

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JEAN-PIERRE MARCO

**Transition le long des chaînes de tores invariants
pour les systèmes hamiltoniens analytiques**

Annales de l'I. H. P., section A, tome 64, n° 2 (1996), p. 205-252

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1996__64_2_205_0

© Gauthier-Villars, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Transition le long des chaînes de tores invariants pour les systèmes hamiltoniens analytiques

par

Jean-Pierre MARCO

Université Pierre et Marie Curie, UFR 920,
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. – Le premier but de l'article est d'établir clairement l'existence d'orbites reliant les tores extrêmes d'une chaîne de transition, dans le cas général où les tores ont une forme normale de Graff. La démonstration est basée sur un λ -lemme particulier, portant sur des arcs. On en déduit une évaluation du temps de transition le long de la chaîne, en utilisant la méthode des fenêtres d'Easton. Cette approche semble inévitable pour comparer ce temps aux estimations de Nekhoroshev.

ABSTRACT. – The purpose of this paper is to prove (by constructive methods) the existence of orbits connecting the extremal tori of a transition chain, assuming that these tori possess the general normal form derived by Graff and Treshchev. The proof is based on a specific λ -lemma for arcs, exploiting the peculiarities of this normal form. We give then an estimation on the transition time along the chain, using Easton's windowing method. This approach seems to be unavoidable to compare this time to Nekhoroshev's estimates.

1. INTRODUCTION

1.1. Présentation du problème

La notion d'instabilité pour les perturbations d'un système hamiltonien complètement intégrable remonte à l'article d'Arnold [2]. Le mécanisme

proposé par Arnold met en jeu des solutions particulières dans le complémentaire des familles de tores lagrangiens invariants donnés par les théorèmes de stabilité (KAM). Il est donc nécessaire que le complémentaire d'un tore lagrangien dans une sous-variété de niveau du hamiltonien soit connexe, et l'instabilité ne peut avoir lieu qu'en dimension ≥ 6 .

Le hamiltonien donnant lieu à l'exemple d'Arnold est défini dans $T^*(\mathbf{T}^3) = \mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3$ (muni de la structure symplectique usuelle), et s'écrit :

$$H_{\varepsilon, \mu}(\varphi, I) = \frac{1}{2} \|I\|^2 + \varepsilon(\cos \varphi_1 - 1)(1 + \mu(\cos \varphi_2 + \sin \varphi_3))$$

où $I \in \mathbf{R}^3$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbf{T}^3$, et où ε, μ sont des paramètres. Le hamiltonien $H_{\varepsilon, \mu}$ doit être considéré comme une perturbation du cas intégrable $H_{00} = \frac{1}{2} \|I\|^2$, mais il faut noter que les deux paramètres ε, μ jouent des rôles dissymétriques : ε conserve l'intégrabilité et crée une hyperbolicité (au moyen de tores invariants de dimension 2), et μ (qui est choisi très petit devant ε) détruit l'intégrabilité et permet l'instabilité. L'idée de ce double paramétrage remonte à Poincaré [16] : la possibilité de choisir la taille de μ par rapport à celle de ε simplifie à l'extrême les constructions par rapport au cas plus réaliste des perturbations à un seul paramètre. Les questions soulevées par l'application de la construction d'Arnold dans le cas général sont étudiées dans [14].

Le but de cet article étant surtout de clarifier le sujet, on rappelle d'abord les détails de [2]. On supposera partout que l'énergie $h > 0$ est fixée.

Le cas intégrable initial H_{00}

Lorsque $\varepsilon = 0$, le système modélise le voisinage d'un tore lagrangien intégrable en coordonnées action-angles. L'espace total $\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3$ est feuilleté en tores lagrangiens invariants paramétrés par les actions $I \in \mathbf{R}^3$, la surface de niveau $H_{00}^{-1}(h)$ est le produit direct du tore \mathbf{T}^3 par la 2-sphère euclidienne \mathcal{S} d'équation $I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 = 2h$.

Le choix de la perturbation fait jouer un rôle particulier à la surface résonnante \mathcal{R} donnée par l'équation $I_1 = 0$ dans le niveau $H_{00}^{-1}(h)$. Notons \mathcal{C} le grand cercle de \mathcal{S} d'équation $I_1 = 0$. La surface \mathcal{R} est le produit direct $\mathbf{T}^3 \times \mathcal{C}$, chaque tore $\mathbf{T}^3 \times \{I^0\}$ de \mathcal{R} est invariant et lui même feuilleté en tores invariants \mathbf{T}^2 (résonance).

Il est aussi intéressant de mettre en évidence la structure produit direct $(\varphi_1, I_1) \times (\varphi_2, \varphi_3, I_2, I_3)$ du système. La projection de $H_{00}^{-1}(h)$ sur l'espace (φ_1, I_1) est un anneau, la surface \mathcal{R} se projette sur le cercle médian $I_1 = 0$ formé de points fixes, et la dynamique simple sur l'anneau est indiquée sur la figure 1.

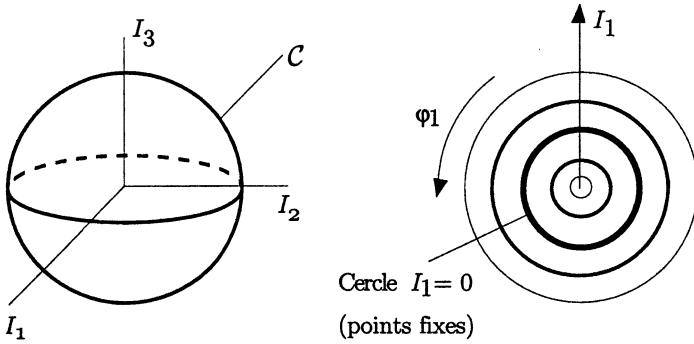


Fig. 1. - $\varepsilon = 0$.

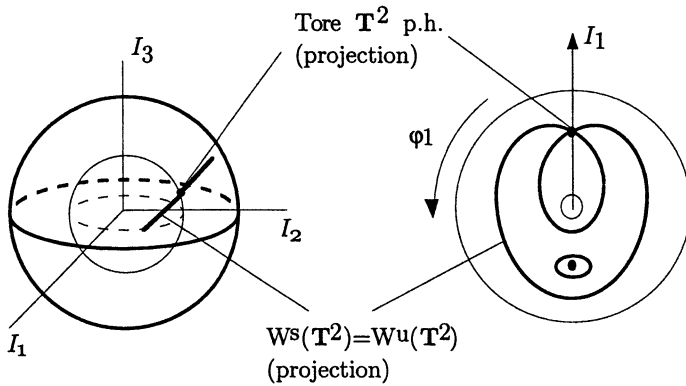


Fig. 2. - $\varepsilon > 0, \mu = 0$.

Création de l'hyperbolicité

Lorsque $\varepsilon > 0$ et $\mu = 0$, le système reste complètement intégrable, et apparaît comme le produit non couplé d'un pendule, donné par le hamiltonien $H_p(\varphi_1, I_1) = \frac{1}{2}I_1^2 + \varepsilon(\cos \varphi_1 - 1)$ sur $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$, et du système $H_r(\varphi_2, \varphi_3, I_2, I_3) = \frac{1}{2}(I_2^2 + I_3^2)$ sur $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^2$; les variables I_2 et I_3 sont donc encore des intégrales premières. Le niveau $H_{\varepsilon_0}^{-1}(h)$ est difféomorphe à $\mathbf{T}^3 \times S^2$, la projection de ce niveau dans l'espace des I est la couche sphérique $2h \leq I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 \leq 2(h + 2\varepsilon)$.

Cette première étape détruit la surface résonnante \mathcal{R} et donne naissance en particulier à une famille \mathcal{P} à un paramètre de tores invariants de dimension 2, partiellement hyperboliques, qui joue un rôle essentiel dans la suite. Cette famille \mathcal{P} est le relèvement à $H_{\varepsilon_0}^{-1}(h)$ du point fixe hyperbolique du

pendule : c'est donc le produit du tore \mathbf{T}^2 (variables φ_2 et φ_3) par le cercle d'équations $\varphi_1 = 0, I_1 = 0, I_2^2 + I_3^2 = \sqrt{2h}$ dans $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}^3$. Les actions I_2 et I_3 étant constantes, \mathcal{P} est donc bien une famille à un paramètre (variant dans le cercle précédent) de tores invariants (décrits par φ_2 et φ_3). Leurs variétés stables et instables s'obtiennent aussi par relèvement à $H_{\varepsilon_0}^{-1}(h)$ de celles du point fixe du pendule, ce sont donc des cylindres (difféomorphes à $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}$) de dimension 3. Même dans la variété $H_{\varepsilon_0}^{-1}(h)$, les tores invariants sont seulement partiellement hyperboliques (l'hyperbolicité complète d'un tore T exigerait que la somme des dimensions des variétés stable et instable de T soit au moins égale à $7 = \dim H_{\varepsilon_0}^{-1}(h) + \dim T$), ce qui permet en particulier l'existence de cette famille continue de tores. Notons que cette contrainte impose à *nouveau* que la dimension initiale soit ≥ 6 .

Instabilité

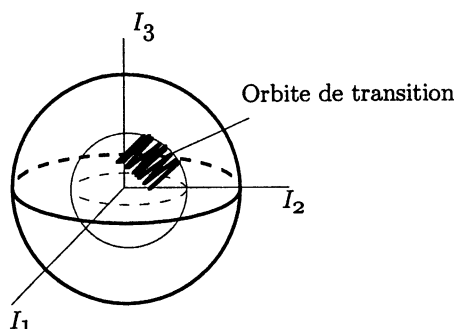
Dans la deuxième étape $\mu > 0, \mu \ll \varepsilon$, la configuration complètement intégrable précédente est détruite. Le niveau $H_{\varepsilon\mu}^{-1}(h)$ est toujours difféomorphe à $\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^2$, et se projette encore sur une couche sphérique dans l'espace des I . Les tores partiellement hyperboliques de la famille \mathcal{P} subsistent (car la perturbation a été choisie nulle sur la surface $\varphi_1 = 0$ qui contient \mathcal{P}), mais le calcul des intégrales de Poincaré-Melnikov montre que la variété stable de chaque tore de \mathcal{P} intersecte maintenant *transversalement* dans $H_{\varepsilon\mu}^{-1}(h)$ la variété instable de ce même tore, suivant (au moins) une orbite homocline.

Par continuité, on voit qu'il est alors possible d'extraire de la famille \mathcal{P} des familles finies $(T_i)_{1 \leq i \leq n}$ de tores partiellement hyperboliques, toujours contenus dans $H_{\varepsilon\mu}^{-1}(h)$, tels que les sous-variétés $W^u(T_i)$ et $W^s(T_{i+1})$ s'intersectent transversalement (dans $H_{\varepsilon\mu}^{-1}(h)$) suivant (au moins) une orbite hétérocline.

On montre d'autre part que chaque tore T_i non résonnant possède une propriété dite *d'obstruction* – que nous détaillerons dans la suite – qui assure l'existence d'orbites arbitrairement proches des tores extrêmes T_1 et T_n (dont nous donnerons une construction explicite).

On obtient alors le résultat suivant ([2]) :

THÉORÈME. – Notons $p_{\varepsilon\mu}$ la projection de $H_{\varepsilon\mu}^{-1}(h)$ sur l'axe des I_2 . Soient I_2 et I'_2 deux réels dans l'intervalle $]0, \sqrt{2h}[$, et O, O' des voisinages de I_2 et I'_2 dans $]0, \sqrt{2h}[$. Pour tout ε vérifiant $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe $\mu_0(\varepsilon)$ tel que pour tout μ vérifiant $0 < \mu < \mu_0(\varepsilon)$, il existe une orbite $o_{\varepsilon\mu}$ du système défini par $H_{\varepsilon\mu}$, contenue dans le niveau $H_{\varepsilon\mu}^{-1}(h)$, dont la projection par $p_{\varepsilon\mu}$ intersecte les voisinages O et O' .

Fig. 3. $-\varepsilon > 0$, $\mu > 0$, $\mu \ll \varepsilon$.

Bien qu'il soit de portée limitée, en particulier à cause du choix très particulier de la perturbation, ce théorème permet d'espérer une propriété plus générale d'instabilité. Soit H_0 un hamiltonien complètement intégrable, défini sur $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$, ne dépendant que des actions $I \in \mathbf{R}^n$, et soit H_1 un hamiltonien sur $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$, on note $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon H_1$ pour $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$. Soit h une valeur fixée de l'énergie, régulière pour chaque H_ε , et \mathcal{A} la projection du niveau $H_0^{-1}(h)$ sur l'espace des actions \mathbf{R}^n . La famille (H_ε) est dite *instable à l'énergie h* lorsqu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tous points I et I' dans l'intérieur de la même composante de \mathcal{A} , et tous voisinages O et O' de I et I' dans \mathcal{A} , il existe pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ une orbite o_ε du système H_ε , contenue dans $H_\varepsilon^{-1}(h)$, dont la projection dans l'espace des actions intersecte les voisinages O et O' . Compte tenu de la dynamique sur les tores non perturbés, cette propriété est très voisine de la transitivité topologique du flot sur la sous-variété $H_\varepsilon^{-1}(h)$.

Un hamiltonien H_0 étant donné, un premier problème est alors de caractériser l'ensemble des H_1 rendant instable la famille H_ε précédente, et en particulier d'étudier sa genericité (dans un sens convenable), un deuxième problème est de d'étudier l'ensemble des H_0 pour lesquels l'ensemble précédent est générique. L'étude dépend évidemment de la classe de régularité des fonctions considérées. On trouvera quelques idées sur le cas C^∞ dans Douady [8], sur le cas analytique (beaucoup plus difficile et encore non résolu) dans Arnold [3] et Delshams [7].

L'application de la construction d'Arnold à ces problèmes soulève trois problèmes principaux, de difficultés inégales (signalons que d'autres approches, de nature variationnelle, sont possibles [15]).

– Dans le cas général, on doit d'abord mettre en évidence les familles de tores partiellement hyperboliques convenablement reliés par des orbites hétéroclines. Ces tores proviennent de la destruction de tores résonnants [18], mais alors que tous les tores de la famille \mathcal{P} subsistaient dans l'exemple

d'Arnold, l'existence des tores perturbés dans le cas général se montre par des théorèmes du type KAM (hyperbolique, voir [11] et [18]), ce qui exige que les tores initiaux vérifient des conditions diophantiennes. Il se crée donc des lacunes dans les familles de tores partiellement hyperboliques perturbés. Se pose alors le problème des connexions hétéroclines : la densité des tores nécessaires (et donc la petitesse des lacunes) est clairement reliée à l'écart des variétés stable et instable d'un tore perturbé autour d'une orbite homocline. Comme cet écart est exponentiellement petit relativement à la taille de la perturbation ([16], [17]), la construction de ces familles de tores reste le problème le plus difficile, et est peut être sans solution [14].

– La transition entre des actions I et I' quelconques demande la construction de familles de tores issus de surfaces de résonance distinctes. Ce problème de changement de surface est encore très peu étudié (voir [3]).

– Enfin la dynamique autour des tores (propriété d'obstruction), très simple dans le cas d'Arnold, n'est pas suffisamment étudiée dans le cas général, malgré un certain nombre de travaux ([1], [6], [10]). De même, la construction explicite d'orbites de transition, reliant des voisinages des tores extrêmes d'une chaîne donnée, n'est pas clairement effectuée.

1.2. Plan de l'article

Le but de cet article est d'éclaircir ce dernier point, tout en introduisant des méthodes susceptibles d'applications aux deux premiers. Après avoir précisé la nature de la propriété d'obstruction dans la partie 2, on étudie dans les parties 3 et 4 la dynamique au voisinage d'un tore partiellement hyperbolique possédant une forme normale particulière, déterminée par Graff [11], ce qui est le cas des tores apparaissant dans les perturbations analytiques de systèmes complètement intégrables [18]. La partie 3 est consacrée au redressement des variétés invariantes de ces tores, la partie 4 donne le λ -lemme qui est à la base de ce travail. L'étude est limitée au cas où les variétés stable et instable du tore T vérifient $\dim W^s(T) = \dim W^u(T) = \dim T + 1$, c'est-à-dire aux tores provenant de la destruction des surfaces de résonance d'ordre 1. On montre dans [6] que les formes normales possèdent dans ce cas particulier des propriétés de convergence plus fortes que dans le cas des tores issus de surfaces de résonance arbitraires, on n'exploite cependant pas ici ces propriétés, afin de permettre une généralisation facile au cas des tores provenant de surface de résonance d'ordre quelconque. Cette généralisation paraît en effet indispensable pour aborder le problème des transitions entre surfaces de résonance distinctes (bien que dans ce cas les approches variationnelles semblent plus souples).

La fin de l'article est consacrée à un premier calcul du *temps de transition* le long d'une chaîne. Les méthodes constructives développées ici conduisent à séparer son évaluation en deux : la transition au voisinage des tores (lente), et la transition de tore à tore suivant le voisinage d'une orbite hétérocline (rapide). On donne dans la partie 5 les paramètres permettant d'estimer le temps de transition d'une orbite au voisinage d'un tore, et dans la partie 6 des estimations préliminaires du temps de transition le long d'une chaîne. Le but est de comparer ces temps aux temps de stabilité donnés par la théorie classique des perturbations ([13], [14]). Ces premières estimations du temps d'instabilité, tout à fait générales, sont très pessimistes. Elles sont basées seulement sur le λ -lemme et ne sont absolument pas comparables aux temps de stabilité de Nekhoroshev.

On montre ensuite dans le paragraphe 7 comment les idées d'Alexeiev [1] et d'Easton [10] permettent dans un premier temps de se ramener à un contexte quasi-hyperbolique (au moyen de *fenêtres* convenablement disposées au voisinage des tores). Il est alors possible de montrer, dans un cadre plus restreint que précédemment, que le temps de transition croît de manière *linéaire* en fonction du nombre de tores de la chaîne. Ceci permettra de développer la comparaison aux temps de stabilité indiquée dans [13] et [14]. Au prix de démonstrations plus délicates, l'utilisation des propriétés des formes normales de [6] doit permettre d'étendre ces idées aux systèmes les plus généraux. Une étude détaillée des procédés de normalisation et de leur application aux problèmes de temps de transition sera donnée dans un autre article.

La partie 8 est consacrée à quelques remarques sur l'utilisation des temps de transition pour l'étude des perturbations C^1 des champs hamiltoniens complètement intégrables. Les orbites d'instabilité précédentes subsistent en effet dans les perturbations C^1 (simple théorème de continuité), alors même que les chaînes de transition peuvent disparaître. Les temps de transition donnent alors la taille des perturbations qui conservent les orbites d'instabilité entre deux points.

2. PROPRIÉTÉ D'OBSTRUCTION ET CHAÎNES DE TRANSITION

Les objets considérés ici sont de classe C^r , $r \geq 2$, les exemples sont analytiques. Nous commençons par rappeler la définition de la propriété d'obstruction introduite dans [2] (*voir* aussi [6]).

2.1. DÉFINITIONS. – Les variétés symplectiques considérées seront de dimension $2m + 2$, les tores invariants seront de dimension m (comme

indiqué en introduction, ils proviennent de la destruction de tores lagrangiens sur une surface de résonance d'ordre 1), et leurs variétés stables et instables seront de même dimension $m + 1$. On parlera alors sans autre précision de *tores partiellement hyperboliques*.

Soient M une variété symplectique et H un hamiltonien sur M . On suppose que le système X_H défini par H possède un tore invariant partiellement hyperbolique T , contenu dans un niveau régulier $\mathcal{H} = H^{-1}(h)$. On dira que T possède la *propriété d'obstruction* lorsque toute sous-variété V de \mathcal{H} invariante pour X_H et intersectant *transversalement* dans \mathcal{H} la sous-variété stable $W^s(T)$ vérifie $W^u(T) \subset \overline{V}$.

2.2. DÉFINITION. – On appellera *chaîne de transition* pour le système (M, H) une famille finie $(T_i)_{1 \leq i \leq n}$ de tores invariants partiellement hyperboliques, contenus dans une même sous-variété $\mathcal{H} = H^{-1}(h)$, telle que chaque tore possède la propriété d'obstruction, et telle que $W^u(T_i)$ intersecte transversalement dans \mathcal{H} la variété $W^s(T_{i+1})$, pour $1 \leq i \leq n-1$. Compte tenu des dimensions, $W^u(T_i) \cap W^s(T_{i+1})$ est alors une union d'orbites hétéroclines isolées.

Si $(T_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une chaîne de transition, et si U_1 et U_n sont des voisinages arbitraires (dans \mathcal{H}) des tores extrêmes T_1 et T_n , l'ensemble des orbites intersectant les deux voisinages U_1 et U_n est un ouvert de l'espace des orbites du système X_H restreint à \mathcal{H} , il est donc en particulier infini. En effet la sous-variété $W^u(T_i)$ est invariante par le flot, et intersecte transversalement $W^s(T_{i+1})$, donc $W^u(T_{i+1}) \subset \overline{W^u(T_i)}$ pour tout i . Une récurrence immédiate montre alors que $W^u(T_n) \subset \overline{W^u(T_1)}$, et l'orbite de tout point p de $W^u(T_1) \cap U_1$ ($\neq \emptyset$) intersecte à la fois U_1 et U_n . L'ensemble de ces orbites de transition est donc non vide, et il est ouvert par les théorèmes classiques de dépendance des solutions par rapport aux conditions initiales.

On notera cependant qu'une telle construction ne donne pour l'instant aucune indication sur le *temps* de transition. Il sera d'autre part plus commode de travailler avec des surfaces de section autour des tores, ce qui sera toujours possible. On donne maintenant la notion d'obstruction relative à ces sections.

2.3. CONDITION (OS). – Les tores partiellement hyperboliques que nous considérons dans la suite possèdent des voisinages dans lesquels la dynamique est conjuguée à une forme normale simple (de Graff). En particulier, si T est un tel tore, il existe dans le voisinage de conjugaison une surface de section \mathcal{S} de dimension $2m$, contenue dans le niveau \mathcal{H}

et transverse (dans \mathcal{H}) au champ hamiltonien. L'application de retour f naturellement associée à \mathcal{S} est définie dans un voisinage \mathcal{O} de $\Theta = T \cap \mathcal{S}$ dans \mathcal{S} , et à valeurs dans un voisinage \mathcal{O}' de Θ . On voit directement que Θ est un tore invariant pour f , de dimension $m - 1$, et il sera toujours possible de choisir la section \mathcal{S} pour que les variétés invariantes de Θ soient les intersections avec \mathcal{S} de celles de T , elles seront donc de dimension m . Dans ces conditions, on vérifie facilement que pour que T possède la propriété d'obstruction, il suffit que la condition suivante soit vérifiée :

CONDITION (OS). – *Pour toute sous-variété Δ de \mathcal{O} intersectant $W^s(\Theta)$ transversalement dans \mathcal{S} , tout point $b \in W^u(\Theta)$ et tout voisinage ouvert \mathcal{B} de b dans \mathcal{S} , il existe un entier n tel que $f^n(\Delta \cap \mathcal{O}_n)$ intersecte \mathcal{B} (où $\mathcal{O}_n \subset \mathcal{O}$ est le domaine de f^n).*

Il est d'ailleurs facile de vérifier directement l'existence des orbites de transition lorsque tous les tores d'une chaîne vérifient la condition (OS). Il est de plus possible dans ce cas de donner des estimations sur le temps de transition, c'est la méthode qui sera utilisée dans la section 6.

2.4. Exemple : obstruction et tores “intégrables”

Nous vérifions dans ce paragraphe que les tores partiellement hyperboliques *les plus simples* possèdent la propriété d'obstruction. Bien que les démonstrations puissent ici se faire plus rapidement, nous introduisons les constructions et notations intervenant dans la suite, pour en simplifier la lecture.

On considère le système défini sur la variété $\mathbf{V}^{2m+2} = \mathbf{T}^m \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, munie des coordonnées (x_i, y_i, s, u) et de la forme $\Omega_0 = dy_1 \wedge dx_1 + \dots + dy_m \wedge dx_m + ds \wedge du$, par le hamiltonien

$$K(x, y, u, s) = (\omega \mid y) + su$$

où ω est un vecteur de \mathbf{R}^m que l'on supposera non résonnant. Les équations associées s'écrivent $\dot{x} = \omega$, $\dot{y} = 0$, $\dot{s} = -s$, $\dot{u} = u$ et s'intègrent directement en

$$x = x_0 + t\omega, \quad y = y_0, \quad s = s_0 e^{-t}, \quad u = u_0 e^t$$

Le tore \mathcal{T} d'équations $(y = 0, s = u = 0)$, de dimension m , est donc invariant et partiellement hyperbolique : ses variétés stable et instable $W^s(\mathcal{T}) = \{y = 0, u = 0\}$ et $W^u(\mathcal{T}) = \{y = 0, s = 0\}$ sont de dimension $m + 1$. Le tore \mathcal{T} est contenu dans la sous-variété $\mathcal{K} = K^{-1}(0)$, et appartient à la famille à m paramètres de tores invariants $\mathcal{T}(y_0) = \{y = y_0, s = u = 0\}$, $y_0 \in \mathbf{R}^m$, dont la trace sur la sous-variété \mathcal{K} est la famille à $m - 1$ paramètres $\{\mathcal{T}(y_0) \mid (y_0 \mid \omega) = 0\}$.

On construit facilement une surface de section \mathcal{S} contenue dans \mathcal{K} : comme ω est non résonnant, ses composantes sont non nulles, en particulier $\omega_m \neq 0$, et la surface \mathcal{L} d'équation $x_m = 0$ est donc partout transverse au champ hamiltonien X_K . La surface $\mathcal{S} = \mathcal{K} \cap \mathcal{L}$ est régulière et de dimension $2m$, puisque \mathcal{K} est transverse à \mathcal{L} (car le champ X_K est tangent à \mathcal{K}), c'est donc une section (globale) du système (\mathcal{K}, X_K) . Comme la sous-variété \mathcal{K} a pour équation

$$y_m = -\frac{1}{\omega_m} \left[(\bar{\omega} | \bar{y}) + su \right]$$

avec $\bar{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_{m-1})$ et $\bar{y} = (y_1, \dots, y_{m-1})$, on identifie \mathcal{S} à \mathbf{V}^{2m} en choisissant sur \mathcal{S} les coordonnées $(\theta = (\theta_i), \rho = (\rho_i), u, s)$, $1 \leq i \leq m-1$, où θ se déduit de x par suppression de la coordonnée x_m , et où $\rho = \bar{y}$.

Le temps de retour $\tau = 2\pi/\omega_m$ associé à la section \mathcal{S} est constant sur \mathcal{S} , l'application de retour f , de domaine \mathcal{S} , s'en déduit immédiatement :

$$f(\theta, \rho, s, u) = (\theta + \varpi, \rho, ks, lu)$$

avec $k = e^{-\tau}$, $l = e^{\tau}$ et $\varpi = \tau\bar{\omega}$. Le tore $\Theta = \mathcal{T} \cap \mathcal{S}$ a pour équations $\rho = 0, u = s = 0$, il est invariant par f et ses variétés stable et instable, intersections avec \mathcal{S} de celles de \mathcal{T} , sont données par $W^s(\Theta) = \{\rho = 0, u = 0\}$ et $W^u(\Theta) = \{\rho = 0, s = 0\}$.

Comme indiqué en 2.3, on montre la propriété d'obstruction pour \mathcal{T} au moyen de la condition (OS) pour la section. On considère donc une sous-variété Δ de \mathcal{S} transverse à $W^s(\Theta)$ en un point $a = (\theta_1, 0, s_1, 0)$, on peut évidemment supposer Δ de dimension m (car par transversalité sa dimension est $\geq m$), et contenue dans un voisinage donné de a . On considère d'autre part un point $b = (\theta_2, 0, 0, u_2) \in W^u(\Theta)$ et la boule ouverte $\mathcal{B} = B(b, \delta)$ (pour la distance produit dans \mathcal{S}), avec $\delta > 0$ fixé. On vérifie facilement qu'il est possible de supposer $|u_2| < 1/2$, ceci pour faciliter le choix de la reparamétrisation dans la suite.

Comme Δ est transverse à $W^s(\Theta)$ au point a , elle est aussi transverse au $(m+1)$ -plan d'équation $\rho = 0$, qu'elle intersecte suivant une variété de dimension 1 qu'on peut supposer connexe et paramétrée par la coordonnée u . On notera γ cet arc (qu'on suppose défini dans un intervalle $[-\hat{u}, \hat{u}]$), avec $\gamma(u) = (\gamma^\theta(u), 0, \gamma^s(u), u)$, et donc $a = \gamma(0)$. On calcule directement l'expression des itérés $\gamma_n = f^n \circ \gamma$:

$$\gamma_n(u) = \left(\gamma^\theta(u) + n\varpi, 0, k^n \gamma^s(u), l^n u \right)$$

La démonstration se termine en trois étapes.

a) *Reparamétrisation des arcs itérés.* — On note $\alpha(u) = (\alpha^\theta(u), 0, \alpha^s(u), u)$ le vecteur dérivé $\gamma'(u)$. La linéarité de la transformation f entraîne que

$$(f^n \circ \gamma)'(u) = (\alpha^\theta(u), 0, k^n \alpha^s(u), l^n u)$$

et ce vecteur tangent, normalisé par division par sa dernière composante, converge vers $(0, 0, 0, 1)$. Il en résulte directement que pour n assez grand, l'image de la restriction de l'arc γ_n à un intervalle $I_n \subset [-\hat{u}, \hat{u}]$ se paramètre par une fonction ζ_n de $[-1, 1]$ dans \mathcal{S} , de la forme $\zeta_n(u) = (\zeta_n^\theta, 0, \zeta_n^s, u)$. La suite d'intervalles I_n est décroissante, et la longueur de I_n converge vers 0.

b) *Redressement des arcs itérés.* — La convergence des vecteurs dérivés vers $(0, 0, 0, 1)$ montre l'existence d'un entier N tel que

$$\text{Sup} (|\zeta_n^x(u) - \zeta_n^x(0)|, |\zeta_n^y(u)|, |\zeta_n^s(u) - \zeta_n^s(0)|) < \delta/2$$

pour tout entier $n \geq N$.

c) *Ergodisation sur la variété stable.* — Comme ω est non résonnant, il existe une suite croissante d'entiers n_k tels que $|\theta_2 - (\theta_1 + n_k \varpi)| < \delta/2$. La composante angulaire du point $f^n(a) = \zeta_n(0)$, intersection de l'arc γ_n avec $W^s(\Theta)$, peut donc être choisie arbitrairement proche de celle du point b .

Compte tenu de la forme de la paramétrisation z , on en déduit que l'intersection de \mathcal{B} et de l'image de l'arc ζ_n est non vide pour tout entier $n_k \geq N$, ce qui montre la propriété d'obstruction pour les tores intégrables.

Les deux parties suivantes sont consacrées à la généralisation de cette démonstration au cas des tores intervenant dans les perturbations analytiques de systèmes intégrables.

3. TORES STANDARD

3.1. Systèmes et tores standard

On appellera *système standard* un système hamiltonien analytique sur la variété $\mathbf{V}^{2m+2} = \mathbf{T}^m \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, de la forme suivante

$$G(x, y, s, u) = (\omega | y) + \frac{1}{2}(y | My) + \lambda \cdot su + g(x, y, s, u)$$

où $\omega \in \mathbf{R}^m$ est non résonnant, M est une matrice symétrique réelle d'ordre m , l est un réel > 0 , et où le reste g est d'ordre 3 en (y, s, u) .

Le champ hamiltonien X_G associé à G définit les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \omega + My + \partial_y g(x, y, s, u) \\ \dot{y} = -\partial_x g(x, y, s, u) \\ \dot{s} = -\lambda s - \partial_u g(x, y, s, u) \\ \dot{u} = \lambda u + \partial_s g(x, y, s, u) \end{array} \right.$$

Le tore \mathcal{T} d'équations ($y = 0, s = u = 0$) est donc invariant par le flot. On montre [11] que \mathcal{T} est partiellement hyperbolique : ses variétés invariantes $W^s(\mathcal{T})$ et $W^u(\mathcal{T})$ sont lagrangiennes (donc de dimension $m + 1$). Elles se représentent par des expressions paramétriques analytiques w^s et w^u de la forme

$$w^s : \mathbf{T}^m \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{V}^{2m+2}$$

$$(a, s) \mapsto (x = a + X^s(a, s), y = Y^s(a, s), s, u = U(a, s))$$

$$w^u : \mathbf{T}^m \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{V}^{2m+2}$$

$$(b, u) \mapsto (x = b + X^u(b, u), y = Y^u(b, u), s = S(b, u), u)$$

où les fonctions analytiques X^s, Y^s, U s'annulent lorsque $s = 0$, avec Y^s et U d'ordre 2 en s , et où X^u, Y^u, S s'annulent lorsque $u = 0$, avec Y^u et S d'ordre 2 en u (les variétés $W^s(\mathcal{T})$ et $W^u(\mathcal{T})$ sont donc en tout point de \mathcal{T} tangentes aux espaces $W^s = \{y = 0, u = 0\}$ et $W^u = \{y = 0, s = 0\}$ respectivement). Les paramétrisations peuvent de plus être choisies de telle manière que le flot induit par le système sur $W^s(\mathcal{T})$ et $W^u(\mathcal{T})$ soit donné par les expressions

$$\dot{a} = \omega, \quad \dot{s} = -\Lambda^s(a, s) s, \quad \text{et} \quad \dot{b} = \omega, \quad \dot{u} = \Lambda^u(b, u) u$$

avec $\Lambda^s(a, s) \geq \Lambda_0 > 0$ et $\Lambda^u(b, u) \geq \Lambda_0 > 0$. La possibilité de choisir $\dot{a} = \omega$ et $\dot{b} = \omega$ est liée à l'analyticité du système et interviendra de façon essentielle dans la suite.

Le tore \mathcal{T} sera appelé *tore standard*. Contrairement au cas du système standard, \mathcal{T} n'appartient pas à une famille continue à m paramètres (y) de tores partiellement hyperboliques, mais on montre l'existence de tels tores pour une les valeurs de y assez irrationnelles. Treshchev ([18]) montre que si \mathcal{T} est un tore partiellement hyperbolique provenant de la destruction d'un tore résonnant d'ordre 1 dans une perturbation analytique d'un système intégrable, il existe un voisinage de \mathcal{T} dans lequel le système est conjugué à un système standard (restreint à un voisinage de \mathcal{T}). Son étude est en fait plus générale - résonance d'ordre quelconque - et conduit à une forme dans

laquelle le facteur λ dépend de x , mais dans notre cas cette dépendance se supprime par une normalisation supplémentaire.

3.2. Section et application de retour

Ce paragraphe est consacré à la détermination d'une forme normale pour l'application de retour associée à une section convenable au voisinage d'un tore standard. Pour conserver le cadre le plus général possible, nous donnons une construction directe, sans utiliser la nature lagrangienne des variétés invariantes.

3.2.1. Section

Comme dans le cas du tore standard, $\omega_m \neq 0$, et la sous-variété \mathcal{L} d'équation $x_m = 0$ est transverse au champ X_G dans un voisinage \mathcal{V}' de \mathcal{T} . Il est aussi commode de se restreindre au niveau $\mathcal{G} = G^{-1}(0)$, qui contient évidemment le tore \mathcal{T} et ses variétés invariantes. Le théorème des fonctions implicites entraîne l'existence d'un voisinage \mathcal{V}'' de \mathcal{T} dans lequel \mathcal{G} est régulière et définie par une équation analytique de la forme

$$y_m = -\frac{1}{\omega_m}(\bar{\omega} | \bar{y}) + Y(x, \bar{y}, u, s)$$

où $\bar{y} = (y_1, \dots, y_{m-1})$, $\bar{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_{m-1})$, et où Y est d'ordre au moins 2 en (\bar{y}, u, s) .

La surface de section sera l'intersection $\mathcal{S} = \mathcal{L} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{V}$, avec $\mathcal{V} = \mathcal{V}' \cap \mathcal{V}''$. Elle est régulière par transversalité de \mathcal{G} et \mathcal{L} dans \mathcal{V} , et il est possible de choisir sur \mathcal{S} les coordonnées (\bar{x}, \bar{y}, u, s) , avec $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{m-1})$, qui l'identifient à un voisinage du tore $\Theta = \{\bar{y} = 0, s = u = 0\}$ dans \mathbf{V}^{2m} . Avec cette identification, $\Theta = \mathcal{T} \cap \mathcal{S}$.

3.2.2. Application de retour

L'application de retour f associée à \mathcal{S} est définie dans un voisinage de Θ dans \mathcal{S} , sa forme est décrite dans le lemme suivant.

LEMME. – *Il existe sur la section \mathcal{S} un système de coordonnées $(\theta, \rho, \sigma, \iota)$, avec $\theta \in \mathbf{T}^{m-1}$, $\rho \in \mathbf{R}^{m-1}$, $(\sigma, \iota) \in \mathbf{R}^2$, dans lequel $\Theta = \{\rho = 0, \sigma = \iota = 0\}$, et tel que l'application de retour s'écrive*

$$f(\theta, \rho, \sigma, \iota) = (\theta + \vartheta(\rho), \rho, k\sigma, l\iota) + r(\theta, \rho, \sigma, \iota)$$

où c et $r = (r_\theta, r_\rho, r_\sigma, r_\iota)$ sont définies et analytiques dans un voisinage \mathcal{O} de Θ , et vérifient de plus les conditions (*) suivantes :

- (i) $k < 1$, $l = 1/k > 1$

- (ii) r est d'ordre au moins 2 en (ρ, σ, ι) (i.e. Θ est invariant par f)
- (iii) $r_\rho = 0$ et $r_\iota = 0$ dans $\{\rho = 0, \iota = 0\} \cap \mathcal{O}$ (i.e. $W^s(\Theta) = \{\rho = 0, \iota = 0\} \cap \mathcal{O}$)
- (iv) $r_\rho = 0$ et $r_\sigma = 0$ dans $\{\rho = 0, \sigma = 0\} \cap \mathcal{O}$ (i.e. $W^u(\Theta) = \{\rho = 0, \sigma = 0\} \cap \mathcal{O}$)
- (v) $r_\theta = 0$ dans $W^s(\Theta) \cup W^u(\Theta)$
- (vi) $\text{Sup} \{|\partial_\rho \vartheta(p)|, p \in \mathcal{O}\} < 1,$
- (vii) si $\alpha > 0$ est fixé, $\text{Sup} \{\|\partial_{\iota v}^2 r_w(p)\|, p \in \mathcal{O}\} < \alpha,$ où l'indice v décrit l'ensemble $\{\rho, \sigma\}$ et l'indice w l'ensemble $\{\theta, \rho, \sigma\}.$

Les conditions (ii) et (iii) traduisent seulement le redressement des variétés stable et instable *du tore* dans le système de coordonnées choisi, alors que la condition (iv) traduit le redressement des variétés invariantes *des points du tore*, données ici par les équations $\theta = cte$ dans les variétés $W^s(\Theta)$ et $W^u(\Theta)$.

La démonstration se fait en cinq étapes.

a) Evaluation du temps de retour. – On utilise d'abord le système associé au hamiltonien approché suivant, quadratique dans \mathbf{V}^{2m+2} :

$$G_a(x, y, s, u) = (\omega | y) + \frac{1}{2}(y | My) + \lambda.su$$

qui définit les équations linéarisées $\dot{x} = \omega + My, \dot{y} = 0, \dot{s} = -\lambda s, \dot{u} = \lambda u$ dont l'intégration est immédiate :

$$x = x_0 + t(\omega + My_0), \quad y = y_0, \quad s = s_0 e^{-\lambda t}, \quad u = u_0 e^{\lambda t}$$

Le tore \mathcal{T} est donc aussi invariant pour le système défini par G_a et la surface \mathcal{L} est encore transverse au champ X_a au voisinage de \mathcal{T} . Le temps de retour associé à cette surface s'écrit, dans les coordonnées (\bar{x}, y, s, u) de \mathcal{L}

$$\tau_a(\bar{x}, y, s, u) = \frac{2\pi}{\omega_m + \eta(y)}$$

avec $\eta(y) = (My)_m$, dans le voisinage \mathcal{U}' de $\mathcal{T} \cap \mathcal{L}$ défini dans \mathcal{L} par $\omega_m + \eta(y) \neq 0$.

Le tore \mathcal{T} étant invariant par les systèmes définis par G et G_a , on vérifie facilement que le temps de retour τ associé à \mathcal{L} pour le système G ne diffère de τ_a que par des termes d'ordre au moins 2 en y, s, u (paramètres de distance au tore). On obtient donc

$$\tau(\bar{x}, y, s, u) = \frac{2\pi}{\omega_m + \eta(y)} + O_2(y, s, u)$$

dans un voisinage $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$ de $\mathcal{T} \cap \mathcal{L}$, dans lequel τ est défini et analytique (cette condition étant garantie en imposant à X_G d'être transverse à \mathcal{L} dans \mathcal{U}).

b) *Evaluation de l'application de retour.* – L'application de retour ϕ associée à \mathcal{L} est définie par $\phi(p) = \Phi(\tau(p), p)$, où Φ est le flot du système associé à G et $p = (\bar{x}, y, s, u) \in \mathcal{U}$, elle est donc analytique dans \mathcal{U} . Si ϕ_a est l'application de retour pour le système approché, et Φ_a son flot, on obtient

$$\phi(p) - \phi_a(p) = (\Phi(\tau(p), p) - \Phi(\tau_a(p), p)) + (\Phi(\tau_a(p), p) - \Phi_a(\tau_a(p), p))$$

et on vérifie facilement que les deux termes sont d'ordre au moins 2 en (y, s, u) .

On obtient d'autre part

$$\phi_a(p) = (\bar{x} + \tau_a(p)(\bar{\omega} + \overline{My}), y, e^{-\lambda\tau_a(p)} s, e^{\lambda\tau_a(p)} u)$$

avec $\overline{My} = ((My)_1, \dots, (My)_{m-1})$, ce qui conduit à l'expression

$$\phi_a(p) = (\bar{x} + \nu(y), y, e^{-\lambda\tau} s, e^{\lambda\tau} u) + R_a(p)$$

avec $\tau = 2\pi/\omega_m$, $\nu(y) = \tau_a(p)(\omega + \overline{My})$ et où R_a est d'ordre au moins 2 en (y, s, u) . Il en résulte une expression analogue pour ϕ :

$$\phi(p) = (\bar{x} + \nu(y), y, e^{-\lambda\tau} s, e^{\lambda\tau} u) + R(p)$$

avec R d'ordre 2 en (y, s, u) .

On en déduit enfin l'expression de f par restriction de ϕ à $\mathcal{O} = \mathcal{U} \cap \mathcal{S}$. Il suffit donc de remplacer dans l'expression de ϕ le terme y_m par sa valeur en utilisant l'équation de \mathcal{G} obtenue en 3.2.1. On obtient, pour $q = (\bar{x}, \bar{y}, s, u) \in \mathcal{O}$:

$$f(q) = (\bar{x} + \vartheta_1(y), \bar{y}, k s, l u) + r_1(q)$$

avec $k = e^{-\lambda\tau}$, $l = e^{\lambda\tau}$, les fonctions ϑ_1 et r_1 se déduisant de ν et R par la substitution indiquée, en particulier r_1 est d'ordre 2 en (\bar{y}, s, u) .

c) *Redressement des variétés invariantes.* – On montre maintenant qu'il est possible de choisir de nouvelles coordonnées $(\bar{x}, \hat{y}, \sigma, \iota)$ telles que les variétés invariantes de Θ aient pour équations $(\hat{y} = 0, \iota = 0)$ et $(\hat{y} = 0, \sigma = 0)$.

Les variétés $W^s(\mathcal{T})$ et $W^u(\mathcal{T})$ sont contenues dans \mathcal{G} et transverses à la surface de section \mathcal{S} . On obtient donc les représentations paramétriques

analytiques \bar{w}^s et \bar{w}^u de $W^s(\Theta)$ et $W^u(\Theta)$, à partir de celles de $W^s(\mathcal{T})$ et $W^u(\mathcal{T})$, en supprimant la coordonnée d'ordre m de X^s, X^u, Y^s, Y^u et en exprimant la coordonnée d'ordre m de a et b en fonction des autres, ce qui est possible compte tenu des relations

$$x_m = a_m + X_m^s(a, s) = 0 \quad \text{et} \quad x_m = b_m + X_m^s(b, s) = 0$$

par inversion locale dans un voisinage du tore \mathcal{T} . On obtient donc les expressions

$$\bar{w}^s : \mathcal{O}^s \subset \mathbf{T}^{m-1} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{V}^{2m}$$

$$(\bar{a}, s) \mapsto \left(\bar{x} = \bar{a} + \bar{X}^s(\bar{a}, s), \bar{y} = \bar{Y}^s(\bar{a}, s), s, u = \bar{U}(\bar{a}, s) \right)$$

$$\bar{w}^u : \mathcal{O}^u \subset \mathbf{T}^{m-1} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{V}^{2m}$$

$$(\bar{b}, u) \mapsto \left(\bar{x} = \bar{b} + \bar{X}^u(\bar{b}, u), \bar{y} = \bar{Y}^u(\bar{b}, u), s = \bar{S}(\bar{b}, u), u \right)$$

avec $\bar{a} = (a_1, \dots, a_{m-1})$ et $\bar{b} = (b_1, \dots, b_{m-1})$, \mathcal{O}^s et \mathcal{O}^u étant des voisinages de $\mathbf{T}^{m-1} \times \{0\}$ dans $\mathbf{T}^{m-1} \times \mathbf{R}$.

On en déduit, par inversion des premières composantes dans les deux expressions, les fonctions analytiques $A(\bar{x}, s)$ et $B(\bar{x}, u)$ définies par

$$\bar{x} = A(\bar{x}, s) + \bar{X}^s(A(\bar{x}, s), s) = B(\bar{x}, u) + \bar{X}^u(B(\bar{x}, u), u)$$

Ceci permet de définir deux fonctions analytiques S_1, U_1 par

$$S_1(\bar{x}, u) = \bar{S}(B(\bar{x}, u), u), \quad U_1(\bar{x}, s) = \bar{U}(A(\bar{x}, s), s)$$

On définit alors un premier difféomorphisme analytique au voisinage de Θ , tangent à l'ordre 1 à l'identité sur Θ , par l'expression

$$(\bar{x}, \bar{y}, s, u) \mapsto \left(\bar{x}, \bar{y}, \sigma = s - S_1(\bar{x}, u), \iota = u - U_1(\bar{x}, s) \right)$$

et on vérifie que les variétés $W^s(\Theta)$ et $W^u(\Theta)$ sont contenues dans les espaces d'équations respectives $\iota = 0$ et $\sigma = 0$. Dans ces nouvelles coordonnées, les représentations paramétriques précédentes deviennent donc :

$$\tilde{w}^s : (\bar{a}, \sigma) \mapsto (\bar{x} = \bar{a} + \tilde{X}^s(\bar{a}, \sigma), \bar{y} = \tilde{Y}^s(\bar{a}, \sigma), \sigma, 0)$$

$$\tilde{w}^u : (\bar{b}, \iota) \mapsto (\bar{x} = \bar{b} + \tilde{X}^u(\bar{b}, \iota), \bar{y} = \tilde{Y}^u(\bar{b}, \iota), 0, \iota)$$

On définit comme précédemment les fonctions $A'(\bar{x}, \sigma)$ et $B'(\bar{x}, \iota)$ par inversion des premières composantes, et on en déduit dans un voisinage de Θ la fonction analytique

$$Y_1(\bar{x}, \sigma, \iota) = \tilde{Y}^s(A'(\bar{x}, \sigma), \sigma) + \tilde{Y}^u(B'(\bar{x}, \iota), \iota)$$

On en déduit un second difféomorphisme analytique au voisinage de Θ , tangent à l'ordre 1 à l'identité sur Θ , par l'expression

$$(\bar{x}, \hat{y}, s, u) \mapsto \left(\bar{x}, \hat{y} = \bar{y} - Y_1(\bar{x}, \sigma, \iota), \sigma, \iota \right)$$

et on vérifie que les variétés $W^s(\Theta)$ et $W^u(\Theta)$ sont maintenant données respectivement par les équations $(\hat{y} = 0, \iota = 0)$ et $(\hat{y} = 0, \sigma = 0)$.

d) Factorisation de la rotation. – On met maintenant en évidence un nouveau système de coordonnées $(\theta, \hat{y}, \sigma, \iota)$ dans lequel la composante angulaire de l'application de retour est une rotation constante dans la réunion des variétés invariantes. Il suffit pour cela de faire une première transformation

$$(\bar{x}, \hat{y}, s, u) \mapsto \left(\hat{x}(\bar{x}, \sigma) = A'(\bar{x}, \sigma), \hat{y}, \sigma, \iota \right)$$

où \hat{x} s'obtient en inversant la première coordonnée de la nouvelle représentation paramétrique de $W^s(\Theta)$, qui s'écrit dans les coordonnées (\bar{x}, \hat{y}, s, u) :

$$\hat{w}^s : (\bar{a}, \sigma) \mapsto \left(\bar{x} = \bar{a} + \tilde{X}^s(\bar{a}, \sigma), 0, \sigma, 0 \right)$$

Rappelons que la composante angulaire de la dynamique initiale sur $W^s(\mathcal{T})$ est donné par $\dot{a} = \omega$. Il en résulte, compte tenu de la forme de \bar{a} , que sur $W^s(\Theta)$:

$$\dot{\bar{a}} = \bar{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_{m-1})$$

et donc dans le système $(\hat{x}, \hat{y}, \sigma, \iota)$, $\dot{\hat{x}} = \bar{\omega}$ sur la variété $W^s(\Theta)$.

Dans ce nouveau système, la représentation de $W^u(\Theta)$ a pour expression

$$\hat{w}^u : (\bar{b}, \iota) \mapsto \left(\hat{x} = \bar{b} + \hat{X}^u(\bar{b}, \iota), 0, 0, \iota \right)$$

avec $\hat{X}^u(\bar{b}, 0) \equiv 0$. Là encore la composante angulaire de la dynamique s'écrit $\dot{\bar{b}} = \bar{\omega}$, et l'inversion de la première composante $\bar{b} = B''(\hat{x}, \iota)$ conduit à la transformation

$$(\hat{x}, \hat{y}, s, u) \mapsto \left(\theta = B''(\bar{x}, \iota), \hat{y}, \sigma, \iota \right)$$

dans laquelle $\dot{\theta} = \bar{\omega}$ sur $W^u(\Theta)$ par construction, et aussi sur $W^s(\Theta)$ puisque $\theta \equiv \hat{x}$ sur $W^s(\Theta)$. Ceci termine donc la construction du système $(\theta, \hat{y}, \sigma, \iota)$.

e) Normalisation finale. – La transformation des variables (\bar{x}, \bar{y}, s, u) en $(\theta, \hat{y}, \sigma, \iota)$ est par construction un difféomorphisme analytique au voisinage

de Θ , tangent à l'ordre 1 à l'identité sur Θ . L'application de retour f a donc pour expression, dans ces nouvelles coordonnées :

$$f(\theta, \hat{y}, \sigma, \iota) = \left(\theta + \vartheta_2(\hat{y}), \rho, k\sigma, l\iota \right) + r(\theta, \hat{y}, \sigma, \iota)$$

et les points b,c,d entraînent que les conditions (i), -, (v) sont satisfaites.

La condition (vi) découle d'une simple normalisation de \hat{y} . Posons en effet $\rho = \delta \hat{y}$, $\delta > 0$, la composante angulaire f_θ s'écrit dans le nouveau système $(\theta, \rho, \sigma, \iota)$:

$$f_\theta(\theta, \rho, \sigma, \iota) = \theta + \vartheta(\rho)$$

avec $\vartheta(\rho) = \vartheta_2(\rho/\delta)$ et $\frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \hat{y}}$, il suffit donc de choisir δ assez grand pour que la condition (vi) soit satisfaite.

De la même manière, la condition (vii) s'obtient par simple changement d'échelle, linéaire en ι . Ceci termine la démonstration du lemme. \square

4. UN λ -LEMME POUR LES TORES STANDARD

L'hyperbolicité normale du tore de section Θ est seulement partielle, ce qui interdit le recours à la forme usuelle du λ -lemme. Nous en donnons maintenant une forme faible, au sens où n'interviennent que des arcs dont la pente au point d'intersection avec la variété stable est contenue dans un secteur angulaire convenable. Comme pour les tores standard, nous verrons que la propriété d'obstruction en découle facilement.

On note comme précédemment $\mathbf{V}^{2m} = \mathbf{T}^{m-1} \times \mathbf{R}^{m-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, et $(\theta, \rho, \sigma, \iota)$ les coordonnées canoniques de \mathbf{V}^{2m} . On note Θ le tore d'équations $(\rho = 0, \sigma = \iota = 0)$, E^s et E^u les sous-espaces d'équations respectives $(\rho = 0, \iota = 0)$ et $(\rho = 0, \sigma = 0)$. On notera d la distance produit usuelle dans \mathbf{V}^{2m} , $|\cdot|$ la norme produit usuelle dans \mathbf{R}^i , pour un entier i quelconque, et $\|\cdot\|$ la norme associée dans l'espace des matrices $\mathcal{M}_{ij}(\mathbf{R})$, pour deux entiers i et j quelconques.

Dans la suite interviendront deux types d'ouverts \mathcal{V}_ν et $\mathcal{W}_{\nu, \nu'}$ ($\nu > 0, \nu' > 0$), voisinages du tore Θ et de la variété instable $W^u(\Theta)$ respectivement, définis par $\mathcal{V}_\nu = \{p \in \mathbf{V}^{2m} \mid d(p, \Theta) < \nu\}$ et $\mathcal{W}_{\nu, \nu'} = \{p \in \mathcal{V}_\nu \mid d(p, W^u(\Theta)) < \nu'\}$. Nous commençons par quelques définitions destinées à faciliter les énoncés et calculs ultérieurs.

4.1. DÉFINITIONS. – Sauf mention contraire, un *arc* sera une application de classe C^1 définie sur un intervalle de \mathbf{R} . On appellera *paramétrisation* d'un arc γ tout arc ayant son image contenue dans celle de γ . On appellera *paramétrisation normale* d'un arc γ à valeurs dans \mathbf{V}^{2m} une paramétrisation ζ de la forme suivante

$$\zeta :] - \hat{\iota}, \hat{\iota}[\rightarrow \mathcal{V}_\nu \quad \iota \mapsto (\zeta^\theta, \zeta^\rho, \zeta^\sigma, \iota)$$

Une telle paramétrisation n'existe pas toujours, si elle existe, elle est unique lorsque son domaine est donné. L'image d'une paramétrisation normale peut être vue comme un graphe au dessus de l'axe des ι .

En général, un voisinage \mathcal{V}_κ sera fixé, on ne considèrera que des arcs γ à valeurs dans \mathbf{V}^{2m} qui vérifient $\gamma(0) \in E^s \cap \mathcal{V}_\kappa$, et on s'intéressera en particulier à la composante connexe de $\gamma(0)$ dans l'intersection de l'image de γ (ou d'une restriction convenable de γ) avec \mathcal{V}_κ . En particulier, on dira qu'un arc γ est *adapté* à \mathcal{V}_κ lorsque γ possède une paramétrisation normale ζ de domaine $]-\kappa, \kappa[$, cette dernière sera dite *paramétrisation adaptée* à \mathcal{V}_κ , et la composante précédente est alors l'image de ζ .

Soit $\alpha = (\alpha^\theta, \alpha^\rho, \alpha^\sigma, \alpha^\iota) \in \mathbf{R}^{m-1} \times \mathbf{R}^{m-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$. On appellera *déviaton de α* le réel

$$\mathcal{D}(\alpha) = \frac{\text{Sup} (|\alpha^\theta|, |\alpha^\rho|, |\alpha^\sigma|)}{|\alpha^\iota|}$$

Soit γ un arc de I dans \mathbf{V}^{2m} . On appellera *déviaton de γ* le réel

$$\mathcal{D}(\gamma) = \text{Sup} \{ \mathcal{D}(\gamma'(x)), x \in I \}$$

La déviaton d'un arc γ n'est donc définie que lorsque la dérivée de la composante γ^ι ne s'annule pas dans I . Dans ces conditions l'arc γ possède une paramétrisation normale ζ de même domaine, et les déviatons de γ et de ζ sont égales.

Pour $\delta > 0$, un arc γ à valeurs dans \mathbf{V}^{2m} sera dit *δ -redressé* lorsque sa déviaton $\mathcal{D}(\gamma)$ est bien définie et vérifie $\mathcal{D}(\gamma) \leq \delta$. Un arc γ adapté à \mathcal{V}_κ sera dit *δ -redressé dans \mathcal{V}_κ* lorsque sa paramétrisation adaptée à \mathcal{V}_κ est δ -redressée. Une application immédiate de l'inégalité des accroissements finis montre que si $\gamma = (\gamma^\theta, \gamma^\rho, \gamma^\sigma, \gamma^\iota)$ est un arc défini dans I et à valeurs dans \mathcal{V}_κ , δ -redressé et tel que $\gamma(0) \in E^s$, et si $\kappa < 1$ (ce qui sera toujours le cas),

$$\text{Sup}_{x \in I} (|\gamma^\theta(x) - \gamma^\theta(0)|, |\gamma^\rho(x)|, |\gamma^\sigma(x) - \gamma^\sigma(0)|) \leq \delta$$

Le comportement C^0 des arcs est donc clairement relié au δ -redressement.

Pour $\kappa > 0$, on notera enfin $\mathcal{C}(\kappa)$ l'ensemble des arcs γ à valeurs dans \mathbf{V}^{2m} , qui vérifient $\gamma(0) \in E^s \cap \mathcal{V}_\kappa$ et, si $\gamma'(0) = (\alpha^\theta, \alpha^\rho, \alpha^\sigma, \alpha^\iota)$, $|\alpha^\rho|/|\alpha^\iota| < 1$ (avec évidemment $|\alpha^\iota| \neq 0$).

4.2. LE λ -LEMME. – Soit f une application analytique définie dans un voisinage \mathcal{V}_ν de Θ par

$$f(\theta, \rho, \sigma, \iota) = (\theta + \vartheta(\rho), \rho, k\sigma, l\iota) + r(\theta, \rho, \sigma, \iota)$$

On suppose que f vérifie dans \mathcal{V}_ν les hypothèses (*) du paragraphe 3.2.2. Le tore Θ d'équations $\rho = 0, \iota = \sigma = 0$ est donc invariant par f , et a pour variétés invariantes $W^s(\Theta) = E^s \cap \mathcal{V}_\nu$ et $W^u(\Theta) = E^u \cap \mathcal{V}_\nu$.

Il existe $\kappa_0 \in]0, \nu[$ tel que si $\kappa \in]0, \kappa_0[$, pour tout arc $\gamma \in \mathcal{C}(\kappa)$ et tout $\delta > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que si $n \geq N$, l'arc $\gamma_n = f^n \circ \gamma$ est adapté à \mathcal{V}_κ et δ -redressé dans \mathcal{V}_κ .

Démonstration. – Elle est plus délicate que celle du λ -lemme classique, mais elle en suit les grandes lignes. Elle se fait en quatre étapes.

a) *Hypothèses.* – Soient $k_0 \in]k, 1[$, $l_0 \in]1, l[$, $k_1 = k_0 - k > 0$ et $l_1 = l - l_0 > 0$. Le reste r étant d'ordre 2 en (ρ, σ, ι) , il est possible de trouver $\kappa_0 \in]0, \text{Inf}(\nu, (1 - k_0)/4)[$ tel que pour $\kappa \in]0, \kappa_0[$, la norme uniforme M de la dérivée Dr dans \mathcal{V}_κ vérifie

$$4M < \text{Inf}(k_1, l_1) \quad (\text{h.1})$$

et

$$\frac{1 + 2M}{l - 4M} < k_0 \quad (\text{h.2})$$

On notera en particulier que $\kappa < (1 - k_0)/4 < 1$. On peut aussi supposer que si $\kappa \leq \kappa_0$,

$$|r_\sigma(p)| < k_1|p'| \quad (\text{h.3})$$

pour tout $p = (\theta, \rho, \sigma, \iota) \in \mathcal{V}_\kappa$, avec $p' = (\rho, \sigma, \iota)$.

Les dérivées $\partial_\iota r_\theta, \partial_\iota r_\rho, \partial_\iota r_\sigma$, étant d'ordre 1 en (ρ, σ, ι) , il existe enfin une constante $K \geq 0$ telle que pour tout $\kappa \leq \kappa_0$,

$$\|\partial_\iota r_\theta(p)\| \leq K|p'|, \quad \|\partial_\iota r_\rho(p)\| \leq K|p'|, \quad \|\partial_\iota r_\sigma(p)\| \leq K|p'| \quad (\text{h.4})$$

lorsque $p \in \mathcal{V}_\kappa$.

b) *Inégalités de récurrence.* – Réécrivons d'abord l'application f sous la forme

$$f : \begin{bmatrix} \theta \\ \rho \\ \sigma \\ \iota \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \theta + \vartheta(\rho) & + & r_\theta(\theta, \rho, \sigma, \iota) \\ \rho & + & r_\rho(\theta, \rho, \sigma, \iota) \\ k\sigma & + & r_\sigma(\theta, \rho, \sigma, \iota) \\ l\iota & + & r_\iota(\theta, \rho, \sigma, \iota) \end{bmatrix} \quad (1)$$

La différentielle de f au point $p \in \mathcal{V}_\nu$ a pour matrice

$$D_p f = \begin{bmatrix} I + r_\theta & \partial_\rho(\vartheta + r_\theta) & \partial_\sigma r_\theta & \partial_\iota r_\theta \\ r_\rho & I + \partial_\rho r_\rho & \partial_\sigma r_\rho & \partial_\iota r_\rho \\ r_\sigma & \partial_\rho r_\sigma & k + \partial_\sigma r_\sigma & \partial_\iota r_\sigma \\ r_\iota & \partial_\rho r_\iota & \partial_\sigma r_\iota & l + \partial_\iota r_\iota \end{bmatrix} (p) \tag{2}$$

où I est la matrice identité d'ordre $m - 1$.

Considérons un voisinage \mathcal{W} de Θ , contenu dans \mathcal{V}_{κ_0} , et supposons que pour $p \in \mathcal{W}$,

$$\text{Sup} (\|\partial_\iota r_\theta(p)\|, \|\partial_\iota r_\rho(p)\|, \|\partial_\iota r_\sigma(p)\|) \leq \mu \tag{3}$$

Soit η un arc à valeurs dans \mathbf{V}^{2m} , défini dans un intervalle I , et soit $x \in I$ tel que $\eta(x) \in \mathcal{W}$. On note $\eta_1 = f \circ \eta$, $\beta = \eta'(x)$, et $\beta_1 = \eta'_1(x)$. La forme de la jacobienne de f au point $\eta(x)$ entraîne alors les inégalités suivantes

$$\left. \begin{aligned} |\beta_1^\theta| &\leq (1 + M)|\beta^\theta| + (1 + M)|\beta^\rho| + M|\beta^\sigma| + \mu|\beta^\iota| \\ |\beta_1^\rho| &\leq M|\beta^\theta| + (1 + M)|\beta^\rho| + M|\beta^\sigma| + \mu|\beta^\iota| \\ |\beta_1^\sigma| &\leq M|\beta^\theta| + M|\beta^\rho| + (k + M)|\beta^\sigma| + \mu|\beta^\iota| \\ |\beta_1^\iota| &\geq -M|\beta^\theta| - M|\beta^\rho| - M|\beta^\sigma| + (l - M)|\beta^\iota| \end{aligned} \right\} \tag{I}$$

que nous utiliserons à plusieurs reprises, dans cette partie et la suivante.

On montre d'abord dans le paragraphe c que les itérés $\gamma_n = f \circ \gamma$ d'un arc $\gamma \in \mathcal{C}(\kappa)$ se redressent au point $\gamma_n(0)$, au sens où la déviation du vecteur tangent $\gamma'_n(0)$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Pour exploiter les inégalités précédentes, on doit ensuite mettre en évidence un voisinage \mathcal{W} convenable, dans lequel le majorant μ peut être contrôlé. On étend ensuite la propriété de redressement par continuité à un voisinage de $\gamma(0)$, contenu dans le voisinage \mathcal{W} choisi, et on en déduit le redressement de l'arc complet (paragraphe d).

c) *Redressement des itérés du vecteur tangent $\gamma'(0)$.* – On suppose maintenant l'arc γ dans $\mathcal{C}(\kappa)$, pour κ fixé dans $[0, \kappa_0]$. On notera $a_n = (\theta_n, \rho_n, \sigma_n, \iota_n)$ les composantes du point d'intersection a_n de γ_n avec $W^s(\Theta)$, et $\alpha_n = (\alpha_n^\theta, \alpha_n^\rho, \alpha_n^\sigma, \alpha_n^\iota)$ celles du vecteur tangent au point a_n à l'arc γ_n .

c.1) *Itération du point a_n .* – Par définition, le point a_0 est dans l'ouvert \mathcal{V}_κ . D'après (h.3), si $p = (\theta, \rho, \sigma, \iota) \in W^s(\Theta)$,

$$|r_\sigma(p)| < k_1 |\sigma| \tag{4}$$

La coordonnée σ_n de a_n vérifie la relation de récurrence $\sigma_{n+1} = k\sigma_n + r_\sigma(a_n)$ et il résulte donc de (4) l'inégalité $|\sigma_{n+1}| < k_0|\sigma_n|$, soit

$$|\sigma_n| < k_0^n |\sigma_0| \leq k_0^n \quad (5)$$

En particulier $a_n \in \mathcal{V}_\kappa$ pour tout entier n .

c.2) *Jacobienne sur $W^s(\Theta)$.* – On exploite maintenant les hypothèses (iii) et (v). Lorsque p est sur la variété stable $W^s(\Theta)$, on vérifie que

$$\left. \begin{array}{l} r_\theta(p) = 0, \quad r_\rho(p) = 0, \quad r_i(p) = 0 \\ \text{et} \\ \partial_\sigma r_\theta(p) = 0, \quad \partial_\sigma r_\rho(p) = 0, \quad \partial_\sigma r_i(p) = 0 \end{array} \right\} \quad (6)$$

on obtient donc la jacobienne

$$D_p f = \begin{bmatrix} I & \partial_\rho(\vartheta + r_\theta) & 0 & \partial_i r_\theta \\ 0 & I + \partial_\rho r_\rho & 0 & \partial_i r_\rho \\ r_\sigma & \partial_\rho r_\sigma & k + \partial_\sigma r_\sigma & \partial_i r_\sigma \\ 0 & \partial_\rho r_i & 0 & l + \partial_i r_i \end{bmatrix} (p) \quad (7)$$

c.3) *Stabilité de $\mathcal{C}(\kappa)$.* – Comme $a_n \in W^s(\Theta)$ pour tout n , les composantes α_n^ρ et α_n^i vérifient les relations de récurrence suivantes

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{n+1}^\rho = (I + \partial_\rho r_\rho(a_n)) \alpha_n^\rho + \partial_i r_\rho(a_n) \alpha_n^i \\ \alpha_{n+1}^i = (\partial_\rho r_i(a_n)) \alpha_n^\rho + (l + \partial_i r_i(a_n)) \alpha_n^i \end{array} \right| \quad (8)$$

Comme $a_n \in \mathcal{V}_\kappa$, on en déduit l'inégalité

$$\frac{|\alpha_{n+1}^\rho|}{|\alpha_{n+1}^i|} \leq \frac{(1+M) \frac{|\alpha_n^\rho|}{|\alpha_n^i|} + M}{l - M - M \frac{|\alpha_n^\rho|}{|\alpha_n^i|}} \quad (9)$$

et on voit donc par récurrence que $\frac{|\alpha_n^\rho|}{|\alpha_n^i|} < 1$ pour tout entier n (puisque la relation (h.2) entraîne en particulier $(1+2M)/(l-2M) < 1$). On en déduit que $\gamma_n \in \mathcal{C}(\kappa)$.

c.4) *Redressement de $\gamma_n'(0)$.* – Comme $a_n \in \mathcal{V}_\kappa$ pour tout n , on déduit du point précédent, de la condition (vi) et de l'expression de la jacobienne

les inégalités de récurrence

$$\left. \begin{aligned} \frac{|\alpha_{n+1}^\theta|}{|\alpha_{n+1}^t|} &\leq \frac{1}{l-2M} \left(M \frac{|\alpha_n^\theta|}{|\alpha_n^t|} + (1+M) \frac{|\alpha_n^\rho|}{|\alpha_n^t|} + |\partial_t r_\theta(a_n)| \right) \\ \frac{|\alpha_{n+1}^\rho|}{|\alpha_{n+1}^t|} &\leq \frac{1}{l-2M} \left((1+M) \frac{|\alpha_n^\rho|}{|\alpha_n^t|} + |\partial_t r_\rho(a_n)| \right) \\ \frac{|\alpha_{n+1}^s|}{|\alpha_{n+1}^t|} &\leq \frac{1}{l-2M} \left(M \frac{|\alpha_n^\theta|}{|\alpha_n^t|} + M \frac{|\alpha_n^\rho|}{|\alpha_n^t|} \right. \\ &\quad \left. + (k+M) \frac{|\alpha_n^s|}{|\alpha_n^t|} + |\partial_t r_\sigma(a_n)| \right) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Comme $a_n \in W^s(\Theta)$, les relations (h.4) et (5) entraînent les majorations

$$|\partial_t r_\theta(a_n)| \leq K k_0^n, \quad |\partial_t r_\rho(a_n)| \leq K k_0^n, \quad |\partial_t r_\sigma(a_n)| \leq K k_0^n \quad (11)$$

On déduit de (10) et (11) l'inégalité de récurrence suivante sur les déviations :

$$\mathcal{D}(\alpha_{n+1}) \leq \frac{1}{l-2M} \left[(1+3M) \mathcal{D}(\alpha_n) + K k_0^n \right] \leq k_0 \mathcal{D}(\alpha_n) + K k_0^n \quad (12)$$

qui entraîne

$$\mathcal{D}(\alpha_n) \leq k_0^n (\mathcal{D}(\alpha_0) + K(n+1)) \quad (13)$$

Comme $k_0 < 1$, on en déduit la convergence annoncée : $\lim \mathcal{D}(\alpha_n) = 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

d) Redressement des itérés de l'arc γ . – On donne maintenant un arc $\gamma \in \mathcal{C}(\kappa)$, et on fixe $\delta > 0$.

d.1) Choix du voisinage \mathcal{W} . – On exploite les conditions (iv) et (v). On vérifie que si $p \in W^u(\Theta)$,

$$\partial_t r_\theta(p) = 0, \quad \partial_t r_\rho(p) = 0, \quad \partial_t r_\sigma(p) = 0 \quad (14)$$

Pour $\delta_1 \in]0, \delta[$ (à choisir ultérieurement), on peut donc par continuité mettre en évidence un voisinage \mathcal{W} de la variété instable dans \mathcal{V}_κ , de la forme $\mathcal{W}_{\kappa, \kappa'} = \{p \in \mathcal{V}_\kappa \mid d(p, W^u(\Theta)) < \kappa'\}$, tel que pour $p \in \mathcal{W}$,

$$\|\partial_t r_\theta(p)\| < \delta_1, \quad \|\partial_t r_\rho(p)\| < \delta_1, \quad \|\partial_t r_\sigma(p)\| < \delta_1 \quad (15)$$

Notons que les majorations (h.1)-(h.4) sont aussi valables dans \mathcal{W} , puisque $\mathcal{W} \in \mathcal{V}_\kappa$.

Il sera en fait nécessaire d'estimer la taille de \mathcal{W} en fonction de δ . On précise d'abord le choix de δ_1 en fonction de δ

$$\delta_1 = \frac{(1 - k_0)\delta}{2} \quad (16)$$

On exploite ensuite l'hypothèse (vii). Notons toujours $M_1 = \text{Sup} \{ \|\partial_{ix}^2 r_y(p)\|, p \in \mathcal{V}_\kappa \}$, avec $x \in \{\rho, \sigma\}$ et $y \in \{\theta, \rho, \sigma\}$, on a supposé $M_1 < 1$. L'inégalité des accroissements finis montre que les inégalités (15) sont vérifiées lorsque $\delta_1 \geq M_1 \kappa'$, soit par exemple $\delta_1 = \kappa'$. Comme on a supposé $\kappa < (1 - k_0)/4$ (hypothèses a.), on obtient

$$\kappa \delta < \frac{(1 - k_0)\delta}{2} = \frac{\kappa'}{2} \quad (17)$$

ce qui sera utile par la suite.

d.2) *Entrée dans \mathcal{W} .* – On utilise maintenant le redressement des vecteurs tangents au point d'intersection a_n , en étendant cette propriété à un voisinage de a_n dans l'arc image $\tilde{\gamma}_n$. Il résulte de c.1. que le point a_n est dans \mathcal{W} pour n assez grand. On déduit alors de c.4. l'existence d'un entier N tel que le point a_N vérifie $d(a_N, \Theta) < \kappa'/2$, ce qui entraîne en particulier $a_N \in \mathcal{W}$, et tel que le vecteur tangent $\alpha_N = \gamma'_N(0)$ vérifie $\mathcal{D}(\alpha_N) < \delta/4$.

Par continuité, on en déduit l'existence d'un intervalle $I =]-\hat{l}, \hat{l}[$ et d'une paramétrisation normale η de γ_N , de domaine I , dont la déviation vérifie

$$\mathcal{D}(\eta) < \delta/2 \quad (18)$$

L'arc η est donc $\delta/2$ -redressé. Comme $a_N \in \mathcal{W}$, on peut choisir de plus l'intervalle I assez petit pour que l'image de l'arc η soit contenue dans \mathcal{W} , ce qu'on supposera désormais.

d.3) *Adaptation et redressement des itérés $\eta_n = f^{N+n} \circ \gamma$.* – Il est clair que l'on peut maintenant se limiter à l'étude des itérés $\eta_n = f^n \circ \eta$ de l'arc η . On notera $\eta_n = (\eta_n^\theta, \eta_n^\rho, \eta_n^\sigma, \eta_n^\iota)$ et $\eta'_n = (\beta_n^\theta, \beta_n^\rho, \beta_n^\sigma, \beta_n^\iota)$.

Supposons par récurrence que pour $0 \leq i \leq n$, l'arc η_i possède une paramétrisation normale ζ_i , définie sur un intervalle $I_i =]-\hat{l}_i, \hat{l}_i[$, (avec $\hat{l}_i = \text{Inf}(l_0^i \hat{l}, \kappa)$), dont l'image est contenue dans \mathcal{W} .

La dernière des inégalités de récurrence (\mathcal{I}) montre d'abord que

$$|\beta_{i+1}^\iota(\iota)| \geq (l - 4M)|\beta_i^\iota(\iota)| = l - 4M \quad (19)$$

pour tout $\iota \in I_i$ et tout $i \in \{0, \dots, n\}$. Comme $l - 4M \geq l_0$ (par (h.1)), on en déduit directement que l'arc η_{n+1} possède une paramétrisation normale définie sur l'intervalle $I_{n+1} =]-\hat{l}_{n+1}, \hat{l}_{n+1}[$, avec $\hat{l}_{n+1} = \text{Inf}(l_0^{n+1} \hat{l}, \kappa)$.

On déduit ensuite des inégalités (I) et de l'hypothèse de récurrence l'inégalité suivante sur les déviations

$$\mathcal{D}(\zeta_{i+1}) \leq \frac{1+M}{l-4M} \mathcal{D}(\zeta_i) + \delta_1 \leq k_0 \mathcal{D}(\zeta_i) + \delta_1 \quad (20)$$

pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$. Il en résulte que

$$\mathcal{D}(\zeta_{n+1}) \leq k_0^{n+1} \mathcal{D}(\zeta_0) + \delta_1(1+k_0+\dots+k_0^n) \leq k_0^{n+1} \mathcal{D}(\zeta_0) + \frac{\delta_1}{1-k_0} \quad (21)$$

Comme $\mathcal{D}(\zeta_0) = \mathcal{D}(\eta) < \delta/2$, et comme $\delta_1/(1-k_0) = \delta/2$, il en résulte que

$$\mathcal{D}(\zeta_{n+1}) < \delta \quad (22)$$

ce qui montre que l'arc ζ_{n+1} est δ -redressé.

On en déduit en particulier que

$$\begin{aligned} & \text{Sup} \{ |\zeta_{n+1}^\theta(\iota) - \zeta_{n+1}^\theta(0)|, |\zeta_{n+1}^\rho(\iota)|, |\zeta_{n+1}^\sigma(\iota) - \zeta_{n+1}^\sigma(0)|, \iota \in I_{n+1} \} \\ & \leq \kappa \delta < \kappa'/2 \end{aligned}$$

d'après (17). On sait d'autre part (itération sur $W^s(\Theta)$) que $d(\zeta_{n+1}(0), \Theta) < \kappa'/2$, il en résulte donc, compte tenu de la forme de \mathcal{W} , que l'image de l'arc ζ_{n+1} est contenue dans \mathcal{W} . Ceci justifie la récurrence.

Ce qui précède montre donc que tous les arcs η_n , $n \neq 0$, sont δ -redressés et d'image dans \mathcal{W} (car l'arc initial η vérifie ces deux conditions), et on déduit de la forme des intervalles I_n l'existence d'un entier n_1 tel que les arcs η_n soient adaptés à \mathcal{V}_κ pour tout $n \geq n_1$, ce qui termine la démonstration du λ -lemme.

5. OBSTRUCTION ET TORES STANDARD

On montre d'abord dans le premier paragraphe qu'un tore standard possède la propriété d'obstruction, et plus précisément que la section définie en 3 vérifie la condition d'obstruction (OS). L'idée essentielle ici est que *toute sous variété transverse à la section contient un arc satisfaisant aux hypothèses du λ -lemme*, et ceci quel que soit l'angle de transversalité. On en déduit l'existence d'orbites de transition le long d'une chaîne de tores possédant des formes normales standard. Dans le but d'obtenir de plus une estimation du temps de transition le long de la chaîne (partie 6), on évalue ensuite le temps d'obstruction relatif à un tore standard.

5.1. La propriété d'obstruction

On peut maintenant généraliser la démonstration 2.4 relative aux tores intégrables simples au cas des tores standard \mathcal{T} définis dans la partie 3. On montrera encore ici la condition (OS) (définie en 2.2) relative à la section \mathcal{S} et à l'application de retour étudiées en 3 et 4. On se place donc dans le système de coordonnées $(\theta, \rho, \sigma, \iota)$ de la partie 3, et on suppose que les conditions (*) du lemme 3.2.2 sont vérifiées dans le voisinage $\mathcal{V}_\kappa \subset \mathcal{S}$ de Θ .

On considère une variété $\Delta \subset \mathcal{V}_\kappa$, de dimension m , transverse à $W^s(\Theta)$ en un point a , on donne un point $b \in W^u(\Theta) \cap \mathcal{V}_\kappa$, et une boule $\mathcal{B} = B(b, \delta) \subset \mathcal{S}$. Comme pour le tore intégrable, l'intersection de Δ avec l'espace d'équation $\rho = 0$ est un arc, que l'on peut supposer normalement paramétré par une fonction γ définie sur un intervalle $I_0 =] - \hat{\iota}, \hat{\iota}[$ et à valeurs dans \mathcal{V}_κ .

Le voisinage \mathcal{V}_κ étant fixé, on introduit les conditions suivantes portant sur un arc arbitraire η :

- (OS1 $[\varepsilon]$) L'arc η est adapté à \mathcal{V}_κ et ε -redressé dans \mathcal{V}_κ .
- (OS2 $[b, \varepsilon']$) La norme de l'écart entre les composantes angulaires de b et du point $a_n = \eta(0)$ est majorée par ε' .

Une application immédiate de l'inégalité des accroissements finis montre que l'image de l'arc $\gamma_n = f^n \circ \gamma$ intersecte la boule \mathcal{B} dès que l'arc γ_n vérifie simultanément les conditions (OS1 $[\delta/2]$) et (OS2 $[b, \delta/2]$). Prouver la propriété d'obstruction revient donc à montrer que pour tout $\delta > 0$ et pour tout $b \in W^u(\Theta) \cap \mathcal{V}_\kappa$, l'ensemble $\mathcal{L}(\delta)$ des entiers n tels que γ_n vérifie (OS1 $[\delta/2]$) et (OS2 $[b, \delta/2]$) est non vide.

Le λ -lemme s'applique à l'arc γ , en effet $\gamma \in \mathcal{C}(\kappa)$ par construction même, puisque la composante en ρ de sa dérivée à l'origine est nulle. On en déduit facilement l'existence d'un entier n_0 tel que γ_n vérifie la première condition dès que $n \geq n_0$. D'autre part, la condition (v) sur l'application de retour (c.f. 3.2.2.), assure que la composante angulaire du point a_n (intersection de l'arc avec la variété stable) subit une rotation constante de vecteur $\vartheta(0) = 2\pi\bar{\omega}/\omega_m$ à chaque itération. Comme ω est non résonnant, on montre sans difficulté l'existence d'un ensemble infini \mathcal{M} d'indices n tels que γ_n vérifie la seconde condition *pour tout point* b . Il en résulte que les deux conditions sont simultanément vérifiées dans un ensemble $\mathcal{L}(\delta)$ infini. Ceci prouve la propriété d'obstruction pour les tores standard. Cette démonstration sera reprise sous une forme quantitative plus précise au paragraphe suivant.

Les tores apparaissant lors de la destruction de tores résonnants d'ordre 1 dans les perturbations analytiques de systèmes intégrables possèdent des voisinages sur lesquels le système s'identifie au système standard [18]. Il est clair que la démonstration précédente prouve aussi la propriété d'obstruction pour ce type de tores. D'après 2.2, ceci montre donc l'existence d'orbites de transition dans le cas des chaînes de tores apparaissant dans ces perturbations (mais ne résout pas le problème de l'existence de ces chaînes).

5.2. Le temps d'obstruction autour d'un tore

On considère encore le tore \mathcal{T} du système standard (\mathbf{V}^{2m+2}, G) , et la surface de section \mathcal{S} construite comme en 3 dans un voisinage de \mathcal{T} . On la munit des coordonnées $(\theta, \rho, \sigma, \iota)$ qui l'identifient à un voisinage du tore Θ dans \mathbf{V}^m . On fixe une fois pour toutes un voisinage \mathcal{V}_κ de Θ dans \mathcal{S} dans lequel les hypothèses et conclusions du λ -lemme sont vérifiées.

On définit maintenant une notion de temps d'obstruction *discret* en termes de nombres d'itérations relatives à l'application de section associée à \mathcal{S} . Il est ensuite facile de relier ce nombre au temps d'obstruction pour le *flot* du système initial.

5.2.1. Définitions

On notera $\mathcal{A}(\kappa)$ l'ensemble des arcs γ adaptés à \mathcal{V}_κ et 1/2-redressés dans \mathcal{V}_κ , vérifiant $d(\gamma(0), \Theta) < \kappa/2$.

Si $b = (b^\theta, 0, 0, b^\iota) \in W^u(\Theta)$ et $B(b, \delta) \subset \mathcal{V}_\kappa$, on dira qu'un arc γ d'image contenue dans \mathcal{V}_κ *intersecte complètement* la boule $B(b, \delta)$, lorsque γ possède une paramétrisation normale ζ définie sur un domaine contenant $]b^\iota - \delta, b^\iota + \delta[$, telle que $\zeta(]b^\iota - \delta, b^\iota + \delta[) \subset B(b, \delta)$.

Le *temps d'obstruction* $TO(\delta)$ relatif à $\delta < \kappa/2$ pour l'application de section f dans le voisinage \mathcal{V}_κ sera la borne inférieure des entiers n tels que *pour tout* $b = (b^\theta, 0, 0, b^\iota) \in \mathcal{V}_\kappa \cap W^u(\Theta)$ vérifiant $|b^\iota| < \kappa/2$, et *tout* arc γ dans $\mathcal{A}(\kappa)$, l'image de l'itéré $f^n \circ \gamma$ intersecte complètement la boule $B = B(b, \delta)$. Les conditions sur b et δ ne sont pas restrictives et sont seulement données pour assurer la cohérence de la définition.

On vérifie facilement que les arcs vérifiant les conditions (OS 1 $[\delta/2]$) et (OS2 $[b, \delta/2]$) intersectent complètement la boule $B(b, \delta)$, le temps d'obstruction sera calculé au moyen de cette propriété, la seconde condition devant être vérifiée pour tout b .

5.2.2. Condition diophantienne et ergodisation sur $W^s(\Theta)$

Il est clair que la seule condition de non-résonance sur ω ne permet pas de calculer le temps d'obstruction que l'on vient de définir, car elle ne donne pas un contrôle quantitatif sur la condition (OS2). On remplace maintenant cette hypothèse par la condition diophantienne familière suivante

$$\exists C > 0, \exists \varsigma > (m-1) \mid \forall j \in \mathbf{Z}^m, \quad |(\omega|j)| > \frac{C}{|j|^\varsigma} \quad (d)$$

Il faut d'ailleurs noter que cette condition n'est pas restrictive, puisque dans le cas général l'existence des tores partiellement hyperboliques qui entrent en jeu dans la formation des chaînes de transition suppose une condition de ce type sur le vecteur rotation [18].

L'étude de Dumas [9] donne alors directement des estimations sur le nombre d'itérations n nécessaires pour que γ_n vérifie la condition (OS2) *indépendamment du point b*. De manière générale, considérons une rotation g définie sur le tore \mathbf{T}^{m-1} par

$$g(\theta) = \theta + \vartheta$$

avec $\vartheta \in \mathbf{T}^{m-1}$ donné. Pour $\delta > 0$, on appellera *temps d'ergodisation de g relatif à δ* la borne inférieure des entiers n tels que la réunion $\bigcup_{1 \leq i \leq n} g^i(B(0, \delta))$ recouvre le tore \mathbf{T}^{m-1} (la distance sur \mathbf{T}^{m-1} est la distance issue de la norme produit sur \mathbf{R}^{m-1}). On déduit facilement de [9] que si g est la rotation associée à la composante angulaire de f sur $W^s(\Theta)$, i.e. $g(\theta) = \theta + \vartheta(0) = \theta + 2\pi\bar{\omega}/\omega_m$, le temps d'ergodisation de g relatif à δ est de la forme

$$\mathcal{E}(f, \delta) \sim c_0 \delta^{-(\varsigma+(m-1)/2)}$$

où c_0 est une constante ne dépendant que de la constante diophantienne C associée à ω , de m et de ς .

5.2.3. Calcul du temps d'obstruction

On démontre maintenant que c'est précisément ce temps d'ergodisation qui joue le rôle prépondérant dans le calcul du temps d'obstruction. Il faut pour cela reprendre en les affinant les calculs relatifs au λ -lemme. On conserve les notations précédentes, et on veut estimer le temps d'obstruction $TO(\delta)$ relatif à δ pour l'application f dans le voisinage \mathcal{V}_κ . On donne donc un arc γ arbitraire dans $\mathcal{A}(\kappa)$.

PROPOSITION. – *Pour κ assez petit, le temps d'obstruction $TO(\delta)$ vérifie l'inégalité*

$$TO(\delta) \leq c_0 \delta^{-(\varsigma+(m-1)/2)} - c_1 \text{Log } \delta$$

où c_0 et c_1 sont des constantes ne dépendant que de l'application f . En particulier, lorsque $\delta \rightarrow 0$, le terme prépondérant est le terme d'ergodisation :

$$TO(\delta) \leq c_2 \delta^{-(\varsigma+(m-1)/2)}$$

Démonstration. – Le calcul qui suit n'est certainement pas optimal, ce qui sera sans importance dans la suite de ce travail (il paraît d'ailleurs difficile de l'améliorer vraiment dans un cadre général). On donne d'abord un lemme permettant de simplifier l'étude, portant sur l'itération des arcs de $\mathcal{A}(\kappa)$.

a) LEMME. – On note $\mu = \text{Sup} \left(\|\partial_i r_v(p)\|, p \in \mathcal{V}_\kappa \right)$, où l'indice v varie dans l'ensemble $\{\theta, \rho, \sigma\}$, et on suppose $\kappa (< 1)$ assez petit pour que

$$\frac{k_0}{2} + \mu < \frac{1}{2} \quad (1)$$

Alors si $\gamma \in \mathcal{A}(\kappa)$, pour tout $n \geq 0$, l'arc $\gamma_n = f^n \circ \gamma$ est adapté à \mathcal{V}_κ et 1/2-redressé dans \mathcal{V}_κ , sa paramétrisation adaptée à \mathcal{V}_κ est donc encore dans $\mathcal{A}(\kappa)$.

Démonstration. – Il suffit de reprendre les estimations du λ -lemme. La dernière des inégalités (T) s'écrit ici, pour γ_1 :

$$|\beta_1^t(\iota)| \geq l - 4M \geq l_0$$

On en déduit facilement que γ_1 est adapté à \mathcal{V}_κ , on note ζ_1 sa paramétrisation adaptée. Les inégalités (T) entraînent d'autre part, comme pour (4. (20)), l'inégalité sur les déviations

$$\mathcal{D}(\zeta_1) \leq k_0 \mathcal{D}(\gamma_0) + \mu \leq \frac{k_0}{2} + \mu < \frac{1}{2}$$

ce qui prouve que l'arc γ_1 est 1/2-redressé.

Enfin, $d(\zeta_1(0), \Theta) < \kappa/2$ (itération sur la variété stable), et l'inégalité des accroissements finis montre que l'image de l'arc ζ_1 est contenue dans \mathcal{V}_κ , ce qui prouve que $\zeta \in \mathcal{A}(\kappa)$. On termine la démonstration par une récurrence évidente. \square

b) CONDITION (OS1). – On donne maintenant une estimation de la borne inférieure n_0 des entiers n pour lesquels γ_n vérifie la condition (OS1 [$\delta/2$]). On reprend les étapes de la démonstration du λ -lemme, le lemme a. permettant de plus ici un calcul explicite du domaine de l'arc intermédiaire η . On conserve les notations de la partie précédente.

On rappelle d'abord que le voisinage \mathcal{W} de la variété instable choisi en 4.d est de la forme $\mathcal{W}_{\kappa, \kappa'}$, avec ici, d'après (4. (16))

$$\kappa' = \frac{(1 - k_0)\delta}{2}$$

On doit donc mettre en évidence la borne inférieure N des entiers n tels que le point d'intersection $a_n = \gamma_n(0)$ vérifie $d(a_n, \Theta) < \kappa'/2$. Compte tenu de 4.2.c.1, on choisit N tel que $k_0^N \kappa/2 \leq \kappa'/2$. Comme $\kappa < (1 - k_0)/4$, il suffit de choisir $k_0^N < \delta$. On obtient donc

$$N \leq \frac{\text{Log } \delta}{\text{Log } k_0}$$

On peut maintenant évaluer le domaine de la paramétrisation normale η de γ_N dont l'image est contenue dans \mathcal{W} . Comme l'arc γ_N est 1/2-redressé, il est clair qu'on peut choisir $\text{Dom}(\eta) =] - \kappa', \kappa' [$. On en déduit immédiatement la borne inférieure n_1 des entiers n pour lesquels l'arc $\eta_n = f^n \circ \eta$ est adapté à \mathcal{V}_κ et $\delta/2$ redressé. Compte tenu de (4. (19)), n_1 est le plus petit entier tel que

$$l_0^{n_1} \kappa' \geq \kappa$$

On vérifie donc directement la majoration suivante

$$n_1 \leq - \frac{\text{Log } \delta}{\text{Log } l_0}$$

Il résulte enfin des points précédents que l'entier n_0 cherché vérifie la majoration

$$n_0 \leq -c_1 \text{Log } \delta$$

où c_1 est une constante ne dépendant que de l'application f .

c) TEMPS D'OBSTRUCTION. — Compte tenu de la définition du temps d'ergodisation, il est clair qu'on peut majorer le temps d'obstruction par la somme de n_0 et du temps d'ergodisation $\mathcal{E}(f, \delta/2)$. En effet, pour tout b choisi comme dans 5.2.1, il existe $n \in \{n_0, \dots, n_0 + \mathcal{E}(f, \delta/2)\}$ tel que la condition (OS2 $[b, \delta/2]$) soit vérifiée, donc l'arc itéré γ_n intersecte complètement la boule $B(b, \delta)$. On obtient donc enfin

$$TO(\delta) \leq c_0 \delta^{-(\varsigma + (m-1)/2)} - c_1 \log \delta$$

ce qui termine la preuve de la proposition. \square

6. TRANSITION LE LONG D'UNE CHAÎNE

Le but de cette partie est de donner une construction *aussi simple que possible* d'orbites de transition le long d'une chaîne, au moyen du λ -lemme précédent. On en déduit une première borne supérieure du temps de transition, générale mais extrêmement grossière.

6.1. Orbites de transition

On considère de nouveau un système analytique (M, H) , et on suppose maintenant que le niveau régulier $\mathcal{H} = H^{-1}(h)$ contient une chaîne de transition $(T_j)_{1 \leq j \leq J}$, telle que pour tout j existe un voisinage \mathcal{N}_j de T_j dans lequel le système s'identifie à un système standard. On donne comme précédemment dans chaque \mathcal{N}_j une surface de section \mathcal{S}_j contenue dans \mathcal{H} , et une application de retour f_j ayant la forme donnée dans la section 3, dans des coordonnées convenables $(\theta, \rho, \sigma, \iota)_{(j)}$ sur \mathcal{S}_j , et on note encore $\Theta_j = T_j \cap \mathcal{S}_j$. On choisit pour tout j une orbite hétérocline o_j contenue dans $W^u(T_j) \cap W^s(T_{j+1})$, cette orbite intersecte les sections \mathcal{S}_j et \mathcal{S}_{j+1} suivant deux suites de points, on note $q_j \in o_j \cap \mathcal{S}_j$ et $p_{j+1} \in o_j \cap \mathcal{S}_{j+1}$ deux points arbitraires de ces suites. Le flot du système induit une application de section Φ_j entre des voisinages $\mathcal{Q}_j \subset \mathcal{S}_j$ et $\mathcal{P}_{j+1} \subset \mathcal{S}_{j+1}$ des points q_j et p_{j+1} . La sous-variété $W^u(\Theta_j)$ est transverse à $W^s(\Theta_{j+1})$ au point p_{j+1} ; dans \mathcal{S}_{j+1} , elle intersecte l'espace d'équation $\rho_{(j+1)} = 0$ (l'indice correspond à celui du tore) suivant un arc γ_{j+1} , que l'on peut supposer paramétré par $\iota_{(j+1)}$, tel que $\gamma_{j+1}(0) = p_{j+1}$.

La construction d'un ouvert d'orbites reliant \mathcal{N}_1 à \mathcal{N}_J se fait de manière récursive, en partant par exemple du dernier tore T_J . On munit chaque \mathcal{S}_j de la distance produit associée aux coordonnées $(\theta, \rho, \sigma, \iota)_{(j)}$. On suppose donnés au rang $j + 1$ un point $\hat{q}_{j+1} \in \mathcal{Q}_{j+1} \cap W^u(\Theta_{j+1})$ et un réel $\delta_{j+1} > 0$, tel que $\mathcal{B}_{j+1} = B(q_{j+1}, \delta_{j+1}) \subset \mathcal{Q}_{j+1}$, et le but est de définir un point $\hat{q}_j \in \mathcal{Q}_j \cap W^u(\Theta_j)$ et un réel $\delta_j > 0$, tels que $\mathcal{B}_j = B(q_j, \delta_j) \subset \mathcal{Q}_j$ et $f_j^{n(j)} \circ \Phi_j(\mathcal{B}_j) \subset \mathcal{B}_{j+1}$, pour un certain entier $n(j)$. En notant $\Psi_j = f_j^{k(j)} \circ \Phi_j$, on obtient directement $\Psi_{j-1} \circ \dots \circ \Psi_1(\mathcal{B}_1) \subset \mathcal{B}_j$, et compte tenu de la définition des applications, les orbites issues de $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{N}_1$ (pour le champ hamiltonien X_H) intersectent $\mathcal{B}_j \subset \mathcal{N}_j$.

L'existence de $n(j)$, \hat{q}_j et δ_j provient de la partie précédente : on obtient d'abord l'existence de l'entier $n(j)$, tel que l'image de l'arc $f_j^{n(j)} \circ \gamma_j$ intersecte complètement \mathcal{B}_{j+1} . Soit $b = f_j^{n(j)} \circ \gamma_j(\iota)$ un point quelconque de cette intersection, on voit par le λ -lemme que $n(j)$ peut être choisi assez grand pour que $a = (f_j^{n(j)})^{-1}(b) \in \mathcal{P}_{j+1}$. L'ensemble

$\mathcal{A} = (f_j^{n(j)})^{-1}(\mathcal{B}_{j+1}) \cap \mathcal{P}_{j+1}$ est un voisinage ouvert de a dans \mathcal{P}_{j+1} . On peut alors choisir pour point \hat{q}_j l'image de a par l'application réciproque Φ_j^{-1} , soit encore $a = \Psi_j^{-1}(b)$, et l'ensemble $\mathcal{O} = \Phi_j^{-1}(\mathcal{A})$ est un voisinage ouvert de \hat{q}_j contenu dans \mathcal{Q}_j . Il suffit donc enfin de choisir $\delta_j > 0$ tel que la boule $\mathcal{B}_j = B(\hat{q}_j, \delta_j)$ soit contenue dans \mathcal{O} . Ceci termine la description de la méthode.

6.2. Première estimation du temps de transition

Il est intéressant de donner dès maintenant une évaluation du temps de transition le long d'une chaîne, basée seulement sur le λ -lemme précédent, afin de la comparer au paragraphe suivant. Il faut noter que ce type de construction ne nécessite aucune hypothèse supplémentaire sur les formes normales au voisinage des tores, en particulier il reste valable pour les problèmes de transition le long des surfaces de résonance d'ordre plus élevé. En contrepartie, le résultat est extrêmement grossier.

Le temps de transition total le long de la chaîne est de la forme

$$\mathcal{T} = \sum_{j=1}^J (\mathcal{T}_{o_j} + \mathcal{T}_{\Theta_j})$$

où \mathcal{T}_{o_j} désigne le temps de transition le long de l'orbite hétérocline o_j , et \mathcal{T}_{Θ_j} le temps de transition le long du tore Θ_j . Ce qui précède montre que l'on peut supposer \mathcal{T}_{o_j} négligeable devant \mathcal{T}_{Θ_j} , et qu'il existe une constante C telle que $\mathcal{T}_{\Theta_j} \leq Cn_j$, pour tout j .

Le problème principal tient donc à l'évaluation récursive des entiers n_j . Ces entiers s'obtiennent au moyen des diamètres δ_j , par l'intermédiaire du temps d'obstruction évalué au paragraphe 5 : $n_j = O(\delta_j^{-\alpha})$, où $\alpha > 0$ est une donnée du problème. La réduction (à chaque étape) du diamètre δ_j intervient donc de manière cruciale. Cette réduction, sans hypothèses supplémentaire, ne peut se minorer que par le facteur de contraction maximal de l'application de retour au voisinage du tore Θ_{j+1} , élevé à la puissance n_{j+1} . On obtient donc à chaque étape une réduction de l'ordre de l^{-n_j} , ce qui conduit évidemment à une borne supérieure (largement) surexponentielle pour le temps de transition. Il est inutile d'affiner ces estimations, le paragraphe suivant montre comment l'introduction d'idées plus géométriques permet de contrôler les contractions au voisinage des tores.

7. FENÊTRES ET TEMPS DE TRANSITION

Le but de cette section est de montrer, sur un exemple simple, comment les idées introduites par Easton ([10]) permettent d'optimiser le calcul précédent des temps de transition. Le point central est la construction de fenêtres adaptées au problème, dont la géométrie et les propriétés d'intersection mutuelles permettent le contrôle du temps de transition au voisinage de chaque tore, de manière *uniforme* le long de la chaîne.

7.1. Description du problème : notations et conventions

On se limitera ici à l'étude d'un problème simplifié, qu'il est possible d'adapter à des situations concrètes au prix d'estimations plus complexes. En particulier l'application détaillée au problème d'Arnold et à ses variantes fera l'objet d'un autre travail.

Pour simplifier l'exposé, on supposera $m = 3$ dans toute cette partie, les tores invariants considérés sont donc de dimension 2, leurs sections seront des cercles et leurs variétés invariantes localement des plans. La généralisation en dimension quelconque ne présente cependant aucune difficulté.

La situation considérée ici corespond au cas *initialement hyperbolique* introduit dans [6] et considéré aussi par Lochak dans [14], obtenu (par exemple) en posant $\varepsilon = 1$ dans le système d'Arnold, avec $\mu \rightarrow 0$. Les méthodes utilisées se transposent aussi au cas singulier.

Le problème est d'évaluer la *vitesse d'instabilité*, ou ce qui est équivalent le temps de dérive à l'ordre 1 en action, c'est-à-dire le temps de transition le long d'une chaîne dont la projection dans l'espace des actions est de longueur $O(1)$. Il est facile d'évaluer le nombre de tores d'une telle chaîne, l'écart entre deux tores consécutifs étant de l'ordre de μ , on obtient $J(\mu) = O(\mu^{-1})$. Si l'on suppose que le temps de transition au voisinage d'un tore est *constant le long de la chaîne*, et si l'on suppose encore négligeable le temps de transition hétérocline, le temps de transition total s'écrit

$$T = J(\mu)T_{\Theta}(\mu)$$

où T_{Θ} désigne le temps de transition autour d'un tore. Le but de cette partie est de justifier dans un cas simple cette hypothèse d'uniformité du temps T_{Θ} , et d'obtenir un majorant de $T_{\Theta}(\mu)$ lorsque $\mu \rightarrow 0$. Il est à noter que cette hypothèse est complètement justifiée dans le cas du système d'Arnold par une étude de type variationnel due à U. Bessi [5] (ainsi que par le travail de P. Bernard [4] dans le cas initialement hyperbolique). Notre approche

semble cependant plus souple et générale, elle rend surtout mieux compte de la nature des phénomènes entrant en jeu.

Le modèle étudié ici repose sur les quatre hypothèses (i)-(iv) suivantes.

(i) *Uniformité des formes normales.* – On identifie chaque section S_j à un même voisinage $\mathcal{V}(\mu)$ de $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}^3$, que l'on rapporte aux coordonnées (θ, s, ρ, u) (le changement d'ordre par rapport aux parties précédentes facilite l'écriture matricielle de la suite). On suppose l'application de retour indépendante de j et de la forme

$$f(\theta, s, \rho, u) = (\theta + \vartheta_0 + \vartheta_1 \rho, ks, \rho, lu) + (su)^2 \tilde{r}(\theta, s, \rho, u) \quad (1)$$

avec $\vartheta_0, \vartheta_1 \in \mathbf{R}^*$, ϑ_0 satisfaisant une hypothèse diophantienne analogue à celle des paragraphes précédents. On suppose de plus que le produit su est constant le long des orbites de f , et que dans $\mathcal{V}(\mu)$,

$$\|\tilde{r}\|_\infty + l \leq l^2 \quad (2)$$

Le tore Θ est évidemment invariant par f , et on notera que la factorisation du terme su permet d'affirmer directement que les variétés invariantes sont redressées dans $\mathcal{V}(\mu)$, i.e. $W^s(\Theta) = \{\rho = u = 0\}$ et $W^u(\Theta) = \{\rho = s = 0\}$.

Il est facile de construire des exemples de systèmes (dédits de celui d'Arnold) pour lesquels l'application de transition satisfait ces hypothèses. La factorisation du terme $(su)^2$ permet un contrôle commode des restes (par des méthodes analogues à celles de [12]), mais elle n'est pas indispensable.

(ii) *Taille des voisinages $\mathcal{V}(\mu)$.* – On suppose que

$$\mathcal{V}(\mu) = \left\{ (\theta, s, \rho, u) \in \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}^3 \mid |s| < \kappa, |u| < \kappa, |\rho| < \kappa\mu \right\}$$

où κ est une constante indépendante de μ . La réduction de la taille dans la direction ρ tient compte de la concentration des tores dans cette direction lorsque $\mu \rightarrow 0$. On peut sans inconvénient choisir une décroissance polynômiale d'ordre plus élevé en μ .

(iii) *Choix des points sur les orbites hétéroclines.* – Sans restreindre la généralité, on peut supposer que les orbites hétéroclines intersectent les sections successives $S_j = S$ en des points $p \in W^s(\Theta)$ et $q \in W^u(\Theta)$ indépendants de j (et de μ). On notera $p = (\theta_0, s_0, 0, 0)$ et $q = (\theta'_0, 0, 0, u'_0)$.

(iv) *Applications de transition entre les sections.* – On suppose que les applications de transition entre les point p et q sont indépendantes de j , et surtout que leur dérivée a une forme simple destinée à faciliter les calculs.

On notera Φ_μ (ou simplement Φ) l'application de transition induite par le flot entre des voisinages $\mathcal{D}_q(\mu)$ et $\mathcal{D}_p(\mu)$ des points q et p respectivement. Il sera en fait plus commode de travailler avec l'application inverse $\Lambda_\mu = \Phi_\mu^{-1}$, de $\mathcal{D}_p(\mu)$ dans $\mathcal{D}_q(\mu)$. On pose

$$\Lambda_\mu(x) = q + \Pi_\mu h + \Lambda_2(h) \tag{3}$$

où $h = x - p$, $\Pi = D_p(\Lambda)$ et où Λ_2 est le terme d'ordre ≥ 2 .

L'application Λ_μ dépend de μ . Comme le système est complètement intégrable lorsque $\mu = 0$ on suppose que $\Pi_\mu = D_p \Lambda_\mu \rightarrow I$ lorsque $\mu \rightarrow 0$ (on pourrait supposer que la limite est une matrice inversible quelconque, les estimations seraient alors moins simples). On se limitera de plus au cas où la matrice Π , rapportée aux bases $(e_\theta, e_s, e_\rho, e_u)$ est de la forme suivante

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha(\mu) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

avec $\alpha(\mu) \rightarrow 0$ lorsque $\mu \rightarrow 0$. Cette forme est la plus simple possible, le terme $\alpha(\mu)$ reflète la transversalité des sous-variétés invariantes le long des orbites hétéroclines, et est donc directement relié au splitting. On supposera ici

$$\alpha(\mu) = O(\mu) \tag{5}$$

(une variation polynômiale serait aussi possible).

On suppose enfin que les diamètres $d_p(\mu)$ et $d_q(\mu)$ des voisinages $\mathcal{D}_p(\mu)$ et $\mathcal{D}_q(\mu)$ vérifient

$$\kappa_1 \mu \leq d_p(\mu) \leq \kappa_2 \mu \quad \text{et} \quad \kappa_1 \mu \leq d_q(\mu) \leq \kappa_2 \mu \tag{6}$$

avec évidemment $\kappa_2 \ll \kappa$, et que le reste d'ordre 2 de Λ vérifie

$$\|D^2 \Lambda_2\| \leq C \tag{7}$$

où C est une constante indépendante de μ .

Les trois premières hypothèses ne sont pas vraiment restrictives et sont dictées par le problème général. La quatrième simplifie notablement les estimations, mais la totalité de la démarche reste valable dans un cadre général.

Le temps de transition le long de la chaîne peut alors être évalué en fonction de μ . On obtient dans la suite

$$\mathcal{T}(\mu) = O(\mu^{-(4+\gamma)}) \quad (8)$$

où $\gamma > 0$ est une constante arbitraire. La vitesse d'instabilité correspondante est donc $V(\mu) = O(\mu^{4+\gamma})$. Les exposants peuvent être améliorés, mais une étude plus détaillée n'aurait pas d'intérêt ici compte tenu des hypothèses. Il est très probable que la dépendance polynômiale de V en μ subsiste dans les cas concrets, la démonstration nécessite cependant un bon contrôle de la dépendance en μ de la matrice Π et des restes de Λ . Là encore, des démonstrations de type variationnel sont possibles, et conduisent à des estimations du type $V(\mu) = O(\mu^2)$ (voir [5]) dans le cas du système d'Arnold.

7.2. Fenêtres

On rappelle dans ce paragraphe les définitions de [10], et on donne un critère d'alignement utile dans les constructions ultérieures.

7.2.1. Définitions

Soient \mathcal{S} une variété de dimension d , et d_h, d_v deux entiers positifs de somme d . On note L le segment $[-1, 1]$. Une (d_h, d_v) -fenêtre à valeurs dans \mathcal{S} est un difféomorphisme \mathcal{B} de classe C^1 de $L^d = L^{d_h} \times L^{d_v}$ dans \mathcal{S} . Ses *horizontales* sont les applications partielles $\mathcal{B}(\cdot, y_v)$, pour $y_v \in L^{d_v}$, ses *verticales* sont les applications partielles $\mathcal{B}(y_h, \cdot)$, pour $y_h \in L^{d_h}$. L'image de la fenêtre \mathcal{B} sera notée $\tilde{\mathcal{B}}$, le *centre* de la fenêtre \mathcal{B} est $\mathcal{B}(0)$.

7.2.2. Alignement

Soient \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux (d_h, d_v) -fenêtres à valeurs dans \mathcal{S} . On dit que \mathcal{B}_1 est *alignée* sur \mathcal{B}_2 lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées.

(i) *Condition de transversalité.* Chaque horizontale $\mathcal{B}_1(\cdot, y_v)$ de la première fenêtre est transverse à chaque verticale $\mathcal{B}_2(y_h, \cdot)$ de la seconde.

(ii) *Condition d'intersection.* L'intersection des images de $\mathcal{B}_1(\cdot, y_v)$ et de $\mathcal{B}_2(y_h, \cdot)$ est un unique point a vérifiant $a = \mathcal{B}_1(x_h, y_v) = \mathcal{B}_2(y_h, x_v)$, avec $(x_h, x_v) \in]-1, 1[^d$.

On notera que cette notion n'est pas symétrique en \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 , il est clair d'autre part que la propriété d'alignement est stable par perturbation C^1 des deux fenêtres, ce que nous utiliserons dans la suite.

L'intérêt de cette définition provient du lemme suivant, cas particulier (facile) du lemme de l'ombre d'Easton [10] (on peut aussi le déduire sans difficulté de l'étude initiale d'Alexeiev).

LEMME. – Soit $J \in \mathbf{N}$, soient $(\mathcal{B}_j)_{1 \leq j \leq J}$ une famille finie de fenêtres à valeurs dans une variété \mathcal{S} , et $(\Psi_j)_{1 \leq j \leq J-1}$ une famille de difféomorphismes, telle que Ψ_j soit défini au voisinage de $\tilde{\mathcal{B}}_j$. Si la fenêtre composée $\Psi_j \circ \mathcal{B}_j$ est alignée sur \mathcal{B}_{j+1} pour $1 \leq j \leq J-1$, il existe (au moins) un point a de $\tilde{\mathcal{B}}_1$ tel que $\Psi_j \circ \dots \circ \Psi_1(a)$ soit défini pour tout j et appartienne à $\tilde{\mathcal{B}}_{j+1}$, en particulier $\Psi_{J-1} \circ \dots \circ \Psi_1(a) \in \tilde{\mathcal{B}}_J$.

Ce lemme est bien adapté à notre étude. La variété \mathcal{S} sera la réunion des surfaces de section choisies autour des tores, et les applications Ψ_j seront les composées $f_j^{n_j} \circ \Phi_j$ de la section 6. Tout le problème est de choisir convenablement les fenêtres \mathcal{B}_j pour que la condition d'alignement soit réalisée avec un choix convenable de l'entier n_j . Les constructions reposeront sur le paragraphe suivant.

7.2.3. Un critère d'alignement

Soient \mathcal{A}^a et \mathcal{B}^a deux (d_h, d_v) -fenêtres affines à valeurs dans \mathbf{R}^d , données par

$$\mathcal{A}^a(x) = a + Ax, \quad \mathcal{B}^a(x) = b + Bx \tag{9}$$

avec $a \in \mathbf{R}^d$, $b \in \mathbf{R}^d$, et

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{bmatrix} \tag{10}$$

où $A_1 \in M_{d_h, d_h}(\mathbf{R})$, $A_2 \in M_{d_h, d_v}(\mathbf{R})$, $A_3 \in M_{d_v, d_h}(\mathbf{R})$, $A_4 \in M_{d_v, d_v}(\mathbf{R})$, la décomposition étant analogue pour B . On définit d'abord les deux matrices intermédiaires suivantes

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & -B_3 \\ A_2 & -B_4 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} -B_1 & A_3 \\ -B_2 & A_4 \end{bmatrix} \tag{11}$$

On vérifie directement que la condition de transversalité est donnée par l'inversibilité de la matrice M . Si de plus $(y_h, y_v) \in L^d$ est fixé, la solution du système

$$\mathcal{A}^a(x_h, y_v) = \mathcal{B}^a(x_h, y_v) \tag{12}$$

est donnée par

$$(x_h, x_v) = M^{-1}(b - a) + M^{-1}N(y_h, y_v) \tag{13}$$

Il en résulte que la fenêtre \mathcal{A}^a est alignée sur \mathcal{B}^a si $\|M^{-1}(b - a) + M^{-1}Ny\|_\infty < 1$, pour tout $y \in L^d$.

Le lemme suivant donne une condition d'alignement pour des perturbations de fenêtres affines alignées. Pour $x \in \mathbf{R}^d$, on notera $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$, et on suppose l'espace de matrices $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ muni de la norme (d'algèbre) associée, encore notée $\|\cdot\|_1$. Si $B_\infty(0, \alpha)$ est la boule unité de \mathbf{R}^d pour la norme infinie, et si F est une fonction de $B_\infty(0, \alpha)$ dans \mathbf{R}^d ou $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$, on note $\|F\|_{(\alpha)} = \sup_{y \in B_\infty(0, \alpha)} \|F(y)\|_1$

Un critère d'alignement

Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux (d_h, d_v) fenêtres à valeurs dans \mathbf{R}^d , de la forme

$$\mathcal{A}(x) = a + Ax + \widehat{\mathcal{A}}(x), \quad \mathcal{B}(x) = b + Bx + \widehat{\mathcal{B}}(x)$$

où a, b sont dans \mathbf{R}^d , A, B dans $\mathbf{GL}_d(\mathbf{R})$ et où $\widehat{\mathcal{A}}$ et $\widehat{\mathcal{B}}$ sont des applications de classe C^2 de $[-2, 2]^d$ dans \mathbf{R}^d . On suppose que les fenêtres affines $\mathcal{A}^a : x \mapsto a + Ax$ et $\mathcal{B}^a : x \mapsto b + Bx$ sont alignées, et on conserve les notations précédentes pour les matrices intermédiaires M et N .

On note $\mu = \|M^{-1}\|_1$ et $\chi = \sup_{y \in L^d} \|M^{-1}(b - a) + M^{-1}Ny\|_\infty (< 1)$.

On suppose

(i) $\mu(\|\widehat{\mathcal{A}}\|_{(2)} + \|\widehat{\mathcal{B}}\|_{(2)}) = \chi_1 < 1/3$

(ii) $\mu(\|D\widehat{\mathcal{A}}\|_{(2)} + \|D\widehat{\mathcal{B}}\|_{(2)}) = \chi_2$, avec $\chi_2 < 1$ et $\frac{\chi_2}{1 - \chi_2} < 1/4$

(iii) $\chi + \chi_1 < 1$.

Alors la fenêtre \mathcal{A} est alignée sur la fenêtre \mathcal{B} .

Démonstration. – Notons d'abord que les perturbations $\widehat{\mathcal{A}}$ et $\widehat{\mathcal{B}}$ sont supposées suffisamment petites en topologie C^1 pour que \mathcal{A} et \mathcal{B} soient effectivement des fenêtres.

Vérifions la condition d'intersection. Soit $(y_h, y_v) \in L^d$ donné, on note (x_h^a, x_v^a) la solution du système d'intersection affine

$$\mathcal{A}^a(x_h^a, y_v) = \mathcal{B}^a(y_h, x_v^a)$$

et (x_h, x_v) la solution éventuelle de

$$\mathcal{A}(x_h, y_v) = \mathcal{B}(y_h, x_v)$$

On pose $x_h = x_h^a + z_h$ et $x_v = x_v^a + z_v$. On vérifie facilement que le point (z_h, z_v) est solution de l'équation

$$z = \mathcal{C}(z) \tag{\mathcal{E}}$$

avec

$$\mathcal{C}(z_h, z_v) = M^{-1} \left(\widehat{\mathcal{B}}(y_h, x_v^a + z_v) - \widehat{\mathcal{A}}(x_h^a + z_h, y_v) \right)$$

On note $c = \mathcal{C}(0)$, $C = D_0\mathcal{C}$ et \mathcal{C}_2 le reste d'ordre 2 de \mathcal{C} . L'équation (\mathcal{E}) s'écrit alors

$$F(z) = (I - C)z - \mathcal{C}_2(z) = c \tag{\mathcal{E}'}$$

Montrons d'abord que l'application F ainsi définie est un difféomorphisme de L^d sur son image. On note que l'hypothèse (ii) entraîne

$$\|DC\|_{(1)} \leq \mu(\|D\widehat{\mathcal{A}}\|_{(2)} + \|D\widehat{\mathcal{B}}\|_{(2)}) = \chi_2$$

et en particulier, $\|C\|_1 \leq \chi_2$. Comme $\chi_2 < 1$, on en déduit que $F_1 = I - C$ est inversible, avec $\|F_1^{-1}\|_1 \leq \frac{1}{1 - \chi_2}$.

Il en résulte que l'application $F_1^{-1} \circ \mathcal{C}_2$ est 1/2-lipschitzienne dans L^d , en effet

$$\|D\mathcal{C}_2\|_{(1)} = \|DC - C\|_{(1)} \leq 2\chi_2$$

et donc

$$\|D(F_1^{-1} \circ \mathcal{C}_2)\|_{(1)} \leq \frac{2\chi_2}{1 - \chi_2} \leq 1/2$$

Ceci montre l'injectivité de F dans L^d : en effet l'égalité $F(z) = F(z')$ est équivalente à $z - z' = (F_1^{-1} \circ \mathcal{C}_2)(z) - (F_1^{-1} \circ \mathcal{C}_2)(z')$ et entraîne donc $z = z'$.

Enfin, F est évidemment un difféomorphisme local au voisinage de tout point de L^d , puisque

$$DF = F_1(I - D(F_1^{-1} \circ \mathcal{C}_2))$$

est inversible en tout point. Ceci montre donc bien que F est un difféomorphisme de L^d sur son image.

Il en résulte en particulier que $F(L^d)$ contient la boule $B_\infty(0, 1 - 2\chi_1)$, en effet, F envoie le bord de L^d (en fait de toute boule légèrement plus petite) sur le bord de l'image, et si $\|z\|_\infty = 1$

$$\|F(z)\|_\infty \geq \|z\|_\infty - \|\mathcal{C}(z) - \mathcal{C}(0)\|_\infty \geq 1 - 2\chi_1$$

par (i). Comme $\|c\| = \|\mathcal{C}(0)\| \leq \chi_1$, et comme $\chi_1 \leq 1 - 2\chi_1$, le point c est dans l'image $F(L^d)$, donc l'équation (\mathcal{E}') possède une unique solution

dans L^d . Comme cette solution vérifie $z = \mathcal{C}(z)$, on obtient $\|z\|_\infty < \chi_1$. Par définition de χ , $\|(x_h^a, x_v^a)\|_\infty \leq \chi$, et l'hypothèse (iii) entraîne

$$\|(x_h, x_v)\|_\infty = \|z + (x_h^a, x_v^a)\|_\infty \leq \chi + \chi_1 < 1$$

ce qui prouve que la condition d'intersection est bien vérifiée.

Il reste donc à justifier la condition de transversalité. On pose

$$D\widehat{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \widehat{A}_1 & \widehat{A}_3 \\ \widehat{A}_2 & \widehat{A}_4 \end{bmatrix}, \quad D\widehat{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \widehat{B}_1 & \widehat{B}_3 \\ \widehat{B}_2 & \widehat{B}_4 \end{bmatrix}$$

et

$$\widehat{M}(x, y) = \begin{bmatrix} \widehat{A}_1(x_h, y_v) & -\widehat{B}_3(y_h, x_v) \\ \widehat{A}_2(x_h, y_v) & -\widehat{B}_4(y_h, x_v) \end{bmatrix}$$

La condition de transversalité est donnée par l'inversibilité de la matrice $M + \widehat{M}(x, y)$ en tout point (x, y) défini par la condition d'intersection précédente. Mais

$$M + \widehat{M}(x, y) = M(I + M^{-1}\widehat{M}(x, y))$$

et

$$\|M^{-1}\widehat{M}(x, y)\|_1 \leq \mu\left(\|D\widehat{\mathcal{A}}\|_{(1)} + \|D\widehat{\mathcal{B}}\|_{(1)}\right) < 1$$

donc $M + \widehat{M}(x, y)$ est inversible, ce qui termine la démonstration du lemme. \square

7.3. Construction des fenêtres

On revient maintenant au problème décrit au paragraphe 7.1. Le problème est de construire une suite $(\mathcal{B}_j)_{1 \leq j \leq J}$ de fenêtres, de la forme

$$\mathcal{B}_j(x) = \widehat{q}^{(j)} + B^{(j)}x + \mathcal{B}_2^{(j)} \quad (14)$$

dont le centre $q^{(j)} \in \mathcal{D}_q(\mu)$ est un point voisin de q ; de telle manière que pour une famille convenable d'entiers positifs n_j , la fenêtre

$$f^{n_j} \circ \Psi \circ \mathcal{B}_j$$

soit alignée sur la fenêtre \mathcal{B}_{j+1} , pour $1 \leq j \leq J - 1$. Le lemme d'Easton rappelé au paragraphe 7.2 entraîne alors l'existence d'au moins une orbite de transition le long de la chaîne.

Il sera plus commode de construire une famille de fenêtres *affines* (\mathcal{P}_j) , de la forme

$$\mathcal{P}_j(x) = \widehat{p}^{(j)} + P^{(j)}x \tag{15}$$

centrées en des points $\widehat{p}^{(j)}$ voisins de \widehat{p} , convenablement dimensionnées, et de choisir ensuite pour fenêtres \mathcal{B}_j les composées $\mathcal{B}_j = \Lambda \circ \mathcal{P}_{j+1}$. On vérifie qu'il est toujours possible de choisir les centres $\widehat{p}^{(j)}$ pour que les centres $\widehat{q}^{(j)}$ soient sur la sous-variété instable W^u .

Pour traiter facilement le problème d'alignement, on supposera que la partie affine de chaque fenêtre \mathcal{B}_j a ses horizontales parallèles à la variété instable W^u , et ses verticales transverses à W^u . La transversalité de l'intersection des variétés invariantes le long des orbites hétéroclines permet de supposer que les fenêtres \mathcal{P}_j ont leurs verticales parallèles à la variété stable W^s et leurs horizontales transverses à W^s : on choisira en effet les horizontales de \mathcal{B}_j parallèles à l'image par Φ de la variété instable.

On commence par traiter complètement le problème d'alignement au premier ordre (fenêtres affines). On contrôle ensuite les restes au moyen du critère d'alignement précédent. On raisonne évidemment dans $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}^3$ au lieu de \mathbf{R}^4 , mais ceci n'introduit pas de difficulté pratique.

7.3.1. Le problème affine

Rappelons que les matrices sont rapportées à la base $(e_\theta, e_s, e_\rho, e_u)$, au départ et à l'arrivée.

a) *Construction des fenêtres.* – On définit la fenêtre affine $\mathcal{P}_j : x \mapsto \widehat{p}^{(j)} + Px$ par $p^{(j)} = (\theta^{(j)}, s^{(j)}, 0, u^{(j)})$ et

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \epsilon & 0 \\ P_{21} & P_{22} & 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_u & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

où les P_{ik} , ainsi que les coordonnées de $\widehat{p}^{(j)}$, sont à préciser. On notera que la dépendance en j de \mathcal{P}_j provient seulement du centre $p^{(j)}$, la matrice P est constante. La forme (16) de P est générale, elle ne dépend pas du choix particulier de la matrice de transition Λ . Les (petits) paramètres ϵ et ϵ_u seront utilisés pour contrôler la taille de la fenêtre, on supposera partout $\epsilon_u < \epsilon$.

Le choix des deux dernières colonnes traduit le parallélisme des verticales de P à la variété stable W^s . Il reste à préciser les deux premières colonnes,

correspondant aux horizontales, pour que ces dernières soient parallèles à l'espace tangent en p à $\Psi(W^u)$. Le choix de Λ conduit à la matrice suivante

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{\epsilon}{\alpha} & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_u & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

On en déduit directement la fenêtre $\mathcal{B}_j : x \mapsto \widehat{q}^{(j)} + Bx + \widehat{\mathcal{B}}^{(j)}(x)$ définie par $\mathcal{B}_j = \Lambda \circ \mathcal{P}_{j+1}$, on obtient $\widehat{q}^{(j)} = (\theta^{(j)}, 0, 0, u^{(j)})$, et

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{\epsilon}{\alpha} & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 & \alpha\epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon_u & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Enfin, on note $\mathcal{A}_n^{(j)}$ la fenêtre composée $f^n \circ \mathcal{P}_j$ par l'application de retour f^n , le rang n étant à déterminer. On pose

$$\mathcal{A}_n^{(j)}(x) = \widehat{p}_n^{(j)} + A_n x + \widehat{\mathcal{A}}_n^{(j)}(x) \quad (19)$$

avec

$$\widehat{p}_n^{(j)} = (\theta^{(j)} + n\vartheta_0, k^n s^{(j)}, 0, l^n u) \quad (20)$$

et

$$A_n = \begin{bmatrix} -\frac{\epsilon}{\alpha} + n\vartheta_1\epsilon & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^n\epsilon \\ \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l^n\epsilon_u & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

le terme $\widehat{\mathcal{A}}_n^{(j)}$ étant obtenu par composition des restes de f^n avec \mathcal{P} .

b) *Alignement de $\mathcal{A}_n^{(j)}$ sur \mathcal{B} .* – On conserve les notations de 7.2 pour les fenêtres intermédiaires M_n et N_n . On obtient

$$M_n = \begin{bmatrix} -\frac{\epsilon}{\alpha} + n\vartheta_1\epsilon & 0 & -\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon \\ \epsilon & 0 & -\alpha\epsilon & 0 \\ 0 & l^n\epsilon_u & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Il est facile de voir que M_n est inversible, et que, si $\beta_n = n\alpha\vartheta_1 - 2$,

$$M_n^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\epsilon\beta_n} & 0 & -\frac{1}{\epsilon\beta_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l^n\epsilon_u} \\ \frac{1}{\epsilon\beta_n} & 0 & -\frac{\beta_n+1}{\epsilon\alpha\beta_n} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\epsilon} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

D'autre part

$$N_n = \begin{bmatrix} -\frac{\epsilon}{\alpha} & 0 & -\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k^n\epsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_u & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

et on en déduit la matrice $M_n^{-1}N_n$:

$$M_n^{-1}N_n = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\beta_n} & 0 & -\frac{\alpha}{\beta_n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{l^n} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\alpha\beta_n} & 0 & -\frac{1}{\beta_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^n \end{bmatrix} \quad (25)$$

c) *Estimations.* – On peut maintenant majorer la norme de la solution du système d'alignement affine :

$$\begin{aligned} \chi &= \sup_{y \in L^4} \|M_n^{-1}(\hat{q}^{(j)} - \hat{p}_n^{(j)}) + M_n^{-1}N_n y\|_\infty \\ &\leq \|M_n^{-1}(\hat{q}^{(j)} - \hat{p}_n^{(j)})\|_\infty + \|M_n^{-1}N_n\|_1 \end{aligned}$$

On introduira dans la suite un certain nombre de constantes $C_i > 0$, qui seront toutes supposées *indépendantes de μ* .

c.1) *Majoration de $\|M_n^{-1}N_n\|_1$ et choix de n_j .* – On déduit directement du paragraphe précédent que

$$\|M_n^{-1}N_n\|_1 \leq \frac{2}{\alpha\beta_n} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\vartheta_1 n \alpha^2} \quad (26)$$

On supposera $n = \alpha^{-(2+\sigma)}$, où $\sigma > 1$ est arbitraire. Puisque par hypothèse $\alpha = O(\mu)$, on obtient la dépendance suivante de n relativement à μ

$$n = O(\mu^{-(2+\sigma)}) \quad (27)$$

et il existe une constante C_1 telle que

$$\|M_n^{-1}N_n\|_1 \leq C_1 \mu^\sigma \quad (28)$$

c.2) Majoration de $\|M_n^{-1}(\widehat{q}^{(j)} - \widehat{p}_n^{(j)})\|_\infty$. - D'autre part,

$$\widehat{q}^{(j)} - \widehat{p}_n^{(j)} = \left(\theta'^{(j)} - \theta^{(j)} - n\vartheta_0 [2\pi], -k^n s^{(j)}, 0, u'^{(j)} - l^n u^{(j)} \right) \quad (29)$$

La famille de fenêtres étant construite de manière récursive à partir de la donnée de \mathcal{P}_J , et donc de $\widehat{p}^{(J)}$, il est possible de choisir $\widehat{p}^{(j)}$ de telle manière que la composante suivant e_u de $\widehat{q}^{(j)} - \widehat{p}_n^{(j)}$ soit nulle : il suffit de poser

$$u^{(j)} = \frac{u^{(j+1)}}{l^n} \quad (30)$$

On obtient alors

$$M_n^{-1}(\widehat{q}^{(j)} - \widehat{p}_n^{(j)}) = \left(\frac{\alpha}{\epsilon\beta_n} \bar{\theta}_n, 0, \frac{1}{\epsilon\beta_n} \bar{\theta}_n, \frac{k^n s}{\epsilon} \right) \quad (31)$$

où $\bar{\theta}_n = \theta'^{(j)} - \theta^{(j)} - n\vartheta_0 [2\pi]$.

Comme ϑ_0 est supposé diophantien, on montre facilement l'existence d'une constante $\tau > 0$ telle que pour un choix convenable de n ,

$$|\bar{\theta}_n| \leq C_2 n^{-1/\tau} \quad (32)$$

(τ est la constante $\varsigma + (m-1)/2$ du paragraphe 5.2.2.), soit encore ici

$$|\bar{\theta}_n| \leq C_3 \mu^{(2+\sigma)/\tau} \quad (33)$$

Il en résulte en particulier que

$$\|M_n^{-1}(\widehat{q}^{(j)} - \widehat{p}_n^{(j)})\| \leq \frac{C_4}{\epsilon} \mu^{\sigma+(2+\sigma)/\tau} \quad (34)$$

La seule restriction sur ϵ est imposée par la taille des voisinages $\mathcal{D}_p(\mu)$ et $\mathcal{D}_q(\mu)$, on suppose $\epsilon = C_5 \mu$, et il en résulte que

$$\|M_n^{-1}(\widehat{q}^{(j)} - \widehat{p}_n^{(j)})\| \leq C_6 \mu^{\sigma+(2+\sigma)/\tau} - 1 \quad (35)$$

On obtient donc finalement

$$\chi \leq C_7 \mu^{\sigma-1} \tag{36}$$

et donc le choix (27) de $n(\mu)$ assure que la limite de χ est nulle lorsque μ tend vers 0. Comme la condition de transversalité est vérifiée, on en déduit que les fenêtres affines sont alignées lorsque μ est assez petit.

Il faut noter que d'autres hypothèses de décroissance (polynômiale) de α en fonction de μ conduiraient à des conclusions analogues.

7.3.2. Contrôle des restes

Les perturbations proviennent de la composition de la fenêtre \mathcal{P} par l'application de transition Λ , pour obtenir les fenêtres \mathcal{B}_j et par l'itérée d'ordre n de l'application de retour f , pour obtenir la fenêtre $\mathcal{A}_n^{(j)}$.

a) *Restes des fenêtres \mathcal{B}_j .* – On a posé

$$\mathcal{B}_j(x) = \Lambda \circ \mathcal{P}_{j+1}(x) = \hat{q}^{(j)} + Bx + \hat{\mathcal{B}}(x)$$

Comme

$$\Lambda(\mathcal{P}_{j+1}(x)) = \Lambda(\hat{p}^{(j+1)} + Px) = \Lambda(\hat{p}^{(j+1)}) + D_{\hat{p}^{(j+1)}}\Lambda(Px) + R(x)$$

avec

$$R(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} D^2\Lambda(\hat{p}^{(j+1)} + tPx)(Px)^2 dt$$

et comme $\hat{q}^{(j)} = \Lambda(\hat{p}^{(j+1)})$, on obtient

$$\hat{\mathcal{B}}(x) = R(x) + (D_{\hat{p}^{(j+1)}}\Lambda.P - B) x$$

Rappelons qu'il existe par hypothèse ((iv)(7)) une constante C indépendante de μ telle que

$$\text{Sup}_{\mathcal{D}_p(\mu)} \|D^2\Lambda\| \leq C$$

et que ϵ est supposé assez petit pour que l'image par \mathcal{P} de la boule $B_\infty(0, 2)$ soit contenue dans $\mathcal{D}_p(\mu)$. On en déduit que

$$\|R\|_{(2)} \leq 4C\epsilon^2$$

puisque $\|P\|_1 \leq \epsilon$. D'autre part $B = D_p\Lambda.P$, et donc

$$\|D_{\hat{p}^{(j+1)}}\Lambda.P - B\|_1 = \|(D_{\hat{p}^{(j+1)}}\Lambda - D_p\Lambda)P\|_1 \leq C\epsilon\|\hat{p}^{(j+1)} - \hat{p}\|_1 \leq C\epsilon k^n$$

On en déduit enfin

$$\|\widehat{\mathcal{B}}\|_{(2)} \leq C_9 \epsilon (\epsilon + k^n)$$

On obtient de manière analogue

$$\|D\widehat{\mathcal{B}}\|_{(2)} \leq C_{10} (\epsilon + k^n)$$

b) *Restes des fenêtres* $\mathcal{A}_n^{(j)}$. – Leur évaluation est plus délicate, puisque $\mathcal{A}_n^{(j)}$ dépend de n . On écrit d'abord

$$\mathcal{A}_n^{(j)}(x) = f^n \circ \mathcal{P}_j(x) = f^n(\widehat{p}^{(j)} + Px)$$

Notons f_a la partie affine de f , on a donc $f_a = \vartheta_0 \cdot e_\theta + f_l$, où f_l est la partie linéaire, et $f = f_a + r$, r désignant le reste. On a posé dans ce qui précède

$$\mathcal{A}_n^{(j)}(x) = \widehat{p}_n^{(j)} + A_n x + \widehat{\mathcal{A}}_n^{(j)}(x)$$

avec

$$\widehat{p}_n^{(j)} = f_a^n(\widehat{p}^{(j)}) \quad \text{et} \quad A_n = f_l^n \cdot P$$

On obtient donc, en posant $f^n = f_a^n + r_n$,

$$\widehat{\mathcal{A}}_n^{(j)} = r_n(\widehat{p}^{(j)} + Px)$$

Il est nécessaire pour estimer la taille de $\widehat{\mathcal{A}}_{j,n}$ de connaître au préalable la dimension maximale suivant e_u des points de l'image de \mathcal{P}_j , afin d'utiliser les hypothèses de contrôle sur r . D'après (30), la coordonnée suivant e_u du point $\widehat{p}^{(j)}$ est donnée par $|u^{(j)}| = |u'^{(j)}|/l^n$, donc $|u^{(j)}| \leq k^n$. Il est de plus possible de choisir maintenant la dimension ϵ_u de la matrice P (la seule condition imposée par le problème affine est $\epsilon_u \leq \epsilon$), on fixe $\epsilon_u = k^n/2$. Il en résulte alors que pour tout point y de l'image de \mathcal{P}_j , la coordonnée suivant e_u de y vérifie

$$|u(y)| \leq 3k^n/2$$

Comme de plus la composante suivant s de y est toujours majorée par 1 (lorsque y reste dans le voisinage de Θ considéré), on obtient

$$|su(y)| \leq 3k^n/2, \quad \forall y \in \widetilde{\mathcal{P}}_j$$

On peut maintenant utiliser le fait que le produit su reste constant sur les orbites de f , ainsi que l'hypothèse de factorisation

$$r(\theta, \sigma, \rho, u) = (su)^2 \widetilde{r}(\theta, \sigma, \rho, u)$$

pour estimer la taille de r_n et de sa dérivée. On voit alors par récurrence que

$$\|\widehat{\mathcal{A}}_n^{(j)}\|_{(2)} \leq C_{11} \left(\frac{l+C}{l^2} \right)^n, \quad \|D\widehat{\mathcal{A}}_n^{(j)}\|_{(2)} \leq C_{12} n k^n$$

Comme $(l+C)/l^2 < 1$, et comme $n \rightarrow \infty$ lorsque $\mu \rightarrow 0$, on obtient finalement

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \|\widehat{\mathcal{A}}_n^{(j)}\|_{(2)} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \|D\widehat{\mathcal{A}}_n^{(j)}\|_{(2)} = 0$$

7.3.3. Conclusion

Ce qui précède montre que la fenêtre $\mathcal{A}_n^{(j)}$ est alignée sur \mathcal{B}_j , pour tout μ assez petit, avec le choix de n donné par (27). Comme le nombre de tores de la chaîne est $J(\mu) = O(\mu^{-1})$, on obtient un temps de transition de l'ordre de

$$\mathcal{T} = O(\mu^{-(4+\gamma)})$$

avec $\gamma > 0$ quelconque. Cette estimation est à comparer à l'estimation exponentielle de [6].

8. REMARQUE FINALE

La borne supérieure obtenue au paragraphe précédent permet de préciser la note de bas de page d'Arnold [3] : “*Contrairement à la stabilité, l'instabilité est elle-même stable*”. Considérons de nouveau le hamiltonien modèle $H_{\varepsilon\mu}$ donné en introduction, et son champ associé $X_{\varepsilon\mu}$. Pour deux points I et I' convenablement choisis, avec $I_2 \neq I'_2$, et pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe μ_0 tel que pour $\mu < \mu_0$ le champ $X_{\varepsilon\mu}$ possède une orbite dont la projection relie les point I et I' . Il est clair que cette propriété est stable en topologie C^1 : il existe une boule \mathcal{B} centrée sur $X_{\varepsilon\mu}$, dans l'espace $\mathcal{X}(M)$ des champs de classe C^2 sur M muni de la topologie C^1 , telle que tout champ X dans \mathcal{B} possède un ouvert d'orbites reliant I et I' . Le diamètre de cette boule peut être évalué très simplement en utilisant le théorème élémentaire de dépendance des solutions relative aux conditions initiales : à ε fixé, le diamètre est majoré par $\exp(-C(\varepsilon).\mathcal{T})$, où $C(\varepsilon)$ est une constante et \mathcal{T} le temps de transition le long de l'orbite. En admettant la validité de la borne supérieure précédente, le rayon de cette boule est d'ordre $O(\exp(-C'(\varepsilon)\mu^{-(4+\gamma)}))$. On obtient ainsi un ouvert $\mathcal{O}(\varepsilon)$ exponentiellement effilé, voisinage du chemin $(X_{\varepsilon\mu})_{\mu < \mu_0}$ dans $\mathcal{X}(M)$, formé par des champs possédant des orbites de transition entre I et I' .

La construction est valable pour tout ε assez petit, on obtient ainsi une famille d'ouverts dont la réunion \mathcal{O} contient le champ X_{00} dans son adhérence.

Il faut noter en particulier qu'aucune hypothèse n'est faite sur la nature des champs $X \in \mathcal{O}$, ils sont éventuellement dissipatifs, et il n'y a aucune raison pour que le mécanisme des chaînes de transition, basé sur les tores invariants et leurs connexions hétéroclines, subsiste dans ces perturbations. Le mécanisme d'Arnold est donc hautement non générique dans ce contexte.

RÉFÉRENCES

- [1] V. M. ALEXEIEV, Quasirandom dynamical systems, *Math. USSR Sbornik*, Vol. **68**, 1968, p. 73-128.
- [2] V. I. ARNOLD, Instability of dynamical systems with several degrees of freedom, *Dokl. Acad. Nauk. SSSR*, Vol. **156**, 1964, p. 9-11.
- [3] V. I. ARNOLD, Mathematical problems in classical physics, *Appl. Math. Sc. Series*, Vol. **100**, 1992, p. 1-14.
- [4] P. BERNARD, Note aux C.R.A.S., en préparation.
- [5] U. BESSI, An approach to Arnold diffusion through the Calculus of Variations, *Preprint*.
- [6] L. CHIERCHIA et G. GALLAVOTTI, Drift and diffusion in phase space, *Annales de l'IHP, Physique Théorique*, Vol. **60**, 1994, p. 1-144.
- [7] A. DELSHAMS VALDÉS, Por qué la difusión de Arnold aparece genéricamente en los sistemas con más de 3 grados de libertad, *Thèse*, Université de Barcelone, 1986.
- [8] R. DOUADY, Stabilité ou instabilité des points fixes elliptiques, *Annal. Sci. de l'E.N.S.*, Vol. **21**, 1988, p. 1-46.
- [9] H. S. DUMAS, Ergodization rates for linear flows on the torus, *Journal of Dynamics and Diff. Eq.*, Vol. **3**, 1991, p. 593-610.
- [10] R. EASTON, Orbit structure near trajectories biasymptotic to invariant tori, *Classical Mechanics and Dynamical Systems*, Marcel Dekker, 1981, p. 55-67.
- [11] S. GRAFF, On the conservation of hyperbolic invariant tori for hamiltonian systems, *Journal of Diff. Eq.*, Vol. **15**, 1974, p. 1-69.
- [12] C. JONES et N. KOPELL, Tracking invariant manifolds with differential forms, à paraître dans *Journal of Diff. Eq.*, 1994.
- [13] P. LOCHAK, Canonical perturbation theory via simultaneous approximation, *Russian Math. Surveys*, Vol. **47**, 1992, p. 57-133.
- [14] P. LOCHAK, Arnold diffusion; a compendium of remarks and questions, *Preprint*, 1994.
- [15] J. MATHER, Variational construction of connecting orbits, *Ann. Inst. Fourier*, Vol. **43**, 1993, p. 1349-1386.
- [16] H. POINCARÉ, Divergence des séries (parag. 225), *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, Blanchard 1987.
- [17] D. SAUZIN, Résurgence paramétrique et petitesse exponentielle de l'écart des séparatrices dans le pendule rapidement forcé, *Thèse*, Université Paris VII, 1994.
- [18] D. V. TRESHCHEV, The mechanism of destruction of resonance tori of hamiltonian systems, *Math. USSR Sbornik*, Vol. **68**, 1991, p. 181-203.

(Manuscrit reçu le 6 juillet 1995.)