ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

AMINA BENBERNOU-LAHMAR

Estimation des résidus de la matrice de diffusion associés à des résonances de forme I

Annales de l'I. H. P., section A, tome 71, nº 3 (1999), p. 303-338
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1999__71_3_303_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 71, n° 3, 1999, p. 303-338. *Physique théorique*

Estimation des résidus de la matrice de diffusion associés à des résonances de forme I

par

Amina BENBERNOU-LAHMAR[1]

Université de Paris 13, Institut Gallilée, France

Article received on 29 May 1997, revised 8 December 1997

ABSTRACT. – The aim of this study is to estimate the residu of the scattering matrix associated with resonances for two-body Schrödinger operators with long range interactions in the semiclassical approach. We assume that there are no caustics out of the classical forbidden area surrounding the well. Then we obtain a semiclassical BKW expansion of the resonating states in a neighborhood of some vanishing bicharacteristics of the operator. This expansion allows us to find out an estimate of the residu of the kernel of the scattering matrix, which appears to be either of the same order as the width of the resonance, or such depending on the fact that (ω, ω') belongs or not to a certain set explicitely described. © Elsevier, Paris

RÉSUMÉ. – Le but de cette étude est l'estimation semiclassique des résidus de la matrice de diffusion $S(\lambda)$ associés à des résonances de forme, pour des opérateurs de Schrödinger à deux corps $P = -h^2\Delta + V(x)$ où V est un potentiel à longue portée. En l'absence de caustiques, nous obtenons un développement B.K.W à l'infini de l'état résonnant au voisinage de toute bicaractéristique de P. Grâce à ce développement, nous obtenons une estimation du résidu du noyau $S(\lambda, h, \omega, \omega')$ de $S(\lambda)$, qui se trouve être soit comparable à la largeur de la résonance, soit

[1] E-mail : benbern@zeus.math.univ-paris13.fr.

beaucoup plus petit selon que (ω, ω') appartient ou non à un certain ensemble explicitement décrit.

1. INTRODUCTION

On s'intéresse aux résidus de la matrice de diffusion $S(\lambda)$ associés à des résonances de forme, pour des opérateurs de Schrödinger à deux corps $P = -h^2\Delta + V(x)$ où V est un potentiel à longue portée.

Les physiciens associent les résonances quantiques (qui sont observées sous forme de pics sur la section efficace totale de diffusion d'une réaction), aux pôles de la matrice de diffusion $S(\lambda)$ pour des valeurs complexes de λ. Le but de ce travail est de voir si les pics que présente la matrice de diffusion aux énergies proches des parties réelles des résonances de forme ont une taille suffisante pour être physiquement décelables. En fait, on va montrer que ce n'est pas le cas dans la limite semi-classique $h \to 0$, c'est à dire que les résonances peuvent difficilement se déceler si on se contente d'observer la taille du noyau de la matrice de diffusion à énergie réelle.

Pour cela, nous montrons que la taille des résidus du noyau $S(\lambda, h, \omega, \omega')$ de la matrice de diffusion associés aux résonances de forme est suffisamment petite pour compenser le fait que ces résonances sont très proches du réel (comme cela pouvait d'ailleurs se dériver à partir de ces résultats sur la section efficace totale : voir par exemple [18]), et peut même être beaucoup plus petite si (ω, ω') n'est pas dans un certain ensemble privélégié de directions dépendant du comportement géométrique de V.

La théorie des résonances pour P a été développée dans un très grand nombre d'articles [1,3,11,10,7], et il y a essentiellement deux manières d'introduire les résonances : la première idée est d'utiliser des dilatations analytiques [1,3] ou plus généralement des distorsions analytiques [11]. Elle consiste alors à construire des prolongements méromorphes des éléments matriciels de la résolvante :

$$\langle (P - z)^{-1}\varphi, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

partant de $\Im m\, z > 0$, où φ, ψ appartiennent à un espace $\mathcal{A}$ dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur lequel la dilatation ou la distorsion opère. L'ensemble des résonances de P est alors l'union des pôles de ces quantités (indépendant du choix de $\mathcal{A}$).

La deuxième idée [10] est, d'introduire des espaces de Sobolev adaptés et de définir les résonances comme étant les valeurs complexes z pour lesquelles $(P - z)$ n'est pas inversible sur ces espaces.

Les résonances lorsqu'elles existent sont situées sur le deuxième feuillet : $\{z \in \mathbb{C}; \Re e\, z > 0, \Im m\, z \leqslant 0\}$.

Revenons maintenant à la matrice de diffusion. Isosaki et Kitada [13], ont introduit des modificateurs indépendants du temps pour définir la matrice $S(\lambda)$ dans le cas à longue portée, en utilisant des idées géométriques présentes dans les travaux de Enss et de Mourre. Ils utilisent ces modificateurs dans [14] pour étudier les singularités du noyau-distribution de $S(\lambda)$ sur la diagonale $S^{n-1} \times S^{n-1}$. En particulier, ils donnent une formule de représentation de $S(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$ en fonction des valeurs au bord de la résolvante $R(\lambda + \mathrm{i}0)$. En s'inspirant des travaux de Isosaki et Kitada, Gérard et Martinez [5] ont montré qu'à l'aide de cette formule de représentation, $S(\lambda)$ se prolonge méromorphiquement en λ dans un voisinage du réel comme opérateur continu sur les espaces de Gevrey $G^s(S^{n-1})$ pour $1 < s < (1-\alpha)^{-1}$ (où $0 < \alpha < 1$ est le taux polynômial de décroissance à l'infini du potentiel), avec des pôles exactement égaux aux résonances de P. De plus, les opérateurs intervenant dans cette représentation sont déterminés $\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\varepsilon\langle x\rangle})$, ce qui la rend utile même dans le cas à courte portée.

Dans ce travail nous utilisons essentiellement cette formule pour calculer le résidu $S(\lambda, h, \omega, \omega')$ (noyau de $S(\lambda)$) en ρ, ρ désignant une résonance. Nous avons besoin des développements $B.K.W$ des états résonnants construits par Helffer et Sjöstrand [10]. L'un des problèmes étant que la formule de représentation de $S(\lambda)$ fait intervenir les états résonnants à l'infini, on considère seulement le cas où les développements précédents peuvent être prolongés.

Précisons d'abord le cadre géométrique du problème. On suppose que V est analytique et vérifie :

$$\lim_{|x|\to\infty} V(x) = 0; \qquad V(0) = \lambda_0 > 0;$$

$$\text{l'île } \ddot{O} := \{V > \lambda_0\} \text{ est bornée et connexe; } 0 \in \overline{\ddot{O}}.$$

On suppose également que $V''(0)$ est défini positif, et que le champ hamiltonien H_p de $p(x, \xi) = \xi^2 + V(x)$ n'admet pas de trajectoire captée d'énergie λ_0 au dessus de la mer $\ddot{O}^c$. Suivant [10], on dira qu'un point de $\partial\ddot{O}$ est de type 1 s'il peut être relié à 0 par une courbe géodésique minimale relativement à la métrique dégénérée $V(x)\,dx^2$ (métrique de Lithner–Agmon). On note ensuite $L \in S^{n-1}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence lorsque $t \to +\infty$ de

$$\pi_x \exp t H_p(x,0) / \|\pi_x \exp t H_p(x,0)\|$$

où x décrit l'ensemble des points de type 1. Soient $f^{\pm}$ les phases obtenues par Helffer et Sjöstrand dans le développement B.K.W des états résonnants dans la zone classiquement permise. On suppose que la variété Lagrangienne $\Lambda_{\pm} = \{\xi = f'_{\pm}(x)\}$ ne développe pas de caustiques après le prolongement par le flot Hamiltonien de P. Nous pouvons alors prolonger les développements B.K.W jusqu'à l'infini, du moins au voisinage de toute bicaractéristique de P issue des points de type 1. Grâce à ces développements des états résonnants, nous montrons que (voir aussi [2]) :

1. Si$(\omega,\omega') \notin L \times (-L)$, Résidu$(S(\lambda,h,\omega,\omega');\rho) = \mathcal{O}(h^{\infty}\mathrm{e}^{-2S_0/h})$ où S_0 désigne la distance d'Agmon entre 0 et $\partial\ddot{O}$.
2. Si $(\omega,\omega') \in L \times (-L)$,
$$\text{Résidu}\big(S(\lambda,h,\omega,\omega');\rho\big) = \mathcal{O}\big(h^{n-2m_j}\mathrm{e}^{-2S_0/h}\big)$$
où les réels m_j sont liés au numéro de la valeur propre de l'oscillateur harmonique $-h^2\Delta + \langle V''(0)x,x\rangle$ près de laquelle se trouve la résonance ρ.

Dans un prochain travail, on envisage de généraliser ce résultat au cas où des caustiques peuvent apparaître.

2. ETUDE DE LA MATRICE DE DIFFUSION

Soit $P = -h^2\Delta + V$ avec $V \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ l'opérateur de Schrödinger sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ où $h \in]0,1]$ est un petit paramètre semi-classique. Nous faisons l'hypothèse suivante sur V :

HYPOTHÈSE H.1. – *La fonction $\mathbb{R}_+ \times S^{n-1} \ni (r,\omega) \to V(r\omega)$ se prolonge holomorphiquement pa rapport à r dans :*

$$D = \Big\{(r,\omega) \in \mathbb{C} \times S^{n-1};\ \Re e\, r \geqslant 0,\ |\Im m\, r| \leqslant \frac{1}{c_0}\langle \Re e\, r\rangle\Big\} \tag{2.1}$$

et vérifie : $|V(r\omega)| \leqslant c_0\langle r\rangle^{-\rho}$ dans D, où c_0 et ρ sont des constantes strictement positives.

Remarquons que même dans le cas à courte portèe (i.e., $\rho > 1$), on aura besoin des constructions d'Isosaki–Kitada, et il ne nous semble donc, guère possible d'obtenir des simplifications notables par rapport au cas à longue portèe (du moins avec nos techniques).

2.1. Représentation de la matrice de diffusion

Sous l'hypothèse (2.1) nous pouvons définir pour $\lambda > 0$, la matrice de diffusion

$$S(\lambda): L^2(S^{n-1}) \to L^2(S^{n-1}).$$

Isozaki et Kitada ont donnés la formule de représentation suivante [14], reprise dans le cadre analytique par Gérard et Martinez [5] :

$$S(\lambda) = 1 - 2\mathrm{i}\pi \mathcal{F}_0(\lambda) J_1^* T_2 \mathcal{F}_0^*(\lambda) + 2\mathrm{i}\pi \mathcal{F}_0(\lambda) T_1^* R(\lambda + \mathrm{i}0) T_2 \mathcal{F}_0^*(\lambda) \quad (2.2)$$

où :

- $R(\lambda + \mathrm{i}0)$ désigne la valeur au bord de la résolvante de P.
- $\mathcal{F}_0(\lambda)$ est défini pour

  $$f \in L^2_s(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^2(\mathbb{R}^n);\ \langle x\rangle^s f \in L^2(\mathbb{R}^n)\} \quad (s > \tfrac{1}{2})$$

  par :

  $$\mathcal{F}_0(\lambda) f(\omega, h) = 2^{-1/2} \lambda^{(n-2)/4} \hat{f}(\sqrt{\lambda}\omega, h) \in L^2(S^{n-1}_\omega)$$

  où

  $$\hat{f}(\xi, h) = (2\pi h)^{-n/2} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi/h} f(x)\, dx.$$

  Son adjoint $\mathcal{F}_0^*(\lambda)$ est défini par :

  $$\mathcal{F}_0^*(\lambda) g(x, h) = 2^{-1/2} \lambda^{(n-2)/4} (2\pi h)^{-n/2} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\omega\sqrt{\lambda}/h} g(\omega)\, dS_\omega$$

  où dS_ω désigne la mesure du volume sur S^{n-1}.
- Les opérateurs $J_j (j = 1, 2)$ sont les opérateurs intégraux de Fourier de la forme :

  $$Ju(x, h) = (2\pi h)^{-n} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi(x,\eta) - y\eta)/h} a(y, \eta, h) u(y)\, dy\, d\eta$$

  associés à $(\varphi_j, a_j)(j = 1, 2)$ où (φ_j, a_j) sont définis par :

1. $\exists R > 0$ tel que φ_j soit C^∞ et réelle dans :

$$\{(x,\eta)\in\mathbb{R}^{2n},\ |x|\geqslant R;\ |\eta|\geqslant d;\ \cos(x,\eta)\in[-1,\sigma_j^-]\cup[\sigma_j^+,1]\}\tag{2.3}$$

avec $-1<\sigma_1^-<\sigma_1^+<0<\sigma_2^-<\sigma_2^+<1$; (où $\cos(x,\eta)=\frac{x.\eta}{|x|.|\eta|}\}$ et y vérifie :
- l'équation eiconale : $|\nabla_x\varphi|_j^2+V(x)=\eta^2$;
- $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$, $|D_x^\alpha D_\eta^\beta(\varphi_j(x,\eta)-x\eta)|\leqslant C_{\alpha\beta}\langle x\rangle^{1-\rho-|\alpha|}$.

2. Le symbole a_j admet un développement asymptotique lorsque $h\to 0$:

$$a_j(x,\eta,h)\sim\sum_{k\geqslant 0}a_{j,k}(x,\eta)h^k$$

$$\text{avec } |a_{j,k}(x,\eta)|\leqslant c_j^{k+1}\langle x\rangle^{-k}\langle\eta\rangle^{-k}k!\tag{2.4}$$

où $c_j>0$ et :
- $a_{j,k}(x,\eta)$ sont analytiques en $r=|x|$ et $\sigma=|\xi|$ pour σ dans un voisinage complexe de $\sqrt{\lambda_0}$ et r dans $\{\Re e\, r>4R,\ |\Im m\, r|<\varepsilon\langle\Re e\, r\rangle\}$ ($\varepsilon>0$ assez petit).
- $a_{j,k}(x,\eta)=0$ si $\cos(x,\eta)\in[\sigma_j^-,\sigma_j^+]$ ou $|x|\leqslant R$ ou $|\eta|\leqslant d$.
- $\exists\delta>0$ tel que $-1<\sigma^--\delta<\sigma^++\delta<1$ et :

$$\left|D_x^\alpha D_\eta^\beta(a_{0,k}(x,\eta)-1)\right|\leqslant C_{\alpha,\beta}\langle x\rangle^{-|\alpha|-\rho},$$

pour $\cos(x,\eta)\in[-1,\sigma^--\delta]\cup[\sigma^++\delta,1]$, $|x|\geqslant R$, $|\eta|$ voisin de $\sqrt{\lambda_0}$.

3. Le symbole $t_j(x,\eta,h)$ donné par :

$$t_j(x,\eta,h)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_j(x,\eta)/h}(P-\eta^2)\left(a_j(.,\eta,h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j(x,\eta)/h}\right)\tag{2.5}$$

- $t_2(x,\eta,h)=\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\varepsilon_2\langle x\rangle/h})$ dans

$$\cos(x,\eta)\in[-1,\sigma_2^--\delta]\cup[\sigma_2^++\delta,1],\quad |x|\geqslant 2R,$$

et uniformément pour $h\in]0,1]$, $\delta>0$, $\varepsilon_2>0$.
- $t_1(x,\eta,h)=\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\varepsilon_1\langle x\rangle/h})$ dans

$$\cos(x,\eta)\in[-1,\sigma_1^--\delta]\cup[\sigma_1^++\delta,1],\quad |x|\geqslant 2R,$$

et uniformément pour $h\in]0,1]$, $\delta>0$, $\varepsilon_1>0$.

- Les opérateurs $T_j(j=1,2)$ sont les opérateurs intégraux de Fourier défini par :

$$
\begin{aligned}
T_j u(x,h) &= (2\pi h)^{-n} \int e^{i(\varphi_j(x,\eta)-y\eta)/h} t_j(y,\eta,h) u(y,h)\, dy\, d\eta \\
&= [P, J_j] u(x,h).
\end{aligned}
$$

D'après [14], *L'amplitude de diffusion* $S(\lambda, h, \omega, \omega')$ s'écrit pour presque tout $\omega, \omega' \in S^{n-1}$ en dehors des points singuliers sous la forme :

$$
\begin{aligned}
S(\lambda, h, \omega, \omega') = \delta(\omega - \omega') &- i\pi \lambda^{(n-2)/2} f(\lambda, h, \omega, \omega') \\
&+ i\pi \lambda^{(n-2)/2} g(\lambda, h, \omega, \omega')
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

avec :

$$
\begin{aligned}
&f(\lambda, h, \omega, \omega') \\
&\quad = \int e^{i[\varphi_2(x,\sqrt{\lambda}\omega') - \varphi_1(x,\sqrt{\lambda}\omega)]/h} \overline{a}_1(x, \sqrt{\lambda}\omega) t_2(x, \sqrt{\lambda}\omega', h)\, dx
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

$$
\begin{aligned}
g(\lambda, h, \omega, \omega') = \big\langle R(\lambda + i0) &e^{i\varphi_2(x,\sqrt{\lambda}\omega')/h} t_2(.\,, \sqrt{\lambda}\omega', h), \\
&e^{i\varphi_1(x,\sqrt{\lambda}\omega)/h} t_1(.\,, \sqrt{\lambda}\omega, h)\big\rangle_{L^2}
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Comme cela, été Remarqué par Yafaev (cf. [18]), notons que dans le cas à longue portèe $0 < \rho < 1$, f présente en fait une singularité de Dirac sur $\omega = \omega'$, qui annule celle de $\delta(\omega - \omega')$. Dans la mesure ou l'on s'intéresse ici aux pôles de $S(\lambda)$, et que ceux-ci sont portés par g uniquement qui, comme il est prouvé dans [5], se prolonge méromorphiquement par rapport à λ dans un cône complexe contenant $\mathbb{R}_+^*$, cela n'aura cependant pas d'incidence pour nos résultats.

2.2. Localisation des résonances et prolongement de la matrice de diffusion $S(\lambda)$ à des valeurs complexes de λ

On s'intéresse ici aux pôles de $S(\lambda)$. Puisque f introduit en (2.6) se prolonge holomorphiquement en λ complexe (voir [5]), nous allons donc limiter notre étude à $g(\lambda, h, \omega, \omega')$. Nous introduisons pour cela une distorsion due à Hunziker [11].

Pour μ réel , $|\mu|$ assez petit, on note U_μ l'opérateur défini par :

$$
(U_\mu \varphi)(x) = (J_\mu(x))^{1/2} \varphi(x + \mu v(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n,
\tag{2.9}
$$

où

$$
v(x) = x\chi_2(|x|) \quad \text{avec } \chi_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+),
$$

$$
\chi_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leqslant 3R, \\ 1 & \text{si } |x| \geqslant 4R, \end{cases}
$$

et

$$J_\mu(x) = \det\left(\delta_{ij} + \mu\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$$

est le jacobien de l'application $T_\mu : x \to x + \mu v(x)$. Alors

– U_μ est un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ pour μ réel, et on pose :

$$P_\mu = U_\mu P U_\mu^{-1} = -\frac{h^2}{(1+\mu)^2}\Delta - h^2 Q_\mu(x, D_x) + V_\mu \qquad (2.10)$$

où $V_\mu = U_\mu^{-1} V U_\mu$. D'après H.1, on voit que la famille $V_\mu(x)(-\Delta + 1)^{-1}$ s'étend à μ complexe assez petit en une famille analytique d'opérateurs compacts sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. D'autre part, $Q_\mu(x, D_x)$ est un opérateur différentiel de degré 2, dont les coefficients sont C^∞ à support compact, analytiques en μ et dont les dérivées de tout ordre sont $\mathrm{O}(|\mu|)$.

– Le spectre de P_μ ($\mu \in \mathbb{C}$, $0 < \Im m\, \mu < \delta$, $\delta > 0$ assez petit) (voir [7]) est discret près de λ_0, inclus dans $\{z \in \mathbb{C} : \Im m\, z \leqslant 0\}$ et est indépendant de μ pour μ voisin d'un μ_0 fixé ($0 < \Im m\, \mu_0 < \delta$). De plus, si $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des fonctions entières φ sur $\mathbb{C}^n$ telles que :

$$\exists \varepsilon > 0, \qquad \lim_{|z|\to\infty, |\arg z| < \delta} \mathrm{e}^{\varepsilon z^2}\varphi(z) = 0, \qquad (2.11)$$

alors : $\forall \lambda_0 > 0$, $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{A}$, la fonction

$$z \to \langle (P - z)^{-1}\varphi, \psi\rangle_{L^2},$$

se prolonge méromorphiquement en z près de λ_0 à partir de $\Im m\, z > 0$, et on a

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu &:= Sp(P_\mu) \cap (]\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon[+ \mathrm{i}] - \varepsilon, \varepsilon[\\ &= \bigcup_{\varphi,\psi\in\mathcal{A}} \{\text{pôles de} \langle (P - z)^{-1}\varphi, \psi\rangle\} \\ &\qquad \cap (]\lambda_0 - \varepsilon,\ \lambda_0 + \varepsilon[+ \mathrm{i}] - \varepsilon, \varepsilon[) \end{aligned} \qquad (2.12)$$

où $\varepsilon > 0$ assez petit.

$$\sigma_{\text{ess}}(P_\mu) = \sigma_{\text{ess}}\left(-\frac{1}{(1+\mu)^2}\Delta\right) = \{z \in \mathbb{C}; \arg z = -2\arg(1+\mu)\}.$$

– $U_\mu(\mathcal{A})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, $\forall \mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| < \varepsilon$.

$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{A}, z \in \mathbb{C}, \Im m\, z > 0$ on a :

$$\langle (P-z)^{-1}\varphi, \psi\rangle_{L^2} = \langle (P_\mu - z)^{-1} U_\mu \varphi, U_{\overline{\mu}}\psi\rangle_{L^2}. \tag{2.13}$$

Grâce aux propriétés de φ_2 (respectivement φ_1) et au fait que $t_2(x,\xi,h)$ (respectivement $t_1(x,\xi,h)$) soit exponentiellement petit en dehors de la région sortante $\cos(x,\eta) \geqslant \sigma_2^- - \delta > 0$, (respectivement entrante $\cos(x,\eta) \leqslant \sigma_1^- - \delta < 0$) et $|x| \geqslant 4R$, pour $\Im m\, \mu > 0$ on en déduit que,

$$\begin{aligned} &\left|U_\mu\left(e^{i\varphi_2(x,\sqrt{\lambda}\omega)/h} t_2(x,\sqrt{\lambda}\,\omega,h)\right)\right| \\ &\quad + \left|U_{\overline{\mu}}\left(e^{i\varphi_1(x,\sqrt{\lambda}\omega)/h} t_1(x,\sqrt{\lambda}\omega,h)\right)\right| = \mathcal{O}\left(e^{-\varepsilon\langle x\rangle/h}\right) \end{aligned} \tag{2.14}$$

avec $\varepsilon > 0$, uniformément pour $|x| \geqslant 4R$, $\omega \in S^{n-1}$, $h \in]0,1]$ et $|\Im m\,\lambda| \ll |\Im m\,\mu|$.

Ainsi, $g(\lambda,h,\omega,\omega')$ se prolonge en une fonction méromorphe en λ qui s'écrit :

$$\begin{aligned} g(\lambda,h,\omega,\omega') = \langle &R_\mu(\lambda) U_\mu\left(e^{i\varphi_2(.,\sqrt{\lambda}\omega')/h} t_2(.,\sqrt{\lambda}\omega',h)\right), \\ &U_{\overline{\mu}} e^{i\varphi_1(.,\sqrt{\lambda}\omega)/h} t_1(.,\sqrt{\lambda}\omega,h)\rangle_{L^2} \end{aligned} \tag{2.15}$$

et dont les pôles en λ sont ceux de $R_\mu(\lambda)$, c'est à dire les résonances de P.

3. ETUDE DES RÉSONANCES ET APPROXIMATION B.K.W DES ÉTATS RÉSONNANTS DANS LE CAS D'UN PUITS DANS UNE ÎLE

Onse place maintenant dans le cadre de ([10] Chapter 10), c'est à dire que l'on suppose en plus :

HYPOTHÈSE H.2. –

1. *Il existe un ouvert borné connexe* $\ddot{O} \subset \mathbb{R}^n$ *et* $x_0 \in \ddot{O}$ *tel que* :

$$V(x_0) \leqslant \lambda_0, \quad V > \lambda_0 \quad sur\ \ddot{O}\backslash x_0,\ V < \lambda_0\ sur\ \mathbb{R}^n\backslash\overline{\ddot{O}}\ et\ V''(x_0) > 0. \tag{3.1}$$

2. *V est analytique sur* $\mathbb{R}^n$.
3. λ_0 *est non captif, c'est à dire* :

$$\begin{aligned} &\{(x,\xi) \in p^{-1}(\lambda_0)/x \in \ddot{O}^c, \\ &\quad |\exp tH_p(x,\xi)| \not\to \infty\ quand\ |t| \to \infty\} = \emptyset \end{aligned} \tag{3.2}$$

où

$$H_p = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right)$$

est le champ Hamiltonien de $p(x, \xi) = \xi^2 + V(x)$.

On peut alors construire comme dans [6] une fonction fuite vérifiant :

$$H_p G(x, \xi) \geqslant \frac{1}{c} \quad (c > 0) \text{ pour } x \text{ dans } \ddot{O}^c \text{ et } \xi^2 + V(x) = \lambda_0. \tag{3.3}$$

A la fonction fuite G et à t petit, on associe une famille de variétés I-Lagrangiennes notée Λ_{tG} :

$$\Lambda_{tG} = \left\{ \alpha = (\alpha_x, \alpha_\xi) \in \mathbb{C}^{2n}; \quad \begin{array}{rcl} \Im m\, \alpha_x & = & t \dfrac{\partial G}{\partial \xi} (\Re e\, \alpha_x, \Re e\, \alpha_\xi) \\ \Im m\, \alpha_\xi & = & -t \dfrac{\partial G}{\partial x} (\Re e\, \alpha_x, \Re e\, \alpha_\xi) \end{array} \right\}$$

et à la variété Λ_{tG} on associe l'espace de Hilbert $H(\Lambda_{tG}, m)$ intoduit par [10].

Alors Helffer et Sjöstrand [10] ont montré qu'il existe un ensemble $\Gamma_t(h) \subset \mathbb{C}$ discret tel que l'opérateur :

$$P - z : H\left(\Lambda_{tG}, \langle \alpha_\xi \rangle^2\right) \to H(\Lambda_{tG}, 1)$$

est bijectif pour tout $z \in \Omega_t \backslash \Gamma_t(h)$, alors que, pour $z \in \Gamma_t(h)$, l'opérateur est de Fredholm d'indice 0. Dans ce travail on s'intéresse aux résonances obtenues par "effet tunnel" du puits de potentiel U à travers l'île $\ddot{O}$. Helffer et Sjöstrand ont montré qu'il y avait une bijection b entre les résonances de P et les valeurs propres du problème de Dirichlet localisé dans l'île suivant : Soit $S_0 > 0$ la distance d'Agmon entre U et $\ddot{O}^c$

$$\forall \eta > 0, \quad \text{soit } M_0 = \{ y \in \ddot{O},\ d(y, \partial \ddot{O}) > \eta \}.$$

Nous notons alors $P_0 = P_{M_0}$ la réalisation autoadjointe de P_0 dans $L^2(M_0)$ avec la condition au bord de Dirichlet sur ∂M_0.

3.1. Etude des états résonnants

Soit $\mu_1(h) < \mu_2(h), \ldots, \leqslant \mu_m(h)$ les m premières valeurs propres (comptées avec les multiplicités) de P_0, avec $\mu_k(h) \overset{h \to 0}{\longrightarrow} \lambda_0$. On sait d'après [10] que les $\mu_j(h)$ sont de la forme $\mu_j(h) = \lambda_0 + he_{k_j} + \mathcal{O}(h^2)$, avec $e_{k_j} \in \sigma(-\Delta + \frac{1}{2}\langle V''(x_0)x, x\rangle)$. En particulier, si e_{k_j} est simple et $\varepsilon > 0$ est assez petit, on aura :

$$\sigma(P_j) \cup [\mu_j(h) - \varepsilon h, \mu_j(h) + \varepsilon h] = \mu_j. \tag{3.4}$$

On pose alors :

$$I_j(h) = [\lambda_0 + (\mu_j(h) - \varepsilon h), \lambda_0 + (\mu_j(h) + \varepsilon h)].$$

Notons pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, u_j la fonction propre normalisée de P_0 associée à μ_j et ρ_j la résonance proche de μ_j.

Soit $\Omega_j(h)$ un voisinage complexe de $I_j(h)$ que l'on définit par :

$$\Omega_j(h) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\Re e\, z - \mu_j| < a(h)/2,\ |\Im m\, z| < \tilde{b}(h)\}.$$

Alors, pour tout $t > 0$ suffisamment petit, on pose :

$$\Pi_j = -\frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \oint_{\partial\Omega_j} R_t(z)\, dz \tag{3.5}$$

où $R_t(z) = (P - z)^{-1}$ est la résolvante en z de P pour $z \notin \Gamma_t(h)$.

On note ψ_j l'état résonnant de P défini par : $\psi_j = \alpha_j \Pi_j \chi_1 u_j$ où :

$\chi_1 \in C_0^\infty$, $\chi_1 = 1$ dans $\{y \in \ddot{O}, d(y, \partial\ddot{O}) > \eta\}$

- α_j est un coefficient de normalisation pour que $\langle \psi_j, \overline{\psi}_k\rangle_t = \delta_{jk}$, $\alpha_j = 1 + \tilde{\mathcal{O}}(\mathrm{e}^{-2S_0/h})$.
- $\overline{\psi}_k$ désigne le conjugué de ψ_k, $\overline{\psi}_k \in H(\Lambda_{-tG}, 1)$ car $\psi_k \in H(\Lambda_{tG}, 1)$ et $G(x, -\xi) = -G(x, \xi)$ (formule (3.3)). ($\langle .,.\rangle_t$ désigne le crochet de dualité entre $H(\Lambda_{tG}, 1)$ et $H(\Lambda_{-tG}, 1)$ défini dans [10]. $\langle .,.\rangle >_t$ coïncide avec $\langle .,.\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ sur des fonctions C_0^∞).

Selon [10], les états ψ_j forment une base $F \subset H(\Lambda_{tG}, 1)$ des états résonnants associés à $\Omega(h) \cap \Gamma_t$ et vérifient :

$$P\psi_j = \rho_j \psi_j, \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\}. \tag{3.6}$$

Nous avons également (cf. [4]) :

$$P\overline{\psi}_j = \overline{\rho}_j \overline{\psi}_j, \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\}. \tag{3.7}$$

$\overline{\psi}_j$ est colinéaire à $\widetilde{\psi}_j$ défini par :

$$\widetilde{\psi}_j = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial\Omega_j(h)} (z - P_{-t})^{-1} \chi_1 u_j \, dz$$

(où P_t est l'opérateur P agissant sur $H(\Lambda_{tG}, 1)$).

3.2. Approximations $B.K.W$ des états résonnants

On choisit des coordonnées euclidiennes centrées en x_1 tel que :

$$T_{x_1}\partial\ddot{O}: \begin{cases} x_n = 0, \\ \partial/\partial x_n \text{ est la normale extérieure de } \ddot{O} \text{ en ce point.} \end{cases}$$

Alors

$$V(x) = -c_0 x_n + W(x) + \lambda_0 \quad \text{où } c_0 > 0,\ W(x) = \mathcal{O}(|x|^2),$$

$$\text{La projection } \pi : \begin{array}{ccc} \Lambda & \to & \mathbb{R}^n \\ (x, \xi) & \to & (x', \xi_n), \end{array}$$

est un difféomorphisme local près de $(0, 0)$. Dans un voisinage de ce point, Λ se représente par :

$$\begin{cases} x_n = -\dfrac{\partial g}{\partial \xi_n}(x', \xi^n), \\ \xi' = \dfrac{\partial g}{\partial x'}(x', \xi^n), \end{cases} \tag{3.8}$$

où g est analytique près de $0, g(0) = 0, dg(0) = 0$. De plus g vérifie l'équation eiconale :

$$q\left(x', -\frac{\partial g}{\partial \xi_n}, \frac{\partial g}{\partial x'}, \xi_n\right) = \lambda_0$$

$\pi : \Lambda \to \mathbb{R}^n$ devient singulière exactement sur l'hypersurface $H \subset \Lambda$ donnée par :

$$H: \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_n^2} = 0, \text{ i.e., } \xi_n = \xi_n^c(x') = \mathcal{O}(|x'|^2) \text{ qui est analytique en } x'. \tag{3.9}$$

Remarque 1. –

1. La caustique $C = \pi(H)$ est une hypersurface analytique contenue dons $\overline{\ddot{O}}$ et tangente en x_1 à $\partial\ddot{O}$.
2. C est déterminée par $x_n + b(x') = 0$ où

$$b(x') = \frac{\partial g}{\partial \xi_n}(x', \xi_n^c(x')) = \mathcal{O}(|x'|^2).$$

Dans un voisinage de $\gamma([-\varepsilon_0, 0[)$ $((x_n + b(x') < 0, x$ proche de $x_1)$. On peut représenter f par la formule :

$$f(x) = \text{v.c}_{\xi_n}(x_n\xi_n + g(x', \xi_n)). \tag{3.10}$$

D'après [10], on peut prolonger f à $x_n + b(x') > 0$. Nous obtenons alors deux prolongements possibles f_+ et f_- de f selon le choix de $\sqrt{-(x_n + b)}$, et on a :

$$f_\pm(x) = a(x') + x_n\xi_n^c(x') + G(x', \sqrt{-(x_n + b)}) \tag{3.11}$$

où $a(x') = g(x', \xi_n^c(x'))$, G est analytique et $G(x', s) \sim s^3$,

$$f_+ \text{ est déterminée par : } \Im m\, f_+ \sim (x_n + b)^{3/2}, \tag{3.12}$$

$f_\pm$ est C^1, analytique dans le complexe évitant $\{x_n + b = 0\}$. Pour ne pas alourdir les notations davantage nous noterons $\widetilde{\gamma}$ les prolongements des bicaractéristiques à l'intérieur de l'île ou à l'extérieur de l'île. Et par γ sa projection. On notera $\widetilde{\Omega}$ un voisinage de x_1 et :

$$\widetilde{\Omega}_+ = \{x_n + b(x') > 0\} \cap \widetilde{\Omega}; \qquad \widetilde{\Omega}_- = \widetilde{\Omega} \backslash \overline{\widetilde{\Omega}}_+.$$

Helffer et Sjöstrand parviennent à prolonger les développements $B.K.W$ à travers $\partial\ddot{O}$ près d'un point de type 1 (en utilisant notamment un développement en intégrales d'Airy près de $\partial\ddot{O}$). Dans $\widetilde{\Omega}_+$ nous obtenons :

$$\psi_j(x, h) \sim h^{-\frac{n}{4}-m_j} a_j^-(x, h)\mathrm{e}^{-f_-(x)/h} \bmod \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-(S_0+\varepsilon)/h}), \tag{3.13}$$

$$\overline{\psi}_j(x, h) \sim h^{-\frac{n}{4}-m_j} a_j^+(x, h)\mathrm{e}^{-f_+(x)/h} \bmod \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-(S_0+\varepsilon)/h}) \tag{3.14}$$

(rappelons que f_- a été pris telle que $-\Im m\, f_- \geqslant 0$) où

$$h^{-m_j} a_j \sim \sum_{-\infty}^{m_j} a_{j,k} h^{k/2}$$

est la réalisation d'un symbole analytique semi-classique au sens de [17].

$f_\pm$ sont des extensions holomorphes de f obtenu en complexifiant C dans $\mathbb{C}^n$ et nous avons :

$$f_+ = \bar{f}_-, \qquad a_j^+ = \bar{a}_j^-,$$

$\Re e f_+ \geqslant S_0$ (avec égalités sur les courbes intégrales de $\nabla_x \Im m f_+$ issues des points de type 1 de $\overline{B_d(x_0, S_0)} \cap \partial \ddot{O}$).

DÉFINITION 3.1. –

1. *On appelle points de type* 1 *tout point* x *dans* $\mathbb{R}^n \backslash \ddot{O}$ *tel qu'il existe* γ *une bicaractéristique nulle de* $\xi^2 + V + \lambda_0$ *avec*

$$\pi_x(\gamma(0)) = x \quad et \quad \pi_x(\gamma) \cap \left(\overline{B_d(x_0, S_0)} \cap \partial \ddot{O}\right) \neq \emptyset.$$

2. *On appelle point de type* 2 *tout point qui n'est ni de type* 1, *ni dans* $\overline{B_d(x_0, S_0)}$.

On a alors le résultat suivant pour ψ_j. D'après (Proposition 9.11 dans [10] et Proposition 7.2 dans [4]),

$$\psi_j \quad \text{et} \quad \overline{\psi}_j \quad \text{sont } \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-(S_0+\varepsilon)/h}) \tag{3.15}$$

avec $\varepsilon_0 > 0$ localement uniformément près des points de type 2.

3.3. Représentation de la résolvante $R_t(z)$

Pour $z \notin \Gamma_t(h)$, z proche de $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, on note $R_t(z)$ l'inverse de $(P_t - z)$. Soit $\mu_j = \mu_j(h) = e_j h + \mathcal{O}(h^{3/2})$ la valeur propre de P_0 associée à une valeur propre simple e_j de l'oscillateur harmonique $-\Delta + 2^{-1}\langle V''(x_0)x, x\rangle$, et soit $\rho_j = \rho_j(h) = \mu_j(h) + \mathcal{O}(h^\infty)$ la résonance de P la plus proche de μ_j. On pose :

$$\Omega_j(h) = \left\{z \in \mathbb{C};\ |\Re e\, z - \mu_j| < \delta h,\ |\Im m\, z| < \tilde{b}(h)\right\} \tag{3.16}$$

avec $\delta > 0$ assez petit indépendant de h.

Pour $z \in \Omega_j(h)$, $\forall t > 0$ on considère le problème de Grushin suivant :

$$\begin{cases} (P - z)u + u^- \psi_j &= v \\ \qquad \langle u, \overline{\psi}_j \rangle &= v_+ \end{cases} \tag{3.17}$$

où

$$(v, v_+) \in H(\Lambda_{tG}, 1) \times \mathbb{C};\ (u, u_-) \in H\left(\Lambda_{tG}, \langle \alpha_\xi \rangle^2\right) \times \mathbb{C}.$$

On trouve alors (formule 3.12 dans [4]) :

$$R_t(z) = F_{t,j}(z) + \frac{A_{t,j}}{\rho_j - z} \tag{3.18}$$

où $F_{t,j}(z)$ est un opérateur dépendant de manière holomorphe de z dans $\Omega_j(h)$. De plus (cf. [6] $\|F_{t,j}(z)\| = \mathcal{O}(h^{-1})$). D'autre part $A_{t,j}u = \langle u, \overline{\psi_j}\rangle_t \psi_j$.

Remarque 2. – Dans le cas où V est invariant par rotation, l'hypothèse que e_j est simple exclut en principe les états de P_0 autres que l'état fondamental. Cependant, la raison principale de supposer e_j simple est que l'on a alors existence d'un développement BKW pour l'état résonnant associé à ρ_j. Dans le cas invariant par rotation, un tel développement BKW pourrait probablement s'obtenir aussi pour $j > 1$, en ramenant l'étude de P à celle d'une suite de problèmes unidimentionnels. Il paraît donc raisonnable de penser que notre résultat puisse être étendu également à ce cas.

4. CALCUL DU RÉSIDU DE $S(\lambda, h, \omega, \omega')$

Soit ρ_j un pôle de $S(\lambda, h, \omega, \omega')$. Prenons comme contour fermé autour de la résonance ρ_j un cercle centré en ρ_j et contenu dans $\Omega_j(h)$ que nous noterons $\gamma_j(h)$. Alors d'après (2.6), (2.8) :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}(S(\lambda, h, \omega, \omega'), \rho_j)\\
&= \frac{1}{2} \int_{\gamma_j(h)} \lambda^{(n-2)/2} \big\langle R_\mu(\lambda) U_\mu e^{i\varphi_2(.,\sqrt{\lambda}\omega')/h} t_2(.,\sqrt{\lambda}\omega', h),\\
&\qquad\qquad U_{\bar\mu} e^{i\varphi_1(.,\sqrt{\lambda}\omega)/h} t_1(.,\sqrt{\lambda}\omega, h)\big\rangle\, d\lambda
\end{aligned} \tag{4.1}$$

où U_μ est défini comme dans (2.9).

PROPOSITION 4.1. – *Pour μ complexe, $|\mu|$ assez petit, on a*

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}\big(S(\lambda, h, \omega, \omega'), \rho_j\big)\\
&= \tfrac{1}{2}\rho_j^{(n-2)/2} \big\langle U_\mu e^{i\varphi_2/h} t_2, U_{\bar\mu}\overline{\psi_j}\big\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \big\langle U_\mu \psi_j, U_{\bar\mu} e^{i\varphi_1/h} t_1\big\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

où φ_j, t_j, a_j $(j = 1, 2)$ sont définies dans (§ 2.1)

Preuve. – Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble introduit dans (2.11). On a alors (cf. [7])

$$\mathcal{A} \subset \bigcap_{|\mu| \leqslant \varepsilon} H(\Lambda_{tG}, 1)$$

et donc $R_t(z)$ agit sur $\mathcal{A}$.

Soit $u_1 \in \mathcal{A}$, $\gamma_j(h) = \partial \Omega_j(h)$ le contour fermé autour de la résonance ρ_j dans $\Omega_j(h)$ (où $\Omega_j(h)$ est défini comme dans (3.16)). D'après (3.18), on a

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma_j(h)} \lambda^{(n-2)/2} R_t(\lambda) u_1 \, d\lambda &= \oint_{\gamma_j(h)} \lambda^{(n-2)/2} \frac{A_t}{\rho_j - z} u_1 \, d\lambda \\ &= 2\mathrm{i}\pi \rho_j^{(n-2)/2} \langle u_1, \overline{\psi}_j \rangle_t \psi_j. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Soit $u \in U_\mu(\mathcal{A})$ alors $U_\mu^{-1} u \in \mathcal{A}$ ($\subset H(\lambda_{tG}, 1)$). Nous avons donc en particulier :

$$U_\mu \left(\oint_{\gamma_j(h)} \lambda^{(n-2)/2} R_t(\lambda) U_\mu^{-1}(u) \, d\lambda \right) = 2\mathrm{i}\pi \rho_j^{(n-2)/2} \langle u, U_{\bar{\mu}} \overline{\psi}_j \rangle_t U_\mu \psi_j \tag{4.3}$$

et par suite, pour $v \in U_\mu(\mathcal{A})$:

$$\begin{aligned}&\oint_{\gamma_j(h)} \lambda^{(n-2)/2} \langle U_\mu R_t(\lambda) U_\mu^{-1}(u), v \rangle_t \, d\lambda \\ &\qquad = 2\mathrm{i}\pi \rho_j^{(n-2)/2} \langle u, U_{\bar{\mu}} \overline{\psi}_j \rangle_t \langle U_\mu \psi_j, v \rangle_t. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Or les crochets $\langle ., . \rangle_t$ coïncident sur L^2 avec le produit scalaire L^2, d'où :

$$\begin{aligned}&\oint_{\gamma_j(h)} \lambda^{(n-2)/2} \langle U_\mu R_t(\lambda) U_\mu^{-1}(u), v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \, d\lambda \\ &\quad = \rho_j^{(n-2)/2} \langle u, U_{\bar{\mu}} \overline{\psi}_j \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \langle U_\mu \psi_j, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall u, v \in U_\mu(\mathcal{A}). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Nous avons par ailleurs (cf. [7]) :

$$\langle U_\mu R_t(\lambda) U_\mu^{-1}(u), v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle U_\mu R(\lambda) U_\mu^{-1}(u), v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

et donc :

$$\oint_{\gamma_j(h)} \lambda^{(n-2)/2} \langle U_\mu R_t(\lambda) U_\mu^{-1}(u), v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \, d\lambda$$

$$= \oint_{\gamma_j(h)} \lambda^{(n-2)/2} \langle R_\mu(\lambda)u, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}\, d\lambda$$
$$= \rho_j^{(n-2)/2} \langle u, U_{\bar\mu}\overline{\Psi}_j\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \langle U_\mu \Psi_j, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$
$$\forall u, v \in U_\mu(\mathcal{A}). \tag{4.6}$$

$U_\mu(\mathcal{A})$ étant dense dans L^2, on en déduit que l'on peut appliquer la formule précédente à :

$$u = U_\mu e^{i\varphi_2(.,\sqrt{\lambda}\omega')/h} t_2(., \sqrt{\lambda}\omega', h) \in L^2 \quad \text{et}$$
$$v = U_{\bar\mu} e^{i\varphi_1(.,\sqrt{\lambda}\omega)/h} t_1(., \sqrt{\lambda}\omega, h) \in L^2,$$
$$\oint_{\gamma_j(h)} \lambda^{(n-2)/2} \langle R_\mu(\lambda) U_\mu e^{i\varphi_2/h} t_2, U_{\bar\mu} e^{i\varphi_1/h} t_1 \rangle\, d\lambda$$
$$= \rho_j^{(n-2)/2} \langle e^{i\varphi_2(.,\sqrt{\lambda}\omega')/h} t_2(., \sqrt{\lambda}\omega', h), U_{\bar\mu}\overline{\Psi}_j\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$\times \langle U_\mu \Psi_j, U_{\bar\mu} e^{i\varphi_1(.,\sqrt{\lambda}\omega,h)} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.7}$$

D'où le résultat compte-tenu de (4.1) □

5. ESTIMATION DU RESIDU EN L'ABSENCE DE CAUSTIQUES HORS DE L'ÎLE

Intéressons nous au cas des points de type 1 : si la bicaractéristique rencontre un point de type 1, le prolongement du développement BKW n'est en général pas possible si la variété Lagrangienne $\Lambda_\pm = \{\xi = i\nabla f_\pm\}$ développe des caustiques après le prolongement par le flot de H_p. On peut cependant éviter ce problème en faisant les deux hypothèses géométriques suivantes :

HYPOTHÈSE H.3. – *$\Gamma = C \cap \partial\ddot{O}$ est une sous-variété de $\partial\ddot{O}$ et l'ensemble caustique C a un contact d'ordre 2 avec $\ddot{O}$ le long de Γ, i.e.,*

$$V|_C \sim dist(x, \Gamma)^2. \tag{5.1}$$

En fait Γ est l'ensemble des points de type 1. Puisque $|\nabla V| \neq 0$ sur $\partial\ddot{O}$, alors :

– H_p est transverse à $\Gamma \times \{0\}$ dans $T^*(\mathbb{R}^n)$.

Si nous notons $\widetilde{\Gamma} \subset T^*(\mathbb{R}^n)$ le prolongement de $\Gamma \times \{0\}$ par le flot sortant réel de H_p, alors $\widetilde{\Gamma}$ est une sous variété isotrope, i.e. :

$$\sigma_{(x,\xi)} = 0 \text{ sur } T_{(x,\xi)}\widetilde{\Gamma}, \quad \forall (x,\xi) \in \widetilde{\Gamma},$$

où σ est la 2-forme canonique donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma_{(x,\xi)} : T_{(x,\xi)}T^*(\mathbb{R}^n) \times T_{(x,\xi)}T^*(\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{R} \\ (u,v) \quad & \quad \sigma_{(x,\xi)}(u,v) \end{aligned}$$

et donnée en coordonneés locales par :

$$\sigma_{(x,\xi)} = \sum_{k=1}^{k=n} (d\xi_k)_{(x,\xi)} \wedge \left(dx^k\right)_{(x,\xi)}.$$

HYPOTHÈSE H.4. –

$$\textit{L'application } d\pi_x|_{T_{(x,\xi)}\tilde{\Gamma}} \textit{ est injective si } x \notin \partial \dot{O}. \tag{5.2}$$

Alors, près de $\partial \ddot{O}$, le Hessien transverse à $\pi_x \widetilde{\Gamma}$ de $\Re e f_\pm$ est défini positif [10], et donc $\Lambda_\pm$ est une variété strictement positive, i.e. :

$$\forall z \in \Lambda_\pm, \quad \sigma : u \to \frac{1}{i}\sigma(u,\bar{u})$$

est définie positive sur $T_z(\Lambda_\pm)/(T_z(\Lambda_\pm) \cap T_z(\mathbb{R}^{2n}))^{\mathbb{C}}$ (σ étant la 2-forme symplectique canonique sur $T^*(\mathbb{C}^n)$, et $u \to \bar{u}$ est la conjugaison).

D'autre part $\Lambda_\pm \cap T^*(\mathbb{R}^n) = \Gamma \times \{0\}$.

Alors la variété $\Lambda_\pm$, qui se prolonge bien par le flot de H_p, reste strictement positive, et se projette bijectivement sur la base grâce à (5.2).

Les $a^\pm$ et $f_\pm$ définies dans (3.14) se prolongent analytiquement dans un voisinage de $\pi_x\gamma$ où γ est une courbe bicaractéristique issue d'un point de type 1. On en déduit que les développements de ψ et $\overline{\psi}$ données par (3.14) restent valables dans un voisinage de toute courbe bicaractéristique issue d'un point de type 1.

Ces hypothèses vont nous permettre de donner une estimation du résidu de $S(\lambda, h, \omega, \omega')$, ce que nous énonçons dans le théorème ci-dessous.

On dira qu'une quantité $\alpha(h)$ est $\mathcal{O}(h^\infty)$ uniformément par rapport à $h > 0$ assez petit si pour tout $M \geqslant 0$ il existe $C_M > 0$ et $h_M > 0$ tels que : $|\alpha(h)| \leqslant C_M h^M$ pour $0 < h \leqslant h_M$. De plus, si $\beta(h) > 0$ on écrira $\alpha(h) = \mathcal{O}(h^\infty \beta(h))$ lorsque $\alpha(h)/\beta(h) = \mathcal{O}(h^\infty)$.

THÉORÈME 5.1. – *On fait les hypothèses* (H.1) *à* (H.4). *Soit* ρ_j *une résonance de* P *dans* $\Omega_j(h)$ *défini dans* (3.16) *et supposons que* (3.4), (5.1) *et* (5.2) *soient satisfaites.*

Notons L *l'ensemble des valeurs d'adhérences de* $\frac{\nabla f_2(\gamma(t))}{\|\nabla f_2(\gamma(t))\|}$ *quand* $t \to \infty$.

Nous avons alors :

1. *Si* $(\omega, \omega') \notin L \times (-L)$, *alors*, $\forall j \in \{1, \dots, N\}$,

$$\text{Résidu}\big(S(.\,, h, \omega, \omega'), \rho_j\big) = \mathcal{O}\big(h^{\infty} \mathrm{e}^{-2S_0/h}\big) \tag{5.3}$$

uniformément par rapport à $h > 0$ *assez petit.*

2. *Si* $(\omega, \omega') \in L \times (-L)$, *alors*, $\forall j \in \{1, \dots, N\}$,

$$\text{Résidu}\big(S(.\,, h, \omega, \omega'), \rho_j\big) = \mathcal{O}\big(h^{n-2m_j} \mathrm{e}^{-2S_0/h}\big), \tag{5.4}$$

uniformément par rapport à $h > 0$ *assez petit, où* m_j *est défini en* (3.14) *et* (3.13) *et* N *désigne le plus grand nombre de résonances* (*qu'on a supposées simple*).

La démonstration de ce théorème se fera dans toute cette section et par étapes. Notons :

$$H_2(\omega', h) = \big\langle U_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2(.,\sqrt{\rho}\omega')/h} t_2(.\,, \sqrt{\rho}\omega', h), U_{\bar{\mu}} \overline{\psi} \big\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{5.5}$$

et

$$H_1(\omega, h) = \big\langle U_\mu \psi, U_{\bar{\mu}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1(.,\sqrt{\rho}\omega)/h} t_1(.\,, \sqrt{\rho}\omega, h) \big\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.6}$$

Nous allons estimer $H_2(\omega', h)$ et $H_1(\omega, h)$ par rapport à h.

5.1. Estimation de $H_1(\omega, h)$ et $H_2(\omega', h)$

PROPOSITION 5.1. – *Pour* $R > 0$, *assez grand, il existe* $\delta > 0$ *t.q. pour* $h > 0$, *assez petit, on a* :

$$\big\langle U_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2(.,\sqrt{\rho}\omega')/h} t_2(.\,, \sqrt{\rho}\omega', h), U_{\bar{\mu}} \overline{\psi} \big\rangle_{L^2(|x| \geqslant 4R)} = \mathcal{O}\big(\mathrm{e}^{-(S_0+\delta)/h}\big), \tag{5.7}$$

$$\big\langle U_{\bar{\mu}} \overline{\psi}, U_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1(.,\sqrt{\rho}\omega)/h} t_1(.\,, \sqrt{\rho}\omega, h) \big\rangle_{L^2(|x| \geqslant 4R)} = \mathcal{O}\big(\mathrm{e}^{-(S_0+\delta)/h}\big). \tag{5.8}$$

Où ρ *désigne la résonance.*

Preuve. –

$$\langle U_\mu e^{i\varphi_2/h} t_2, U_{\bar\mu}\overline{\psi}\rangle_{L^2(|x|\geqslant 4R)} = \int_{|x|\geqslant 4R} U_\mu e^{i\varphi_2(.,\sqrt{\rho}\omega')/h} t_2(.,\sqrt{\rho}\omega',h)\overline{U_{\overline{\mu}}\overline{\psi}}\,dx.$$

Grâce à l'hypothèse (H.1), on voit en utilisant le caractère elliptique de $U_\mu P U_\mu^{-1} - \lambda_0$ sur $\{|x| \geqslant 4R\}$ si $R > 0$ est choisi assez grand, que l'on a :

$$||U_\mu \psi||_{L^2(|x|\geqslant 4R)} = \mathcal{O}(1). \tag{5.9}$$

D'autre part, pour $\Im m\,\mu > 0$, nous avons :

$$U_\mu e^{i\varphi_2(x,\xi)/h} t_2(x,\xi,h) = \mathcal{O}(e^{-\varepsilon\langle x\rangle/h}) \quad \text{(voir (2.14))}$$

avec $\varepsilon = \varepsilon(\mu) > 0$ uniformément pour $|x| \geqslant 4R$, $\xi = \sqrt{\rho}\omega'$, $\omega' \in S^{n-1}$, $h \in]0,1]$ et $|\Im m\,\rho| \ll \Im m\,\mu$. Nous obtenons :

$$\big\|U_\mu e^{i\varphi_2(.,\xi)/h} t_2(.,\xi,h)\big\|_{L^2(|x|\geqslant 4R)} = \mathcal{O}(h e^{-\varepsilon\langle 4R\rangle/h}), \tag{5.10}$$

$$\big\|U_\mu e^{i\varphi_2(.,\xi)/h} t_2(.,\xi,h)\big\|_{L^2(|x|\geqslant 4R)} = \mathcal{O}(e^{-(S_0+\delta)/h}) \quad \text{si } R \geqslant \frac{S_0}{4\varepsilon} + \frac{\delta}{4\varepsilon}.$$

On a une estimation analogue pour $U_\mu e^{i\varphi_1(.,\xi)/h} t_1(.,\xi,h)$. D'où la formule (5.7).

On montre de la même manière la formule (5.8) de la Proposition 5.1. □

PROPOSITION 5.2. – *Pour $R > 0$, assez grand, on a :*

$$\langle U_\mu e^{i\varphi_2(.,\sqrt{\rho}\omega')/h} t_2(.,\sqrt{\rho}\omega',h), U_{\bar\mu}\overline{\psi}\rangle_{L^2(2R\leqslant|x|\leqslant 4R)} = \mathcal{O}(h^\infty e^{-S_0/h}), \tag{5.11}$$

$$\langle U_\mu \psi, U_\mu e^{i\varphi_1(.,\sqrt{\rho}\omega)/h} t_1(.,\sqrt{\rho}\omega,h)\rangle_{L^2(2R\leqslant|x|\leqslant 4R)} = \mathcal{O}(h^\infty e^{-S_0/h}) \tag{5.12}$$

uniformément pour $h > 0$ assez petit.

Pour démontrer cette proposition nous allons énoncer plusieurs lemmes. Commençons tout d'abord par estimer :

$$I = \int_{2R\leqslant|x|\leqslant 4R} (J_\mu)^{1/2} e^{i\varphi_2(x+\mu\chi_2(|x|).x,\xi)/h} \times t_2(x+\mu\chi_2(|x|).x,\xi,h) U_\mu\psi(x)\,dx. \tag{5.13}$$

On intègre donc sur la couronne c_R: $2R \leqslant |x| \leqslant 4R$. Cette couronne est compacte et loin du puits de potentiel $x_0 = 0$.

De plus on sait que, dans $\mathbb{R}^n \backslash \ddot{O}$, en dehors de tout voisinage d'une courbe bicaractéristique issue d'un point de type 1, nous avons (cf. [10], Proposition 9.11) :

$$\psi(x) = \mathcal{O}\big(\mathrm{e}^{-(S_0+\varepsilon)/h}\big) \quad \text{(avec } \varepsilon > 0\text{) localement uniformément.}$$

Enonçons le lemme suivant :

LEMME 5.1. – *Soit* $\{V_i\}_{i\in I}$ *un recouvrement fini d'ouverts assez petits de* $c_R = \{2R \leqslant |x| \leqslant 4R\}$ *tel que* :

Pour toute courbe bicaractéristique γ *issue d'un point de type* 1 *du* $\partial\ddot{O}$, *et pour tout* $x \in \pi_x(\gamma) \cap c_R, \exists i \in I$ *tel que* $x \in V_i$ *et* $\psi_{|V_i}(x) \sim a(x,h)\mathrm{e}^{-f(x)/h}$.

Soit $\theta_j \in C_0^\infty(V_j), \forall j \in I$ *tel que* $\sum_{j\in I}\theta_j = 1$.

Nous avons alors (*avec* $\xi = \sqrt{\rho}\omega', \omega' \in S^{n-1}$) :

1. *Si* V_j *n'intercepte pas de courbes bicaractéristiques issue d'un point de type* 1, *il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* :

$$\text{(a)} \int_{V_j} \theta_j(x) U_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2(x,\xi)/h} t_2(x,\xi,h) U_\mu \psi(x)\, dx = \mathcal{O}\big(\mathrm{e}^{-(S_0+\varepsilon)/h}\big), \tag{5.14}$$

$$\text{(b)} \int_{V_j} \theta_j(x) U_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1(x,\xi)/h} t_1(x,\xi,h) U_\mu \psi(x)\, dx = \mathcal{O}\big(\mathrm{e}^{-(S_0+\varepsilon)/h}\big) \tag{5.15}$$

uniformément pour $h > 0$ *assez petit.*

2. *Si* V_j *intercepte une courbe bicaractéristique issue d'un point de type* 1 :

$$\text{(a)} \int_{V_j} \theta_j(x) U_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2(x,\xi)/h} t_2(x,\xi,h) U_\mu \psi(x)\, dx = \mathcal{O}\big(h^\infty \mathrm{e}^{-S_0/h}\big), \tag{5.16}$$

$$\text{(b)} \int_{V_j} \theta_j(x) U_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1(x,\xi)/h} t_1(x,\xi,h) U_\mu \psi(x)\, dx = \mathcal{O}\big(h^\infty \mathrm{e}^{-S_0/h}\big). \tag{5.17}$$

Preuve. – Soit $(V_i)_{i\in I}$ un recouvrement tel que défini dans le lemme.

On notera $I_1 = \{i \in I / V_i$ intercepte une courbe bicaractéristique issue d'un point de type $1\}$ et $I_2 = I - I_1$.

1. Cas où V_j *n'intercepte pas de courbes bicaractéristiques issues d'un point de type* 1 *de* $\partial \ddot{O}$.

Estimons pour $j \in I_2$.

$$J = \int_{V_j} U_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2(x,\xi)/h} t_2(x,\xi,h) U_\mu \psi(x) \theta_j(x)\, dx.$$

Puisque $\theta_j \in C_0^\infty(V_j)$, nous intégrons donc sur un compact K_j qui n'intercepte pas de courbes bicaractéristiques, sur tout compact de ce type :

$$\psi(x) = \mathcal{O}\big(\mathrm{e}^{-(S_0+\varepsilon)/h}\big) \quad (\text{avec } \varepsilon > 0).$$

Ceci entraîne que :

$$U_\mu \psi(x) = \mathcal{O}\big(\mathrm{e}^{-(S_0+\varepsilon')/h}\big) \tag{5.18}$$

avec $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, $|\mu|$ assez petit, et uniformément pour $h > 0$ assez petit.

$$|J| \leqslant \int_{K_j} |\theta_j| (J_\mu)^{1/2} \mathrm{e}^{-\Im m \varphi_2(x+\mu\chi_2(|x|).x,\xi)/h} \times \big|t_2(x+\mu\chi_2(|x|).x,\xi,h)\big| |U_\mu \psi|\, dx.$$

En prenant $\mu = \mathrm{i}\mu'$ ($\mu' > 0$ assez petit), notons $\varepsilon_\mu(x) = \mu\chi_2(|x|) = \mathrm{i}\mu'\chi_2(|x|) = \mathcal{O}(|\mu|)$.

Puisque $\varphi_2(x,\xi)$ est réelle sur le réel, on a pour $|x| \leqslant 4R$:

$$\Im m \big|\varphi_2\big((1+\varepsilon_\mu)x, \sqrt{\rho}\omega'\big)\big| = \mathcal{O}_R\big(|\mu| + |\Im m \sqrt{\rho}|\big) = \mathcal{O}_R\big(\mu + \mathrm{e}^{-S_0/h}\big) \tag{5.19}$$

car : $|\Im m\, \rho| = \widetilde{\mathcal{O}}(\mathrm{e}^{-2S_0/h})$, d'où

$$|J| \leqslant C \int_{K_j} (J_\mu(x))^{1/2} \mathrm{e}^{\varepsilon_1 |x|/h} |t_2(x+\mu\chi_2(|x|).x,\xi,h)| |U_\mu \psi(x)| |\theta_j(x)|\, dx$$

où

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(h,\mu,R) = \mathcal{O}_R\big(|\mu| + \mathrm{e}^{-S_0/2h}\big).$$

D'après l'estimation sur $U_\mu(\psi)$, il existe donc $C_R > 0$ tel que :

$$|J| \leqslant C_R \mathrm{e}^{C_R(|\mu| + \mathrm{e}^{-S_0/2h})/h} \mathrm{e}^{-(S_0+\varepsilon')/h}.$$

Pour $|\mu|$ et h assez petit (R fixé) :

$$C_R\big(|\mu| + \mathrm{e}^{-S_0/2h}\big) < \varepsilon'/2, \qquad |J| \leqslant C\mathrm{e}^{-(S_0+\varepsilon'/2)/h},$$

d'où la formule (5.14). On montre de la même manière la formule (5.15).

2. *Si V_j intercepte une courbe bicaractéristique issue d'un point de type* 1 :

Estimons pour $j \in I_1$:

$$J = \int\limits_{V_j} \theta_j(x) U_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2(x,\xi)/h} t_2(x,\xi,h) U_\mu \psi(x)\, dx.$$

Nous avons par ailleurs : $\psi|_{V_j} \sim a^-(x,h)\mathrm{e}^{-f_-(x)/h} \bmod \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-(S_0+\varepsilon)/h})$ où $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit. D'où, de manière analogue au cas précédent :

$$J = \int\limits_{V_j} (J_\mu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2/h} t_2(x+\varepsilon_\mu x,\xi,h) a^-(x+\varepsilon_\mu x,h)\mathrm{e}^{-f_-(x+\varepsilon_\mu x)/h}\theta_j(x)\, dx$$
$$+ \mathcal{O}\big(\mathrm{e}^{-(S_0+\varepsilon)/h}\big),$$

$$J = \int\limits_{V_j} (J_\mu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi/h} t_2(x+\varepsilon_\mu x,\xi,h) a^-(x+\varepsilon_\mu x,h)\theta_j\, dx + \mathcal{O}\big(\mathrm{e}^{-(S_0+\varepsilon)/h}\big) \tag{5.20}$$

où $\Phi(x,\xi)$ est la fonction de phase :

$$\Phi(x,\xi) = \varphi_2(x+\varepsilon_\mu x,\xi) + \mathrm{i} f_-(x+\varepsilon_\mu x). \tag{5.21}$$

Remarquons que, dans le cas où V_j ne rencontre pas la région sortante, t_2 est exponentiellement petit et que par conséquent on montre aisément que $J = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-(S_0+\varepsilon)/h})$.

Reste le cas où V_j rencontre la région sortante. Pour utiliser le théorème de la phase non stationnaire nous allons montrer que la phase $x \mapsto \Phi(x,\xi)$ n'admet pas de points critiques réels, et estimer $\inf_{x\in V_j} \Im m\, \Phi(x,\xi)$.

Du fait que $|\varepsilon_\mu| + |\nabla\varepsilon_{\bar\mu}| = \mathcal{O}(|\mu|)$, nous commençons par remarquer :

$$\Phi(x,\xi) = x.\xi + \mathcal{O}(|\mu x|) + \mathcal{O}\big(|x|^{(1-\rho)}\big) + \mathrm{i} f_-(x+\varepsilon_\mu x), \tag{5.22}$$

$$\nabla_x\Phi(x,\xi) = \xi + \mathrm{i}(\partial_y f_-)(y) + \mathcal{O}(|\mu|) + \mathcal{O}\big(|x|^{-\rho}\big), \tag{5.23}$$

où $y = x + \varepsilon_\mu x$; $f_-(y) = f_1 - \mathrm{i} f_2$, $f_1(y, \bar{y}) = \Re e\, f_-(y)$ et $f_2(y, \bar{y}) = -\Im m\, f_-(y) > 0$.

Dans (5.23) et dans toute la suite de cette section, ∂_y designe le gradient holomorphe par rapport à y : $\partial_y = \frac{1}{2}(\nabla_{\Re e\, y} - \mathrm{i}\nabla_{\Im m\, y})$.

En particulier, puisque f_- est holomorphe : $\partial_y f_- = 2\partial_y f_1 = -2\mathrm{i}\partial_y f_2$.

On a alors :

$$\nabla_x \Phi(x, \xi) = 0 \Rightarrow \xi + \mathrm{i}(\partial_y f_-)(y) + \mathcal{O}(|\mu|) + \mathcal{O}\big(|x|^{-\rho}\big) = 0,$$

i.e.,

$$\nabla_x \Phi(x, \xi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Re e \sqrt{\rho}\omega' &= -2\Re e(\partial_y f_2)(y) + \mathcal{O}(|\mu|) + \mathcal{O}(|x|^{-\rho}) \\ \Im m \sqrt{\rho}\omega' &= -2\Re e(\partial_y f_1)(y) + \mathcal{O}(|\mu|) + \mathcal{O}(|x|^{-\rho}). \end{cases} \tag{5.24}$$

Montrons qu'il n'existe pas de points critiques dans la région sortante :

$$\Re e \cos(x, \xi) \in \big[\sigma_2^- - \delta, \sigma_2^+ + \delta\big] \quad \big(\xi = \sqrt{\rho}\omega'\big).$$

Sinon, en un tel éventuel point critique, nous avons d'après (5.24) :

$$2\Re e\langle(\partial_y f_2)(y), y\rangle = -|\Re e \sqrt{\rho}||y| \cos(y, \xi) + \mathcal{O}(|\mu||y|) + \mathcal{O}\big(|y|^{(1-\rho)}\big)$$

et donc si $|\mu|$ a été choisi assez petit et R assez grand indépendamment l'un de l'autre :

$$\Re e\langle(\partial_y f_2)(y), y\rangle < 0 \tag{5.25}$$

car dans la région sortante $\Re e \cos(x, \xi) > 0$. Nous allons montrer qu'en fait pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash \ddot{O}$ on a : $\Re e\langle(\partial_y f_2)(y), y\rangle > 0$ avec $y = x + \varepsilon_\mu . x$, ce qui conduira à une contradiction. □

Plus exactement nous allons montrer que : $\Re e\langle(\partial_y f_2)(y), y\rangle \geqslant \frac{1}{c}|y|$ Pour cela nous énonçons le lemme suivant :

LEMME 5.2. – $\forall s > 0$ *assez grand,* $\exists c_s > 0/(\nabla f_2)(x).x \geqslant \frac{1}{c_s}|x|$ *pour* x *dans un voisinage réel assez petit de* $\gamma(s)$ *où* γ *est une bicaractéristique et* $\gamma(0)$ *est un point de type* 1.

Preuve du lemme 5.2. – Près d'un point de type 1, $y_1 \in \partial \ddot{O}$ et en choisissant des coordonnées euclidiennes convenables (x', x_n) centrées en y_1 telles que $T_{y_1}\partial \ddot{O}$ soit de la forme $\{x_n = 0\}$ et $\frac{\partial}{\partial x_n}$ est la normale extérieure au bord, $f_2(x)$ vérifie (cf. (3.11)) :

$$f_2(x) \sim \left(x_n + b(x')\right)^{3/2} \quad \text{où } b(x') = \mathcal{O}\left(|x'|^2\right), \tag{5.26}$$

$$\nabla f_2(x) \sim \begin{pmatrix} \mathcal{O}(|x'|) \\ \frac{3}{2}(x_n + \mathcal{O}(|x'|^2))^{1/2} \end{pmatrix}.$$

On obtient donc :

$$\nabla f_2(x).x > 0 \quad \text{pour } x_n > 0 \text{ et } |x'| \text{ assez petit} \tag{5.27}$$

et le résultat pour $s > 0$ assez petit. Ce résultat est prolongeable pour s assez grand à tout voisinage de $\gamma(s)$ où γ est une courbe bicaractéristique issue d'un point de type 1.

Remarque 3. –

1. Nous avons dans V_j
$$\nabla f_2 \neq 0. \tag{5.28}$$
En effet f_1, f_2 vérifient :
$$(\nabla f)^2 = V - \lambda_0 \quad \text{et} \quad \nabla f_1.\nabla f_2 = 0.$$
On a donc : $(\nabla f_1)^2 = (\nabla f_2)^2 + (V - \lambda_0)$ ou encore $(\nabla f_2)^2 = (\nabla f_1)^2 - (V - \lambda_0)$ où $V(y) < \lambda_0$ dans $\mathbb{R}^n \backslash \ddot{O}$.
2. ∇f_2 est orthogonal à ∇f_1.
3. Les projections sur la base des courbes bicaractéristiques de p issue d'un point de type 1 de $\partial \ddot{O}$ sont les courbes intégrales de ∇f_2 car : localement (voir [10]) : $\Lambda_{\mathrm{i}f} \subset p^{-1}(\lambda_0)$
$$\left\{\exp s H_p(x, 0),\ \forall s > 0, x \in \partial \ddot{O} \cap B_d(U, S_0)\right\} = \Lambda_{\mathrm{i}f,\mathbb{R}} \tag{5.29}$$
où : $\Lambda_{\mathrm{i}f,\mathbb{R}} = \{(x, \mathrm{i}f'_x), x \text{ réel et } \Im m(\mathrm{i}f'_x(x)) = 0\} = \Lambda_{\mathrm{i}f} \cap \mathbb{R}^{2n}$.
Si $(x(s), \xi(s))$ est une courbe bicaractéristique de P issue d'un point de type *1* de $\partial \ddot{O}$ alors sur cette courbe on a :
$$\Re e\, f_\pm(x) = S_0 \quad \text{et} \quad \xi(s) = -\nabla \Im m\, f_-(x(s)) = \nabla f_2(s).$$
4. Notons $\widetilde{\gamma}(s) = (x(s), \xi(s))$ la courbe bicaractéristique issue d'un point de type *1* de $\ddot{O}$ et $\gamma(s) = x(s)$ sa projection.

$x(s)$ et $\xi(s)$ vérifient le système de Hamilton–Jacobi associé à : $\xi^2 + V(x) - \lambda_0$:

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = 2\xi(s), \\ \dot{\xi}(s) = -\nabla V(x(s)). \end{cases}$$

Du fait que $V(y) = \mathrm{O}(|y|^{-\rho})$, il existe x_0 et ξ_0 tel que $\xi_0^2 = \lambda_0$ et nous avons (cf. [5], formule 2.9) : $\forall s \gg 1$

$$\begin{cases} x(s) = x_0 + 2\xi_0 s + \mathcal{O}(\langle s\rangle^{1-\rho}) + \mathcal{O}(R^{1-\rho}) = \gamma(s), \\ \xi(s) = 2\xi_0 + \mathcal{O}(s^{-\rho}) + \mathcal{O}(R^{-\rho}) = \frac{1}{2}\dot{\gamma}(s). \end{cases} \tag{5.30}$$

$\gamma(s)$ se comporte donc comme une droite à l'infini.

D'autre part, étant donné que $\nabla f_2(\gamma(s))$ est tangent à $\dot{\gamma}(s)$, on a :

$$\forall s > 0, \quad \nabla f_2(\gamma(s)) = a(\gamma(s))\dot{\gamma}(s) \tag{5.31}$$

avec $a(\gamma(s)) \in \mathbb{R}$, C^∞ en s et $a(\gamma(s)) \neq 0$ d'après (5.28)

Comme

$$a(\gamma(s)) > 0 \quad \text{pour } s > 0 \text{ petit}, \tag{5.32}$$

on aura nécessairement $a(\gamma(s)) > 0$ $\forall s > 0$. Ceci entraîne donc :

Pour $s \gg 1$ $\nabla f_2(\gamma(s)).\gamma(s) = a(\gamma(s)).\dot{\gamma}(s).\gamma(s) > 0$.

Car $\dot{\gamma}.\gamma \sim 2x_0\xi_0 + 4\xi_0^2 s + \mathcal{O}(s^{1-\rho}) + \mathcal{O}(R^{1-\rho}) \geqslant \frac{1}{c}s \geqslant \frac{1}{c'}|x(s)|$ pour $s \gg 1$.

Nous achevons ainsi la démonstration du Lemme 5.2. □

Revenons à la preuve du Lemme 5.1. Ce qui nous intéresse en fait est l'inégalité :

$\Re e\langle \partial_y f_2(y), y\rangle \geqslant \frac{1}{c}|y|$ où $y \in \mathbb{C}^n$ est tel que : $y = x + \mathrm{i}\mu'\chi_2 x$ (μ' petit).

En notant $\alpha = \mu'\chi_2 x = \Im m\, y$. Nous avons :

$$f_2(y) = F_2(x, \alpha) = -\Im m\, f_-(x + \mathrm{i}\alpha);$$

$$\partial_y f_2(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial \alpha}\right) F_2(x, \alpha),$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, \alpha) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x) - \alpha\, \mathrm{Hess} f_1(x, x) + \mathcal{O}(\alpha^2). \tag{5.33}$$

Par ailleurs :

$$\frac{\partial F_2}{\partial \alpha}(x,\alpha) = -\frac{\partial f_1}{\partial x}(x) - \alpha \operatorname{Hess} f_2(x,x) + \mathcal{O}(\alpha^2) \tag{5.34}$$

et donc

$$\partial_y f_2(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)(x) + \alpha(-\operatorname{Hess} f_1 + \mathrm{i} \operatorname{Hess} f_2)(x) + \mathcal{O}(\alpha^2). \tag{5.35}$$

Comme $f_1(x) \sim \mathcal{O}(|x'|^2)$, Hess $f_1 > 0$, $\alpha = \mu' \chi_2 x$, nous avons (tenant compte de $\Re e\, y = x$) :

$$\Re e \langle \partial_y f_2(y,\bar{y}), y\rangle \geqslant \frac{1}{2}\langle \nabla_x f_2(x), x\rangle - \mathcal{O}(|\mu|\chi_2 |x'|^2). \tag{5.36}$$

Etant donné que (cf. Lemme 5.2) : $\Re e\langle \nabla f_2(x), x\rangle \geqslant \frac{1}{c}|x|$ dans tout voisinage d'une courbe bicaractéristique issue d'un point de type 1, on a donc

$$\Re e\langle \partial_y f_2(y), y\rangle \geqslant \frac{1}{2c}|x| - \mathcal{O}(|\mu|)|x| \geqslant \frac{1}{4c}|x| \geqslant \frac{1}{3c'}|y|. \tag{5.37}$$

On a une contradiction avec (5.25) et nous pouvons en déduire qu'il n'existe pas de points critiques de la phase dans la région sortante : $\Re e \cos(x,\xi) \in [\sigma_2^- - \delta, \sigma_2^+ + \delta]$.

Pour terminer la preuve du Lemme 5.1, il nous reste donc à estimer $\inf_{V_j} \Im m\, \Phi(x,\xi)$:

$$\Phi(x,\xi) = \varphi_2(x + \mathrm{i}\mu'\chi_2 x, \xi) + \mathrm{i} f_-(x + \mathrm{i}\mu'\chi_2 x), \tag{5.38}$$

$$\Im m\, \Phi(x,\xi) = \Im m\, \varphi_2(x + \mathrm{i}\mu'\chi_2 x, \xi) + \Im m\, \mathrm{i} f_-(x + \mathrm{i}\mu'\chi_2 x).$$

Par un développement de Taylor nous avons (pour $2R \leqslant |x| \leqslant 4R$) :

$$\varphi_2(x + \mathrm{i}\mu'\chi_2 x, \sqrt{\rho}\omega') = \sqrt{\rho}[x.\omega' + \mathrm{i}\mu'\chi_2 x.\omega'] + \mathcal{O}(|x|^{(1-\rho)}), \tag{5.39}$$

$$\Im m\, \varphi_2(x + \mathrm{i}\mu'\chi_2 x, \xi) = \Re e \sqrt{\rho}[\mu'\chi_2 x.\omega'] + \Im m \sqrt{\rho} x.\omega' + \mathcal{O}(|x|^{(1-\rho)}). \tag{5.40}$$

Comme t_2 localise dans la région sortante, et que $\chi_2 \in \mathcal{R}_+$ on aura dans cette zone :

$$\Re e\, \chi_2 x.\xi \geqslant \frac{1}{c}\chi_2 |x|.|\xi|.$$

Et donc :

$$\Im m\, \varphi_2(x + \mathrm{i}\mu'\chi_2 x, \xi) \geqslant \frac{1}{c}\mu'\chi_2|x| - \Im m\, \sqrt{\rho}|x| + \mathcal{O}(|x|^{(1-\rho)}). \quad (5.41)$$

Par un développement de Taylor de f_- au voisinage de x nous avons pour $\mu' \ll 1$

$$f_-(x + \mathrm{i}\mu'\chi_2 x) = f_-(x) + \mathrm{i}\mu'\chi_2\partial_y f_-(x).x + \mathcal{O}(|\mu'\chi_2 x|^2) \quad (5.42)$$

et donc, puisque sur le réel $\Im m\, \partial_y f_-(x) = -\nabla f_2(x)$ (où ∇ désigne ici le gradient réel) :

$$\Re e\, f_-(x + \mathrm{i}\mu'\chi_2 x) = f_1(x) + \mu'\chi_2\nabla f_2(x).x + \mathcal{O}(|\mu'\chi_2 x|^2). \quad (5.43)$$

Comme d'aprés ce qui a été dit précédemment $\nabla f_2(x).x \geqslant \frac{1}{c}|x|$ avec $c > 0$ et que $\chi_2 \in \mathbb{R}_+$, nous avons donc :

$$\Re e\, f_-(x + \mathrm{i}\mu'\chi_2 x) \geqslant S_0 + \frac{1}{c}\mu'\chi_2|x| - \mathcal{O}(|\mu'\chi_2 x|^2)$$

et donc, du fait que

$$\frac{1}{c}\mu'\chi_2|x| - \mathcal{O}(|\mu'\chi_2 x|^2) \geqslant 0$$

si $\mu' \ll 1$, $\Im m\, \Phi(x, \xi) \geqslant S_0 - 4\Im m\, \sqrt{\rho}R$.

On peut donc appliquer le théorème de la phase non stationnaire à phase complexe (cf. [12]), qui donne :

$$J = \int_{V_j} \theta_j J_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(x,\xi)/h} t_2(x + \mathrm{i}\mu'\chi_2 x, \xi, h) a^-(x + \mathrm{i}\mu'\chi_2 x, h)\, dx \quad (5.44)$$

$$= \mathcal{O}(h^\infty \mathrm{e}^{(-S_0 + 4\Im m\sqrt{\rho}R)/h}) = \mathcal{O}(h^\infty \mathrm{e}^{-S_0/h}). \quad (5.45)$$

Car $\mathrm{e}^{(4\Im m\,\sqrt{\rho}R)/h}) = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{4e^{-c/h}/h}) = \mathcal{O}(1)$, $h \to 0$, $c > 0$. Nous venons de démontrer la formule (5.16) du Lemme 5.1 et donc la formule (5.11) de la Proposition 5.2.

Nous obtenons la formule (5.17) (respectivement (5.12)) du Lemme 5.1 (respectivement de la Proposition 5.2) avec une démonstration analogue pour t_1 et φ_1, en échangeant les rôles des régions entrantes et sortantes.

PROPOSITION 5.3. – *Pour $R>0$, assez grand on a : Si $\omega' \notin -L$*

$$\langle U_\mu e^{i\varphi_2(.,\sqrt{\rho}\omega')/h} t_2(.,\sqrt{\rho}\omega',h), U_{\bar\mu}\overline{\psi}\rangle_{L^2(|x|\leqslant 2R)} = \mathcal{O}(h^\infty e^{-S_0/h}); \quad (5.46)$$

Si $\omega \notin L$

$$\langle U_\mu \psi, U_\mu e^{i\varphi_1(.,\sqrt{\rho}\omega)/h} t_1(.,\sqrt{\rho}\omega,h)\rangle_{L^2(|x|\leqslant 2R)} = \mathcal{O}(h^\infty e^{-S_0/h}) \quad (5.47)$$

uniformément pour $h>0$, assez petit.

Rappelons (2.9) : $(U_\mu\varphi)(x) = \varphi(x)$ sur $|x|\leqslant 2R$.

Comme sur $|x|\leqslant R$, $t_2(x,\xi,h)=0$ par construction de t_2, on intègre en fait sur la couronne c'_R: $R\leqslant |x|\leqslant 2R$. Cette couronne est donc loin du puits de potentiel $x_0=0$.

LEMME 5.3. – *Soit $\{V_i\}_{i\in I}$ un recouvrement d'ouverts assez petits de $c'_R=\{R\leqslant |x|\leqslant 2R\}$ tel que :*

Pour toute courbe bicaractéristique γ issue d'un point de type 1 du $\partial\ddot{O}$, et pour tout $x\in\pi_x(\gamma)\cap c'_R, \exists i\in I$ tel que $x\in V_i$ et $\psi_{|V_i}(y)\sim a(y,h)e^{-f(y)/h}$.

Soit $\theta_j\in C_0^\infty(V_j)$ $\forall j\in I$ tel que $\sum_{j\in I}\theta_j=1$. On désigne par L est l'ensemble des valeurs d'adhérences de $\{\frac{\nabla f_2(\gamma(t))}{\|\nabla f_2(\gamma)(t)\|}\}$ quand $t\to\pm\infty$. Nous avons alors :

1. *Si V_j n'intercepte pas de courbes bicaractéristiques issue d'un point de type 1 de $\partial\ddot{O}$:*

$$\text{(a)} \int_{V_j} e^{i\varphi_2(x,\xi)/h} t_2(x,\xi,h)\psi(x)\theta_j(x)\,dx = \mathcal{O}(e^{-(S_0+\varepsilon)/h}), \quad (5.48)$$

$$\text{(b)} \int_{V_j} e^{i\varphi_1(x,\xi)/h} t_1(x,\xi,h)\psi(x)\theta_j(x)\,dx = \mathcal{O}(e^{-(S_0+\varepsilon)/h}) \quad (5.49)$$

avec $\varepsilon>0$ uniformément pour $h>0$ assez petit.

2. *Si V_j intercepte une courbe bicaractéristique issue d'un point de type 1 de $\partial\ddot{O}$.*

(a) *Si $\omega\notin -L$*

$$\int_{V_j} e^{i\varphi_2(x,\xi)/h} t_2(x,\xi,h)\psi(x)\theta_j(x)\,dx = \mathcal{O}(h^\infty e^{-S_0/h}), \quad (5.50)$$

(b) *Si* $\omega' \notin L$

$$\int_{V_j} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1(x,\xi)/h} t_1(x,\xi,h)\psi(x)\theta_j(x)\,dx = \mathcal{O}\big(h^\infty \mathrm{e}^{-S_0/h}\big). \qquad (5.51)$$

Preuve. – Soit $(V_i)_{i\in I}$ un recouvrement tel que défini dans le lemme. On notera $I_1 = \{i \in I / V_i$ intercepte une courbe bicaractéristique issue d'un point de type $1\}$ et $I_2 = I - I_1$.

1. Cas où V_j *n'intercepte pas de courbes bicaractéristiques issues d'un point de type* 1 *de* $\partial\ddot{O}$.

La preuve est identique à celle du Lemme 5.1 aller a lie ligne 2. Si V_j *intercepte une courbe bicaractéristique issue d'un point de type* 1 :

$$\text{Nous allons estimer : } \int_{V_j} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(x,\xi)/h} t_2(x,\xi,h)a(x,h)\theta_j(x)\,dx$$

où

$$\Phi(x,\xi) = \varphi_2(x,\xi) + \mathrm{i}f_-(x) = x.\xi + \mathcal{O}\big(\langle x\rangle^{-\rho}\big) + \mathrm{i}f_-(x),$$

et $\xi = \sqrt{\rho}\,\omega'$.

On a :

$$(\nabla_x\Phi)(x,\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi + \mathrm{i}\nabla f_-(x) + \mathcal{O}\big(\langle x\rangle^{-\rho}\big),$$

$$(\nabla_x\Phi)(x,\xi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Re e\sqrt{\rho}\,\omega' &= -(\nabla f_2(x) + \mathcal{O}(\langle x\rangle^{-\rho}), \\ \Im m\sqrt{\rho}\,\omega' &= -(\nabla f_1(x) + \mathcal{O}(\langle x\rangle^{-\rho}). \end{cases} \qquad (5.52)$$

(a) Si $\omega' \notin -L$, V_j a été choisi assez petit, et R a été choisi assez grand, on voit que la phase $\Phi(x,\xi)$ n'admet pas de points critiques réels.

Estimons $\inf_{V_j} \Im m\,\Phi(x,\xi)$

$$\begin{aligned} \Im m\,\Phi(x,\xi) &= \Im m\,\varphi_2(x,\xi) + \mathrm{i}\,\Im m\,f_-(x) \\ &= -|\Im m\sqrt{\rho}|x.\omega' + \mathcal{O}\big(\langle x\rangle^{1-\rho}\big) + S_0 \\ &= S_0 - \mathcal{O}_R\big(\mathrm{e}^{-S_0/h}\big) \quad \text{car } |\Im m\sqrt{\rho}| = \widetilde{\mathcal{O}}_R\big(\mathrm{e}^{-2S_0/h}\big). \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de la phase non stationnaire on obtient donc :

$$J = \int_{V_j} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(x,\xi)/h} t_2(x,\xi,h)a(x,h)\theta_j(x)\,dx = \mathcal{O}\big(h^\infty \mathrm{e}^{-S_0/h}\big)$$

d'où la formule (5.50) et donc la formule (5.46) de la Proposition 5.3. La formule (5.51) repectivement la formule (5.47) se démontre de la même manière. $\square$

(b) Examinons maintenant les cas où $\omega' \in -L$ et $\omega \in L$.

PROPOSITION 5.4. – *Soit $\gamma = \gamma(s)$, $(s \in \mathbb{R})$ une bicaractéristique issue d'un point de type 1, $x_1 \in \gamma \cap \{R \leqslant |x| \leqslant 2R\}$, V un voisinage assez petit de x_1 tel que (s, x') (avec $s_1 < s < s_2$ et $|x'|$ petit) soient des coordonnées orthonormales locales dans V (s désignant l'abscisse curviligne sur γ), soit également $\theta = \theta_1(s)\theta_2(x') \in C_0^\infty(V)$ tel que $\theta_2 = 1$ prés de 0. Alors :*

1. *Pour $\omega' \in -L$*

$$\int_V \theta(x) U_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2(x,\sqrt{\rho}\omega')/h} t_2(x, \sqrt{\rho}\omega', h) U_\mu \psi(x)\, dx$$
$$= \mathcal{O}\big(h^{\frac{n+2}{4} - m_j} \mathrm{e}^{-S_0/h}\big). \tag{5.53}$$

2. *Pour $\omega \in L$*

$$\int_V \theta(x) U_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1(x,\sqrt{\rho}\omega)/h} t_1(x, \sqrt{\rho}\omega, h) U_\mu \psi(x)\, dx$$
$$= \mathcal{O}\big(h^{\frac{n+2}{4} - m_j} \mathrm{e}^{-S_0/h}\big). \tag{5.54}$$

Où m_j est défini par (3.14).

Preuve de la Proposition 5.4. – Nous allons estimer :

$$I = \int_V \theta(x) U_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2(x,\sqrt{\rho}\omega')/h} t_2(x, \sqrt{\rho}\omega', h) U_\mu \psi(x)\, dx$$

où V est un ouvert tel que défini dans la proposition. A l'aide d'un changement de coordonnées convenable sur S^{n-1}, on a avec $\xi = \sqrt{\rho}\omega'$:

$$J = h^{-\frac{n}{4} - m_j} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Phi(x,\xi))/h} t_2(x, \xi, h) a(x, h) \theta(x)\, dx'\, dx_n,$$

$$\Phi(x, \xi) = x_n.\xi_n + x'.\xi' + \mathcal{O}\big(\langle x\rangle^{-\rho}\big) + \mathrm{i} f_-(x). \tag{5.55}$$

Pour estimer l'intégrale J nous allons la décomposer :

$$J = h^{-\frac{n}{4} - m_j} \int \mathrm{e}^{x_n.\xi_n/h} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x'.\xi' + \mathcal{O}(\langle x\rangle^{-\rho}) + \mathrm{i} f_-(x))/h}$$
$$\times\, t_2(x, \xi, h) a(x, h) \theta(x)\, dx'\, dx_n.$$

Notons

$$S(x',\xi') = x'.\xi' + \mathcal{O}(\langle x\rangle^{1-\rho}) + \mathrm{i} f_-(x)$$

où $x = (x', x_n)$ et $\xi = (\xi', \xi_n)$. Notons

$$J_1 = h^{-\frac{n}{4}-m_j} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}S(x',\xi')/h} t_2(x,\xi,h) a(x,h)\theta(x)\, dx'.$$

On a :

$$\nabla_{x'}(S(x',\xi')) = 0 \Leftrightarrow \nabla_{x'}\varphi_2(x) + \nabla_{x'} f_2(x) + \mathrm{i}\nabla_{x'} f_1(x) = 0. \qquad (5.56)$$

Puisque $\omega' \in -L$, il existe un point critique $x'_c(x_n)$ tel que $x'_c(x_n)$ tend vers 0 lorsque (x_n) tend vers l'infini.

LEMME 5.4. – *Si le point critique* $x'_c(x_n)$:
1. *n'est pas réel alors* :

$$J_1 = \mathcal{O}(h^\infty \mathrm{e}^{-S_0/h}); \qquad (5.57)$$

2. *est réel alors* :

$$J_1 = h^{(n+2)/4-m_j} \mathrm{e}^{-f_1(x'_c,x_n)} \mathrm{e}^{\mathrm{i} f_2(x'_c,x_n)} z(x_n,\xi_n). \qquad (5.58)$$

Preuve du lemme. – Si le le point critique $x'_c(x_n)$ est complexe alors le théorème de la phase non stationnaire à phase complexe nous donne

$$J_1 = \mathcal{O}(h^\infty \mathrm{e}^{-S_0/h}).$$

Si le point critique $x'_c(x_n)$ est réel alors

$$\mathrm{Hess}_{x'x'}(S(x',\xi')) = \mathrm{i}\,\mathrm{Hess}_{x'x'} f_1 + \mathrm{Hess}_{x'x'} f_2 + \mathcal{O}(\langle x\rangle^{-\rho}).$$

Le $\mathrm{Hess}_{x'x'} f_1 > 0$ puisque c'est le hessien transverse à $\Pi_x\Gamma$ de $\Re e\, f_\pm$. Donc $\mathrm{Hess}_{x'x'}(S(x',\xi')) \neq 0$, le point critique $x'_c(x_n)$ est non dégénéré.

On applique le théorème de la phase stationnaire à J_1, on obtient :

$$J_1 = h^{(n+2)/4-m_j} \mathrm{e}^{-f_1(x'_c,x_n)} \mathrm{e}^{\mathrm{i} f_2(x'_c,x_n)} z(x_n,\xi_n) + \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-(S_0+\varepsilon)/h})$$

où $z(x_n,\xi_n)$ est un symbole d'ordre 0. □

Revenons à l'intégrale J et distingons deux cas, énonçons pour cela le lemme suivant :

LEMME 5.5. –
1. *Si le point critique $x'_c(x_n)$ est complexe alors :*

$$J = \mathcal{O}\left(h^{\infty} \mathrm{e}^{-S_0/h}\right); \tag{5.59}$$

2. *Si le point critique $x'_c(x_n)$ est réel alors :*

$$J = h^{(n+2)/4-m_j} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x_n.\xi_n + x'_c(x_n).\xi' + \mathrm{i} f_1(x'_0, x_n) + f_2(x'_0, x_n))/h} z(x_n, \xi_n)\, dx_n \\ + \mathcal{O}\left(\mathrm{e}^{-(S_0+\varepsilon)/h}\right). \tag{5.60}$$

Preuve du lemme. – La première partie découle immédiatement du lemme précédent.

Quant au deuxième cas, si nous notons

$$\Psi(x_n) = x_n.\xi_n + x'_c(x_n).\xi' + f_2(x'_0, x_n) + \mathrm{i} f_1(x'_0, x_n).$$

La phase a un point critique en x_n qui peut être trés dégénéré. On ne peut donc pas utiliser le théorème de la phase stationnaire, et on a seulement l'estimation suivante : $\exists C$ tel que :

$$J \leqslant C\left(h^{\frac{n+2}{4}-m_j} \mathrm{e}^{-S_0/h}\right).$$

Ainsi s'achève la démonstration de la formule (5.59). La formule (5.60) se démontre de la même manière. □

Nous terminons la section par la proposition suivante :

PROPOSITION 5.5. – *Sous les hypothèses des propositions précédentes nous avons :*

$$\begin{aligned} H_2(\omega', h) &= \mathcal{O}\left(h^{\infty} \mathrm{e}^{-S_0/h}\right) \quad \textit{si } \omega' \notin -L, \\ H_1(\omega, h) &= \mathcal{O}\left(h^{\infty} \mathrm{e}^{-S_0/h}\right) \quad \textit{si } \omega \notin L, \end{aligned} \tag{5.61}$$

$$\begin{aligned} H_2(\omega', h) &= \mathcal{O}\left(h^{\frac{n+2}{4}-m_j} \mathrm{e}^{-S_0/h}\right) \quad \textit{si } \omega' \in -L, \\ H_1(\omega, h) &= \mathcal{O}\left(h^{\infty} \mathrm{e}^{-S_0/h}\right) \quad \textit{si } \omega \in L. \end{aligned} \tag{5.62}$$

La preuve découle immédiatement des Propositions 5.1–5.4.

5.2. Estimation du résidu de $S(\lambda, h, \omega, \omega')$

Tenant compte des estimations obtenues dans (5.1) et du fait que $\rho_j = \mathcal{O}(h)$, puisque

$$\text{Résidu}\big(S(\lambda, h, \omega, \omega'), \rho_j\big) = \rho_j^{\frac{n-2}{2}} H_1 H_2,$$

nous pouvons conclure que :

$$\text{Résidu}\big(S(\lambda, h, \omega, \omega'), \rho_j\big) = \begin{cases} \mathcal{O}(h^{\infty} \mathrm{e}^{-2S_0/h}) & \text{si } (\omega, \omega') \notin (L, -L), \\ \mathcal{O}(h^{n-2m_j} \mathrm{e}^{-2S_0/h}) & \text{si } (\omega, \omega') \in (L, -L). \end{cases} \tag{5.63}$$

Nous avons ainsi démontré le Théorème 5.1.

5.3. Estimation de la matrice $S(\lambda)$

Pour $\lambda \in I(h)$, λ réel

$$S\big((\lambda, h, \omega, \omega'), \rho\big) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\text{Résidu}(S(\lambda, h, \omega, \omega'), \rho_j)}{\lambda - \rho_j} + F(\lambda, h, \omega, \omega')$$

où N désigne le nombre de résonances (qu'on a supposées simples) dans $I(h)$. En appliquant le Théorème 5.1 on obtient :

$$\left| \frac{\text{Résidu}(S(\lambda, h, \omega, \omega'), \rho_j)}{\lambda - \rho_j} \right| = \begin{cases} \mathcal{O}(h^{\infty}) \dfrac{\mathrm{e}^{-2S_0/h}}{|\Im m\, \rho_j|} & \text{si } (\omega, \omega') \notin (L, -L), \\ \mathcal{O}(h^{n-2m_j}) \dfrac{\mathrm{e}^{-2S_0/h}}{|\Im m\, \rho_j|} & \text{si } (\omega, \omega') \in (L, -L). \end{cases} \tag{5.64}$$

D'après [10] et sous l'Hypothèse 5.1 $-\Im m\, \rho_1$ est donné par :

$$-\Im m\, \rho_1(h) = h^{1-\frac{n}{2}+\frac{d}{2}-2m_j} f(h) \mathrm{e}^{-2S_0/h} \tag{5.65}$$

où $f(h)$ est un symbole analytique d'ordre 0, d est la codimension de la variété Γ des points de type 1. On obtient comme conséquence du Théorème 5.1 et de (5.65) le résultat suivant :

THÉORÈME 5.2. – *Sous les hypothèses du Théorème* 5.1 *nous obtenons :*

pour $j = 1$

$$\left|\frac{\text{Résidu}(S(\lambda, h, \omega, \omega'), \rho_1)}{\lambda - \rho_1}\right| = \begin{cases} \mathcal{O}(h^\infty) & si\ (\omega, \omega') \notin (L, -L), \\ \mathcal{O}(h^{\frac{3n}{2}-1-\frac{d}{2}}) & si (\omega, \omega') \in (L, -L), \end{cases} \tag{5.66}$$

uniformément pour $h > 0$ assez petit.

REMERCIEMENTS

Je remercie André Martinez pour toute l'aide qu'il m'a apporté dans la réalisation de ce travail.

RÉFÉRENCES

[1] J. AGUILAR and J.M. COMBES, A class of analytic perturbations for one body Schrödinger Hamiltoniens, *Comm. Math. Phys.* 22 (1971) 269–279.

[2] A. BENBERNOU, Estimation des residus de la matrice de diffusion en limite semi-classique, Thèse, Université de Paris 13, septembre 1996.

[3] H.L. CYCON, Resonances defined by modified dilatations, *Helv. Phys. Acta* 58 (1985) 969–981.

[4] C. GÉRARD and A. MARTINEZ, Semi-classical asymptotics for the spectral function of long range schrödinger operators, *J. Funct. Anal.* 84 (1) (1989) 226–254.

[5] C. GÉRARD et A. MARTINEZ, Prolongement meromorphe de la matrice de scattering pour les problèmes à deux corps à longue Portée, *Ann. Inst. Henri Poincaré* 51 (1) (1989) 81–110.

[6] C. GÉRARD et A. MARTINEZ, Principe d'absorption limite pour des opérateurs de Schrödinger à longue portée, *C. R. Acad. Sci. Paris* 306 I (1988) 121–123.

[7] B. HELFFER et A. MARTINEZ, Comparaison entre les diverses notions de Résonances, *Helv. Phys. Acta* 60 (1987) 992–1003.

[8] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, Multiple wells in the semi-classique I, *Comm. Partial. Diff. Equations* 9 (4) (1984) 337–408.

[9] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, Puits mutiples en limite semi-classique II. Interaction moleculaire, symetries, perturbation, *Ann. Inst. Henri Poincare Phys. Theorique* 42 (2) (1985) 127–212.

[10] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, Résonances en limite semi-classique, *Bull. Soc. Math. France*, mémoires n24/25 supp au tome 114. fasc 3 (1986).

[11] W. HUNZIKER, Distorsion analyticity and molecular resonance curves, *Ann. Inst. Henri Poincare, Physique Théorique* (1986).

[12] L. HÖRMANDER, *The Analysis of Linear Partial Différential Operators*, Tomes I à IV, Springer, 1985.

[13] H. ISOSAKI and H. KITADA, Modified wave operators with time independant modifiers, *J. Fasc. Sc. Tokyo Univ. Sect. 1A* 32 (1985) 77–104.

[14] H. ISOSAKI and H. KITADA, Scattering matrices for two body schrodinger operators, *Sci. Papers of the College of Arts Sciences, Tokyo Univ.* 35 (1985) 81–107.
[15] A. MARTINEZ, Estimations de l'effet tunnel pour le double puits I, *J. Math Pures Appl.* 66 (1987) 195–215.
[16] A. MARTINEZ, Estimations de l'effet tunnel pour le double puits II. Etats hautement excités, *Bull. Soc. Math. France* 116 (1988) 199–229.
[17] J. SJÖSTRAND, Singularités analytiques microlocales, *Asterisque* 95 (1982).
[18] D.R. YAFAEV, On the classical asymptotics of the forward scattering amplitude and of the total scattering cross section, in: *Séminaire Equations aux Dérivées Partielles*, Ecole Polytechniques, 1988–1989.
[19] D.R. YAFAEV, The scattering amplitude for the Schrödinger equation with a long range potential, Preprint, Rennes 1997.