

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

HAMADI BAKLOUTI

## **Asymptotique des largeurs de résonances pour un modèle d'effet tunnel microlocal**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 68, n° 2 (1998), p. 179-228

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1998\\_\\_68\\_2\\_179\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1998__68_2_179_0)

© Gauthier-Villars, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## **Asymptotique des largeurs de résonances pour un modèle d'effet tunnel microlocal**

par

**Hamadi BAKLOUTI**

Département de Mathématique, Université Paris-Nord,  
avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France.

---

**RÉSUMÉ.** – On étudie un système d'opérateurs différentiels semi-classiques, qui provient via l'approximation de Born-Oppenheimer de l'étude d'un hamiltonien qui décrit un système moléculaire. Ce système a été étudié par A. Martinez et S. Nakamura qui en ont fait une étude spectrale. Le terme principal du hamiltonien est le produit de deux hamiltoniens, dont l'un a un spectre discret. L'interaction créée par les termes d'ordre inférieur transforme ces valeurs propres en résonances dont la partie imaginaire s'exprime à l'aide de quantités géométriques associées aux caractéristiques complexes du système. Nous étudions ces résonances par la méthode de l'analyse microlocale semi-classique et les méthodes WKB complexes, et nous obtenons un développement asymptotique de la partie imaginaire. © Elsevier, Paris

*Mots clés :* Asymptotique, BKW, microlocal, résonances, semi-classique.

**ABSTRACT.** – **Resonances for a microlocal tunneling example.** We study a system of semi-classical differential operators, obtained from a study of a hamiltonien that describes a molecular system. This problem was treated by A. Martinez and S. Nakamura. They have looked for the spectral properties. The leading term of the hamiltonien is the product of two hamiltoniens that one has a discrete spectrum. the interaction created by terms of less order transforms these eigenvalues to resonances that the imaginary part can be expressed in terms of geometric quantities associated to the complex characteristics of the system. We study these resonances by semi-classical microlocal analysis and complex WKB method and we obtain an asymptotic expansion of the imaginary part. © Elsevier, Paris

## 0. INTRODUCTION

On s'intéresse dans ce travail à l'étude des résonances en limite semi-classique, pour un opérateur  $h$ -pseudodifférentiel  $P$  auto-adjoint à symbole matriciel, défini pour  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$P(x, hD_x, h) = \begin{pmatrix} h^2 D_x^2 + V_1(x) & hB(x, hD_x, h) \\ hB^*(x, hD_x, h) & h^2 D_x^2 + V_2(x) \end{pmatrix}$$

où  $B(x, hD_x, h)$  est un opérateur  $h$ -pseudodifférentiel d'ordre 0 et  $B^*$  l'opérateur adjoint de  $B$ . (Voir [Sj.1] pour la définition d'opérateur  $h$ -pseudodifférentiel). Ce problème provient de l'étude d'un hamiltonien qui décrit un système moléculaire :

$$H = -h^2 \Delta_x - \Delta_y + V(x, y) = -h^2 \Delta_x + \tilde{H}_x(y, D_y).$$

$x$  représente le noyau et  $y$  l'électron. Le potentiel  $V$  décrit les interactions noyau-électron, électron-électron et noyau-noyau. On remplace  $\tilde{H}_x(y, D_y)$  par la famille de ses valeurs propres :  $\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq \dots$  suivant les techniques d'approximation de Born-Oppenheimer (voir [KMSW]). En fait, cette étude faite près d'un niveau d'énergie  $E_0$  ne fait intervenir que les valeurs propres satisfaisant à,  $\text{Inf} \lambda_j \leq E_0$ . On impose à  $\lambda_2$  d'avoir  $E_0$  comme minimum, c'est donc  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  uniquement qui seront prises en considération. On se ramène alors à l'étude de  $P$ , avec  $V_1(x) = \lambda_1(x)$  et  $V_2(x) = \lambda_2(x)$ . L'opérateur  $B$  est de degré 1, il se présente même d'après [KMSW] sous la forme :

$$B(x, hD_x, h) = \psi(x)hD_x + hB_0(x, hD_x, h)$$

où  $B_0(x, hD_x, h)$  est un opérateur  $h$ -pseudodifférentiel d'ordre 0 et de degré 0 et  $\psi(x)$  est une fonction  $C^\infty$  bornée.

On montre que si  $E$  est une résonance (voir définition 3.5) de  $P$  près de  $E_0$ , alors la valeur absolue de sa partie imaginaire est une fonction de  $h$  qui décroît comme  $e^{-C/h}$  quand  $h$  tend vers 0. Des travaux précédents notamment ceux de Martinez [Ma3], de Messirdi [Me] et de Nakamura [Na], ont montré ce fait pour les résonances localisés en zero. En effet en 1993 Martinez a étudié le même problème à plusieurs variables  $x \in \mathbb{R}^n$ . Il a pris les potentiels  $V_1$  et  $V_2$  tels que :

$$\begin{cases} V_1(x) = -x_n - 1 \\ V_2(x) = |x|^2 \end{cases}$$

et a montré que  $\text{Im}(E) = O(e^{-(C-\varepsilon)/h})$ , avec  $C = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ . Ensuite en 1994 Nakamura a amélioré cette constante. Il a considéré le même modèle mais en dimension 1 de l'espace des  $x$  et il a trouvé précisément  $\text{Im}(E) = O(e^{-(\frac{5}{8}-\varepsilon)/h})$ . Pour cela, il a supposé en plus que  $B(x, hD_x, h) = m_1x + m_2hD_x + m_3$ , où les  $m_i$  sont des constantes complexes.

Dans ce travail on considère le modèle étudié par Nakamura.

$$P(x, hD_x, h) = \begin{pmatrix} h^2D_x^2 + (-x - 1) & h(m_1x + m_2hD_x + m_3) \\ h(\bar{m}_1x + \bar{m}_2hD_x + \bar{m}_3) & h^2D_x^2 + x^2 \end{pmatrix}. \tag{0.1}$$

C'est en fait l'oscillateur harmonique couplé avec l'hamiltonien de Stark par une perturbation symétrique.

En premier lieu on utilise les techniques de la méthode BKW classique. (La méthode BKW exacte développée dans le cas d'un opérateur de Schrödinger scalaire par J. Ecalle et A. Voros (voir [Ec] et [Vo]), ne s'applique pas à notre cas; cas d'un système). On construit donc des solutions formelles du problème :

$$P(x, hD_x, h)u(x, h) = Eu(x, h),$$

auxquelles on attribue des solutions holomorphes de la même équation, qui leur sont asymptotiques localement. En étudiant le raccordement des solutions aux voisinages des points tournants, comme dans [Gr] et [Ge-Gr], on trouve une condition de quantification sur les résonances, qui nous donne le développement asymptotique de leurs parties réelles.

THÉORÈME 1. – Soit  $P(x, hD_x, h)$  l'opérateur donné par (0.1).

Si  $E(h)$  est une résonance de  $P$  telle que  $E(h) \rightarrow E_0 > 0$  ( $h \rightarrow 0^+$ ), alors il existe  $(f_j)_{j \geq 2}$  une suite de fonctions définies et holomorphes dans un voisinage de  $E_0$  et un entier  $k > 0$  tels que :

$$E(h) \sim (2k + 1)h + \sum_{j=2}^{\infty} h^j f_j(E(h)).$$

Cette équivalence est dans le sens suivant :

$$\forall N > 0, \left| E(h) - \left( (2k + 1)h + \sum_{j=2}^N h^j f_j(E(h)) \right) \right| = O(h^N) \tag{0.2}$$

uniformément pour  $h > 0$  assez petit.

Dans ([He-Ro], t. 3.14), B. Helffer et D. Robert ont trouvé un théorème analogue, décrivant la répartition des valeurs propres dans un intervalle d'énergie pour le problème de puits de potentiel (dans le cas scalaire).

Notre théorème traduit le fait suivant : Les valeurs propres de l'oscillateur harmonique, en présence de la perturbation, se déforment dans le complexe et forment les résonances de l'opérateur  $P$ . D'autre part dans le cas du fond de puits ( $E_0 = 0$ ), une étude analogue, mais utilisant en plus le théorème de réduction de Birkhoff (voir [Sj.2]), donnerait également dans ce cas un développement asymptotique de  $E(h)$ .

Pour étudier  $\text{Im}E$ , on se place près d'un niveau  $E_0 \geq 0$ . La méthode WKB conjuguée avec l'étude de la partie oscillante dans la solution résonnante, nous permet d'obtenir un second théorème qui rejoint le théorème de Nakamura et le généralise pour un niveau d'énergie  $E_0 \geq 0$  quelconque. Ce théorème permet de donner une majoration du taux de décroissance exponentielle des largeurs de résonances, et ceci en fonction de certaines quantités géométriques liées aux caractéristiques de l'opérateur. Soient  $Z_1, Z_2$  et  $Z_3 = -Z_2$  les trois fonctions phases solutions de l'équation eiconale (1.10), voir aussi le paragraphe 1.5. Soient  $y_0^-$  et  $y_1^-$  les points tournants relatifs à  $Z_1 - Z_3$ , ils sont donnés explicitement dans (1.12). On a :

**THÉORÈME 2.** – Soit  $P(x, hD_x, h)$  l'opérateur donné par (0.1), et soit  $E(h)$  une résonance de  $P$  telle que  $E(h) \rightarrow E_0 \geq 0$  ( $h \rightarrow 0^+$ ) alors :

$\forall \varepsilon > 0$ , il existe  $h_0 > 0$  telle que pour tout  $h \leq h_0$  on a :

$$|\text{Im}E(h)| \leq e^{\varepsilon/h} e^{-2C(E_0)/h}$$

où :

$$C(E_0) = \text{Re}(Z_2 + Z_1)(y_0^-, -\sqrt{E_0}).$$

Pour préciser le taux de décroissance de  $\text{Im}(E)$  en fonction de  $h$ , on a développé une étude microlocale au voisinage des points de croisements. On a appliqué à l'opérateur  $P$  une transformation microlocale pour le réduire à sa forme normale. Notre opérateur échappe aux conditions de [Ka-Ro]. On a essayé d'adapter la démonstration de ([He- Sj.1], ap. b) à notre problème, on a donc été amené à mettre une hypothèse d'ellipticité sur  $B(x, hD_x, h)$  au voisinage des points de croisement, qui favorise le couplage entre l'oscillateur harmonique et l'hamiltonien de Stark.

**HYPOTHÈSE DE COUPLAGE.** – (H) :  $-m_1\xi + m_2x + m_3 \neq 0$  pour  $(x, \xi) = (y_0^-, -j)$  respectivement  $(x, \xi) = (y_1^-, -j^2)$ .

On suppose les termes de couplage elliptiques aux points d'intersection des caractéristiques. Notre résultat principal découle alors de cette étude. A notre connaissance, Il n'existe pas de résultats analogues à celui ci (*i.e.* donnant un développement asymptotique de résonances) autres que ceux de Helffer et Sjöstrand dans [He-Sj.2] pour les résonances de forme.

THÉORÈME 3. – Soit  $P(x, hD_x, h)$  l'opérateur donné par (0.1) et soit  $E(h)$  une résonance de  $P$  telle que  $E(h) \rightarrow E_0 \geq 0$  ( $h \rightarrow 0^+$ ). Sous l'hypothèse (H), il existe deux symboles analytiques classiques  $r_-(h)$  et  $r_+(h)$ , d'ordre 0 et de symbole principal 1 et deux symboles analytiques classiques  $l_h^-$  et  $l_h^+$ , d'ordre 2, tels que :

$$e^{2C(E_0)/h} \text{Im} E \sim -2\pi^2 \left| \frac{h^{\frac{1}{h}} l_h^-}{h\Gamma(-\frac{i}{h} l_h^-)} r_-(h) e^{(Z_1+Z_2)(y_1^-, y_0^-)/h} - \frac{h^{\frac{1}{h}} l_h^+}{h\Gamma(-\frac{i}{h} l_h^+)} r_+(h) \right|^2$$

où

$$C(E_0) = \text{Re}(Z_1 + Z_2)(y_0^-, -\sqrt{E_0}).$$

Cette équivalence est au sens de (0.2).

Remarques.

- 1) La quantité  $(Z_1 + Z_2)(y_1^-, y_0^-)$  est imaginaire pure.
- 2) Le terme principal dans ce développement asymptotique est donné par :

$$e^{2C(E_0)/h} \text{Im} E \sim -2\pi^2 \left| l_- e^{(Z_1+Z_2)(y_1^-, y_0^-)/h} - l_+ \right|^2$$

où  $l_{\pm} h^2$  sont les symboles principaux des symboles analytiques classiques  $l_h^{\pm}$ , et sont donnés par :

$$\begin{cases} l_- = (m_1 j + m_2 y_0^- + m_3)(\bar{m}_1 j + \bar{m}_2 y_0^- + \bar{m}_3) \\ l_+ = (m_1 j^2 + m_2 y_1^- + m_3)(\bar{m}_1 j^2 + \bar{m}_2 y_1^- + \bar{m}_3) \end{cases}$$

Selon les valeurs des paramètres  $m_i$ , ce terme risque de s'annuler pour certaines valeurs (discrètes) de  $\frac{1}{h}$ , mais sous réserve de l'hypothèse de couplage, ces valeurs n'annulent pas tout le développement.

- 3) Au vu de ce théorème on remarque que la constante  $C(E_0)$  est bien optimale, et ceci est dans le sens où l'on a généralement :  $\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} e^{(2C(E_0)+\varepsilon)/h} \text{Im} E = \infty \\ \lim_{h \rightarrow 0} e^{(2C(E_0)-\varepsilon)/h} \text{Im} E = 0 \end{cases}$$

- 4) Pour  $E_0 = 0$ ,  $C(E_0) = \frac{5}{12}$ , ce qui correspond au taux obtenu dans [Na].

La présentation de ce travail est comme suit : La première partie est consacrée à faire des constructions de solutions formelles par la méthode BKW. On a préféré le faire sur la transformée de Fourier de notre opérateur, car cela nous évite quelques difficultés techniques. Dans une deuxième partie, on fait une étude géométrique qui nous donne les domaines de validité des développements asymptotiques de certaines solutions qu'on aura définies et normalisées. Cette étude nous permet dans une troisième partie de démontrer le premier théorème. Dans la quatrième partie on trouve une estimation exponentielle de la largeur des résonances et on fait une étude analytique microlocale au voisinage des points de croisement des caractéristiques. La dernière partie est consacrée à la preuve du théorème principal, qui découle de l'étude précédente.

Dans les trois dernières pages on représente les figures auxquelles on se réfère dans tous le texte.

## 1. CONSTRUCTIONS BKW COMPLEXES

Dans cette partie on construit des solutions formelles de l'équation :  $PU = EU$  pour  $P = P(x, hD_x, h)$  un opérateur  $h$ -pseudodifférentiel à symbole matriciel donné par :

$$P(x, hD_x, h) = \begin{pmatrix} h^2 D_x^2 + (-x - 1) & h(m_1 x + m_2 h D_x + m_3) \\ h(\bar{m}_1 x + \bar{m}_2 h D_x + \bar{m}_3) & h^2 D_x^2 + x^2 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

On commence par conjuguer notre opérateur, avec la  $h$ -transformation de Fourier. Ensuite, on construit des solutions formelles de l'équation transformée du type BKW. Aux solutions ainsi construites, on associe des vraies solutions du problème.

### 1.1. Transformation de l'opérateur

Notons  $B(x, hD_x, h) = m_1 x + m_2 h D_x + m_3$ . Soit  $F_h$  la  $h$ -transformation de Fourier :  $F_h u(y) = \frac{1}{2h\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy/h} u(x) dx$ .

On considère  $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  une solution de l'équation  $PU = EU$ . Soit

$$V = F_h U = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ où } \begin{cases} v_1 = F_h u_1(y) \\ v_2 = F_h u_2(y) \end{cases}$$

$V$  vérifie alors l'équation :

$$Q(x, hD_x, h)V = EV \tag{1.4}$$

où

$$Q = F_h P F_h^{-1} = \begin{pmatrix} hD_y + y^2 - 1 & h\tilde{B} \\ h\tilde{B}^* & h^2 D_y^2 + y^2 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

avec

$$\tilde{B}(y, hD_y, h) = F_h B(y, hD_y, h) F_h^{-1} = -m_1 hD_y + m_2 y + m_3. \tag{1.6}$$

$\tilde{B}^*$  désigne l'opérateur adjoint de  $\tilde{B}$ . On note :  $q(x, \xi, h)$  le symbole de  $Q$ ,  $q_0(x, \xi, E) = \det(q(x, \xi, 0) - E)$ .

### 1.2. Construction de solutions formelles

On cherche à construire des solutions de l'équation (1.4) de la forme :

$$f(x) = e^{Z(x)/h} \begin{pmatrix} a(x, h) \\ b(x, h) \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

$a$  et  $b$  sont des symboles admettant des développements asymptotiques du type :

$$\begin{cases} a(x, h) \sim \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x) h^i \\ b(x, h) \sim \sum_{i=0}^{\infty} b_i(x) h^i \end{cases} \tag{1.8}$$

Appliquons l'opérateur  $(Q - E)$  à la fonction  $f$  donnée par (1.9) on obtient :

$$\begin{cases} (-iZ' + x^2 - 1 - E)a - iha' + h\tilde{B}(x, hD_x - iZ'(x), h)b = 0 \\ -(Z')^2 + x^2 - E)b - 2hZ'b' - hZ''b - h^2b'' \\ + h\tilde{B}^*(x, hD_x - iZ'(x), h)a = 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

où  $'$  désigne une dérivation en  $x$ . En annulant le coefficient constant dans (1.9) on obtient l'équation eiconale :

$$q_0(x, -iZ'_x, E) = 0. \tag{1.10}$$

Cette équation s'écrit aussi :

$$\begin{cases} -iZ' + (x^2 - 1 - E) = 0 \\ -(Z')^2 + x^2 - E = 0 \end{cases}$$

Ce qui implique l'expression des trois fonctions phases possibles :

$$\begin{cases} Z_1(x) = -i \int_0^x (t^2 - 1 - E) dt = -i \left( \frac{1}{3} x^3 - x - Ex \right) \\ Z_2(x) = -Z_3(x) = \int_0^x (t^2 - E)^{\frac{1}{2}} dt \end{cases} \quad (1.11)$$

La définition de  $Z_2(x)$  et  $Z_3(x)$  dépend du chemin d'intégration entre 0 et  $x$  et de la détermination de la racine, (voir le paragraphe 1.4). On fixe la détermination de la racine qui est positive sur le réel positif. On a alors les trois types de solutions :

$f_1$  exprimée à l'aide de la phase  $Z_1$ .

$f_1$  est définie en dehors des points  $\{y_0^+, y_0^-, y_1^+, y_1^-\}$  solutions des équations :

$$\begin{cases} Z_1'(x) = Z_2'(x) \\ Z_1'(x) = Z_3'(x) \end{cases}$$

$f_+$  exprimée à l'aide de la phase  $+Z_2$ .

$f_+$  est définie en dehors des points  $\{y_0^+, y_1^+, x_0^+, x_0^-\}$  solutions des équations :

$$\begin{cases} Z_2'(x) = Z_1'(x) \\ Z_2'(x) = Z_3'(x) \end{cases}$$

$f_-$  exprimée à l'aide de la phase  $Z_3 = -Z_2$ .

$f_-$  est définie en dehors des points  $\{y_0^-, y_1^-, x_0^+, x_0^-\}$  solutions des équations :

$$\begin{cases} Z_3'(x) = Z_1'(x) \\ Z_3'(x) = Z_2'(x) \end{cases}$$

Où l'on note :

$$\begin{cases} y_0^\pm = \pm \sqrt{j+1+E} \\ y_1^\pm = \pm \sqrt{j^2+1+E} \\ x_0^\pm = \pm \sqrt{E} \end{cases} \quad (1.12)$$

*Remarque.* – La variété caractéristique de notre opérateur est la réunion de deux composantes connexes dont l'une est compacte. Elle présente deux types de points remarquables :

- (1) Les points de croisements, ce sont les points  $(x, \xi)$  où deux caractéristiques se coupent transversalement.
- (2) Les points  $(x, \xi)$  où la tangente à la variété caractéristique soit verticale. Ce sont des points de dégénérescence de la projection sur l'axe des  $x$ .

Les images de ces points par la projection sur l'espace des  $x$ , forment les points tournants. En tout on en a six, soient  $x_0^\pm$ ,  $y_0^\pm$  et  $y_1^\pm$ .

### 1.3. Équations de transport

Pour étudier les équations de transport données par (1.9), il nous faut une version du théorème (9.3) dans [Sj.1] qui s'adapte au problème d'un système. En fait soit :

$$P(x, hD_x, h) = \begin{pmatrix} P(x, hD_x, h) & hR_2(x, hD_x, h) \\ hR_1(x, hD_x, h) & Q(x, hD_x, h) \end{pmatrix}$$

où  $P, Q$  et les  $R_i$  sont des opérateurs  $h$ -pseudodifférentiels analytiques formels, classiques d'ordre 0 définis près de  $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{C}^2$  tels que :

$$p_0(x_0, \xi_0)q_0(x_0, \xi_0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_\xi p_0 q_0(x_0, \xi_0) \neq 0 \quad (1.13)$$

où  $p_0$  et  $q_0$  sont les symboles principaux de  $P$  et  $Q$  respectivement, et soit  $\varphi$  une fonction holomorphe définie près de  $x_0$  et qui vérifie :

$$p_0(x, \varphi'(x))q_0(x, \varphi'(x)) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(x_0) = \xi_0. \quad (1.14)$$

Avec un changement de variable on peut ramener  $x_0$  à 0 et on a :

PROPOSITION 1.1. – Soient  $v$  un symbole analytique classique formel défini près de 0 et  $u_0$  un vecteur fixe de  $\mathbb{C}$ . Il existe un symbole  $u$  dans la même classe tel que :

$$\begin{cases} e^{-i\varphi/h} P e^{i\varphi/h} u = v \\ u(0, h) = u_0 \end{cases}$$

La preuve de cette proposition est calquée sur celle du théorème (9.3) dans [Sj.1].

COROLLAIRE 4. – Soit  $x_0$  un point complexe (non tournant), il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  tel que, les solutions de (1.9)  $a(x, h)$  et  $b(x, h)$ , soient des symboles analytiques classiques dans  $V$ .

En effet, notre opérateur satisfait aux conditions de la proposition,  $\varphi$  est l'une des phases définies dans (1.14) et les conditions (1.13) et (1.14) sont satisfaites par tout point  $x_0$  non tournant pour la phase  $\varphi$ ,  $\xi_0 = \varphi'(x_0)$ .

#### 1.4. Solutions formelles et vraies solutions

Avec les constructions précédentes, dans un ouvert connexe sans point tournant, on a trois classes de solutions formelles. On veut leur associer des solutions holomorphes qui leur sont asymptotiques localement. On a la proposition suivante.

**PROPOSITION 1.2.** – Soit  $f(x, z, h) \in \mathbb{C}^N$  une fonction de  $x, z \in \mathbb{C}^N$  et  $h$  ayant les propriétés suivantes :

- (i)  $f$  est holomorphe en  $x, z$  et  $h$  pour  $|x| < x_0, |z| < z_0$  et  $0 < h < h_0$ .
- (ii)  $f$  admet lorsque  $h$  tend vers 0 un développement asymptotique :

$$f(x, z, h) \sim \sum_{n \geq 0} f_n(x, z) h^n \text{ uniformément pour } |x| < x_0, |z| < z_0.$$

- (iii) Le terme principal de  $f$  (en  $h = 0$ ) possède en  $x = z = 0$  une différentielle partielle inversible

Supposons que le système :  $\{h^q Y' = f(x, Y, h), q \text{ entier positif}\}$  possède une solution formelle :  $\tilde{Y} = \sum_{r \geq 0} f_r(x) h^r$  à coefficients holomorphes pour  $|x| \leq x_0$ .

Alors il existe une solution  $Y$  du système, holomorphe pour  $|x| \leq x_1 \leq x_0$  et  $h \leq \varepsilon$  telle que  $Y(x, h) \sim \tilde{Y}$  lorsque  $h$  tend vers 0.

Pour la preuve voir [A1]. Cette proposition est toujours valable si on remplace  $f$  par un opérateur :

$$f(x, z, h) = f_0(x, z) + h\psi(x, hD_x, h)z$$

pour  $z$  fonction et  $\psi(x, hD_x, h)$  un opérateur  $h$ -pseudodifférentiel sur  $\mathbb{C}^N$ .

#### 1.5. Définitions et notations

Soient  $x$  et  $y$  deux points du plan complexe.

- (i) On note :

$$Z_1(x, y) = -i \int_y^x (t^2 - 1 - E) dt,$$

$$Z_2(x, y) = \int_y^x (t^2 - E)^{1/2} dt,$$

$$Z_3(x, y) = - \int_y^x (t^2 - E)^{1/2} dt = -Z_2(x, y).$$

La définition de  $Z_2(x, y)$  et de  $Z_3(x, y)$ , dépend du chemin d'intégration entre  $y$  et  $x$ . Soit  $\gamma_1$  une courbe reliant  $x$  à  $y$ , on note :

$$Z_2(\gamma_1) = \int_{\gamma_1} (t^2 - E)^{1/2} dt.$$

(ii) Soit  $z$  un autre point, on note :

$$U_2^\pm(x, y, z, h) = e^{\pm Z_2(x, y)/h} \begin{pmatrix} c_\pm(x, h) \\ d_\pm(x, h) \end{pmatrix},$$

respectivement

$$U_1(x, y, z, h) = e^{Z_1(x, y)/h} \begin{pmatrix} a(x, h) \\ b(x, h) \end{pmatrix},$$

une solution formelle de (1.4) vérifiant  $d_\pm(z, h) = 1$ , respectivement  $a(z, h) = 1$ .

(iii) Soit

$$\check{U}(x, h) = e^{\frac{Z(x)}{h}} \sum_{i=0}^{\infty} \check{U}_i(x) h^i$$

une solution formelle de (1.4). On dit qu'une fonction holomorphe  $U(\cdot, h)$  est équivalente à  $\check{U}(\cdot, h)$ , dans un ouvert  $V \subset \mathbb{C}$  et on note :

$$U(\cdot, h) \sim \check{U}(\cdot, h),$$

si  $\forall N > 0$  il existe  $h_0 > 0$  et  $c_N > 0$  tels que  $\forall h \leq h_0$  on a :

$$\sup_{x \in V} \left| h^{-N} e^{-Z(x)/h} \left( U(x, h) - \sum_{i=0}^{N-1} \check{U}_i(x) h^i \right) \right| \leq c_N.$$

## 2. PROLONGEMENT DES DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

On sait maintenant (à l'aide de la proposition 1.2) définir des vraies solutions du problème (1.4) à partir de leurs développements asymptotiques. Un tel développement valable localement, peut se prolonger. On veut déterminer son domaine de validité maximal au sens de l'inclusion. On

fait une étude de la géométrie de Stokes pour notre problème (1.4). Cette étude fait intervenir trois types de lignes de niveau relatives aux phases données par (1.11). Ces lignes ne forment pas les seuls obstacles pour le prolongement d'un développement asymptotique. On a mis en évidence un autre type d'obstacles, qu'on surmonte en démontrant le lemme 2.2.

LEMME 2.1. – Soient  $x_0$  et  $x_1$  deux points non tournants du plan complexe, soit  $u$  une solution holomorphe et asymptotique au voisinage de  $x_0$  à la solution formelle :

$$\hat{u} = e^{Z_i(x,y)/h} \sum_{p=0}^{\infty} a_p(x)h^p$$

Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  une courbe telle que,  $\gamma(0) = x_0$ ,  $\gamma(1) = x_1$ , et évitant les points tournants.

Alors si  $\text{Re}(Z_i - Z_j)(x)$  est strictement croissante sur  $\gamma \forall j \neq i$ ,  $u$  sera asymptotique à  $\hat{u}$  au voisinage de  $x_1$ .

Preuve. – Soit  $\Omega(u)$  un domaine de validité maximal (au sens de l'inclusion) du développement asymptotique de  $u$  donné par l'énoncé, on a alors :  $x_0 \in \Omega(u)$ . Supposons que  $x_1 \in \Omega^c$ ,  $\gamma$  va donc couper la frontière de  $\Omega(u)$  au moins une fois. Soit  $y_0$  le premier point d'intersection. Avec la proposition 1.2 et les constructions BKW on peut définir une base de solutions  $(u_1, u_2, u_3)$  telle que :

$$\begin{cases} u_1 \sim u_1(x, y_0, y_0, h) \\ u_2 \sim u_2^+(x, y_0, y_0, h) \\ u_3 \sim u_2^-(x, y_0, y_0, h) \end{cases}$$

dans un voisinage  $V$  de  $y_0$ . Il existe donc  $\alpha, \beta$  et  $\delta$  dans  $\mathbb{C}$  telles que :

$$u = \alpha u_i + \beta u_j + \delta u_k \text{ où } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}.$$

On note par  $V_+ = V \cap \Omega(u)$  et  $V_- = V \cap \Omega^c(u)$  voir (figure 2.1).

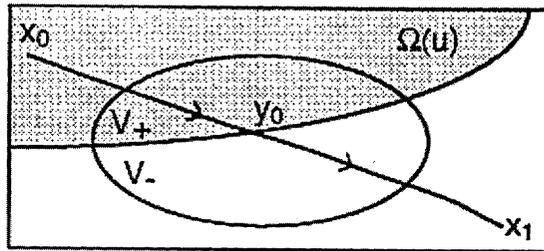


Figure 2.1. – Prolongement du dév. asym.

Le développement asymptotique de  $u$  dans  $V_+$  a la même phase que celui de  $\alpha u_i$ . Alors en tenant compte du fait que les phases qui définissent respectivement  $u_i$ ,  $u_j$  et  $u_k$  sont indépendantes (au point de vue croissance de leurs partie réelles),  $\beta u_j$  et  $\delta u_k$  sont dominées dans  $V_+$  par  $\alpha u_i$  et ceci est dans le sens suivant :

$\forall N > 0$  il existe  $h_0 > 0$  et  $c_N > 0$  tels que  $\forall h < h_0$  on a :

$$\frac{1}{|\alpha|} \sup_{x \in V_+} |h^{-N} e^{-Z_i(x, y_0)/h} (\beta u_j(x, h) + \delta u_k(x, h))| \leq c_N. \quad (2.15)$$

En particulier pour  $x \in \gamma \cap V_+$ . Or d'après les hypothèses  $\text{Re}(Z_i - Z_j)$  et  $\text{Re}(Z_i - Z_k)$  croissantes sur  $\gamma$ ,  $|e^{-\frac{Z_i(x, y_0)}{h}} u_j(x, h)|$  et  $|e^{-\frac{Z_i(x, y_0)}{h}} u_k(x, h)|$  sont décroissantes sur  $\gamma$ . Par suite on a la même inégalité au voisinage de  $\gamma \cap V_-$  et donc c'est toujours  $\alpha u_i$  qui donne le développement asymptotique de  $u$ . □

*Remarque.* – La croissance de  $\text{Re}(Z_i - Z_j)$  sur  $\gamma$  peut s'exprimer aussi par :  $\gamma$  doit couper les lignes de niveau de  $\text{Re}(Z_i - Z_j)$  transversalement et le sens croissant.

DÉFINITION 2.1.

- (i) Une ligne de Stokes pour une différence de deux phases données  $Z(x)$  et  $\tilde{Z}(x)$ , est une courbe de niveau de  $\text{Re}(Z - \tilde{Z})(x)$  issue d'un point tournant relatif à la même différence de phases.  
On appellera de même lignes de Stokes, les autres courbes de niveau.
- (ii) On appelle cellule de lignes de Stokes au voisinage d'un point complexe  $K$ , l'ensemble des lignes de Stokes relatives à notre problème, regardées localement au voisinage de  $K$ .

**2.1. Lignes de Stokes**

2.1.a. Lignes de Stokes pour  $Z_2 - Z_3$ . – Les deux points  $x_0^\pm = \pm\sqrt{E}$  sont tournants pour  $Z_2 - Z_3 = 2Z_2$  (pour  $E$  non nul). Au voisinage de  $x_0^+$  on a :

$$Z_2(y) - Z_2(\sqrt{E}) = \frac{2}{3} (2\sqrt{E})^{1/2} (y - \sqrt{E})^{3/2} (1 + O(y - \sqrt{E})). \quad (2.16)$$

On note  $Z_2(\cdot)$  tout court car cette égalité (modulo un choix du chemin d'intégration) ne dépend pas du point base de l'intégrale, on le fixe par exemple en zéro. De l'égalité (2.16) on déduit la forme des lignes de Stokes au voisinage de  $x_0^+$  :

$$\text{arg}(y - \sqrt{E}) \approx (1 + 2k) \frac{\pi}{3}.$$

On a aussi au voisinage de  $x_0^-$  :

$$\arg(y + \sqrt{E}) \approx (2k)\frac{\pi}{3}.$$

2.1.b. *Lignes de Stokes pour  $Z_1 - Z_2$  et  $Z_1 - Z_3$ .* – On résout l'équation :  $\operatorname{Re}(Z_1 + Z_2)(y) = c$  où  $c$  est une constante réelle. Soit  $y_1 = y_0^-$  ou  $y_1^-$  et  $y$  au voisinage de  $y_1$  :

$$\operatorname{Re}(-2iy_1 + y_1/(y_1^2 - E)^{1/2})(y - y_1)^2 + o(y - y_1)^3 = 0$$

Cette équation donne au voisinage de  $y_0^-$  (respectivement  $y_1^-$ ) :

$$\begin{cases} \arg(y - y_0^-) \approx -\frac{1}{2} \arg(y_0^-) + \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \\ \arg(y - y_1^-) \approx -\frac{1}{2} \arg(y_1^-) - \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (2.17)$$

De même pour les lignes de Stokes relatives à  $(Z_1 - Z_2)$ , on a autour du point  $y_0^+$  respectivement  $y_1^+$  :

$$\begin{cases} \arg(y - y_0^+) \approx -\frac{1}{2} \arg(y_0^+) + \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \\ \arg(y - y_1^+) \approx -\frac{1}{2} \arg(y_1^+) - \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (2.18)$$

2.1.c. *Remarque.* – Ces lignes partent des points  $y_0^-$  et  $y_1^-$  (respectivement  $y_0^+$  et  $y_1^+$ ) selon quatre directions ( $k = 0, 1, 2$  et  $3$ ). Dans le cas où  $E$  est réel, l'une des branches va rejoindre l'autre point.

## 2.2. Obstacles aux prolongements

Si on regarde maintenant une cellule de lignes de Stokes au voisinage  $V_K$  d'un point  $K$  non tournant, et si on considère les phases  $Z_i(x, K)$ , on a trois lignes qui se coupent en  $K$ .

$$\begin{cases} L_{1,2} = \{x \in V_K; \operatorname{Re}(Z_1 - Z_2)(x, K) = 0\} \\ L_{1,3} = \{x \in V_K; \operatorname{Re}(Z_1 - Z_3)(x, K) = 0\} \\ L_{2,3} = \{x \in V_K; \operatorname{Re}(Z_2 - Z_3)(x, K) = 0\} \end{cases} \quad (2.19)$$

Ces lignes partagent  $V_K$  en six secteurs, dans chacun desquels on a un ordre différent entre les parties réelles des phases  $Z_i(x, K)$ . Le schéma peut aussi se simplifier à trois secteurs, dans chacun desquels l'une des phases a sa partie réelle plus petite que celles des deux autres. Dans chacun de ces trois secteurs, la solution sous dominante est celle définie avec la phase



Figure 2.2. – Cellule de lignes tangentes.

ayant la plus petite des parties réelles et son développement asymptotique reste valable dans tout un voisinage de  $K$ .

Maintenant supposons que les lignes se coupent tangentiellement, sans se traverser, que se passe-t-il ? On a six secteurs, mais on n'a pas six ordres différents entre les parties réelles des phases  $Z_i(x, K)$ . En fait dans le cas de la (figure 2.2) on se rend compte qu'il n'existe pas un secteur sur lequel  $Z_2(x, K)$  ait sa partie réelle plus petite, ou plus grande, que celles des deux autres. On ne peut donc pas prolonger une solution définie avec la phase  $Z_2(x, K)$ . En effet, on ne peut pas trouver une courbe  $\gamma$  sur laquelle  $\text{Re}(Z_2 - Z_1)(x, K)$  et  $\text{Re}(Z_2 - Z_3)(x, K)$  soient strictement croissantes. Ces points présentent des obstacles pour le prolongement des développements asymptotiques, ils sont donnés par :

$$(y^2 - E)^{\frac{1}{2}} / (y^2 - E - 1) = i\alpha \text{ où } \alpha \text{ est un réel quelconque.}$$

Cette équation se réécrit pour  $y = x_1 + ix_2$  :

$$x_1 = 0 \text{ ou } (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2E(x_1^2 - x_2^2) + E^2 - 1 = 0. \tag{2.20}$$

Voir (figure 2.4).

Soit  $u$  une solution analytique du système (1.4) telle qu'au voisinage de  $z_0$  on a :

$$u(x, h) \sim e^{Z_i(x,y)/h} \begin{pmatrix} a_i(x, h) \\ b_i(x, h) \end{pmatrix}$$

$z_0$  et  $y$  étant deux points non tournants du plan complexe. Soit  $\Omega_i(u)$  un domaine de validité maximal (au sens de l'inclusion) de ce développement asymptotique. Appelons une frontière de  $\Omega_i(u)$  une branche  $L$  de  $Fr(\Omega_i(u))$  connexe, maximale (au sens de l'inclusion), non réduite à un point et qui soit du type :

- 1)  $L \subset \{x \in \mathbb{C} \text{ tq } \text{Re}(Z_i - Z_j)(x) = c\}$  où  $j \neq i$  et  $c \in \mathbb{R}$ , ou
- 2)  $L \subset \{x \in \mathbb{C} \text{ tq } L_{1,2}, L_{1,3} \text{ et } L_{2,3} \text{ sont tangentes entre elles en } x\}$

D'après ce qu'on a dit au début de cette section, les seuls obstacles du prolongement d'un développement asymptotique, sont ou bien une ligne de Stokes qu'on a déjà traversée, ou bien une ligne du type 2. Donc les branches du type 1 et celles du type 2 recouvrent  $Fr(\Omega_i(u))$ , et on a le lemme suivant :

LEMME 2.2. – Si  $L$  est une frontière de  $\Omega_i(u)$  alors elle est du type 1.

*Preuve.* – Supposons que  $L$  est du type 2 et regardons la situation au voisinage  $V$  d'un point  $K$  de  $L$ . Soient  $L_{i,j}$ ,  $L_{i,k}$  et  $L_{j,k}$  comme dans (2.19) où  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$  voir (figure 2.3). Quitte à restreindre  $V$ , on peut construire une base de solutions  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  définies pour  $x \in V$  par :

$$\begin{cases} u_1 \sim u_1(x, K, K, h) \\ u_2 \sim u_2^+(x, K, K, h) \\ u_3 \sim u_2^-(x, K, K, h) \end{cases} \quad (2.21)$$

Il existe donc  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  dans  $\mathbb{C}$  telles que :

$$u = \alpha u_i + \beta u_j + \gamma u_k \text{ où } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}. \quad (2.22)$$

On note :

$$\begin{cases} V_+ = V \cap \Omega_i(u) \\ V_- = V \cap \Omega_i^c(u) \end{cases}$$

Dire que :  $u(x, h) \sim e^{Zi(x,y)/h} \begin{pmatrix} a_i(x, h) \\ b_i(x, h) \end{pmatrix}$  dans  $V_+$ , signifie que dans l'équation (2.22)  $\alpha u_i$  domine  $\beta u_j + \gamma u_k$  dans  $V_+$ , et ceci dans un sens analogue à celui de (2.15). Pour  $x \in V_-$ , le développement asymptotique de  $u$  n'est plus valable. Donc  $\alpha u_i(x)$  ne domine plus  $\beta u_j(x) + \gamma u_k(x)$ . En fait, c'est  $\beta u_j(x)$  ou  $\gamma u_k(x)$  qui devient dominante sur les deux autres, dans un sens analogue à (2.15) pour  $x$  choisi dans  $V_-$ .

1<sup>er</sup> cas :  $\beta u_j(x)$  domine  $\alpha u_i(x) + \gamma u_k(x)$  pour  $x$  fixé dans  $V_-$ .

On peut lier  $x$  à un point  $x_1$  dans  $V_+$  par une courbe  $\gamma_1$  sur laquelle,  $\text{Re}(Z_j - Z_i)$  et  $\text{Re}(Z_j - Z_k)$  soient croissantes, voir (figure 2.3). Or dans ce cas  $\beta u_j$  reste dominante en  $x_1$ , ce qui se contredit avec le fait que  $x_1 \in V_+$ .

2<sup>e</sup> cas :  $\gamma u_k(x)$  domine  $\alpha u_i(x) + \beta u_j(x)$  pour  $x$  fixé dans  $V_-$  (pas forcément celui du 1<sup>er</sup> cas).

On peut lier  $x$  à un point  $x_2$  dans  $V_+$  par une courbe  $\gamma_2$  sur laquelle,  $\text{Re}(Z_k - Z_i)$  et  $\text{Re}(Z_k - Z_j)$  soient croissantes, voir (figure 2.3). Or dans ce cas  $\gamma u_k$  reste dominante en  $x_2$  ce qui se contredit avec le fait que  $x_2 \in V_+$ .

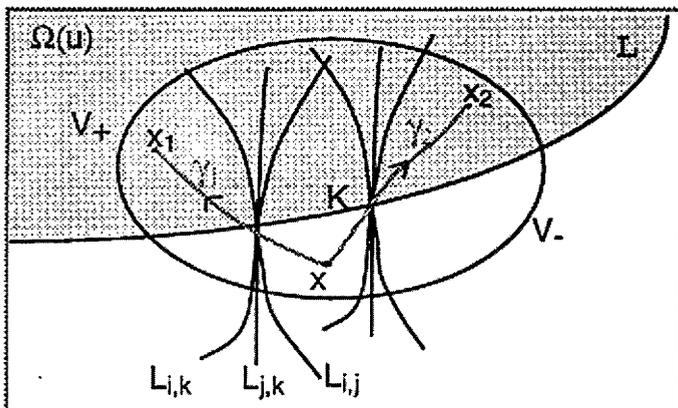


Figure 2.3. – Obstacles aux prolongements.

On représente sur la (figure 2.4) toutes les lignes de Stokes.

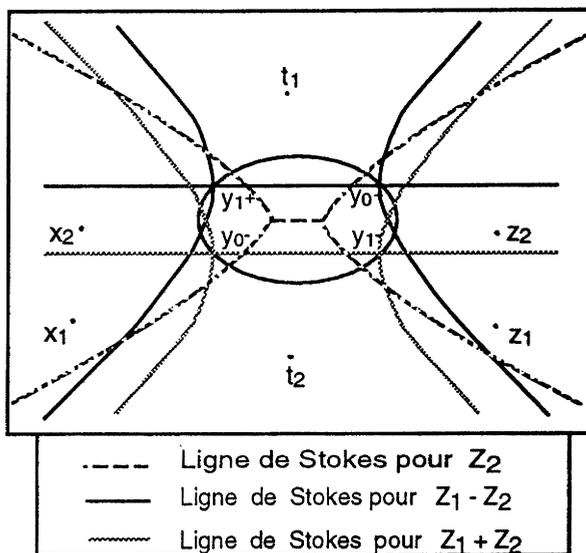


Figure 2.4. – Figure globale des lignes de Stokes.

### 3. CONDITION DE QUANTIFICATION

Dans cette partie, on va raccorder entre elles deux solutions résonnantes dont on connaît le développement asymptotique à droite (resp. à gauche)

de 0. Ce fait n'est pas possible directement, on passe par des solutions de transition. On va anticiper en les construisant et en déterminant les domaines de validité de leurs développements asymptotiques.

On procède comme suit :

On considère une base de solutions de (1.4) dont on connaît les développements asymptotiques à gauche de 0. On montre qu'une solution résonnante  $u_0$  relative à la résonance  $E$ , est quasiment colinéaire à l'une de ces solutions. On considère aussi une base de solutions, dont on connaît les développements asymptotiques à droite de 0. On exprime  $u_0$  dans cette base. On montre que le coefficient de l'un des éléments de la base doit être exponentiellement petit quand  $h$  tend vers 0. Ceci suppose des conditions sur la résonance  $E$ . Ces conditions font intervenir certaines quantités dépendantes de  $E$ . On les détermine en calculant des Wronskiens, dont on commence par donner la définition.

DÉFINITION 3.1. – Soient  $U_1(x) = \begin{pmatrix} u_{11}(x) \\ u_{12}(x) \end{pmatrix}$ ,  $U_2(x) = \begin{pmatrix} u_{21}(x) \\ u_{22}(x) \end{pmatrix}$  et  $U_3(x) = \begin{pmatrix} u_{31}(x) \\ u_{32}(x) \end{pmatrix}$ , trois vecteurs fonctions de  $x$ .

On appelle Wronskien de  $U_1, U_2, U_3$  et on note  $W(U_1, U_2, U_3)$  :

$$W(U_1, U_2, U_3) = \text{Det} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ hu'_{12} & hu'_{22} & hu'_{32} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Cette définition est la définition standard du Wronskien. C'est une forme trilinéaire alternée, qui s'annule si et seulement si elle opère sur trois vecteurs linéairement liés. Il est facile de montrer la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2. – Soit  $z_0$  un point dans  $\mathbb{C}$ , et soient  $U_1, U_2$  et  $U_3$  trois solutions de (1.4), alors :

$$W(U_1, U_2, U_3)(x) = e^{ih|m_1|^2(x-z_0)} e^{Z_1(x, z_0)/h} W(U_1, U_2, U_3)(z_0)$$

On remarque que  $e^{ih|m_1|^2(x-z_0)}$  est un symbole analytique classique d'ordre 0 et de symbole principal 1 et on a :

PROPOSITION 3.3. – Soient  $u_1, u_2$  et  $u_3$  trois solutions de (1.4) définies telles que :

$u_1 \sim u_1(x, y_1, y_0, h)$ ,  $u_2 \sim u_2^+(x, y_2, y_0, h)$  et  $u_3 \sim u_3^-(x, y_3, y_0, h)$  au voisinage  $V_0$  d'un point  $y_0 \in \mathbb{C}$ .  $y_1, y_2$  et  $y_3$  étant trois points quelconques du plan complexe.

Alors il existe un symbole analytique classique formel  $c(x, h)$ , d'ordre 0 et de symbole principal 1 et une courbe  $\gamma$ , reliant  $y_2$  à  $y_3$  tels que :

$$W(u_1, u_2, u_3) \sim c(x, h)e^{-Z_2(\gamma)/h}e^{Z_1(x, y_0)/h} \tag{3.24}$$

uniformément par rapport à  $x$ .

*Preuve.* – Remarquons que si on représente  $c$  par :

$$c(x, h) \sim \sum_{i=0}^{\infty} c_i(x)h^i,$$

alors l'équivalence dans l'équation (3.24), est dans le sens suivant :

$\forall N > 0$  il existe  $h_0 > 0$  et  $c_N > 0$  tels que  $\forall h < h_0$  on a :

$$\left| h^{-N} \left( e^{Z_2(\gamma)/h} e^{-Z_1(x, y_1)/h} W(u_1, u_2, u_3) - \sum_{i=0}^{N-1} c_i(x)h^i \right) \right| \leq c_N \tag{3.25}$$

uniformément par rapport à  $x$ . Il suffit donc d'écrire l'expression du Wronskien pour les solutions formelles au point  $y_0 \in V_0$  et utiliser la proposition 3.2. Le poids  $e^{Z_2(\gamma)/h}$  sortira de la différence de normalisation entre les phases dans  $u_2^+(x, y_2, y_0, h)$  et  $u_2^-(x, y_3, y_0, h)$ .  $\square$

DÉFINITION 3.4. – Soient les points  $t_1, t_2, x_1, x_2, z_1$  et  $z_2$  placés comme sur la (figure 2.4) et soient les solutions définies par leurs développements asymptotiques selon la proposition 1.2, telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 \sim u_1(x, \sqrt{E}, x_0, h) \text{ au voisinage de } z_1 \\ u_2 \sim u_2^-(x, \sqrt{E}, x_0, h) \text{ au voisinage de } z_2 \\ v_1 \sim u_1(x, -\sqrt{E}, x_0, h) \text{ au voisinage de } x_1 \\ v_2 \sim u_2^-(x, -\sqrt{E}, x_0, h) \text{ au voisinage de } x_2 \\ w_1 \sim u_1(x, -\sqrt{E}, x_0, h) \text{ au voisinage de } t_1 \\ w_2 \sim u_2^+(x, -\sqrt{E}, x_0, h) \text{ au voisinage de } t_2 \end{array} \right.$$

$x_0$  est fixé arbitrairement une fois pour toute, et pour simplifier on ne notera plus dorénavant cette dépendance par rapport à  $x_0$ . Par contre, les solutions formelles dépendent des points au voisinage duquel on les construit. Aussi on notera dorénavant cette dépendance à la place de celle en  $x_0$ .

On notera  $\Omega(u)$  le domaine de validité du développement asymptotique d'une solution  $u$  donné par la définition.

### 3.1. Équation de résonances

DÉFINITION 3.5. – Soit  $P$  un opérateur auto-adjoint. On dit que  $E$  est une résonance de  $P$ , s'il existe  $u_0$  une solution non identiquement nulle de  $Pu_0 = Eu_0$  et  $\theta \in \mathbb{C}$  avec  $\text{Im}\theta > 0$  (petite) tels que  $U_\theta u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ , où  $U_\theta$  est l'opérateur de dilatation analytique défini par :

$$U_\theta u = e^{\theta/2} u(e^\theta x).$$

$u_0$  est dite une solution résonnante de  $P$ .

Remarque. – Après transformation de Fourier, la dilatation  $U_\theta$  devient  $U_{-\theta}$ . Dilater  $P$  du côté  $\text{Im}\theta > 0$  équivaut donc à dilater  $Q = F_h P F_h^{-1}$  du côté  $\text{Im}\theta < 0$ .

On va considérer maintenant une solution résonnante  $u_0$  telle que :

$\|U_\theta u_0\|_{L^2(\mathbb{R}_-)} = 1$  pour un  $\theta$  fixé dans  $\mathbb{C}$  ( $\text{Im}\theta < 0$ ).  $(v_1, v_2, w_2)$  forme une base de solutions de l'équation (1.4), donc il existe  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  dans  $\mathbb{C}$  telles que :

$$u_0 = \alpha v_2 + \beta v_1 + \gamma w_2. \quad (3.26)$$

Soit  $x_3$  un point de  $\mathbb{R}_-$  tel que  $x_2 < x_3 < -\sqrt{E}$ . La proposition suivante découle de la normalisation de  $U_\theta u_0$  dans  $L^2(\mathbb{R}_-)$ .

PROPOSITION 3.6. – Il existe trois réels  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $h \leq h_0$  on a :

$$|\beta(h)| \leq c_1 |e^{-Z_{1,\theta}(x_3)/h}| \quad \text{et} \quad |\gamma(h)| \leq c_2 |e^{-Z_{2,\theta}(x_3)/h}|$$

où

$$Z_{i,\theta}(x) = Z_i(e^\theta x)$$

Messirdi a montré dans [Me] ainsi que Martinez dans [Ma1] que si  $u$  est une solution résonnante de  $P$  normalisée telle que  $\|U_\theta u_0\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ , alors pour tout voisinage  $V_0$  de zéro, il existe  $c_0$  une constante positive et  $h_0 > 0$  tels que, pour tout  $h \leq h_0$ , on a :

$$|U_\theta u(x, h)| \leq e^{-c_0/h}; \quad \forall x \in V_0^c. \quad (3.27)$$

C'est un fait qui aide aussi à comprendre qu'en choisissant  $x_2$  assez grand, il existe  $h_0 > 0$  telle que :

$$\int_{x_2}^0 |U_\theta u_0(x, h)|^2 dx \geq 1/2 \quad \text{pour tout } h < h_0. \quad (3.28)$$

Or d'après la proposition 3.6, il existe  $c > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que :

$$|(\beta U_\theta v_1 + \gamma U_\theta w_2)(x)| \leq e^{-c/h} \text{ pour } h \leq h_0 \text{ et } x > x_3. \tag{3.29}$$

Ce qui implique qu'il existe  $\tilde{x}_3 > x_3$  tel que,  $\alpha U_\theta v_2$  domine  $(\beta U_\theta v_1 + \gamma U_\theta w_2)$  dans  $[\tilde{x}_3, 0]$ , dans le sens habituel (2.15). Donc c'est  $\alpha v_2$  qui donne le développement asymptotique de  $u_0$  sur  $\{xe^\theta ; x \in [x_3, 0]\}$ . Le domaine de validité de ce développement asymptotique coïncide avec  $\Omega(v_2)$ , on va désormais confondre  $u_0$  et  $v_2$ . Si on note aussi  $v_0$  une solution résonnante telle que :

$$\|U_\theta v_0\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = 1 \text{ pour un } \theta \in \mathbb{C} \text{ tel que } \text{Im}\theta < 0.$$

$u_1, u_2$  et  $w_2$  forment une base de solutions, donc il existe  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  et  $\tilde{\gamma}$  telles que :

$$U_\theta v_0 = \tilde{\alpha} U_\theta u_2 + \tilde{\beta} U_\theta u_1 + \tilde{\gamma} U_\theta w_2.$$

Soit  $z_3$  un point de  $\mathbb{R}_+$  tel que  $\sqrt{E} < z_3 < z_2$ . On a une proposition analogue à celle (3.6).

**PROPOSITION 3.7.** – *Il existe  $c_3$  et  $h_0$  deux réels positifs tels que pour tout  $h \leq h_0$  on a :  $|\tilde{\gamma}(h)| \leq c_3 |e^{-Z_{2,\theta}(z_3)/h}|$ .*

**PROPOSITION 3.8.** – *Soient  $A(E, h), B(E, h)$  et  $C(E, h)$  trois fonctions de  $(E, h)$  telles que :*

$$v_2 = A(E, h)u_1 + B(E, h)w_2 + C(E, h)u_2. \tag{3.30}$$

$A(E, h), B(E, h)$  et  $C(E, h)$  dépendent de  $z_2$  et en particulier on a :

$$E \text{ est une résonance de } P \quad \Rightarrow \quad B(E, h) = O(e^{-K(z_2)/h}),$$

quand  $h$  tend vers 0, avec  $K$  une fonction réelle en  $z_2$  vérifiant :

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} K(z) = +\infty$$

*Preuve.* –  $E$  est une résonance s'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $u_0 = \lambda v_0$ . La proposition 3.7 montre alors le résultat.  $\square$

L'équation suivante est formelle (au sens de la proposition 3.8), et on l'appelle équation de résonances.

$$B(E, h) = 0 \tag{3.31}$$

### 3.2. Résolution de l'équation de résonances

On va expliciter dans ce qui suit  $B(E, h)$ . On vérifie que  $w_1, u_2$  et  $w_2$  forment une base de solutions, il existe donc  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  tels que :

$$v_2 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 w_2. \tag{3.32}$$

$u_1, u_2$  et  $w_2$  forment une autre base de solutions, il existe alors  $\beta_1, \beta_2$  et  $\beta_3$  tels que :

$$w_1 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 w_2. \quad (3.33)$$

Des équations (3.32) et (3.33) on peut tirer :

$$v_2 = \alpha_1 \beta_1 u_1 + (\alpha_2 + \alpha_1 \beta_2) u_2 + (\alpha_3 + \alpha_1 \beta_3) w_2. \quad (3.34)$$

On s'intéresse pour le moment au coefficient de  $w_2$  dans  $v_2$  :

$$B(E, h) = (\alpha_3 + \alpha_1 \beta_3). \quad (3.35)$$

L'équation de résonances est donnée formellement par :

$$B(E, h) = 0. \quad (3.36)$$

*Calcul de  $\alpha_3$  dans l'équation.* -  $v_2 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 w_2$ .

PROPOSITION 3.9. - Il existe  $a(E, h)$  et  $b(E, h)$  deux symboles analytiques classiques d'ordre 0 en  $h$ , et de symbole principal 1, tels que :

$$\alpha_3 = -ia(E, h) - ib(E, h)e^{-2iS(E)/h}$$

$$\text{avec } S(E) = \int_{-\sqrt{E}}^{\sqrt{E}} (t^2 - E)^{\frac{1}{2}} dt.$$

*Preuve.* - Soit  $\Omega = \Omega(u_2) \cap \Omega(v_2) \cap \Omega(w_2) \cap \Omega(w_1)$  voir (figure 3.1).

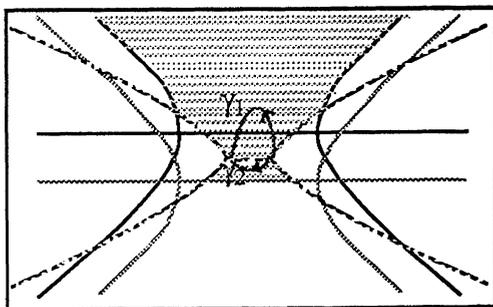


Figure 3.1. -  $\Omega$ .

On note  $(t^2 - E)_1^\alpha$  la détermination de la racine ( $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ), qui est positive pour  $t$  réel à droite de  $\sqrt{E}$ , prolongée par continuité le long de  $\Gamma_1$  voir (figure 3.2). On note aussi  $(t^2 - E)_2^\alpha$  la même détermination,

mais prolongée le long de  $\Gamma_2$ . En se rejoignant les deux déterminations se trouvent opposées et on a le long de  $\Gamma$  :

$$\begin{cases} (t^2 - E)_2^{\frac{1}{2}} = -(t^2 - E)_1^{\frac{1}{2}} \\ (t^2 - E)_2^{\frac{1}{4}} = -i(t^2 - E)_1^{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

En tenant compte de la détermination  $(t^2 - E)_2^\alpha$  on a :  $w_2(x) \sim u_2^+(x, -\sqrt{E}, t_2, h)$ , mais en reprenant la détermination  $(t^2 - E)_1^\alpha$ ,  $w_2(x) \sim iu_2^-(x, -\sqrt{E}, t_2, h)$ . Donc dans  $\Omega$  on a :

$$\begin{cases} u_2(x) \sim u_2^-(x, \sqrt{E}, z_2, h) \\ v_2(x) \sim u_2^-(x, -\sqrt{E}, x_2, h) \\ w_2(x) \sim iu_2^-(x, -\sqrt{E}, t_2, h) \\ w_1(x) \sim u_1(x, -\sqrt{E}, t_1, h) \end{cases} \tag{3.37}$$

L'équation (3.32) donne avec (3.37) :

$$\begin{aligned} u_2^-(x, -\sqrt{E}, x_2, h) &\sim \alpha_1 u_1(x, -\sqrt{E}, t_1, h) + \alpha_2 u_2^-(x, \sqrt{E}, z_2, h) \\ &\quad + i\alpha_3 u_2^-(x, -\sqrt{E}, t_2, h). \end{aligned} \tag{3.38}$$

On remarque que pour  $x$  sur l'axe des imaginaires positifs et  $y$  fixé on a :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(Z_1(x, y) + Z_2(x, y)) = -\infty. \tag{3.39}$$

Ce qui implique que  $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall c > 0$  il existe  $A > 0$  tel que pour  $x \in i[A + \infty)$  et  $x_0$  un point quelconque, on a :

$$|\alpha_1 u_1(x, y, x_0, h)| \leq e^{-c/h} |u_2^-(x, y, x_0, h)|. \tag{3.40}$$

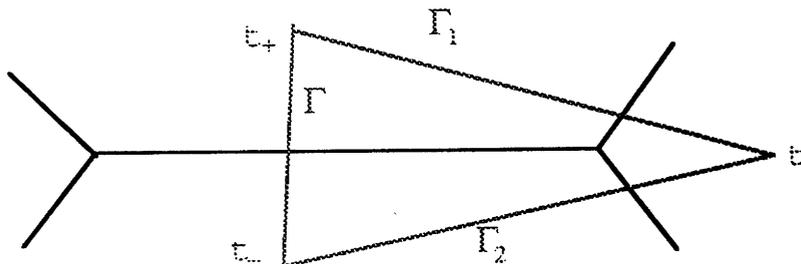


Figure 3.2. – Les déterminations des racines.

LEMME 3.1. –  $\alpha_1$  dépend de  $t_1$ , mais cette dépendance est contrôlée de manière que si  $\tilde{t}_1$  est choisi comme  $t_1$  et que si tous les autres paramètres sont fixés, alors il existe  $t(h)$  un symbole analytique classique d'ordre 0 et de symbole principal 1 tel que :

$$\alpha_1(\tilde{t}_1) = t(h)\alpha_1(t_1).$$

En effet, supposons que  $|\tilde{t}_1| > |t_1|$  et notons  $w_1(\tilde{t}_1)$  et  $w_1(t_1)$ . On a alors l'équation (3.32) :

$$v_2 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 w_2,$$

et une équation analogue :

$$v_2 = \alpha_1(\tilde{t}_1)w_1(\tilde{t}_1) + \alpha_2(\tilde{t}_1)u_2 + \alpha_3(\tilde{t}_1)w_2.$$

De ces deux équations on tire :

$$\alpha_1(\tilde{t}_1)w_1(\tilde{t}_1) = \alpha_1 w_1 + (\alpha_2 - \alpha_2(\tilde{t}_1))u_2 + (\alpha_3 - \alpha_3(\tilde{t}_1))w_2.$$

D'où :

$$\alpha_1(\tilde{t}_1) = \alpha_1 W(w_1, u_2, w_2) / W(w_1(\tilde{t}_1), u_2, w_2).$$

Ceci donne alors :

$$t(h) = W(w_1, u_2, w_2) / W(w_1(\tilde{t}_1), u_2, w_2).$$

Le calcul de ces deux wronskiens montre que  $t(h)$  est un symbole analytique classique de symbole principal 1.

Pour  $x \in i[A, t_1]$ , avec un choix convenable de  $A$ , l'équation (3.38) devient :

$$u_2^-(x, -\sqrt{E}, x_2, h) \sim \alpha_2 u_2^-(x, \sqrt{E}, z_2, h) + i\alpha_3 u_2^-(x, -\sqrt{E}, t_2, h). \quad (3.41)$$

Écrivons :

$$u_2^-(x, \pm\sqrt{E}, \cdot, h) = e^{-Z_2(x, \pm\sqrt{E})/h} \begin{pmatrix} c(x, \cdot, h) \\ d(x, \cdot, h) \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Avec l'équation (3.41) on obtient :

$$d(x, x_2, h) \sim \alpha_2 d(x, z_2, h) e^{-Z_2(\gamma_1)/h} + i\alpha_3 d(x, t_2, h), \quad (3.43)$$

où  $\gamma_1$  est une courbe qui joint  $-\sqrt{E}$  à  $\sqrt{E}$ , voir (figure 3.1). D'après les constructions de la partie 1 et les normalisations dans la Définition 3.4,

on remarque que les  $d(x, y, h)$  sont des symboles analytiques classiques, d'ordre 0 et de symbole principal  $(x_0^2 - E)_1^{\frac{1}{4}}(x^2 - E)_1^{-\frac{1}{4}}$ , sauf que entre  $v_2$  et  $u_2$ , on n'est pas sur le même feuillet au dessus de la surface de Riemann relative à  $(x^2 - E)_1^{-\frac{1}{4}}$ . Donc le symbole  $d(x, z_2, h)$  s'affecte d'un signe  $-$ . Il existe alors  $d_1(h)$  et  $d_2(h)$ , deux symboles analytiques classiques, d'ordre 0 et de symbole principal 1 tels que :

$$\alpha_3 = -id_1(h) - i\alpha_2 d_2(h)e^{-Z_2(\gamma_1)/h}. \tag{3.44}$$

On va calculer maintenant  $\alpha_2$ . L'équation (3.32) donne :

$$\alpha_2 = W(v_2, w_1, w_2)/W(u_2, w_1, w_2). \tag{3.45}$$

On peut calculer les deux Wronskiens dans  $K_1 = \{z \in \Omega \text{ tq } \text{Im}z < 0\}$ .

D'après la proposition 3.3, il existe deux symboles analytiques classiques  $c_1(x, h)$  et  $c_2(x, h)$  d'ordre 0 tels que :

$$\begin{aligned} W(v_2, w_1, w_2) &\sim c_1(x, h)e^{Z_1(x, -\sqrt{E})/h} \\ W(u_2, w_1, w_2) &\sim c_2(x, h)e^{-Z_2(\gamma_2)/h}e^{Z_1(x, -\sqrt{E})/h} \end{aligned} \tag{3.46}$$

Le calcul de  $c_1$  et  $c_2$ , en tenant compte des déterminations des racines et les normalisations dans la (définition 3.4), montre qu'il existe un symbole analytique classique  $d_3(h)$  d'ordre 0 et de symbole principal 1, tel que :

$$\alpha_2 = -id_3(h)e^{-Z_2(\gamma_2^{-1})/h}. \tag{3.47}$$

Les équations (3.44) et (3.47) impliquent :

$$\alpha_3 = -id_1(h) - id_2(h)d_3(h)e^{-Z_2(\gamma_1 \cup \gamma_2^{-1})/h}. \tag{3.48}$$

□

*Estimation de  $\alpha_1$  dans l'équation.*  $-v_2 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 w_2$ .

PROPOSITION 3.10. - Il existe  $C_1(E) > c_1 > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $h \leq h_0$ , on a :

$$|\alpha_1| \leq e^{-C_1(E)/h}.$$

*Preuve.* - Sur  $K_1 = \{z \in \Omega \text{ tq } \text{Im}z < 0\}$  on a :

$$\begin{cases} u_2(x) \sim u_2^-(x, \sqrt{E}, x_0, h) \\ v_2(x) \sim u_2^-(x, -\sqrt{E}, x_0, h) \\ w_2(x) \sim u_2^+(x, -\sqrt{E}, x_0, h) \\ w_1(x) \sim u_1(x, -\sqrt{E}, x_0, h) \end{cases} \tag{3.49}$$

Donc dans l'équation (3.32) :

$$v_2 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 w_2$$

et en tenant compte du fait que les gradients des phases qui définissent respectivement  $w_1$ ,  $u_2$  et  $w_2$ , sont indépendants, le développement asymptotique de  $v_2$  ne peut être donné que par le terme  $\alpha_2 u_2$ , c'est donc le terme dominant. En particulier on a :

$$|\alpha_1 w_1(x, h)| \leq e^{\varepsilon/h} |v_2(x, h)| \quad \forall x \in K_1 \text{ et } \varepsilon > 0.$$

Ceci implique que :

$$e^{-2\varepsilon/h} |\alpha_1| \leq \inf_{x \in K_1} |e^{(-Z_2(x, -\sqrt{E}) - Z_1(x, -\sqrt{E}))/h}|$$

Cet inf est réalisé sur la ligne  $L_{1,3}$  issue de  $y_0^-$ , voir (figure 3.3), et on a :

$$|\alpha_1| \leq e^{2\varepsilon/h} e^{-\operatorname{Re}(Z_2 + Z_1)(y_0^-, -\sqrt{E})/h}. \quad (3.50)$$

On note que :

$$\operatorname{Re}(Z_2 + Z_1)(y_0^-, -\sqrt{E}) > 0$$

et que :

$$\operatorname{Re}(Z_2 + Z_1)(y_0^-, 0) = 5/12. \quad \square$$

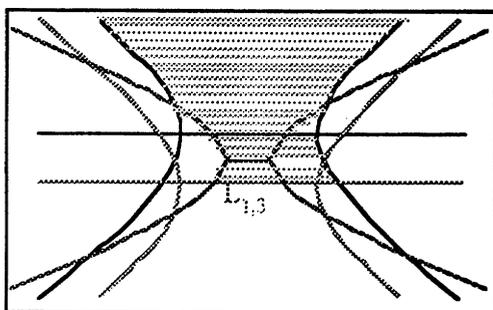


Figure 3.3. -  $\Omega_1$ .

Estimation de  $\beta_3$  dans l'équation. -  $w_1 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 w_2$ .

PROPOSITION 3.11. – Il existe  $C_2(E) > c_2 > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $h \leq h_0$ , on a :

$$|\beta_3| \leq e^{-C_2(E)/h}.$$

Preuve. – On a l'équation (3.33) :  $w_1 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 w_2$ . Pour prouver cette proposition on commence par déterminer  $\beta_1$ .

$$\beta_1 = W(w_1, u_2, w_2) / W(u_1, u_2, w_2).$$

Soient :

$$\Omega_1 = \Omega(w_1) \cap \Omega(u_2) \cap \Omega(w_2)$$

$$\Omega_2 = \Omega(u_1) \cap \Omega(u_2) \cap \Omega(w_2).$$

Ces deux domaines sont non vides, on peut calculer  $W(w_1, u_2, w_2)$  dans  $\Omega_1$  et  $W(u_1, u_2, w_2)$  dans  $\Omega_2$ . On peut choisir une zone dans  $\Omega_1$ , dans laquelle on a :

$$\begin{cases} u_2(x) \sim u_2^-(x, \sqrt{E}, z_2, h) \\ w_2(x) \sim u_2^+(x, -\sqrt{E}, t_2, h) \\ w_1(x) \sim u_1(x, -\sqrt{E}, t_1, h) \end{cases}$$

D'après la proposition 3.3, il existe un symbole analytique classique formel  $c_3(x, h)$ , et une courbe  $\gamma_3$  tels que :

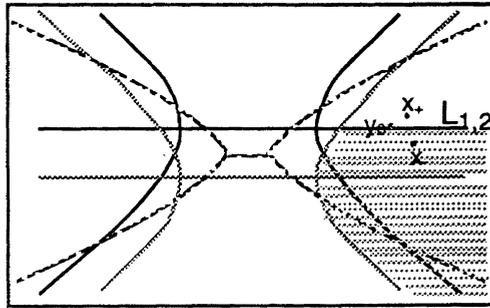
$$W(w_1, u_2, w_2) = c_3(x, h) e^{Z_1(x, -\sqrt{E})/h} e^{-Z_2(\gamma_3)/h}.$$

Dans  $\Omega_2$  on a :

$$\begin{cases} u_2(x) \sim u_2^-(x, \sqrt{E}, z_2, h) \\ w_2(x) \sim u_2^+(x, -\sqrt{E}, t_2, h) \\ u_1(x) \sim u_1(x, \sqrt{E}, z_1, h) \end{cases}$$

Il existe un symbole analytique classique formel  $c_4(x, h)$ , et une courbe  $\gamma_4$  tels que :

$$W(u_1, u_2, w_2) = c_4(x, h) e^{Z_1(x, \sqrt{E})/h} e^{-Z_2(\gamma_4)/h}.$$

Figure 3.4. -  $\Omega_2$ .

Les courbes  $\gamma_3$  et  $\gamma_4$  sont homotopes donc,  $Z_2(\gamma_3 \cup \gamma_4^{-1}) = 0$ . Le calcul de  $c_3$  et  $c_4$  montre qu'il existe un symbole analytique classique formel  $c_5(h)$ , de symbole principal 1 tel que :

$$\beta_1 = c_5(h) e^{Z_1(\sqrt{E}, -\sqrt{E})/h}. \quad (3.51)$$

Soit  $y_0$  un point sur la ligne  $L_{1,2}$  issue de  $y_0^+$ , voir (figure 3.4). Quitte à faire bouger  $y_0$ , on peut supposer que le terme  $\beta_2 u_2$  est non interactif dans l'équation (3.33) et puisque  $w_1$  est continue, alors :

$\forall \varepsilon > 0$  il existe  $V_0$  un voisinage de  $y_0$  tel que :

$$|w_1(x) - w_1(y_0)| < \varepsilon.$$

Soient  $x_-$  et  $x_+$  deux points de  $V_0$  situés de part et d'autre de la ligne  $L_{1,2}$ , on a donc :

$$|w_1(x_-) - w_1(x_+)| < 2\varepsilon.$$

L'équation (3.33) donne alors :

$$|\beta_3 w_2(x_-)| \leq |w_1(x_-)| + |\beta_1 u_1(x_-)|.$$

Ce qui implique :

$$|\beta_3 w_2(x_-)| \leq 2\varepsilon + |w_1(x_+)| + |\beta_1 u_1(x_-)|.$$

Or :

$$\begin{cases} w_1(x_+) \sim u_1(x_+, -\sqrt{E}, x_0, h) \\ w_2(x_-) \sim u_2^+(x_-, -\sqrt{E}, x_0, h) \\ u_1(x_-) \sim u_1(x_-, \sqrt{E}, x_0, h). \end{cases}$$

On a donc  $\forall \varepsilon' > 0$ , il existe  $h_0 > 0$  telle que, pour tout  $h \leq h_0$ ,

$$|\beta_3 e^{Z_2(y_0, -\sqrt{E})/h}| \leq e^{\varepsilon'/h} |e^{Z_1(y_0, -\sqrt{E})/h}|.$$

Ce qui montre que :

$$|\beta_3| \leq e^{\varepsilon'/h} e^{-\operatorname{Re}(Z_2 - Z_1)(y_0, -\sqrt{E})/h}. \tag{3.52}$$

On note que :

$$\operatorname{Re}(Z_2 - Z_1)(y_0, -\sqrt{E}) > 0$$

et que :

$$\operatorname{Re}(Z_2 - Z_1)(y_0, 0) = 5/12. \quad \square$$

Reprenons l'équation (3.36) :

$$B(E, h) = (\alpha_3 + \alpha_1 \beta_3) = 0$$

qui donne :

$$\alpha_3 = -\alpha_1 \beta_3. \tag{3.53}$$

Les propositions 3.10 et 3.11 impliquent alors qu'il existe  $C(E) > c > 0$  telle que :

$$|\alpha_3| \leq e^{-C(E)/h}.$$

Ce qui montre avec la proposition 3.9 qu'il existe  $c(E, h)$ , un symbole analytique classique d'ordre 0 en  $h$  et de symbole principal  $-1$  tel que :

$$e^{-2iS(E)/h} = c(E, h). \tag{3.54}$$

Cette égalité est entendue modulo une erreur exponentiellement petite. Écrivons  $c(E, h) = -1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i(E)h^i$  où les  $c_i$  sont des fonctions définies et holomorphes en  $E$  dans un ouvert de  $\mathbb{C}^*$ . En remarquant que :

$$S(E) = \pi E/2,$$

l'équation (3.43) implique qu'il existe une suite de fonctions  $(f_j)_{j \geq 2}$  définies et holomorphes dans un ouvert de  $\mathbb{C}^*$  et un entier  $k > 0$  tels que :

$$E = (2k + 1)h + \sum_{j=2}^{\infty} f_j(E)h^j.$$

Ce qui donne l'énoncé du théorème suivant :

THÉORÈME 1. – Soit  $P(x, hD_x, h)$  l'opérateur donné par (1.3). Si  $E(h)$  est une résonance de  $P$  telle que  $E(h) \rightarrow E_0 > 0$  ( $h \rightarrow 0^+$ ), alors il existe  $(f_j)_{j \geq 2}$  une suite de fonctions définies et holomorphes dans un voisinage de  $E_0$  et un entier  $k > 0$  tels que :

$$E(h) \sim (2k + 1)h + \sum_{j=2}^{\infty} h^j f_j(E(h)).$$

Le théorème des fonctions implicites permet d'obtenir le corollaire suivant :

COROLLAIRE 5. – Sous les hypothèses du théorème 1, il existe  $(g_j)_{j \geq 2}$  une suite de fonctions définies et holomorphes dans un voisinage de  $E_0$  telle que :

$$E(h) = (2k + 1)h + \sum_{j=2}^{\infty} h^j g_j((2k + 1)h).$$

#### 4. ESTIMATION DE LA LARGEUR DE RÉSONANCE

Dans cette partie on va donner un développement qui approche la partie imaginaire de la résonance  $E$  de manière optimale (même dans le cas  $E_0 = 0$ ). En fait on trouve que  $\text{Im}E$  est une fonction de  $h$  exponentiellement décroissante vers 0 quand  $h$  tend vers 0. Ce fait n'est pas nouveau, il a été montré dans [Ma3] et [Na], mais ce qu'on apporte de nouveau, c'est qu'on peut préciser le taux de décroissance de cette fonction.

On commence par trouver la partie exponentielle de  $\text{Im}E$ , en faisant des estimations sur la partie oscillante de la solution résonnante. Ces estimations ne sont pas suffisamment précises. On fait donc dans une deuxième partie, une étude microlocale au voisinage des points de croisement. on réduit notre opérateur au modèle  $xhD_x$  simple à étudier et on établit le lien entre les solutions microlocales de ce modèle et les solutions microlocales de notre opérateur. On étudie ensuite ces solutions aux points de vues microsupport et comportement asymptotique. A la fin on étudie le comportement microlocal des solutions BKW définies dans la section 3, dans le but de les raccorder avec les solutions microlocales. Remarquons que dans le cas  $E_0 = 0$ , les domaines de validité des développements asymptotiques sont inchangés par rapport à la section 2, sauf celui de  $w_2$  qui ne traverse plus en 0. Mais ceci ne gênera pas dans la suite.

Soit  $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  solution du système :

$$\begin{cases} -ihd_y u_1 + (y^2 - 1 - E)u_1 + h\tilde{B}(y, hD_y, h)u_2 = 0 \\ -h^2 d_y^2 u_2 + (y^2 - E)u_2 + h\tilde{B}^*(y, hD_y, h)u_1 = 0 \end{cases}$$

avec

$$\tilde{B}(y, hD_y, h) = -m_1 hD_y + m_2 y + m_3.$$

On a la proposition suivante :

PROPOSITION 4.1. – Soient  $a$  et  $b$  deux constantes réelles, alors :

$$\begin{aligned} (\text{Im}E)(\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2) &= -\frac{h}{2}(|u_1(b)|^2 - |u_1(a)|^2) \\ &\quad - h^2 \text{Im}(u_2'(b)\bar{u}_2(b) - u_2'(a)\bar{u}_2(a)) + h \text{Re}(m_1(u_2(b)\bar{u}_1(b) - u_2(a)\bar{u}_1(a))) \end{aligned}$$

où :

$$\|u_i\| = \int_a^b |u_i(t)|^2 dt.$$

Preuve. – Il suffit d'intégrer la quantité suivante :

$$-ih \int_a^b (u_1'(t)\bar{u}_1(t) + u_1(t)\bar{u}_1'(t))dt - h^2 \int_a^b (u_2''(t)\bar{u}_2(t) - u_2(t)\bar{u}_2''(t))dt. \quad \square$$

Reprenons l'expression (3.30) dans la proposition 3.8 :

$$v_2 = A(E, h)u_1 + B(E, h)w_2 + C(E, h)u_2. \quad (4.55)$$

LEMME 4.1. –  $C(E, h)$  dépend de  $z_2$ , mais cette dépendance est contrôlée de manière que si  $\tilde{z}_2$  est choisi comme  $z_2$ , et si toutes les autres paramètres sont fixées, alors il existe  $C(h)$  un symbole analytique classique d'ordre 0 et de symbole principal 1 tel que :

$$C(E, h, \tilde{z}_2) = C(h)C(E, h, z_2).$$

La preuve est analogue à celle du lemme 3.1.

On choisit les constantes  $a$  et  $b$  de la proposition 4.1 telles que :

$$b = -a = R,$$

où  $R$  est un réel positif arbitrairement grand. On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 4.2. – Il existe un symbole analytique classique formel  $c(h)$  d'ordre 0 et de symbole principal 1 et  $h_0$  une constante positive tels que :

$$\forall h \leq h_0 \text{ on a : } \text{Im}(E) = -\frac{h}{2}c(h) |A(E, h)|^2.$$

*Preuve.* – La proposition 3.8 montre que le terme  $B(E, h)w_2(x, h)$  est dominé par  $A(E, h)u_1(x, h) + C(E, h)u_2(x, h)$ , pour  $x \in ]\sqrt{E}, z_3[$  et  $h \leq h_0$ .

Le lemme 4.1 prouve que  $A(E, h)u_1(x, h)$  domine  $C(E, h)u_2(x, h)$  pour  $x \in ]z_4, z_3[$  où  $z_4$  est un réel assez grand. On choisit  $R \in ]z_4, z_3[$ , et quitte à prendre  $x_2$  assez négatif on peut supposer que :  $-R \geq x_3$ . Écrivons :

$$v_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

La proposition 4.1 nous donne :

$$\begin{aligned} (\operatorname{Im}E)(\|v_{21}\|^2 + \|v_{22}\|^2) &= -\frac{h}{2}(|v_{21}(b)|^2 - |v_{21}(a)|^2) \\ &\quad - h^2 \operatorname{Im}(v'_{22}(b)\bar{v}_{22}(b) - v'_{22}(a)\bar{v}_{22}(a)) \\ &\quad + h \operatorname{Re}(m_1(v_{22}(b)\bar{v}_{21}(b) - v_{22}(a)\bar{v}_{21}(a))). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Or au voisinage de  $-R$ ,

$$v_2 \sim u_2^-(x, -\sqrt{E}, x_0, h)$$

et au voisinage de  $R$ ,

$$v_2 \sim A(E, h)u_1(x, \sqrt{E}, x_0, h) = A(E, h)e^{Z_1(x, \sqrt{E})/h} \begin{pmatrix} a_1(x, h) \\ a_2(x, h) \end{pmatrix}.$$

Donc pour  $R$  assez grand on a :

$$\begin{aligned} (\operatorname{Im}E)(\|v_{21}\|^2 + \|v_{22}\|^2) &\sim -\frac{h}{2}|v_{21}(R)|^2 - h^2 \operatorname{Im}(v'_{22}(R)\bar{v}_{22}(R)) \\ &\quad + h \operatorname{Re}(m_1 v_{22}(R)\bar{v}_{21}(R)). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Et puisque on sait que  $\operatorname{Im}(E)$  est exponentiellement petite lorsque  $h$  tend vers 0, on peut dire que :

$$|e^{Z_1(R, \sqrt{E})/h}| = 1$$

modulo une erreur exponentiellement petite par rapport à  $h$ .

On obtient via l'équation (4.58) :

$$(\operatorname{Im}E) = \frac{|A(E, h)|^2}{(\|v_{21}\|^2 + \|v_{22}\|^2)} \left( -\frac{h}{2}|a_1(R, 0)|^2 + \tilde{c}(h) \right),$$

où  $\tilde{c}(h)$  est un symbole analytique classique formel d'ordre 2. En normalisant  $v_2$  telle que :

$$\|v_{21}\|^2 + \|v_{22}\|^2 = 1$$

et en remarquant que  $a_1(x, 0)$  est une constante, on obtient la proposition, avec comme symbole principal de  $c(h)$  :

$$c(0) = |a_1(0, 0)|^2 = 1. \tag{4.59}$$

□

Vu ce résultat, on va s'intéresser maintenant au coefficient  $A(E, h)$  de  $U_1$  dans l'équation :

$$v_2 = A(E, h)u_1 + B(E, h)w_2 + C(E, h)u_2.$$

L'équation (3.34) donne :

$$A(E, h) = \alpha_1\beta_1. \tag{4.60}$$

PROPOSITION 4.3. – *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $h_0 > 0$  tel que pour tout  $h \leq h_0$  on a :*

$$|A(E, h)| \leq e^{\varepsilon/h} e^{-C(E)/h}$$

où

$$C(E) = \operatorname{Re}(Z_2 + Z_1)(y_0^-, -\sqrt{E}).$$

La preuve résulte des deux équations (3.50) et (3.51).

On note que :

$$\operatorname{Re}(Z_2 + Z_1)(y_0^-, 0) = 5/12.$$

Cette proposition donne alors le théorème suivant :

THÉORÈME 2. – *Soit  $P(x, hD_x, h)$  l'opérateur donné par (1.3), et soit  $E(h)$  une résonance de  $P$  telle que  $E(h) \rightarrow E_0 \geq 0$  ( $h \rightarrow 0^+$ ) alors :*

*$\forall \varepsilon > 0$ , il existe  $h_0 > 0$  telle que pour tout  $h \leq h_0$  on a :*

$$|\operatorname{Im}E(h)| \leq e^{\varepsilon/h} e^{-2C(E_0)/h}$$

où :

$$C(E_0) = \operatorname{Re}(Z_2 + Z_1)(y_0^-, -\sqrt{E_0}).$$

Dans le but de montrer que  $C(E_0)$  est bien optimale, on va préciser la proposition 4.3 en employant une technique d'analyse analytique microlocale introduite par Helffer et Sjöstrand dans [He-Sj.1], voir aussi [Ra] et [Mä].

**DÉFINITION 4.4.** – *On renormalise les solutions définies dans la Définition 3.4 telles que :*

$$\begin{cases} \check{u}_1 \sim u_1(x, y_1^-, x_0, h) \text{ au voisinage de } z_1 \\ \check{u}_2 \sim u_2^-(x, y_1^-, x_0, h) \text{ au voisinage de } z_2 \\ \check{v}_1 \sim u_1(x, y_0^-, x_0, h) \text{ au voisinage de } x_1 \\ \check{v}_2 \sim u_2^-(x, y_0^-, x_0, h) \text{ au voisinage de } x_2 \\ \check{w}_1 \sim u_1(x, y_0^-, x_0, h) \text{ au voisinage de } t_1 \\ \check{w}_2 \sim u_2^+(x, y_0^-, x_0, h) \text{ au voisinage de } t_2 \end{cases}$$

On vérifie facilement qu'on peut prendre ces solutions en fonction des solutions de la Définition 3.4 telles que :

$$\begin{cases} \check{u}_1 = e^{Z_1(\sqrt{E}, y_1^-)/h} u_1 \\ \check{u}_2 = e^{-Z_2(\sqrt{E}, y_1^-)/h} u_2 \\ \check{v}_1 = e^{Z_1(-\sqrt{E}, y_0^-)/h} v_1 \\ \check{v}_2 = e^{-Z_2(-\sqrt{E}, y_0^-)/h} v_2 \\ \check{w}_1 = e^{Z_1(-\sqrt{E}, y_0^-)/h} w_1 \\ \check{w}_2 = e^{Z_2(-\sqrt{E}, y_0^-)/h} w_2 \end{cases} \quad (4.61)$$

L'équation (4.55) devient :

$$\check{v}_2 = \check{A}(E, h)\check{u}_1 + \check{B}(E, h)\check{w}_2 + \check{C}(E, h)\check{u}_2. \quad (4.62)$$

On a donc :

$$A(E, h) = e^{(Z_1(\sqrt{E}, y_1^-)/h + Z_2(-\sqrt{E}, y_0^-)/h)} \check{A}(E, h). \quad (4.63)$$

Le reste du travail sera consacré à l'étude de l'interaction entre  $\check{v}_2$  et  $\check{u}_1$  dans le but de déterminer  $\check{A}(E, h)$ .

#### 4.1. Réduction de l'opérateur

Dans cette section on commence en utilisant la notation  $y$  pour la variable de l'espace, pour retrouver à la fin notre notation  $x$  habituelle. Soit

$$Q = F_h P F_h^{-1} = \begin{pmatrix} hD_y + y^2 - 1 & h\tilde{B} \\ h\tilde{B}^* & h^2 D_y^2 + y^2 \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

Son symbole étant noté  $q(y, \xi, h)$ , on note :

$$q_0(y, \xi, E) = \det(q(y, \xi, 0) - E) = (\xi + y^2 - 1 - E)(\xi^2 + y^2 - E). \quad (4.65)$$

On a donc un croisement de caractéristiques dans le complexe, près des points  $(y_0^\pm, -j)$  et  $(y_1^\pm, -j^2)$ . Dans le but d'appliquer une réduction microlocale au voisinage des points de croisement, on va faire subir à notre opérateur une transformation qui nous ramène à un croisement réel.

LEMME 4.2. – *Il existe  $f$  une fonction réelle sur le réel et holomorphe dans une bande  $\mathbb{B}$  du plan complexe voisinage de  $\mathbb{R}$  telle que :*

$$\operatorname{Re}(Z_1 + Z_2)(x + if(x)) = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

*Preuve.* – Parmi les lignes de Stokes relatives à la différence de phase  $Z_1 - Z_3 (=Z_1 + Z_2)$  issues des points tournants  $y_0^-$  ou  $y_1^-$ , on remarque l'existence d'une ligne qui passe par ces deux points à la fois. On l'appellera  $L_{0,1}$ . En effet On peut écrire l'équation :

$$\operatorname{Re}(Z_1 + Z_2)(x + iy) = 0$$

en écrivant  $Z_1 + Z_2$  comme  $(\sqrt{Z_1 + Z_2})^2$  sous la forme :

$$[\operatorname{Re}(\sqrt{(Z_1 + Z_2)(x + iy)})]^2 = [\operatorname{Im}(\sqrt{(Z_1 + Z_2)(x + iy)})]^2$$

$L_{0,1}$  est donnée alors par :

$$\operatorname{Re}(\sqrt{(Z_1 + Z_2)(x + iy)}) = \operatorname{Im}(\sqrt{(Z_1 + Z_2)(x + iy)})$$

Cette ligne peut être paramétrée de telle manière que :

$$L_{0,1} = \{x + if(x) \text{ où } x \in \mathbb{R}\} \quad \square$$

Soit  $\chi_f$  le changement de variable défini d'un voisinage complexe de  $L_{0,1}$  dans  $\mathbb{B}$  par :

$$\chi_f(y) = x \text{ où } y = x + if(x).$$

On note :

$$\begin{cases} \psi_1(x) = Z_1(x + if(x), y_0^-) \\ \psi_2(x) = Z_2(x + if(x), y_0^-). \end{cases}$$

On définit une fonction  $\varphi$  holomorphe sur  $\mathbb{B}$  par :

$$\varphi(x) = -\frac{i}{2}(\psi_1(x) - \psi_2(x)). \quad (4.66)$$

Soit l'opérateur  $Q_f$  donné par :

$$Q_f = e^{-i\varphi/h}(Q - E)\chi_f e^{i\varphi/h}$$

$Q_f$  s'écrit sous la forme :

$$Q_f(x, hD_x, h) = \begin{pmatrix} P_1(x, hD_x, h) & hB_1(x, hD_x, h) \\ hB_2(x, hD_x, h) & P_2(x, hD_x, h) \end{pmatrix}. \quad (4.67)$$

On note  $x_- = \operatorname{Re}(y_0^-)$  et  $x_+ = \operatorname{Re}(y_1^-)$ .

PROPOSITION 4.5.

- (i) Il existe  $V$  un ouvert de  $T^*\mathbb{C}$  voisinage de  $[x_-, x_+] \times \{0\}$  tel que les symboles principaux de  $P_1$  (resp.  $P_2$ ) s'écrivent dans  $V$  sous la forme :  $a_1(x, \xi)p_1(x, \xi)$  (res.  $a_2(x, \xi)p_2(x, \xi)$ ), où les  $a_i(x, \xi)$  pour  $i = 1, 2$  sont elliptiques dans  $V$  et les  $p_i(x, \xi)$  pour  $i = 1, 2$  sont deux symboles réels sur le réel, vérifiant :
- $(x, \xi) \rightarrow p_1(x, \xi)p_2(x, \xi)$  admet en  $(x_+, 0)$  et  $(x_-, 0)$  deux points de col non dégénérés.
- (ii)  $V$  peut être choisi assez grand de manière qu'il contienne l'ensemble caractéristique suivant :

$$\cup_{i=1,2} \{(x, \xi) \in T^*\mathbb{R} \text{ tq } p_i(x, \xi) = 0 \text{ où } x \in [x_-, x_+]\}$$

*Preuve.*

$$Q - E = \begin{pmatrix} hD_y + y^2 - 1 - E & h\tilde{B} \\ h\tilde{B}^* & h^2D_y^2 + y^2 - E \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

Notons pour  $(y, \eta) \in T^*\mathbb{C}$  :

$$\begin{cases} q_1(y, \xi, E) = \eta + y^2 - 1 - E = \eta - Z'_1(y) \\ q_2(y, \xi, E) = \eta^2 + y^2 - E = (\eta - Z'_2(y))(\xi + Z'_2(y)) \end{cases} \quad (4.69)$$

En remplaçant  $Q - E$  par  $Q_f = e^{-i\varphi/h}(Q - E)\chi_f e^{i\varphi/h}$ ,  $q_1$  et  $q_2$  deviennent pour  $(x, \xi) \in \mathbb{B} \times \mathbb{C}$  :

$$\begin{cases} q_1(x, \xi) = \frac{1}{1 + if'(x)}(\xi + i\psi'_1(x) + \varphi'(x)) \\ q_2(y, \xi, E) = \left(\frac{1}{1 + if'(x)}\right)^2 (\xi - i\psi'_2(x) + \varphi'(x))(\xi + i\psi'_2(x) + \varphi'(x)). \end{cases} \quad (4.70)$$

Avec le choix de  $\varphi$  (4.66) on obtient :

$$\begin{cases} q_1(x, \xi) = \frac{1}{1 + if'(x)} \left( \xi + \frac{i}{2}(\psi_1 + \psi_2)'(x) \right) \\ q_2(x, \xi) = \left( \frac{1}{1 + if'(x)} \right)^2 \left( \xi - \frac{i}{2}(\psi_1 + \psi_2)'(x) \right) \\ \quad \times \left( \xi - \frac{i}{2}\psi_1'(x) + \frac{3i}{2}\psi_2'(x) \right) \end{cases} \quad (4.71)$$

Or pour  $x \in \mathbb{R}$  on a :  $\text{Re}(\psi_1(x) + \psi_2(x)) = 0$ . Donc sur le réel  $q_1$  et  $q_2$  s'écrivent :

$$\begin{cases} q_1(x, \xi) = \frac{1}{1 + if'(x)} (\xi - \text{Im}(\psi_1 + \psi_2)'(x)) \\ q_2(x, \xi) = \left( \frac{1}{1 + if'(x)} \right)^2 (\xi + \text{Im}(\psi_1 + \psi_2)'(x)) \\ \quad \times \left( \xi - \frac{i}{2}\psi_1'(x) + \frac{3i}{2}\psi_2'(x) \right) \end{cases} \quad (4.72)$$

$V$  est donc choisit en fonction de l'ellipticité du terme  $\xi - \frac{i}{2}\psi_1'(x) + \frac{3i}{2}\psi_2'(x)$ . Il peut être choisi vérifiant (ii). □

*Remarque.*

(i) On vérifie facilement que :

$$\begin{cases} d_x(\text{Im}(\psi_1'(x) + \psi_2'(x))(x_+) = -\tau_+^2 < 0 \\ d_x(\text{Im}(\psi_1'(x) + \psi_2'(x))(x_-) = \tau_-^2 > 0 \end{cases} \quad (4.73)$$

(ii) Dans le cas  $E = 0$  on trouve explicitement  $q_1(x, \xi)$  et  $q_2(x, \xi)$  :

$$\begin{cases} q_1(x, \xi) = \xi + \frac{1}{2} \left( x^2 - \frac{3}{4} \right) \\ q_2(x, \xi) = \xi - \frac{1}{2} \left( x^2 - \frac{3}{4} \right) \left( \xi - x^2 + \frac{11}{4} + ix \right) \end{cases} \quad (4.74)$$

(iii) L'opérateur  $Q_f$  n'est plus auto-adjoint.

On va microlocaliser notre étude au voisinage du point  $(x_-, 0)$  (respectivement  $(x_+, 0)$ ). Avec un changement de variable on peut supposer que  $x_- = 0$  (resp.  $x_+ = 0$ ).

Dans l'étude des résonances on s'intéresse à l'équation :

$$(Q - E) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.75)$$

Cette équation se ramène à une autre du type :

$$(Q_f - E) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.76)$$

Donc on s'autorise à multiplier  $Q_f$  à gauche par un facteur elliptique en  $(0, 0)$ . Ce qui nous permet de supposer que le symbole principal de  $P_1$  (resp.  $P_2$ ) est purement  $p_1(x, \xi)$  (resp.  $p_2(x, \xi)$ ) voir proposition 4.5. On met une hypothèse d'ellipticité sur  $B_2$ .

(H) :  $-m_1\xi + m_2x + m_3 \neq 0$  pour  $(x, \xi) = (y_0^-, -j)$  respectivement  $(x, \xi) = (y_1^-, -j^2)$ .

L'ellipticité de  $B_2$  ramène le problème (4.76) à l'étude de l'équation scalaire :

$$\tilde{Q}(x, hD_x, h)u_2 = 0, \quad (4.77)$$

où

$$\tilde{Q}(x, hD_x, h) = B_2P_1B_2^{-1}P_2 - h^2B_2B_1.$$

C'est donc un opérateur  $h$ -différentiel scalaire de symbole principal :

$$\tilde{q}_0(x, \xi) = p_1(x, \xi)p_2(x, \xi). \quad (4.78)$$

Maintenant notre opérateur vérifie les hypothèses du théorème de réduction microlocale. Ce théorème est dû à Helffer et Sjöstrand (voir [He-Sj.1], app b, th  $b_1$ ). Ramond l'a généralisé au cas des opérateurs non auto-adjoints (voir [Ra]).

**PROPOSITION 4.6.** – Soit  $P(x, hD_x, h)$  un opérateur  $h$ -pseudodifférentiel analytique classique formel (non nécessairement auto-adjoint) dont le symbole est défini au voisinage de  $(0, 0)$ . Soit  $p(x, \xi)$  son symbole principal et supposons que  $p$  admet en  $(0, 0)$  un point de col non dégénéré, avec  $p(0, 0) = 0$ . Alors il existe un symbole analytique classique  $F(t, h) \sim \sum_0^\infty f_j(t)h^j$  défini pour  $t$  au voisinage de 0 et un opérateur intégral de Fourier (non nécessairement unitaire)  $H$ , dont la transformation canonique  $\kappa$  est définie près de  $(0, 0)$ , avec  $\kappa(0, 0) = (0, 0)$ , tels que :

$$H^{-1}F(P, h)H = P_0 \text{ où } P_0(x, hD_x) = xhD_x. \quad (4.79)$$

On applique cette proposition à l'opérateur  $\tilde{Q} = (B_2P_1B_2^{-1})P_2 - h^2B_2B_1$ , au voisinage du point  $(0, 0)$ . Les opérateurs  $P_i$  et  $B_i$ , le symbole  $F$  et l'opérateur  $H$  (donc  $\kappa$ ) dépendent de  $x_+$  (resp. de  $x_-$ ). On notera alors  $P_i^\pm$ ,  $B_i^\pm$ ,  $F_\pm$ ,  $H_\pm$  et  $\kappa_\pm$ . En particulier on a :

LEMME 4.3. – Il existe  $l_h^-$  et  $l_h^+$  deux symboles analytiques classiques d'ordre 2 en  $h$ , qui dépendent de  $m_1, m_2$  et  $m_3$  tels que :

$$F_{\pm}(0, h) = l_{\pm}^{\pm} = l_{\pm} h^2 + O(h^3). \tag{4.80}$$

Les constantes  $l_+$  et  $l_-$  sont données par :

$$l_{\pm} = b_1^{\pm}(0, 0, 0)b_2^{\pm}(0, 0, 0), \tag{4.81}$$

où  $b_i^{\pm}$  sont les symboles des opérateurs  $B_i^{\pm}$ .

*Preuve du lemme.* – Par définition-même  $F(0, h)$  est un symbole analytique classique. Notre but est de déterminer son ordre et son symbole principal. Dans la preuve de la proposition 4.6 (voir [He-Sj.1]), La première étape de la réduction consiste à remplacer  $\tilde{Q}$  par  $H_0^{-1}F_0(P)H_0$ , où  $F_0$  est une fonction définie au voisinage de 0 qui vérifie en particulier  $F_0(0) = 0$ , et  $H_0$  un opérateur intégral de Fourier tels que :

$$H_0^{-1}F_0(P)H_0 = (x + hR_1(x, hD_x, h))(hD_x + hR_2(x, hD_x, h)) - h^2R_3(x, hD_x, h).$$

Les  $R_i(x, hD_x, h)$  sont des opérateurs  $h$ -pseudodifférentiels d'ordre 0. Le symbole de  $R_3(x, hD_x, h)$  vérifie  $r_3(0, 0, 0) = b_1(0, 0, 0)b_2(0, 0, 0)$ . Les termes constants dans  $hR_1(x, hD_x, h)$  (resp. dans  $hR_2(x, hD_x, h)$ ) peuvent être absorbés par  $x$  (resp.  $hD_x$ ). On peut donc, dans la deuxième étape de la réduction, trouver  $F_1(t, h)$  un symbole analytique classique défini pour  $t$  au voisinage de 0 et **s'annulant en  $t=0$** , et  $H_1$  un opérateur intégral de Fourier tels que cette fois :

$$H_1^{-1}F_1(P, h)H_1 = (x + h^2\tilde{R}_1(x, hD_x, h))(hD_x + h^2\tilde{R}_2(x, hD_x, h)) - h^2\tilde{R}_3(x, hD_x, h). \tag{4.82}$$

Où les  $\tilde{R}_i(x, hD_x, h)$  sont des opérateurs  $h$ -pseudodifférentiels d'ordre 0, et en particulier le symbole de  $\tilde{R}_3(x, hD_x, h)$  vérifie  $r_3(0, 0, 0) = b_1(0, 0, 0)b_2(0, 0, 0)$ .

En écrivant  $\tilde{Q}$  comme dans (4.82), on voit bien que  $F(0, h)$  est d'ordre 2 et que son symbole principal est  $b_1(0, 0, 0)b_2(0, 0, 0)$ . □

Quitte à dilater  $\tilde{Q}$  on peut supposer que  $d\kappa(0, 0) = \kappa_{\frac{\pi}{4}}$ , où  $\kappa_{\theta}$  signifie la rotation d'angle  $\theta$  autour de  $(0, 0)$ .  $H_{\pm}$  peut s'écrire :

$$H_{\pm}u(x, h) = \int e^{i\psi_{\pm}(x, y, \eta)/h} \alpha_{\pm}(x, y, \eta, h)u(y, h)dyd\eta. \tag{4.83}$$

Où :

$$\psi_{\pm}(x, y, \eta) = \mp \left( \frac{x^2}{2} - \sqrt{2}xy + \frac{y^2}{2} \right) + (x - y)\eta + O((x, y, \eta)^3). \quad (4.84)$$

$\alpha_{\pm}(x, y, \eta, h)$  est un symbole analytique classique de symbole principal 1.

Notons par  $T_+$  (resp.  $T_-$ ), l'opérateur de translation sur  $x_+$  (resp. sur  $x_-$ ) conjuguée avec la dilatation de rapport  $\tau_+$  (resp.  $\tau_-$ ), voir (4.73) :

$$T_+u(x) = u(\tau_+(x + x_+)) \quad (\text{resp. } T_-u(x) = u(\tau_-(x + x_-))). \quad (4.85)$$

On a une équivalence entre :  $u_0(x, h)$  est une solution définie microlocalement près de  $(0, 0)$  de l'équation :

$$P_0(x, hD_x)u(x, h) = l_h^{\pm}u(x, h). \quad (4.86)$$

et

$$U = T_{\pm} \begin{pmatrix} u_1^{\pm}(x, h) \\ u_2^{\pm}(x, h) \end{pmatrix}. \quad (4.87)$$

est une solution définie microlocalement près de  $(x_{\pm}, 0)$  de l'équation :

$$Q(x, hD_x, h)U(x, h) = 0.$$

Où :

$$\begin{cases} u_2^{\pm}(x, h) = H_{\pm}u_0(x, h) \\ u_1(x, h) = -\frac{1}{h}(B_2)^{-1}P_2u_2 \end{cases} \quad (4.88)$$

$u_1$  est définie d'une manière unique en fonction de  $u_2$ , à cause de l'ellipticité de  $B_2$  au voisinage de  $(0, 0)$ . En multipliant ces solutions  $U$  par  $e^{i\varphi(x)/h}$ , on trouve des solutions de l'équation :

$$(Q(hD_y, y, h) - E)U(x, h) = 0 \text{ définies sur la courbe } y = x + if(x).$$

## 4.2. Résolution du modèle

On cherche des solutions distributions de l'équation :

$$P_0u = \mu u. \quad (4.89)$$

pour  $\mu = l_h^+$  (resp.  $l_h^-$ ). On vérifie facilement que :

$$u_{\pm}(x, h, \mu) = |x|^{i\mu/h} H(\pm x) \quad (4.90)$$

sont deux solutions de l'équation (4.89) où  $H$  désigne la fonction de Heaviside.

Ces solutions sont des distributions, pour  $\mu$  vérifiant  $(\text{Re}i\mu/h > -1)$ . On trouve deux autres solutions en remarquant que :

$$P_0 F_h^{-1} = -F_h^{-1}(P_0 - ih). \tag{4.91}$$

Donc,

$$u_{\pm}^*(x, h, \mu) = F_h^{-1} u_{\pm}(x, h, -\mu + ih) \tag{4.92}$$

sont deux distributions, solutions de l'équation (4.89).

On rappelle que pour  $\text{Re}\lambda > -1$  (voir par exemple [Ch-Gu]) :

$$\begin{cases} F_1^{-1}(x_+^\lambda) = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{2\pi} e^{i(-\lambda-1)\pi/2} (x - i0)^{-\lambda-1} \\ F_1^{-1}(x_-^\lambda) = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{2\pi} e^{i(\lambda+1)\pi/2} (x + i0)^{-\lambda-1} \end{cases} \tag{4.93}$$

où

$$x_{\pm}^\lambda = |x|^\lambda H(\pm x)$$

$F_1^{-1}$  désigne l'inverse de la transformation de Fourier classique ( $h=1$ ) et  $\Gamma$  la fonction gamma donnée par :

$$\Gamma(\lambda) = \int e^{-x} x^{-1+\lambda} dx.$$

Les distributions  $(x + i0)^\lambda$  (resp.  $(x - i0)^\lambda$ ) sont définies pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  comme valeurs au bord d'une fonction analytique;  $f(z) = z^\lambda$ , du demi-plan supérieur (resp. du demi-plan inférieur).

Pour  $\text{Re}\lambda > -1$  on a :

$$\begin{cases} (x + i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{i\lambda\pi} x_-^\lambda \\ (x - i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{-i\lambda\pi} x_-^\lambda \end{cases} \tag{4.94}$$

Ce qui nous donne la matrice d'interaction entre les solutions  $u_{\pm}(x, h, \mu)$  et  $u_{\pm}^*(x, h, \mu)$  qu'on notera  $B_\mu$  :

$$\begin{pmatrix} u_+^*(x, h, \mu) \\ u_-^*(x, h, \mu) \end{pmatrix} = N(\mu, h) \begin{pmatrix} e^{\mu\pi/2h} & e^{-\mu\pi/2h} \\ e^{-\mu\pi/2h} & e^{\mu\pi/2h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_+(x, h, \mu) \\ u_-(x, h, \mu) \end{pmatrix} \tag{4.95}$$

où :

$$N(\mu, h) = \frac{1}{2\pi} h^{1-i\mu/h} \Gamma(-i\mu/h). \tag{4.96}$$

### 4.3. Solutions microlocales

On va regarder le comportement microlocal des distributions  $u_{\pm}$  et  $u_{\pm}^*$  au voisinage de  $(0, 0)$ .

LEMME 4.4.

$$MS(u_{\pm}) = \{(y, \eta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } (\pm y > 0 \text{ et } \eta = 0) \text{ ou } (y = 0)\}.$$

$$MS(u_{\pm}^*) = \{(y, \eta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } (\pm \eta > 0 \text{ et } y = 0) \text{ ou } (\eta = 0)\}.$$

Avec le théorème de réduction, on dispose au voisinage du point  $(x_+, 0)$  (resp.  $(x_-, 0)$ ), de quatre solutions microlocales de l'équation  $QU = 0$ . On note :

$$U_{\pm} \begin{pmatrix} u_{1,\pm}(x, h, \mu) \\ u_{2,\pm}(x, h, \mu) \end{pmatrix}, \quad U_{\pm}^* \begin{pmatrix} u_{1,\pm}^*(x, h, \mu) \\ u_{2,\pm}^*(x, h, \mu) \end{pmatrix}, \quad V_{\pm} \begin{pmatrix} v_{1,\pm}(x, h, \mu) \\ v_{2,\pm}(x, h, \mu) \end{pmatrix}$$

et

$$V_{\pm}^* \begin{pmatrix} v_{1,\pm}^*(x, h, \mu) \\ v_{2,\pm}^*(x, h, \mu) \end{pmatrix}.$$

Où :

$$\begin{cases} u_{2,+} = T_+ H_+ u_+(x, h, l_+(h)) \\ u_{2,-} = T_+ H_+ u_-(x, h, l_+(h)) \\ u_{2,+}^* = T_+ H_+ u_+^*(x, h, l_+(h)) \\ u_{2,-}^* = T_+ H_+ u_-^*(x, h, l_+(h)) \end{cases} \quad \begin{cases} v_{2,+} = T_- H_- v_+(x, h, l_-(h)) \\ v_{2,-} = T_- H_- v_-(x, h, l_-(h)) \\ v_{2,+}^* = T_- H_- v_+^*(x, h, l_-(h)) \\ v_{2,-}^* = T_- H_- v_-^*(x, h, l_-(h)) \end{cases} \quad (4.97)$$

$$l_h^+ = F_+(0, h) \text{ et } l_h^- = F_-(0, h).$$

*Remarque.* – Soit :

$$U = \begin{pmatrix} u_1(x, h) \\ u_2(x, h) \end{pmatrix},$$

où :  $u_1(x, h) = P(x, hD_x, h)u_2(x, h)$  avec  $P$  un opérateur  $h$ -pseudo-différentiel analytique, alors on a :  $MS(U) = MS(u_2)$ .

On va décrire les microsoutports de ces solutions microlocales, on introduit les notations suivantes.

Notations. – voir (figure 4.1)

- $\sigma_{++} = \{(x, \eta) \in B((x_+, 0), \varepsilon) \text{ tq } q_1(x, \eta) = 0 \text{ et } \eta > 0\}$
- $\sigma_{+-} = \{(x, \eta) \in B((x_+, 0), \varepsilon) \text{ tq } q_1(x, \eta) = 0 \text{ et } \eta < 0\}$
- $\sigma_{-+} = \{(x, \eta) \in B((x_-, 0), \varepsilon) \text{ tq } q_1(x, \eta) = 0 \text{ et } \eta > 0\}$
- $\sigma_{--} = \{(x, \eta) \in B((x_-, 0), \varepsilon) \text{ tq } q_1(x, \eta) = 0 \text{ et } \eta < 0\}$
- $s_{++} = \{(x, \eta) \in B((x_+, 0), \varepsilon) \text{ tq } q_2(x, \eta) = 0 \text{ et } (x - x_+) > 0\}$
- $s_{+-} = \{(x, \eta) \in B((x_+, 0), \varepsilon) \text{ tq } q_2(x, \eta) = 0 \text{ et } (x - x_+) < 0\}$
- $s_{-+} = \{(x, \eta) \in B((x_-, 0), \varepsilon) \text{ tq } q_2(x, \eta) = 0 \text{ et } (x - x_-) > 0\}$
- $s_{--} = \{(x, \eta) \in B((x_-, 0), \varepsilon) \text{ tq } q_2(x, \eta) = 0 \text{ et } (x - x_-) < 0\}$

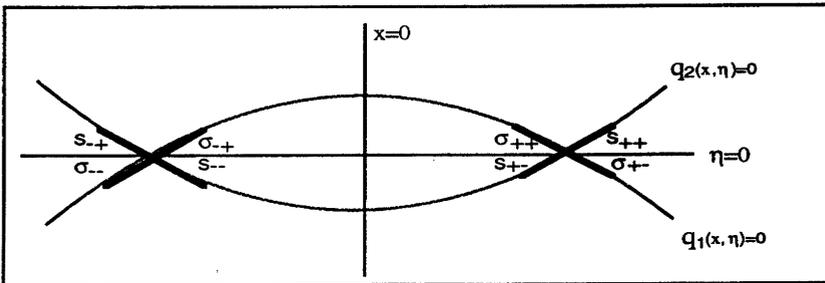


Figure 4.1. – Les caractéristiques de  $Q$ .

Avec ces notations, on a :

PROPOSITION 4.7.

a) Les microsupports des solutions définies microlocalement dans la boule  $B((x_+, 0), \varepsilon)$ , sont contenus dans l'adhérence de respectivement :

- $\sigma_{++} \cup \sigma_{+-} \cup s_{++}$  pour  $U_+$
- $\sigma_{+-} \cup \sigma_{-+} \cup s_{+-}$  pour  $U_-$
- $s_{++} \cup s_{+-} \cup \sigma_{++}$  pour  $U_+^*$
- $s_{+-} \cup s_{-+} \cup \sigma_{+-}$  pour  $U_-^*$ .

b) De même, les microsupports des distributions définies microlocalement dans  $B((x_-, 0), \varepsilon)$  sont contenus dans l'adhérence de respectivement :

- $\sigma_{-+} \cup \sigma_{--} \cup s_{--}$  pour  $V_+$
- $\sigma_{-+} \cup \sigma_{--} \cup s_{-+}$  pour  $V_-$
- $s_{-+} \cup s_{--} \cup \sigma_{-+}$  pour  $V_+^*$
- $s_{-+} \cup s_{--} \cup \sigma_{--}$  pour  $V_-^*$ .

Analysons de plus près ces solutions : En fait, au voisinage d'un point  $x$  tel que  $x < x_-$  et  $|x - x_-| < \varepsilon$ ;  $v_{2,-}$  se décompose en une somme de deux fonctions concentrées microlocalement, l'une sur  $s_{-+}$  et l'autre sur  $\sigma_{--}$ . En appliquant les résultats de [M] (section 4), on peut donner un développement BKW de  $v_{2,-}$  sur  $s_{-+}$ . En fait, on trouve que le développement de  $v_{2,-}$  est en  $e^{-\varphi_1(x)/h}$ , où :

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}(\psi_1(x) + \psi_2(x)).$$

De même pour toutes les autres solutions. Rassemblons ceux dont on aura besoin dans une proposition :

PROPOSITION 4.8. — *Il existe  $a(x, h)$  et  $a^*(x, h)$  (respectivement  $b(x, h)$  et  $b^*(x, h)$ ), des symboles analytiques classiques d'ordre 0 et de symbole principal 1 en un point  $x_0 \in \mathbb{C}$  donné, définis au voisinage de  $x_+$  (resp.  $x_-$ ), tels que :*

$$\begin{aligned} u_{2,+}(x, h) &= e^{-\varphi_1(x)/h} a(x, h) \text{ sur } s_{++} \\ u_{2,+}^*(x, h) &= e^{\varphi_1(x)/h} a^*(x, h) \text{ sur } \sigma_{++} \\ v_{2,-}(x, h) &= e^{-\varphi_1(x)/h} b(x, h) \text{ sur } s_{-+} \\ v_{2,+}^*(x, h) &= e^{\varphi_1(x)/h} b^*(x, h) \text{ sur } \sigma_{-+}. \end{aligned}$$

Pour plus de détails, voir [Mä], section 4.

#### 4.4. Microsupport des solutions exactes

On a deux équations équivalentes à celles (3.32) et (3.33) :

$$\check{v}_2 = \check{\alpha}_1 \check{w}_1 + \check{\alpha}_2 \check{u}_2 + \check{\alpha}_3 \check{w}_2. \quad (4.98)$$

$$\check{w}_1 = \check{\beta}_1 \check{u}_1 + \check{\beta}_2 \check{u}_2 + \check{\beta}_3 \check{w}_2. \quad (4.99)$$

Ces deux équations donnent :

$$\check{v}_2 = \check{\alpha}_1 \check{\beta}_1 \check{u}_1 + (\check{\alpha}_2 + \check{\alpha}_1 \check{\beta}_2) \check{u}_2 + (\check{\alpha}_3 \check{\alpha}_1 \check{\beta}_3) \check{w}_2. \quad (4.100)$$

D'où :

$$\check{A}(E, h) = \check{\alpha}_1 \check{\beta}_1. \quad (4.101)$$

PROPOSITION 4.9. — *Soit  $c_5(h)$  le symbole analytique classique donné dans l'équation (3.51),*

$$\check{\beta}_1 = c_5(h) e^{Z_1(y_1^-, y_0^-)/h}.$$

Il nous manque alors le calcul de  $\check{\alpha}_1$ . Pour simplifier on va enlever les  $\check{\cdot}$

$$v_2 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 w_2. \tag{4.102}$$

On va décrire les microsupports des solutions qui interviennent dans l'équation (4.102). Ces solutions sont vues en tant que distributions semi classiques, définies comme valeurs au bord de fonctions analytiques dans un ouvert du demi-plan inférieur (respectivement du demi-plan supérieur), délimité par la courbe  $y = x + if(x)$ . En multipliant ces distributions par  $e^{-i\varphi(x)/h}$ , on peut décrire facilement leurs microsupports. On notera de la même faon les distributions après multiplication par le terme  $e^{-i\varphi(x)/h}$ .

PROPOSITION 4.10.

$$\begin{aligned} MS(w_1) &\subset \tilde{q}^{-1}(0) \setminus \{s_{+-} \cup s_{--}\} \\ MS(v_2) &\subset \tilde{q}^{-1}(0) \setminus \sigma_{--} \\ MS(u_2) &\subset \tilde{q}^{-1}(0) \setminus \sigma_{+-} \end{aligned}$$

et  $w_2$  n'a pas de microsupport au voisinage de  $\xi = 0$ .

### 5. PREUVE DU THÉORÈME PRINCIPAL

Pour prouver le théorème, on raccorde les solutions BKW  $v_2$  et  $w_1$ , aux solutions microlocales définies près de  $(x_-, 0)$ . On raccorde aussi  $u_2$  et  $w_1$ , aux solutions microlocales définies près de  $(x_+, 0)$ . La propagation des singularités pour notre opérateur établit un lien entre ces solutions définies microlocalement au voisinage de  $(x_-, 0)$  (resp.  $(x_+, 0)$ ), mais ceci n'est pas encore suffisant. C'est  $w_1$  qui nous sert de pont pour pouvoir fermer le circuit. Ce sont ensuite les formules d'interactions qui jouent le jeu.

Au voisinage du point  $(x_-, 0)$  on considère deux bases de solutions microlocales,  $(V_+, V_-, w_2)$  et  $(V_+^*, V_-^*, w_2)$ . Il existe  $\alpha_+$ ,  $\alpha_-$  et  $\alpha_0$ , trois constantes complexes telles que :

$$v_2 = \alpha_+ V_+^* + \alpha_- V_-^* + \alpha_0 w_2. \tag{5.103}$$

De même au voisinage de  $(x_+, 0)$  on considère deux bases microlocales,  $(U_+, U_-, w_2)$  et  $(U_+^*, U_-^*, w_2)$ . Il existe  $\gamma_+$ ,  $\gamma_-$  et  $\gamma_0$ , trois constantes complexes telles que :

$$u_2 = \gamma_+ U_+^* + \gamma_- U_-^* + \gamma_0 w_2. \tag{5.104}$$

Il existe aussi  $\eta_+$ ,  $\eta_-$  et  $\eta_0$  dans  $\mathbb{C}$  telles que :

$$w_1 = \eta_+ U_+^* + \eta_- U_-^* + \eta_0 w_2. \quad (5.105)$$

En plus écrivons :

$$\begin{cases} V_+^* = a_+ U_+^* + a_- U_-^* + a_0 w_2 \\ V_-^* = b_+ U_+^* + b_- U_-^* + b_0 w_2 \end{cases} \quad (5.106)$$

où  $a_{\pm}$ ,  $a_0$ ,  $b_{\pm}$  et  $b_0$ , sont des constantes dans  $\mathbb{C}$ . Alors on peut écrire :

$$v_2 = \delta_+ U_+^* + \delta_- U_-^* + \delta_0 w_2. \quad (5.107)$$

Où :

$$\begin{cases} \delta_+ = a_+ \alpha_+ + b_+ \alpha_- \\ \delta_- = a_- \alpha_+ + b_- \alpha_- \end{cases} \quad (5.108)$$

Donc avec l'équation (4.102), on obtient :

$$\alpha_1 = \frac{\delta_+ - \alpha_2 \gamma_+}{\eta_+}. \quad (5.109)$$

D'où :

$$\alpha_1 = \frac{1}{\eta_+} (a_+ \alpha_+ + b_+ \alpha_- - \alpha_2 \gamma_+). \quad (5.110)$$

On va commencer par déterminer  $a_+$  et  $b_+$ . D'après la proposition 4.7,  $V_-^*$  n'a pas de microsupport sur  $\sigma_{-+}$  et par propagation de singularité le long de  $q_1^{-1}(0)$ ,  $V_-^*$  n'aura pas de microsupport sur  $\sigma_{++}$ .

Or :

$$\sigma_{++} \subset MS(U_+^*) \text{ et } \sigma_{++} \not\subset MS(U_-^*),$$

donc dans la deuxième équation du système (5.106), on a obligatoirement :

$$b_+ = 0. \quad (5.111)$$

Pour calculer  $a_+$ , écrivons  $w_1$  dans la base  $(V_+^*, V_-^*, w_2)$  :

$$w_1 = \beta_+ V_+^* + \beta_- V_-^* + \beta_0 w_2. \quad (5.112)$$

Avec les équations (5.105) et (5.106) on obtient :

$$a_+ = \frac{\eta_+}{\beta_+}. \tag{5.113}$$

Bien sûr, on suppose que  $\eta_+$  et  $\beta_+$  sont non nulles, chose qui va être retrouvée après.

L'équation (5.110) donne alors :

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_+}{\beta_+} - \alpha_2 \frac{\gamma_+}{\eta_+}. \tag{5.114}$$

*Calcul de  $\alpha_+$  et  $\gamma_+$ .* - Par propagation des singularités on a dans l'équation (5.103), (resp. l'équation (5.104))

$$\alpha_- = 0 \text{ (resp. } \gamma_- = 0).$$

Écrivons maintenant  $u_2$  (resp.  $v_2$ ) dans la base  $(U_+, U_-, w_2)$  respectivement dans la base  $(V_+, V_-, w_2)$ .

$$\begin{cases} u_2 = \nu_+ U_+ + \nu_- U_- + \nu_0 w_2 \\ v_2 = \mu_+ V_+ + \mu_- V_- + \mu_0 w_2 \end{cases} \tag{5.115}$$

L'équation (4.95) nous donne avec les deux équations (5.103) et (5.104)

$$\begin{cases} \gamma_+ = \frac{1}{N(l_h^+, h)} e^{-l_h^+ \pi/2h} \nu_+ \\ \alpha_+ = \frac{1}{N(l_h^-, h)} e^{l_h^- \pi/2h} \mu_- \end{cases} \tag{5.116}$$

**PROPOSITION 5.1.**

(i) *Il existe deux symboles analytiques classiques d'ordre 0,  $c^*(h)$  et  $d^*(h)$  de symbole principal 1 tels que :*

$$\begin{cases} w_1(x, h) = c^*(h) e^{(Z_1+Z_2)(y_1^-, y_0^-)/2h} U_+^*(x, h) & \text{près de } \sigma_{++} \\ w_1(x, h) = d^*(h) V_+^*(x, h) & \text{près de } \sigma_{--} \end{cases}$$

(ii) *Il existe deux symboles analytiques classiques d'ordre 0,  $c(h)$  et  $d(h)$  de symbole principal 1 tels que :*

$$\begin{cases} u_2(x, h) = c(h) e^{-(Z_1-Z_2)(y_1^-, y_0^-)/2h} U_+(x, h) & \text{près de } s_{++} \\ v_2(x, h) = d(h) V_-(x, h) & \text{près de } s_{--} \end{cases}$$

*Preuve.* - Cette proposition résulte de la proposition 4.9 et de la propagation des singularités pour l'opérateur  $\tilde{Q}(x, hD_x, h)$ . □

En comparant les résultats de cette proposition et les équations respectives (5.105), (5.112) et (5.115), on obtient respectivement :

$$\begin{cases} \eta_+ = c^*(h)e^{(Z_1+Z_2)(y_1^-, y_0^-)/2h} \\ \beta_+ = d^*(h) \\ \nu_+ = c(h)e^{-(Z_1-Z_2)(y_1^-, y_0^-)/2h} \\ \mu_- = d(h) \end{cases} \quad (5.117)$$

Avec l'équation (4.47) et les équations (4.61), on trouve  $\alpha_2$  telle que :

$$\alpha_2 = d_3(h)e^{Z_2(y_1^-, y_0^-)/h} \quad (5.118)$$

où  $d_3(h)$  est un symbole analytique classique de symbole principal 1. On a tout maintenant pour déterminer  $\alpha_1$  :

$$\alpha_1 = \frac{e^{l_h^- \pi/2h}}{N(l_h^-, h)d^*(h)}d(h) - \frac{e^{-l_h^+ \pi/2h}}{N(l_h^+, h)c^*(h)}d_3(h)c(h)e^{-(Z_1+Z_2)(y_1^-, y_0^-)/h}.$$

L'équation (4.101) et la proposition 4.63 et l'équation (4.63) nous donne alors :

PROPOSITION 5.2. — *Il existe deux symboles analytiques classiques formels  $r_+(h)$  et  $r_-(h)$ , d'ordre 0 et de symbole principal 1, tels que :*

$$\begin{aligned} A(E, h) &= 2\pi e^{(Z_1+Z_2)(\sqrt{E}, y_1^-)/h} \\ &\times \left( \frac{h^{\frac{i}{h}l_h^-} r_-(h)}{h\Gamma(-\frac{i}{h}l_h^-)} e^{(Z_1+Z_2)(y_1^-, y_0^-)/h} - \frac{h^{\frac{i}{h}l_h^+} r_+(h)}{h\Gamma(-\frac{i}{h}l_h^+)} \right). \end{aligned}$$

Avec la proposition 4.2, on obtient le théorème :

THÉORÈME 3. — *Soit  $P(x, hD_x, h)$  l'opérateur donné par (1.3), et soit  $E(h)$  une résonance de  $P$  telle que  $E(h) \rightarrow E_0 \geq 0$  ( $h \rightarrow 0^+$ ). Sous l'hypothèse de couplage (H) (voir Introduction), il existe deux symboles analytiques classiques  $r_-(h)$  et  $r_+(h)$ , d'ordre 0 et de symbole principal 1 et deux symboles analytiques classiques  $l_h^-$  et  $l_h^+$ , d'ordre 2 tels que :*

$$\begin{aligned} e^{2C(E_0)/h} \operatorname{Im} E &\sim -2\pi^2 \\ &\times \left| \frac{h^{\frac{i}{h}l_h^-}}{h\Gamma(-\frac{i}{h}l_h^-)} r_-(h) e^{(Z_1+Z_2)(y_1^-, y_0^-)/h} - \frac{h^{\frac{i}{h}l_h^+}}{h\Gamma(-\frac{i}{h}l_h^+)} r_+(h) \right|^2 \end{aligned}$$

Où

$$C(E_0) = \operatorname{Re}(Z_1 + Z_2)(y_0^-, -\sqrt{E_0}).$$

## REFERENCES

- [Al] S. ALINHAC, *Équations différentielles : Étude asymptotique : Applications aux équations aux dérivées partielles*, Publications mathématiques d'Orsay, 1980, p. 80-04.
- [Ch-Gu] I. M. GUELFAND et G. E. CHILOV, *Les Distributions*, tome 1. Édition Dunod, Paris, 1962.
- [D.L] R. DAUTRAY J. L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique II*, Edition Masson, Paris. Collection Enseignement, 1988.
- [Ec] J. ECALLE, *Les fonctions réurgentes*, Publications Mathématiques d'Orsay, 1981, p. 81-05.
- [Ge-Gr] C. GÉRARD et A. GRIGIS, Precise estimates of tunneling and eigenvalues near a potential barrier, *Journal of Differential Equations*, Vol. **72**, 1988, p. 149-177.
- [Gr] A. GRIGIS, Estimations asymptotiques des intervalles d'instabilité pour l'opérateur de Hill, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* 4<sup>e</sup> série, t **20**, 1987, p. 641-672.
- [Gr-Sj] A. GRIGIS et J. SJÖSTRAND, Microlocal analysis for differential operators, *Lecture Notes Series* (London Mathematical Society) L.N.3, 1994.
- [He-Ro] B. HELFFER et D. ROBERT, Puits de potentiel généralisés et asymptotique semi-classique, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 1984, Vol **41**, n<sup>o</sup> **3**, p. 291-331.
- [He-Sj.1] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, Semiclassical Analysis for Harper's Equation III, *Bulletin de la SMF*, Mémoire n<sup>o</sup> **39**, 1989.
- [He-Sj.2] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, Résonances en limite semi-classique, *Bulletin de la SMF*, Mémoire n<sup>o</sup> **24-25**, 1986, Tome 114, Fasc. 3.
- [Ka-Ro] N. KADIÏ et M. ROULEUX, Forme normale d'un Hamiltonien à deux niveaux près d'un point de branchement en limite semi classique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 143, Vol. **317**, série I, p. 359-364.
- [KMSW] M. KLEIN, A. MARTINEZ, R. SEILER X. P. WANG, On the Born-Oppenheimer expansion for polyatomic molecules, *Comm. Math. Phys.*, Vol. **143**, 1992, p. 607-639.
- [La, Li] L. LANDAU et E. LIFCHITZ, *Mécanique quantique Théorie non relativiste*. Edition MIR, Moscou, 1975.
- [Ko] H. J. KORSCH, Semiclassical theory of resonances, *Lecture notes in physics*, n<sup>o</sup> **211**.
- [Ma1] A. MARTINEZ, Estimations de l'Effet Tunnel pour le double puits II, Etats hautement excités, *Bulletin de la SMF.*, Vol. **116**, 1988, p. 199-229.
- [Ma2] A. MARTINEZ, Résonances dans l'approximation de Born-Oppenheimer II. Largeurs de résonances, *Comm. Math. Phys.*, Vol. **135**, 1991, p. 517-530.
- [Ma3] A. MARTINEZ, Estimates on complex interactions in phase space, *Math. Nachr.*, Vol. **167**, 1994, p. 203-254.
- [Mä] C. MÄRZ, Spectral Asymptotic near the Potential Maximum for the Hill's Equation, *Asymptotic Analysis*, 5, 1992, p. 221-267.
- [Me] B. MESSIRDI, Asymptotique de Born-Oppenheimer pour la prédissociation moléculaire, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. **61**, 1994, n<sup>o</sup> **3**, p. 255-292.
- [Na] S. NAKAMURA, On an example of phase-space tunneling, *Prépublication University of Tokyo*, 1994.
- [Ra] T. RAMOND, Intervalles d'instabilité pour une équation de Hill à potentiel méromorphe, *Bulletins de la SMF*, 1993, 121, p. 403-444.
- [Re-Si] M. REED et B. SIMON, Methods of Modern Mathematical physics IV, *Academic Press*, 1978.

- [Si] Y. SIBUYA, *Global theory of second order linear ordinary differential equations with a polynomial coefficient*, North-Holland, Amsterdam, 1975.
- [Sj.1] J. SJÖSTRAND, Singularités analytiques microlocales, *Astérisque*, n° 95, 1982.
- [Sj.2] J. SJÖSTRAND, Microlocal analysis for the periodic magnetic Schrödinger equation and related questions, (CIME-lecture, Montecatini, July 1989), *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1495, Springer Berlin 1991, p. 237-332.
- [Vo] A. VOROS, The return of the quartic oscillator, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. 135, 1983, n° 3.

(Manuscrit reçu le 25 janvier, 1996;  
version révisée reçue le 29 janvier, 1997.)