|\log |h||^{-2})$.

Si $\xi(\omega)$ désigne une variable aléatoire normale réduite, la fonction aléatoire normale $x(t, \omega) = g(t) \xi(\omega)$ admet $\Gamma(t, s)$ pour covariance et son développement en série de Fourier ne converge pas uniformément. On verra toutefois que la conclusion reste valable dans le cas des processus stationnaires si $\gamma(t, t+h) \leq |\log |h||^{-1-\varepsilon}$; dans ce cas, la série de Fourier a ses coefficients indépendants.

Il est encore possible de déduire des résultats précédents relatifs au module de continuité le second théorème suivant.

THÉORÈME 5.3.5.B. — *Si la covariance $\Gamma(t, s)$ définie sur $[0, 1] \times [0, 1]$, nulle sur la frontière, est telle que :*

$\Gamma(t+h, t+h) - 2\Gamma(t, t+h) + \Gamma(t, t) \leq C|h|^{2\alpha}$ où $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, alors la version séparable $x(t, \omega)$ du processus gaussien correspondant est développable en série de Fourier presque sûrement absolument et uniformément convergente.

Nous avons vu [14] que cette hypothèse implique l'appartenance presque sûre de $x(t, \omega)$ à $\text{Lip}(\alpha - \varepsilon) \forall \varepsilon > 0$; la conclusion découle alors d'un théorème classique de la théorie des séries trigonométriques (A. Zygmund [62], p. 240, théorème de S. Bernstein). Notons que l'inégalité $\alpha > \frac{1}{2}$ est stricte; nous verrons en effet en 6.7.3 que la fonction de Wiener, dont la covariance $\Gamma(t, s)$ est telle que $\gamma(t, t+h) \leq C|h|$, est la somme d'une série trigonométrique presque sûrement uniformément convergente, mais qui n'est pas absolument convergente pour un t donné, ceci avec une probabilité égale à 1.

CHAPITRE VI

CONVERGENCE UNIFORME PRESQUE SURE DES SÉRIES DE FONCTIONS ALÉATOIRES INDÉPENDANTES PRESQUE SUREMENT CONTINUES

6.0 Introduction.

Le problème que nous nous proposons maintenant d'étudier est le suivant : étant donné une suite $\{x_n(t, \omega)\}$ de fonctions aléatoires indépendantes presque sûrement continues sur $[a, b]$, d'espérances mathématiques nulles, sous quelles

conditions la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(t, \omega)$ converge-t-elle uniformément presque sûrement ?

En particulier, est-il possible de transposer à l'espace $C[a, b]$ la forme généralisée du critère de A. N. Kolmogoroff énoncée par M. Loève ([51], p. 263), sous la forme suivante : Étant donné une suite $\{x_n(\omega)\}$ de variables aléatoires indépendantes, d'espérances mathématiques nulles, appartenant à $L^r(\Omega)$ ($r \geq 1$), alors la condition :

$$(6.0.1) \quad \lim_{n \text{ et } k \rightarrow +\infty} E |S_{n+k}(\omega) - S_n(\omega)|^r = 0$$

implique la convergence presque sûre de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(\omega)$.

D'après la proposition 3.2.4.C et son corollaire 3.2.4.D, nous savons que cet énoncé se transpose sous la forme suivante : Si $\{x_n(t, \omega)\}$ désigne une suite de fonctions aléatoires indépendantes, d'espérances mathématiques nulles, appartenant presque sûrement à $C[a, b]$, alors la condition :

$$(6.0.2) \quad \lim_{n \text{ et } k \rightarrow +\infty} E \|S_{n+k}(t, \omega) - S_n(t, \omega)\|^r = 0 \quad r \geq 1$$

implique la convergence uniforme presque sûre de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(t, \omega)$ vers un élément aléatoire $x(t, \omega)$ appartenant presque sûrement à $C[a, b]$.

Ne pouvant pratiquement évaluer de manière élémentaire cette quantité, nous nous proposons de donner des conditions suffisantes énoncées sous une forme plus commode.

Nous remarquerons d'abord que la condition (6.0.2), si elle est vérifiée implique nécessairement que :

$$(6.0.3) \quad \lim_{n \text{ et } k \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [a, b]} E |S_{n+k}(t, \omega) - S_n(t, \omega)|^r = 0 \quad r \geq 1 ;$$

nous allons donc examiner sous quelles hypothèses supplémentaires, la condition (6.0.3) implique la condition (6.0.2) donc la convergence uniforme presque sûre demandée.

Comme on le verra au paragraphe 6.3, la condition (6.0.3) est insuffisante : en fait, il résulte du critère (6.0.1) énoncé pour \mathbb{R} que cette condition (6.0.3) implique pour un t donné et même pour une infinité dénombrable de valeurs de t , la convergence presque sûre de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(t, \omega)$ vers une variable aléatoire $x(t, \omega)$; on sait de plus que $E |S_n(t, \omega)|^r$ tend en croissant vers $E |x(t, \omega)|^r$. Il nous sera donc possible de déterminer les valeurs de la fonction $x(t, \omega)$ sur un sous-ensemble dénombrable dense de $[a, b]$ et d'examiner sous quelles conditions la fonction $x(t, \omega)$ ainsi définie est presque sûrement uniformément continue sur ce sous-ensemble.

Ce problème a été étudié au chapitre précédent : on a vu que les conditions :

$$(6.0.4) \quad E |x(t+h, \omega) - x(t, \omega)|^r \leq C |h|^{1+\varepsilon}$$

dans le cas général et :

$$(6.0.5) \quad E |x(t+h, \omega) - x(t, \omega)|^2 \leq C |\log |h||^{-1-\varepsilon}$$

dans le cas des fonctions aléatoires normales, impliquent la continuité presque sûre de $x(t, \omega)$.

Or les conditions (6.0.3) et (6.0.4) dans le cas général (resp. (6.0.3) et (6.0.5) dans le cas normal) vont, comme on va le voir, nous permettre également de conclure dans le cas présent; d'ailleurs, la convergence uniforme, dans ces divers cas, résulte d'un type de convergence plus fort car les conditions posées impliquent l'appartenance presque sûre de $x_n(t, \omega)$ et $x(t, \omega)$ à un sous-espace vectoriel de $C[a, b]$; on peut alors définir une nouvelle norme sur ce sous-espace, cette norme étant supérieure à celle de la convergence uniforme.

Dès lors, nous prouverons que cette convergence forte dans ce sous-espace est presque sûre, ce qui garantit également la convergence uniforme presque sûre.

En terminant ce paragraphe, nous remarquerons que l'hypothèse de la continuité presque sûre de la suite $\{x_n(t, \omega)\}$ joue un rôle essentiel on pourrait même dire qu'elle est une condition de possibilité. En effet, elle implique que la norme de $S_{n+k}(t, \omega) - S_n(t, \omega)$ peut être obtenue à l'aide des valeurs de cette fonction sur un sous-ensemble dénombrable dense de $[a, b]$; dès lors la condition de convergence uniforme peut être formulée en termes dénombrables, ce qui prouve que le problème a une solution. Si la convergence uniforme presque sûre est réalisée, la suite $\{S_n(t, \omega)\}$ tend uniformément pour tout $t \in T$, sous-ensemble dénombrable dense, vers une fonction $x(t, \omega)$ presque sûrement uniformément continue sur T et l'extension continue à $[a, b]$ de cette fonction coïncide avec la limite uniforme presque sûre de la suite $S_n(t, \omega)$.

Il est donc à présumer que les techniques utilisées aux chapitres II, IV et V vont ici encore jouer un rôle essentiel; sans restreindre la généralité, nous nous limiterons désormais à l'espace de Banach $C_0[0, 1]$ et utiliserons l'ensemble dyadique \mathcal{D} comme sous-ensemble dénombrable dense; l'extension des résultats obtenus à $C[0, 1]$ puis à $C[a, b]$ est alors immédiate.

6.1 Historique.

Sous cette forme générale, le problème semble assez nouveau : il n'a été envisagé jusqu'à présent que dans certains cas particuliers. Le premier exemple en ce sens est l'étude par N. Wiener et R. C. Paley ([55], p. 147-151),

de la fonction aléatoire du mouvement brownien; les auteurs ont montré que cette fonction pouvait être obtenue comme limite uniforme presque sûre d'une sous-suite de sommes partielles; en fait, comme nous l'avons déjà montré [16], cette conclusion peut être améliorée en ce sens que toutes les sommes partielles tendent uniformément vers cette limite. Salem et Zygmund ont étudié les séries de Fourier à coefficients aléatoires de la forme $\pm a_n$, les éventualités $+$ ou $-$ étant équiprobables [56]; un travail récent de J. P. Kahane [34] a permis de formuler des conditions suffisantes très générales dans le cas des séries trigonométriques.

L'essentiel des résultats des paragraphes 6.4, 6.5, 6.6, 6.7 qui suivent a déjà été donné dans notre note [16]; le résultat du paragraphe 6.3 nous paraît nouveau.

6.2 Lemmes préliminaires.

Soit $\{x_n(t, \omega)\}$ une suite d'éléments aléatoires indépendants de $C_0[0, 1]$, d'espérances mathématiques nulles; nous introduisons les notations suivantes :

$$S_n(t, \omega) = \sum_{j=1}^n x_j(t, \omega); \quad R_{n,k}(t, \omega) = S_{n+k}(t, \omega) - S_n(t, \omega)$$

et supposons réalisée la condition déjà mentionnée :

$$(6.2.1) \quad \lim_{n \text{ et } k \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [0,1]} E |R_{n,k}(t, \omega)|^r = 0 \quad r \geq 1.$$

Il résulte alors de l'inégalité :

$$\sup_{t \in [0,1]} E |R_{n,k}(t+h, \omega) - R_{n,k}(t, \omega)|^r \leq 2^{r+1} \sup_{t \in [0,1]} E |R_{n,k}(t, \omega)|^r$$

que (6.2.1) implique :

$$(6.2.2) \quad \lim_{n \text{ et } k \rightarrow +\infty} \sup_{t \text{ et } t+h \in [0,1]} E |R_{n,k}(t, \omega) - R_{n,k}(t+h, \omega)|^r = 0;$$

nous pouvons déduire de ces deux conditions, des résultats de la proposition 3.2.4.C et du corollaire 3.2.4.D appliqués à R , les conséquences suivantes.

LEMME 6.2. A. — *La condition (6.2.1) implique les conséquences suivantes :*

1° *presque sûrement pour une infinité dénombrable de valeurs de t , $S_n(t, \omega)$ tend vers $x(t, \omega)$ d'espérance mathématique nulle, appartenant à $L^r(\Omega)$.*

2° $E |S_n(t, \omega)|^r$ tend en croissant $E |x(t, \omega)|^r$.

3° $E |R_{n,k}(t, \omega)|^r \leq E |x(t, \omega)|^r$

$E |R_{n,k}(t+h, \omega) - R_{n,k}(t, \omega)|^r \leq E |x(t+h, \omega) - x(t, \omega)|^r$.

Nous énonçons maintenant le lemme auxiliaire suivant.

LEMME 6.2.B :

1° Pour $x \in [0, 1[$, $\varphi(x) = \frac{1}{|\log x|}$ est fonction croissante de x et tend vers zéro lorsque x tend vers zéro.

2° Si $\Psi_\varepsilon(x) = x |\log x|^\varepsilon$, alors pour tout $x \in [0, 1]$; $0 \leq \Psi_\varepsilon(x) \leq K(\varepsilon)$; de plus $\Psi_\varepsilon(x)$ est croissante pour $x \leq e^{-\varepsilon}$.

3° Si $0 < x \leq y$: $\Psi_\varepsilon(x) \leq 2^\varepsilon [yK(\varepsilon) + \Psi_\varepsilon(y)]$.

Les conclusions 1 et 2 sont élémentaires ; le 3° résulte des inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} x |\log x|^\varepsilon = y \left[\frac{x}{y} \left| \log \frac{x}{y} + \log y \right|^\varepsilon \right] &\leq 2^\varepsilon y \left[\Psi_\varepsilon\left(\frac{x}{y}\right) + |\log y|^\varepsilon \right] \\ &\leq 2^\varepsilon y [K(\varepsilon) + |\log y|^\varepsilon]. \end{aligned}$$

Remarque. — Il est possible d'aboutir à des résultats analogues en remplaçant $|\log x|$ par $\log [1 + |\log x|]$, $|\log(1 + \log(1 + |\log x|))|$ etc., en utilisant l'inégalité élémentaire :

$$\log(1 + x + y) \leq \log(1 + x) + \log(1 + y) \quad \text{valable pour } x \geq 0 \quad y \geq 0.$$

Nous allons maintenant déduire des lemmes 6.2.A et 6.2.B une inégalité fondamentale.

Supposant la condition 6.2.1 réalisée, nous posons :

$$\begin{aligned} A(t, t+h) &= E^{1/r} |x(t, \omega) - x(t+h, \omega)|^r \\ A_{n,k}(t, t+h) &= E^{1/r} |R_{n,k}(t+h, \omega) - R_{n,k}(t, \omega)|^r \end{aligned}$$

nous pouvons maintenant établir le lemme suivant.

LEMME 6.2.C. — Si la condition (6.2.1) est réalisée, alors :

$$(6.3.3) \quad A_{n,k}(t, t+h) \leq \frac{2^\varepsilon A(t, t+h) [K(\varepsilon) + |\log A(t, t+h)|^\varepsilon]}{|\log \sup_{t, t+h \in [0,1]} A_{n,k}(t, t+h)|^\varepsilon}.$$

Les conditions (6.2.1) et (6.2.2) impliquent que, pour n suffisamment grand :

$$A_{n,k}(t, t+h) \leq \sup [1, A(t, t+h)]$$

donc :

$$\frac{|\log A_{n,k}(t, t+h)|^\varepsilon}{|\log \sup_{t, t+h \in [0,1]} A_{n,k}(t, t+h)|^\varepsilon} \geq 1$$

$$\Psi_\varepsilon(A_{n,k}(t, t+h)) \leq 2^\varepsilon [K(\varepsilon)A(t, t+h) + \Psi_\varepsilon(A(t, t+h))]$$

et ces deux inégalités permettent de conclure.

On pourrait ici encore établir des inégalités analogues en remplaçant $|\log x|$ par $\log(1 + |\log x|)$ etc., comme il a été indiqué ci-dessus.

6.3 Étude de la convergence uniforme presque sûre dans le cas général.

Soit $x_n(t, \omega)$ une suite d'éléments aléatoires indépendants de $C_0[0, 1]$, d'espérances mathématiques nulles, appartenant à $L^r(\Omega)$ ($r \geq 1$) et tels que :

$$(6.3.1) \quad \sup_{t \in [0,1]} E |S_{n+k}(t, \omega) - S_n(t, \omega)|^r \rightarrow 0,$$

quand n et k tendent vers l'infini.

Ceci nous permet de définir pour tout $t \in \mathbb{D}$ la fonction $x(t, \omega)$ limite presque sûre de $S_n(t, \omega)$ sur cet ensemble.

Nous introduisons alors les notations :

$$\xi_m(\omega) = x\left(\frac{p+1}{2^{q-1}}, \omega\right) - x\left(\frac{p}{2^{q-1}}, \omega\right) \quad \text{où} \quad 0 \leq p < 2^{q-1} \quad (m = 2^{q-1} + p)$$

$$\alpha_m = E^{1/r} |\xi_m(\omega)|^r \quad L_q^{(r)} = \sup_{m \in \mathbb{N}_q} \alpha_m$$

$$\xi_{m,n,k}^{(\omega)} = R_{n,k}\left(\frac{p+1}{2^{q-1}}, \omega\right) - R_{n,k}\left(\frac{p}{2^{q-1}}, \omega\right)$$

$$\alpha_{m,n,k} = E^{1/r} |\xi_{m,n,k}^{(\omega)}|^r \quad L_{q,n,k}^{(r)} = \sup_{m \in \mathbb{N}_q} \alpha_{m,n,k}$$

$$\text{On a donc} \quad L_q^{(r)} = \sup_{m \in \mathbb{N}_q} A\left[\frac{p+1}{2^q}, \frac{p}{2^q}\right], \quad L_{q,n,k}^{(r)} = \sup_{m \in \mathbb{N}_q} A_{n,k}\left[\frac{p+1}{2^q}, \frac{p}{2^q}\right];$$

en reprenant les notations du lemme 6.2.C qui nous permet d'écrire l'inégalité suivante :

$$(6.3.1) \quad L_{q,n,k}^{(r)} \leq \frac{2^\varepsilon L_q^{(r)} [K(\varepsilon) + |\log L_q^{(r)}|^\varepsilon]}{|\log \sup_{t, t+h \in [0,1]} A_{n,k}(t, t+h)|^\varepsilon}.$$

Nous pouvons en déduire la proposition suivante.

PROPOSITION 6.3.A. — *Étant donné une suite $\{x_n(t, \omega)\}$ de fonctions aléatoires indépendantes, appartenant presque sûrement à $C_0[0, 1]$, les conditions :*

$$(6.3.2) \quad \lim_{n \text{ et } k \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [0,1]} E |S_{n+k}(t, \omega) - S_n(t, \omega)|^r = 0 \quad r \geq 1$$

$$(6.3.3) \quad \sum_{q=1}^{+\infty} 2^{q/r} L_q^{(r)} [K(\epsilon) + |\log L_q^{(r)}|^\epsilon] < +\infty \quad (1)$$

impliquent presque sûrement :

1° La convergence forte presque sûre de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(t, \omega)$ dans l'espace de Banach $\Lambda(q)$ des fonctions continues $x(t)$ telles que :

$$\|x(t)\|_{\Lambda(q)} = \sum_{q=0}^{+\infty} \sup_{m \in \mathbb{N}_q} |\xi_m| < +\infty.$$

2° La convergence uniforme presque sûre de la série vers une fonction aléatoire $x(t, \omega)$ appartenant presque sûrement à $C_0[0, 1]$.

La preuve de ce théorème est la suivante :

1° 6.3.3 et l'inégalité $L_{q,n,k}^{(r)} \leq L_q^{(r)}$ montrent que : $\sum_{q=1}^{+\infty} 2^{q/r} L_{q,n,k}^{(r)} < +\infty$.

Il résulte donc de la proposition 5.2.1. A que $R_{n,k}(t, \omega) = S_{n+k}(t, \omega) - S_n(t, \omega)$ appartient presque sûrement à l'espace de Banach $\Lambda(q)$ et vérifie l'inégalité.

$$E^{1/r} \|R_{n,k}(t, \omega)\|^r \leq E^{1/r} \|R_{n,k}(t, \omega)\|_{\Lambda(q)}^r \leq \sum_{q=1}^{+\infty} 2^{\frac{q-1}{r}} L_{q,n,k}^{(r)}.$$

2° Nous montrerons maintenant que la série de droite tend vers zéro quand n et k tendent vers l'infini. Il en résultera que :

$$E^{1/r} \|R_{n,k}(t, \omega)\|_{\Lambda(q)}^r \quad \text{et} \quad E^{1/r} \|R_{n,k}(t, \omega)\|^r$$

tendront également vers zéro quand n et $k \rightarrow +\infty$.

Ceci, d'après le critère de convergence forte presque sûre établi en 3.2.4. C, assurera la convergence forte presque sûre simultanée dans les espaces de Banach $\Lambda(q)$ et $C_0(0, 1)$.

(1) La condition $\sum_{q=1}^{+\infty} 2^{q/r} L_q^{(r)} |\log L_q^{(r)}|^\epsilon$ est insuffisante car $L_q^{(r)}$ pourrait tendre vers 1 de manière telle que la série converge, bien que la série :

soit divergente.
$$\sum_{q=1}^{+\infty} 2^{q/r} L_q^{(r)}$$

3° Utilisant l'inégalité (6.3.1), il vient :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} 2^{\frac{q-1}{r}} L_{q,n,k}^{(r)} \leq \frac{C \sum_{q=1}^{+\infty} 2^{q/r} L_q^{(r)} [K(\epsilon) + |\log L_q^{(r)}|^\epsilon]}{\left| \log \sup_{t,t+h \in [0,1]} E^{1/r} |R_{n,k}(t+h, \omega) - R_{n,k}(t, \omega)|^r \right|^\epsilon}$$

la série figurant au numérateur converge par hypothèse, en outre :

$$\sup_{t,t+h \in [0,1]} E^{1/r} |R_{n+k}(t+h, \omega) - R_{n,k}(t, \omega)|^r \rightarrow 0$$

d'où : $\left| \log \sup_{t,t+h \in [0,1]} E^{1/r} |R_{n,k}(t+h, \omega) - R_{n,k}(t, \omega)|^r \right|^{-\epsilon} \rightarrow 0$

quand n et $k \rightarrow +\infty$, ce qui prouve le théorème.

Remarque. — Il résulte du paragraphe 6.2 que nous pourrions remplacer les logarithmes dans cette expression par $[\log (1 + |\log L_q^{(r)}|)]^{+\epsilon}$, etc., d'où une infinité de critères de moins en moins restrictifs.

COROLLAIRE 6.3.B. — Si $\{x_n(t, \omega)\}$ désigne une suite de fonctions aléatoires indépendantes, presque sûrement continues, d'espérances mathématiques nulles, appartenant à $L^r(\Omega)$ pour tout t , telles que :

$$(6.3.2) \quad \lim_{n \text{ et } k \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [0,1]} E |S_{n+k}(t, \omega) - S_n(t, \omega)|^r = 0 \quad r \geq 1$$

$$(6.3.3) \quad E \left| \sum_{n=1}^{+\infty} (x_n(t+h, \omega) - x_n(t, \omega)) \right|^r \leq C \varphi(|h|)$$

où $\varphi(|h|) = |h|^{1+\epsilon'}$ ou $|h| [|\log |h||]^{-1-\epsilon'-r}$ $\epsilon' > 0$

alors, les conclusions 1 et 2 du théorème précédent sont vérifiées.

On pourra, si on le désire, remplacer (6.3.3) par la condition équivalente :

$$E |S_n(t+h, \omega) - S_n(t, \omega)|^r \leq C \varphi(|h|) \quad \forall n.$$

On sait en effet que pour t et $t+h$ fixés :

$E |S_n(t+h, \omega) - S_n(t, \omega)|^r$ tend en croissant vers $E |x(t+h, \omega) - x(t, \omega)|^r$.

COROLLAIRE 6.3.C. — Si $\{x_n(t, \omega)\}$ désigne une suite de fonctions aléatoires indépendantes, presque sûrement continues sur $[a, b]$, d'espérances

mathématiques nulles ⁽²⁾ appartenant à $L^2(\Omega)$ pour tout t ; si $\{ \Gamma_n(t, s) \}$ désigne la suite de leurs covariances, alors les conditions :

$$(6.3.4) \quad \Gamma(t, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Gamma_n(t, t) < +\infty \text{ pour tout } t$$

$$(6.3.5) \quad \begin{aligned} \gamma(t, t+h) &= \Gamma(t, t) + \Gamma(t+h, t+h) - 2\Gamma(t, t+h) \\ &\leq C|h|^{1+\varepsilon} \quad \text{ou} \quad C|h| [|\log|h||]^{-3-\varepsilon} \end{aligned}$$

impliquent que $\sum_1^{+\infty} x_n(t, \omega)$ converge uniformément presque sûrement vers une fonction aléatoire $x(t, \omega)$ presque sûrement continue, d'espérance mathématique nulle, de covariance

$$\Gamma(t, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Gamma_n(t, s).$$

La condition (6.3.4) implique la convergence pour tous t et s de la série définissant $\Gamma(t, s)$. La condition (6.3.5) implique la continuité de $\Gamma(t, s)$ sur $[a, b] \times [a, b]$ donc la continuité de $\Gamma(t, t)$ sur $[a, b]$. La convergence uniforme de la série (6.3.4) résulte du lemme de Dini et le résultat est alors une conséquence immédiate de 6.3.B.

Remarque. — Il en sera notamment ainsi si $\frac{\partial^2 \Gamma_n(t, s)}{\partial t \partial s}$ existe et est continue par rapport à t et s et si la série : $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 \Gamma_n(t, s)}{\partial t \partial s} \right)_{t=s}$ converge uniformément en t .

6.4 Convergence uniforme presque sûre des séries de fonctions aléatoires normales indépendantes presque sûrement continues.

Appliquant la méthode précédente et les résultats du chapitre V aux fonctions aléatoires normales, nous allons obtenir des conditions beaucoup moins restrictives.

⁽²⁾ Cette restriction peut évidemment être levée en supposant que la série : $\sum_{n=1}^{+\infty} E[x_n(t, \omega)]$ converge uniformément en t . On sait d'ailleurs (théorème 5.3.1.B) que cette condition est nécessaire si les fonctions aléatoires sont normales. On notera également que toutes les résultats peuvent être transposés aux fonctions aléatoires à valeurs complexes.

Nous désignons dans ce qui suit par $\{x_n(t, \omega)\}$ une suite de fonctions aléatoires normales indépendantes, appartenant presque sûrement à $C_0[0, 1]$, par $\{\Gamma_n(t, s)\}$ la suite de leurs covariances continues (en vertu du théorème 5.3.1.A).

Nous désignons comme précédemment par $q_0 = 0, q_1 \dots q_k$ une suite croissante d'entiers positifs, tendant vers l'infini lorsque k tend vers l'infini.

En vertu du théorème 5.3.1.B, si la suite de fonctions aléatoires normales presque sûrement continues $S_n(t, \omega)$ converge uniformément, alors :

$$\lim_{n \text{ et } k \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [0,1]} E |S_{n+k}(t, \omega) - S_n(t, \omega)|^2 = 0$$

donc la condition $\sum_{n=1}^{+\infty} \Gamma_n(t, t) < +\infty$ uniformément en t est une condition nécessaire de convergence uniforme presque sûre. Elle implique la convergence

uniforme en t et s de la série des covariances $\sum_{n=1}^{+\infty} \Gamma_n(t, s)$ vers une

covariance $\Gamma(t, s)$; réciproquement la convergence pour tout t de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \Gamma_n(t, s)$ jointe à la continuité de $\Gamma(t, s)$ impliquent la convergence

uniforme de la série des covariances comme on l'a vu en 6.3.C.

Cette condition n'est pas suffisante en général comme le prouve le contre-exemple donné en conclusion de 5.3.1. Posons alors comme aux chapitres IV et V :

$$\gamma(t+h, t) = \Gamma(t+h, t+h) - 2\Gamma(t, t+h) + \Gamma(t, t)$$

$$G'_{q_k} = \sup_{p,l} \gamma^{1/2} \left(\frac{p}{2^{q_k}} + \frac{l}{2^{q_{k+1}}}, \frac{p}{2^{q_k}} \right)$$

pour p et l entiers tels que $0 \leq p < 2^{q_k}, 1 \leq l \leq 2^{q_{k+1}-q_k}$; posons de même :

$$\Gamma_{n,i}(t, s) = \sum_{j=n+1}^{n+i} \Gamma_j(t, s)$$

$$\gamma_{n,i}(t, r) = \Gamma_{n,i}(t, t) + \Gamma_{n,i}(s, s) - 2\Gamma_{n,i}(t, s).$$

Nous prouvons maintenant la proposition suivante.

PROPOSITION 6.4.A. — *Étant donné une suite $\{x_n(t, \omega)\}$ de fonctions aléatoires normales indépendantes, presque sûrement continues, d'espérances mathématiques nulles, telles que :*

$$(6.4.1) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \Gamma_n(t, t) < +\infty \text{ uniformément en } t$$

$$(6.4.2) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{q_{k+1}} G'_{q_k} |\log G'_{q_k}|^\varepsilon < +\infty \quad \varepsilon > 0$$

alors :

1° $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(t, \omega)$ converge fortement dans l'espace de Banach $\Lambda(q_k)$ des fonctions $x(t)$ continues telles que :

$$\|x(t)\|_{\Lambda(q_k)} = \sum_{k=0}^{+\infty} A'_{q_k} < +\infty.$$

2° $\sum_{k=1}^{+\infty} x_n(t, \omega)$ converge uniformément presque sûrement vers une fonction aléatoire normale $x(t, \omega)$, d'espérance mathématique nulle, de covariance

$$\Gamma(t, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Gamma_n(t, s).$$

Nous pouvons reprendre mot pour mot la démonstration du paragraphe précédent en y remplaçant r par 2, q par q_{k+1} , 2^{qr} par $\sqrt{q_{k+1}}$ et l'espace $\Lambda(q)$ par l'espace $\Lambda(q_{k+1})$; il suffit d'utiliser 5.3.2 au lieu de 5.3.1.A. On en déduit que :

$$\begin{aligned} E^{1/r} \|S_{n+i}(t, \omega) - S_n(t, \omega)\|^r &\leq E^{1/r} \|S_{n+i}(t, \omega) - S_n(t, \omega)\|^r \\ &\leq \frac{C_r}{|\log \|\gamma_{n,i}(t, s)\| |^\varepsilon} \sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{q_{k+1}} [K(\varepsilon) + |\log G'_{q_k}|^\varepsilon] G'_{q_k}. \end{aligned}$$

La convergence uniforme de la série des variances, implique que : $|\log \|\gamma_{n,i}(t, s)\| |^{-\varepsilon}$ tend vers zéro quand n et i tendent vers l'infini.

La continuité de la covariance somme $\Gamma(t, s)$ implique que $G'_{q_k} \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$ donc la condition $\sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{q_{k+1}} G'_{q_k} |\log G'_{q_k}|^\varepsilon < +\infty$ implique

la convergence de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{q_{k+1}} G'_{q_k} [K(\varepsilon) + |\log G'_{q_k}|^\varepsilon]$, ce qui prouve que le critère de convergence forte du théorème 3.2.4.C est bien vérifié pour tout $r \geq 1$.

Remarque. — Comme au paragraphe précédent, on pourrait remplacer : $|\log G'_{q_k}|^\varepsilon$ par $|\log(1 + |\log G'_{q_k}|)|^\varepsilon$ et par d'autres critères de moins en moins restrictifs.

Dans tous les cas, il faut que : $\sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{q_{k+1}} G'_{q_k} < +\infty$ ce qui implique, on l'a vu au chapitre précédent, que le module de continuité de la covariance est tel que $\gamma(t, t+h) = O(|\log |h||^{-1})$. En fait, les cas pratiques sont les mêmes que ceux du chapitre précédent comme on va le voir.

COROLLAIRE 6.4.B. — Si $\{x_n(t, \omega)\}$ désigne une suite de fonctions aléatoires normales indépendantes, presque sûrement continues, d'espérances mathématiques nulles, de covariances $\Gamma_n(t, s)$ continues, alors les conditions

$$(6.4.3) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \Gamma_n(t, t) < +\infty \text{ quel que soit } t :$$

$$(6.4.4) \quad \gamma(t+h, t) \leq |\log |h||^{-1-\varepsilon'} \\ \text{ou } |\log |h||^{-1} |\log |\log |h|||^{-2-\varepsilon'} \quad \varepsilon' > 0$$

pour $|h|$ suffisamment petit, impliquent les conclusions du théorème 6.4.A.

Il suffit de choisir la suite $q_k = k^r$ avec r suffisamment grand dans le cas de $|\log |h||^{-1-\varepsilon'}$, $q_k = 2^k$ dans le second cas. La condition (6.4.4) implique la continuité de $\Gamma(t, s)$ donc la convergence uniforme en t de la série 6.4.3.

On peut préciser quelque peu ce résultat comme suit :

Si $\gamma(t, t+h) \leq C |\log |h||^{-1-\varepsilon}$, alors il y a convergence forte dans l'espace de Banach $\Lambda(q)$ défini au paragraphe précédent.

Si $\gamma(t, t+h) \leq C |\log |h||^{-3-\varepsilon}$, il y a convergence forte dans un espace $\Lambda(q^r)$, etc.

On pourrait d'ailleurs, en tenant compte de la remarque qui suit le théorème 6.4.A, préciser en montrant qu'on obtient une infinité de critères logarithmiques, ces critères étant les mêmes que ceux définis en 5.3.3-3°.

6.5 Deuxième construction d'une fonction aléatoire normale presque sûrement continue, à partir du développement spectral de sa covariance.

Une application particulièrement intéressante des résultats précédents est la suivante : si $\Gamma(t, s)$ est une covariance continue sur $[a, b] \times [a, b]$,

alors en vertu du théorème de Mercer déjà cité : $\Gamma(t, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \varphi_n(t) \varphi_n(s)$

uniformément en t et s , les quantités λ_n et $\varphi_n(t)$ désignant respectivement les valeurs propres (non négatives) et les fonctions propres orthonormées de $\Gamma(t, s)$. Comme l'a montré M. Loève [51], p. 478, on peut y faire corres-

pondre la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_n} \varphi_n(t) \xi_n(\omega)$ où les $\xi_n(\omega)$ sont des variables aléatoires normales indépendantes réduites.

Cette série converge presque sûrement en moyenne quadratique vers une fonction $x(t, \omega) \in L^2[a, b]$ presque sûrement, admettant pour coefficients de Fourier les variables aléatoires $\sqrt{\lambda_n} \xi_n(\omega)$ ()*.

M. Kac et A. J. P. Siegert ont étudié [32] la convergence locale de ce développement si $\Gamma(t, s)$ est une corrélation, c'est-à-dire une fonction définie positive de la différence $t - s$; une même étude a été faite par M. Loève ([51], p. 478), dans le cas général; dans les deux cas, utilisant le théorème de Kolmogoroff, il a été montré que la série converge presque sûrement pour un t donné et même pour une infinité dénombrable de valeurs de t . Ce résultat a été précisé par J. Kampé de Fériet [35]; utilisant le théorème de Fubini, il a prouvé que, presque sûrement, la série converge pour presque tout t . Imposant une restriction supplémentaire à $\Gamma(t, s)$, nous pouvons donner un énoncé plus fort :

THÉORÈME 6.5. — *Étant donné une covariance $\Gamma(t, s)$ continue, sur $[a, b] \times [a, b]$ telle que, pour $|h|$ suffisamment petit :*

$$(6.5) \quad \gamma(t, t+h) \leq C |\log |h||^{-1} |\log |\log |h|||^{-2-\varepsilon} \quad \varepsilon > 0$$

alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_n} \varphi_n(t) \xi_n(\omega)$ converge uniformément presque sûrement vers une fonction $x(t, \omega)$ normale, presque sûrement continue, d'espérance mathématique nulle, de covariance $\Gamma(t, s)$.

(*) On sait que les fonctions propres $\varphi_n(t)$ ne constituent pas en général une base de $L^2(a, b)$.

Si nous nous ramenons par exemple à l'espace $C_0[0, 1]$, étant donné une covariance continue $\Gamma(t, s)$, nulle sur la frontière du carré $[0, 1] \times [0, 1]$, vérifiant la condition (6.5), nous disposons alors de deux constructions d'une fonction aléatoire normale presque sûrement continue, admettant pour covariance $\Gamma(t, s)$.

D'une part, nous pouvons nous donner a priori la suite de variables aléatoires normales $x(t_n, \omega)$ pour $t_n \in \mathcal{D}$ où :

$$x(t_n, \omega) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_j} \varphi_j(t_n) \xi_j(\omega)$$

et en déduire $x(t, \omega)$ par la somme de la série de Schauder presque sûrement

$$\text{uniformément convergente } x(t, \omega) = \sum_1^{+\infty} \eta_n(\omega) e_n(t).$$

D'autre part, on peut écrire directement $x(t, \omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_n} \varphi_n(t) \xi_n(\omega)$ série presque sûrement uniformément convergente.

Toutes les remarques faites sur la convergence forte dans un sous-espace de $C_0[0, 1]$ s'appliquent à ces deux séries.

Remarquons, pour conclure qu'il semble ici encore difficile d'améliorer ce résultat : Y. K. Belyaev ([2], p. 341) a en effet montré, comme nous l'avons déjà souligné, qu'étant donné une corrélation continue $R(t - s) = \Gamma(t, s)$ si cette corrélation est concave et telle que pour $|h|$ suffisamment petit

$$\gamma(t, t + h) = 2[R(0) - R(h)] \geq A |\log |h||^{-1}$$

alors la version séparable du processus gaussien correspondant est presque sûrement non bornée sur tout intervalle fini.

Cette remarque que nous avons déjà faite au chapitre précédent vaut a fortiori dans le cas présent.

6.6 Processus stationnaires gaussiens à spectre purement discontinu.

Nous étudions maintenant les processus stationnaires gaussiens dont la corrélation est donnée par $R(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ih\lambda} d\mathcal{F}(\lambda)$, où $\mathcal{F}(\lambda)$ désigne la fonction spectrale du processus, fonction monotone, de variation bornée sur $]-\infty, +\infty[$. G. Hunt [31] a alors prouvé le résultat suivant :

Si la fonction spectrale $\mathcal{F}(\lambda)$ est telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\log(1 + |\lambda|)|^{1+\varepsilon} d\mathcal{F}(\lambda) < +\infty \quad \varepsilon > 0$$

alors la fonction aléatoire normale stationnaire, d'espérance mathématique nulle, version séparable de ce processus, est presque sûrement continue sur tout compact $[a, b]$.

Yu. K. Belyaev [2] a précisé cette condition en prouvant le lemme suivant :

$$\text{« Si } \int_{-\infty}^{+\infty} |\log(1 + |\lambda|)|^a d\mathcal{F}(\lambda) < +\infty$$

$$\text{alors } |R(0) - \operatorname{Re}(R(h))| \leq C |\log|h||^{-a} \quad a > 0.$$

Réciproquement, si la corrélation $R(h)$ vérifie cette dernière inégalité alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\log(1 + |\lambda|)|^b d\mathcal{F}(\lambda) < +\infty \quad \forall b > 0 \text{ tel que } b < a. \text{ »}$$

Nous nous proposons d'étudier le cas des processus à spectre purement discontinu, en prouvant que la condition de Hunt implique également que la fonction aléatoire normale stationnaire presque sûrement continue correspondante est la somme d'une série presque sûrement uniformément convergente sur tout compact $[a, b]$.

Au préalable, nous améliorerons légèrement le résultat de Belyaev de la manière suivante.

LEMME 6.6.A. — Si la fonction spectrale $\mathcal{F}(\lambda)$ est telle que :

$$(6.6.1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\log(1 + |\lambda|)|^a d\mathcal{F}(\lambda) < +\infty$$

alors $|R(0) - \operatorname{Re}(R(h))| = o(|\log|h||^{-a})$ quand $h \rightarrow 0$.

Utilisons l'expression de $R(h)$; il vient :

$$|\log|h||^a |R(0) - \operatorname{Re}(R(h))| = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, h) d\mathcal{F}(\lambda),$$

$$\text{où } f(\lambda, h) = |\log|h||^a (1 - \cos \lambda h).$$

Nous allons montrer que pour $|h| \leq \delta$ et $|\lambda| \geq 1$ (*) :

$$(6.6.2) \quad f(\lambda, h) \leq g(\lambda) = A + B |\log(1 + |\lambda|)|^a$$

(*) Il est facile de voir que si $|\lambda| \leq 1$, alors : $f(\lambda, h) \leq \frac{h^2}{2} |\log|h||^a$. Nous ne considérons donc que l'intégrale $\int_{|\lambda| \geq 1} f(\lambda, h) d\mathcal{F}(\lambda)$.

ce qui permettra de conclure.

L'inégalité élémentaire $\left| \frac{2}{\lambda} \sin \frac{\lambda h}{2} \right| \leq |h| < 1$ nous permet alors d'écrire les inégalités suivantes :

$$1 \leq \frac{\left| \log \left| \frac{2}{\lambda} \sin \frac{\lambda h}{2} \right| \right|^a}{|\log |h||^a} \leq 3^a \frac{(\log 2)^a + |\log (1 + |\lambda|)|^a + \left| \log \left| \sin \frac{\lambda h}{2} \right| \right|^a}{|\log |h||^a}$$

$$\left| \log \left| \frac{\sin \lambda h}{2} \right| \right|^a \sin^2 \frac{\lambda h}{2} \leq C(a).$$

Réunissant ces inégalités, on prouve facilement (6.6.2) et le théorème en découle.

Nous désignerons dans tout ce qui suit par $\{\zeta_n(\omega)\}$ une suite de variables aléatoires normales indépendantes et à valeurs complexes, telles que

$$E(\zeta_n(\omega)) = 0 \quad E|\zeta_n(\omega)|^2 = 1 ;$$

nous supposerons de plus que $\zeta_n(\omega) = \xi_n(\omega) + i\eta_n(\omega)$, les variables aléatoires normales $\xi_n(\omega)$ et $\eta_n(\omega)$ étant indépendantes et ayant même distribution.

Nous supposerons que la fonction $\mathcal{F}(\lambda)$ est purement discontinue et désignons par $\{\lambda_n\}$ la suite au plus dénombrable des abscisses des points de discontinuité.

L'expression de $R(h)$ est alors donnée par :

$$(6.6.3) \quad R(h) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 e^{i\lambda_n h} \quad \text{où}$$

$$(6.6.4) \quad R(0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty.$$

Nous pouvons y associer la fonction aléatoire normale stationnaire $x(t, \omega)$, d'espérance mathématique nulle, de corrélation $R(h)$, cette fonction étant définie pour un t donné par la série presque sûrement convergente

$$x(t, \omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \zeta_n(\omega) e^{i\lambda_n t}.$$

Il résulte alors du critère 6.4.B et du lemme 6.6.A, le théorème suivant :

THÉORÈME 6.6.B. — *Si la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} |\log (1 + |\lambda_n|)|^{1+\varepsilon} |a_n|^2$ converge,*

alors, la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \zeta_n(\omega) e^{i\lambda_n t}$ converge uniformément presque sûrement sur tout compact $[a, b]$ vers une fonction aléatoire normale stationnaire $x(t, \omega)$, presque sûrement continue, d'espérance mathématique nulle, de corrélation $R(h)$ définie par (6.6.3).

Étudiant le cas particulier où la corrélation continue $R(h)$ est périodique sur $[0, 2\pi]$ et se présente donc sous la forme suivante :

$$(6.6.5) \quad R(h) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 e^{inh},$$

on en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 6.6.C. — Si la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} |\log(1 + |n|)|^{1+\varepsilon} |a_n|^2$ converge,

alors, la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \zeta_n(\omega) e^{int}$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$ presque sûrement, sa somme $x(t, \omega)$ définit donc une fonction aléatoire normale presque sûrement continue sur $[0, 2\pi]$, d'espérance mathématique nulle, de corrélation $R(h)$ définie par (6.6.5).

Ce dernier résultat améliore celui de notre Note [16] où nous avons montré

que la condition $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^{2\alpha} |a_n|^2 < +\infty$ impliquait le théorème précédent.

Nous pouvons ajouter les remarques suivantes :

1° Nous avons vu au paragraphe 5.3.5 qu'étant donné une covariance réelle $\Gamma(t, s)$ nulle sur la frontière du carré $[0, 1] \times [0, 1]$ telle que $\Gamma(t+h, t+h) - 2\Gamma(t, t+h) + \Gamma(t, t) \leq C |\log|h||^{-3-\varepsilon}$ alors la fonction aléatoire normale presque sûrement continue correspondante était développable, en série de Fourier presque sûrement uniformément convergente. De plus, si :

$$\Gamma(t+h, t+h) - 2\Gamma(t, t+h) + \Gamma(t, t) = 0 \quad (|\log|h||^{-2}),$$

il existait des covariances possédant cette propriété, correspondant à des fonctions aléatoires normales dont la série de Fourier divergeait en un point donné. Comme on le voit ici, il est possible d'obtenir un résultat moins restrictif dans le cas des processus stationnaires.

2° Dans le cas particulier des séries de Fourier à coefficients aléatoires, le corollaire 6.6.C n'est qu'un cas particulier d'un résultat plus général dû à J. P. Kahane ([33], p. 4-8, [34]).

L'auteur montre que si l'on pose :

$$s_n = \left[\sum_{j=2^{n+1}}^{2^{n+1}-1} |a_j|^2 \right]^{1/2} \quad n \geq 0$$

alors, la condition $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[2^n \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} s_k^2 \right]^{1/2} < +\infty$ implique la convergence uni-

forme presque sûre de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \xi_n(\omega) e^{int}$ (le cas $n \leq 0$ se transpose facilement). On vérifie alors facilement que le critère 6.6.C n'est qu'un cas particulier de ce critère plus général (5).

6.7 Étude de la fonction aléatoire du mouvement brownien de Wiener-Lévy.

Dans ce paragraphe, nous rappelons d'abord en 6.7.1 les diverses expressions de la fonction de Wiener; nous prouvons ensuite en 6.7.2 la convergence uniforme presque sûre des développements en série utilisés et montrons enfin en 6.7.3 que ces divers développements ne convergent pas absolument pour un t fixé.

6.7.1 Expressions de la fonction aléatoire normale du mouvement brownien.

La forme complexe de la fonction aléatoire du mouvement brownien a été définie par R. C. Paley et N. Wiener ([55], p. 147-151) sous la forme suivante :

$$(6.7.1.A) \quad \Psi(t, \omega) = t \zeta_0(\omega) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{\zeta_n(\omega) e^{int}}{in}$$

(5) On voit facilement que la condition de Kahane implique que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [\log(n+1) |a_n|^2] < +\infty \quad \text{donc :}$$

$R(0) - \operatorname{Re}(R(h)) = o(|\log|h||^{-1})$ et ce critère diffère donc assez peu du nôtre.

où la suite de variables aléatoires normales complexes $\{\zeta_n(\omega)\}$ ($\zeta_n(\omega) = \alpha_n(\omega) + i\beta_n(\omega)$) est telle que :

$$E(\zeta_n(\omega)\zeta_m^*(\omega)) = \frac{\delta_{nm}}{\pi} \quad E(\alpha_n(\omega)\beta_m(\omega)) = 0 \quad \forall m \text{ et } n.$$

$$E(\alpha_n^2(\omega)) = E(\beta_n^2(\omega)) = \frac{1}{2\pi}.$$

Posant alors :

$$(6.7.1.B) \quad \Psi(t, \omega) = \Psi_1(t, \omega) + i\Psi_2(t, \omega),$$

on vérifie facilement que :

$$\Psi_i(t, \omega) = \frac{\zeta_{0i}(\omega)t}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\xi_{ni}(\omega) \cos nt + \eta_{ni}(\omega) \sin nt}{n\sqrt{\pi}}$$

où les variables aléatoires réelles $\xi_{ni}(\omega)$, $\eta_{nj}(\omega)$ sont d'espérances mathématiques nulles et telles que :

$$E(\xi_{ni}(\omega)\xi_{mj}(\omega)) = E(\eta_{ni}(\omega)\eta_{mj}(\omega)) = \delta_{nm}\delta_{ij}$$

$$E(\xi_{ni}(\omega)\eta_{mj}(\omega)) = 0 \quad \forall n, m, i \text{ et } j.$$

Les fonctions aléatoires réelles $\Psi_1(t, \omega)$ et $\Psi_2(t, \omega)$ sont donc deux fonctions normales indépendantes ayant même loi temporelle.

On vérifie de plus aisément que les séries définissant $\Psi(t, \omega)$, $\Psi_i(t, \omega)$ ($i = 1, 2$) convergent presque sûrement pour un t donné en vertu du critère de A. N. Kolmogoroff défini en 3.1.1.A.

La forme réelle de la fonction aléatoire du mouvement brownien est alors définie par M. Paul Lévy ([46], p. 370) de la manière suivante :

$$(6.7.1.C) \quad W(t, \omega) = \Psi_1(t, \omega) - \Psi_1(0, \omega) \\ = \frac{\xi_{01}(\omega)t}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\xi_{n1}(\omega)(\cos nt - 1) + \eta_{n1}(\omega) \sin nt}{n\sqrt{\pi}} = \frac{\zeta_{01}(\omega)t}{\sqrt{2\pi}} + X(t, \omega);$$

elle admet pour covariance $\Gamma(t, s)$ définie pour t et $s \geq 0$ par :

$$\Gamma(t, s) = \min(t, s).$$

$X(t, \omega)$ somme de la série, n'est autre que la fonction : $W(t, \omega) - \frac{t}{2\pi}$,

$W(2\pi, \omega)$, nulle en 0 et 2π et admettant pour covariance sur $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$

la fonction $\Gamma_1(t, s) = \frac{s(2\pi - t)}{2\pi}$ pour $0 \leq s \leq t \leq 2\pi$.

Il est d'ailleurs possible d'obtenir d'autres expressions de la fonction de Wiener sur un intervalle donné : nous citerons à titre d'exemple celle donnée par M. J. Kampé de Fériet ([35], p. 19).

L'auteur introduit la fonction aléatoire normale :

$$W_0(t, \omega) = W(t, \omega) - \frac{t}{\pi} W(\pi, \omega), \text{ nulle en } 0 \text{ et } \pi, \text{ de covariance}$$

$$\Gamma_2(t, s) = \frac{s(\pi - t)}{\pi} \text{ pour } 0 \leq s \leq t \leq \pi.$$

Utilisant le développement en série de Mercer de $\Gamma_2(t, s)$ donné par

$$\Gamma_2(t, s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nt \sin ns}{n^2},$$

on est amené à définir $W_0(t, \omega)$ sur $[0, \pi]$ par la série aléatoire :

$$(6.7.1.D) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin nt \xi_n(\omega)}{n}$$

où les variables aléatoires normales réduites $\xi_n(\omega)$ sont indépendantes.

Comme on l'a vu, ces divers développements convergent presque sûrement pour un t donné.

Un résultat beaucoup plus profond a été prouvé par Paley et Wiener :

posant $\Psi_{2^n, 2^{n+1}}(t, \omega) = \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{e^{ikt} \zeta_k(\omega)}{ik}$, les auteurs prouvent que :

$$(6.7.1.E) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} E^{1/2} \|\Psi_{2^n, 2^{n+1}}(t, \omega)\|^2 < +\infty;$$

ils en déduisent alors (voir par exemple le critère 3.1.1.B) que presque

sûrement $\sum_{n=0}^{+\infty} \|\Psi_{2^n, 2^{n+1}}(t, \omega)\| < +\infty$; d'où résulte la convergence uniforme presque sûre d'une suite de sommes partielles de la série vers une fonction aléatoire normale presque sûrement continue $\Psi(t, \omega)$, qui définit pour eux la fonction aléatoire du mouvement brownien.

Reprenant les résultats de notre Note [16], nous nous proposons de prouver bien davantage, à savoir la convergence uniforme presque sûre en t de tous les développements utilisés ci-dessus.

6.7.2 Convergence uniforme presque sûre de la série de Wiener-Lévy.

THÉORÈME 6.7.2. — *Les développements en séries de fonctions aléatoires 6.7.1.A, 6.7.1.B et 6.7.1.D sont tous presque sûrement uniformément convergents.*

Il nous suffit de démontrer ce résultat pour l'une des séries; la preuve peut être alors faite de plusieurs manières. On peut par exemple partir de la démonstration originelle de Paley et Wiener et remarquer qu'elle impliquait un résultat beaucoup plus fort que celui déduit par les auteurs. Il résulte en effet de 3.2.5.C qu'étant donné une suite $\{x_n(t, \omega)\}$ de fonctions aléatoires indépendantes, presque sûrement continues d'espérances nulles et une suite $n_k \uparrow +\infty$ lorsque $k \uparrow +\infty$, alors la condition :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} E^{1/2} \|S_{n_{k+1}}(t, \omega) - S_{n_k}(t, \omega)\|^2 < +\infty$$

implique la convergence uniforme presque sûre de la série $\sum_{n=1}^{-\infty} x_n(t, \omega)$.

Or, c'est précisément ce qu'ont prouvé Paley et Wiener.

Le résultat peut même être prouvé sans utiliser l'indépendance des fonctions $x_n(t, \omega)$. Il résulte en effet des études de Paul Lévy relatives au module de continuité de $W(t, \omega)$ que, presque sûrement :

$$|W(t, \omega) - W(t+h, \omega)| \leq C\sqrt{2|h||\log|h|}, \quad C > 1, \quad |h| < \delta(\omega);$$

donc, en vertu du lemme de Dini-Lipschitz cité en 5.3.5, presque sûrement, les séries définissant $\Psi_1(t, \omega)$ et $W(t, \omega)$ convergent uniformément.

On peut enfin remarquer que les covariances des fonctions aléatoires presque sûrement continues ainsi définies sont telles que :

$$E |x(t+h, \omega) - x(t, \omega)|^2 \leq C|h|;$$

la convergence uniforme presque sûre découle alors du critère 6.4.B.

6.7.3 Étude de la convergence absolue de la série de Wiener-Lévy.

Nous prouvons maintenant le théorème suivant.

THÉORÈME. — *Pour un t fixé, les développements 6.7.1.A, 6.7.1.B et 6.7.1.D ne convergent pas absolument, ceci presque sûrement.* Étudions par exemple le développement 6.7.1.D pour t fixé $\neq 0$ et π et posons

$$x_n(t, \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin nt \xi_n(\omega)}{n}, \quad y_n(t, \omega) = |x_n(t, \omega)|;$$

$$E(y_n(t, \omega)) = \frac{2}{\pi} \frac{|\sin nt|}{n} \text{ donc } \sum_{n=1}^{+\infty} E(y_n(t, \omega)) = +\infty, \text{ pour } t \neq 0 \text{ et } \pi.$$

Or : $\sigma^2(y_n(t, \omega)) < E y_n^2(t, \omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin^2 nt}{n^2}.$

Donc : $\sum_1^{+\infty} \sigma^2(y_n(t, \omega)) < +\infty$, d'où résulte que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} [y_n(t, \omega) - E y_n(t, \omega)]$

converge presque sûrement, et $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n(t, \omega) = +\infty$ presque sûrement pour t fixé $\neq 0$ et π .

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires*, Varsovie 1932, Chelsea Publish. Co., New York, 1955.

[2] Y. K. BELYAEV, Local properties of stationary Gaussian processes, *Teoriya Veroyatnostei*, éd. anglaise, vol. 5, n° 1, 1960, p. 117-120.

[3] Y. K. BELYAEV, On the continuity and differentiability of realizations of Gaussian processes, *Teoriya Veroyatnostei*, éd. anglaise, vol. 6, n° 3, 1961, p. 340-342.

[4] G. BIRKHOFF et J. KAMPÉ DE FÉRIET, Kinematics of homogeneous turbulence, *Journ. of Math and Mec.*, vol. 11, n° 3, mai 1962, p. 319-340.

[5] A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET, *Théorie des fonctions aléatoires*, Masson, Paris, 1953.

[6] E. BOREL, *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, Paris, 1925.

[7] T. BRODEN, Beiträge zur Theorie der stetigen Funktionem einer reellen Veränderlichen, *Journ. de Crelle*, 1897, p. 1 à 60.

[8] N. N. CHENTSOV, Weak convergence of stochastic processes whose trajectories have no discontinuities of the second kind and the « heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov equations », *Teoriya Veroyatnostei*, éd. anglaise, vol. 1, 1956, p. 140-144.

[9] K. L. CHUNG, P. ERDOS et T. SIRAO, On the Lipschitz's conditions for brownian motion, *Journ. Math. Soc. in Japan*, t. 11, n° 4, 1959.

[10] M. M. DAY, *Normed Linear Spaces*, Springer Verlag, Berlin, 1962.

[11] J. DELPORTE, Extension aux éléments aléatoires à valeurs dans les espaces de Banach l^p , m et c d'un critère de convergence forte presque sûre de A. N. Kolmogoroff, *C. R. Acad. Sc.*, t. 254, 1962, p. 1567-1569.

[12] J. DELPORTE, Extension aux éléments aléatoires à valeurs dans les espaces de Banach $C[0, 1]$ et $C_0[0, 1]$ d'un critère de convergence forte presque sûre de A. N. Kolmogoroff, *C. R. Acad. Sc.*, t. 254, 1962, p. 1914-1916.

[13] J. DELPORTE, Construction d'une fonction aléatoire normale presque sûrement continue, possédant une covariance donnée, *C. R. Acad. Sc.*, t. 255, 1962, p. 3115-3117.

[14] J. DELPORTE, Construction d'une fonction aléatoire normale presque sûrement lipschitzienne, *C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 2765-2767.

[15] J. DELPORTE, Extension des conditions suffisantes pour la construction de

- fonctions aléatoires normales presque sûrement continues, possédant une covariance donnée, *C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 3816-3819.
- [16] J. DELPORTE, Convergence uniforme presque sûre de séries de fonctions aléatoires normales, presque sûrement continues. Application à l'étude de la fonction du mouvement brownien de Wiener-Lévy, *C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 3949-3952.
- [17] J. DELPORTE, Un critère de convergence forte presque sûre des sommes d'éléments aléatoires indépendants dans un espace de Banach, *C. R. Acad. Sc.*, t. 257, 1963, p. 35-37.
- [18] R. L. DOBRUSHIN, The continuity conditions for the sample functions of a martingale, *Teoriya Veroyatnostoni*, éd. anglaise, vol. 3, n° 1, 1958, p. 92-93.
- [19] J. L. DOOB, *Stochastic processes*, J. Wiley, New York, 2^e édit., 1959.
- [20] S. DOSS, Sur la moyenne d'un élément aléatoire dans un espace distancié, *Bull. Sc. Math.*, 2^e série, t. 73, mars-avril 1949.
- [21] R. FORTET, Sur la notion de fonction aléatoire, *Rev. Sc.*, n° 3, 79^e année, mars 1941.
- [22] R. FORTET in I. KAPLANSKY, J. R. MARSHALL JR., E. HEWITT et R. FORTET, *Some aspects of analysis and probability*. Part. IV. Recent advances in probability theory, J. Wiley, 1958, p. 169-240.
- [23] R. FORTET et E. MOURIER, Résultats complémentaires sur les éléments aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace de Banach, *Bull. Sc. Math.*, t. 78, 1954, p. 14.
- [24] R. FORTET et E. MOURIER, Les fonctions aléatoires comme éléments aléatoires dans les espaces de Banach, *St. Math.*, t. 15, 1956, p. 62 à 79.
- [25] M. FRÉCHET, Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié, *Ann. Inst. H.-Poincaré*, t. 10, fasc. IV.
- [26] M. FRÉCHET, Intégrale abstraite d'une fonction abstraite d'une variable abstraite et son application à la moyenne d'un élément aléatoire de nature quelconque, *Rev. Scient.*, fasc. 8.
- [27] M. FRÉCHET, Les éléments aléatoires de nature quelconque, *Ann. Inst. H.-Poincaré*, t. XIV, 1948.
- [28] M. FRÉCHET, Généralisations de la loi de probabilité de Laplace, *Ann. Inst. H.-Poincaré*, t. XII, fasc. I, 1951.
- [29] A. FUCHS, Étude de la continuité des fonctions aléatoires de Markov, *Bull. Soc. Math. France*, t. 88, 1960, p. 157-216.
- [30] P. HALMOS, *Measure Theory*, New York, 1950, Van Nostrand.
- [31] G. HUNT, Random Fourier transforms, *Tr. Amer. math. Soc.*, t. 71, 1951, p. 38-69.
- [32] M. KAC et A. J. P. SIEGERT, An explicit representation of a stationary gaussian process, *Ann. of Math. Stat.*, t. 18, 1947, p. 438-442.
- [33] J. P. KAHANE, Propriétés locales des fonctions à séries de Fourier aléatoires, *St. Math.*, t. 19, 1960, p. 1 à 25.
- [34] J. P. KAHANE, Séries de Fourier aléatoires, *Sém. Bourbaki*, 12^e année, Paris, fasc. 3, 1959-1960.
- [35] J. KAMPÉ DE FÉRIET, Représentation d'un champ vectoriel ayant une matrice de covariance donnée, *Sém. Darmois, Inst. H.-Poincaré*, 20 janvier 1956, p. 1 à 22.
- [36] J. KAMPÉ DE FÉRIET, Une classe de mesures de probabilité sur les espaces l^p et L^p ($p \geq 1$), *C. R. Acad. Sc.*, t. 244, 1957, p. 1119-1122.
- [37] J. KAMPÉ DE FÉRIET, Mesures de probabilité sur un espace de Hilbert séparable, *C. R. Acad. Sc.*, t. 244, 1957, p. 1850-1853.
- [38] J. KAMPÉ DE FÉRIET, Mesures de probabilité sur les espaces de Banach admettant une base dénombrable, *C. R. Acad. Sc.*, t. 244, 1957, p. 2450-2454.

- [39] J. KAMPÉ DE FÉRIET, Mesures de probabilité sur l'espace de Banach $C[0, 1]$, *C. R. Acad. Sc.*, t. 245, 1957, p. 813-816.
- [40] J. KAMPÉ DE FÉRIET, Mesures de probabilité sur les espaces de Banach possédant une base dénombrable, *J. Math. pur. et appl.*, t. 39, 1960, p. 97-163.
- [41] J. KAMPÉ DE FÉRIET, An elementary theory of the brownian motion, *Sankhya Indian Journ. of Math.*, series A, vol. 23, part. 3, 1961, p. 207-220.
- [42] J. KAMPÉ DE FÉRIET, Mesures de probabilité sur l'espace de Banach $C_0[0, 1]$, *C. R. Acad. Sc.*, t. 255, 1962, p. 2334-2337.
- [43] A. N. KOLMOGOROFF, Ueber die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen, *Math. Ann.*, t. 99, 1928, p. 303-319.
- [44] A. N. KOLMOGOROFF, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin, 1933.
- [45] P. LÉVY, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Gauthier-Villars, Paris, 1948.
- [46] P. LÉVY, Random Functions : general theory with special reference to laplacian random functions. *Univ. of California Public. in Stat.*, vol. 1, n° 12, p. 331-390.
- [47] P. LÉVY, Le mouvement brownien, *Mém. Sc. Math.*, fasc. 126, 1954.
- [48] P. LÉVY, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars, Paris, 1954.
- [49] P. LÉVY, Le mouvement brownien fonction d'un ou de plusieurs paramètres, *Rendiconti di Matematica* (1-2), vol. 22, p. 24-101.
- [50] LJUSTERNIK et SOBOLEV, *Elemente der Funktionalanalysis*, Akademie Verlag, Berlin, 1955.
- [51] M. LOËVE, *Probability Theory*, Van Nostrand, New York, 1955.
- [52] M. LOËVE in P. LEVY [45].
- [53] J. MERCER, *Phil. Trans.*, 209 A, 1909, p. 415.
- [54] E. MOURIER, Éléments aléatoires dans un espace de Banach, *Ann. Inst. H.-Poincaré*, vol. XIII, fasc. III, Paris, 1953.
- [55] R. C. PALEY et N. WIENER, Fourier transforms in the complex domain, *Amer. math. soc.*, vol. 19, 1934.
- [56] R. SALE et A. ZYGMUND, Some properties of trigonometric series whose terms have random signs. *Act. Math.*, t. 91, 1954, p. 245-301.
- [57] J. SCHAUDER, Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktional räumen, *Math. Z.*, t. 26, 1937, p. 47-65.
- [58] T. SIRAO, On the uniform continuity of the Wiener process, *Journ. of Math. Soc. in Japan*, t. 6, 1954, p. 332-335.
- [59] E. SLUTSKY, Qualche proposizione relativa alla teoria della funzioni aleatorie. *Giornale Inst. Ital. Attuari*, t. 8, 1937, p. 183-199.
- [60] A. E. TAYLOR, *Introduction to functional analysis*, J. Wiley, New York, 1958.
- [61] A. C. ZAAENEN, *Linear analysis*, North. Holland Publish. Co., Amsterdam, 1960.
- [62] A. ZYGMUND, *Trigonometrical Series*, t. 1, 2^e éd., 1959, Cambridge University Press.
-

SOMMAIRE

	Pages
CHAPITRE PREMIER. — Espaces de Banach à base monotone	112
1.1 Généralités sur les espaces de Banach	112
1.2 Espaces de Banach à base de Schauder.	113
1.3 Espaces de Banach à base monotone	113
1.4 Propriétés fondamentales des espaces de Banach à base monotone	113
CHAPITRE II. — Étude de l'espace de Banach $C_0[0, 1]$	117
2.0 Introduction. Résultats généraux et notations.	117
2.1 Le développement de toute fonction appartenant à $C_0[0, 1]$ en série de fonctions triangulaires	119
2.2 Notations nouvelles et lemmes auxiliaires.	123
2.3 Conditions de continuité uniforme sur l'ensemble dyadique	128
2.4 Majorations du module de continuité	132
CHAPITRE III. — Critères de convergence forte presque sûre des séries d'éléments aléatoires à valeurs dans un espace de Banach	134
3.0 Introduction	134
3.1 Notions succinctes sur les variables aléatoires et les éléments aléatoires	134
3.2 Extension à tout espace de Banach d'un critère de convergence forte presque sûre	137
3.3 Critères de convergence forte presque sûre dans un espace de Banach à base monotone.	147
3.4 Convergence presque sûre vers zéro d'une suite de variables aléatoires normales.	150
3.5 Inégalités relatives au supremum de m variables aléatoires.	152
CHAPITRE IV. — Étude des covariances continues.	156
4.0 Introduction	156
4.1 Définitions générales et propriétés des covariances	157
4.2 Conditions nécessaires et suffisantes de continuité uniforme sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ d'une covariance réelle.	159
4.3 Majorations du module de continuité d'une covariance.	167
CHAPITRE V. — Continuité presque sûre des fonctions aléatoires.	169
5.0 Introduction	169
5.1 Généralités sur la continuité presque sûre des fonctions aléatoires.	170
5.2 Conditions suffisantes de continuité presque sûre des fonctions aléatoires	174
5.3 Continuité presque sûre des fonctions aléatoires normales possédant une covariance continue donnée.	180

	Pages
CHAPITRE VI. — Convergence uniforme presque sûre des séries de fonctions aléatoires indépendantes presque sûrement continues. . . .	190
6.0 Introduction	190
6.1 Historique.	192
6.2 Lemmes préliminaires	193
6.3 Étude de la convergence uniforme presque sûre dans le cas général	195
6.4 Convergence uniforme presque sûre des séries de fonctions aléatoires normales indépendantes presque sûrement continues	198
6.5 Deuxième construction d'une fonction aléatoire normale presque sûrement continue à partir du développement spectral de sa covariance	202
6.6 Processus stationnaires gaussiens à spectre purement discontinu.	203
6.7 Étude de la fonction aléatoire du mouvement brownien de Wiener-Lévy.	207
 BIBLIOGRAPHIE.	 211

