ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

PIERRE AIMÉ

Sur la dynamique des systèmes mécaniques

Annales de l'I. H. P., section A, tome 64, nº 2 (1996), p. 155-176
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1996__64_2_155_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 64, n° 2, 1996, p. 155-176. *Physique théorique*

Sur la dynamique des systèmes mécaniques

par

Pierre AIMÉ

Département de Mathématiques, U.R.A. C.N.R.S. n° 758,
Université de Nantes, 2, rue la Houssinière, 44072 Nantes Cedex 03, France.

RÉSUMÉ. – Dans ce travail, nous proposons un modèle géométrique pour les systèmes mécaniques à un nombre fini de degrés de liberté, soumis à liaisons cinématiques, permettant le lien entre la description du système (mouvements et efforts), sur l'espace d'évolution et sur la variété de configuration.

ABSTRACT. – In this study, we propose a geometrical frame for mechanical systems with finite degree of freedom, with constraints, allowing the relation between the description of the system (motion and stress), on evolution space and configuration manifold.

I. INTRODUCTION

Dans l'édition de 1926 du Traité de Mécanique, à la suite de la thèse de Beghin, Appell présente deux notions de « liaisons cinématiques parfaites », avec ou sans asservissement, conduisant à des mouvements différents, selon le point de vue adopté.

La nature géométrique des propriétés mécaniques obtenues se révèle lorsqu'on procède à une formalisation géométrique intrinsèque des systèmes à liaisons cinématiques.

Ceci a été étudié récemment (Dazord [6], Marle [11]), en considérant la description des mouvements sur la variété de configuration.

Ce travail est complémentaire dans le sens suivant :

On s'intéresse ici à la représentation des efforts sur l'espace dans lequel évolue le système, et à la relation entre deux descriptions du système : d'une part sur l'espace d'évolution, d'autre part sur la variété de configuration.

Cette relation est obtenue, tant du point de vue cinématique que dynamique, en supposant (hypothèse de modélisation), que les changements de configuration possibles du système libéré de toutes les liaisons devant être prises en compte dans la description des efforts, sont des éléments d'un groupe de Lie G. (par exemple le groupe des déplacements de l'espace usuel pour un solide, un groupe de transformations affines pour les systèmes à déformation homogène).

On obtient en outre une condition suffisante de « détermination du système », c'est-à-dire du mouvement et des efforts inconnus, en présence de liaisons cinématiques, éventuellement non parfaites.

Dans le cas particulier des liaisons parfaites, la formulation géométrique proposée ici devrait permettre de mieux comprendre les deux notions introduites par Appell, et ce qui les distingue.

On trouvera des exemples et des démonstrations plus complètes dans Aimé [1].

II. SYSTÈMES MÉCANIQUES, LIAISONS

Résumons d'abord les notions de cinématique et de cinétique utilisées dans la suite :

Convenons d'appeler **système mécanique** l'ensemble des données

$$\mathcal{S} = (\mathbb{E}, \mathbb{B}, G)$$

où $\mathbb{E}$ est une variété connexe (l'**espace d'évolution**), $\mathbb{B}$ est une sous-variété de $\mathbb{E}$ représentant un modèle du système, ses éléments sont les **particules**, G un groupe de lie de difféomorphismes de $\mathbb{E}$ (le groupe des **configurations** du système libre).

Le fibré tangent (resp. cotangent) à G est l'espace des **états cinématiques** (resp. l'espace des **phases**) de $\mathcal{S}$.

$\mathcal{G}$ est l'algèbre de Lie de G.

Le choix de G est une hypothèse de modélisation qui concerne le type de transformations permises pour le système évoluant dans l'espace $\mathbb{E}$. Par exemple le groupe des isométries d'une variété riemanienne $\mathbb{E}$, pour représenter un système indéformable, on dira qu'il s'agit d'un **solide**, ou bien un groupe de transformations affines d'un espace euclidien $\mathbb{E}$, pour représenter un **système à déformations homogènes**.

On suppose que l'action naturelle Φ de G sur $\mathbb{E}$ est *effective*, ainsi, le morphisme $\mathcal{X}$ d'algèbres de Lie, de $\mathcal{G}$ dans l'algèbre $\Gamma(T\mathbb{E})$ des champs de vecteurs sur $\mathbb{E}$, qui associe à tout élément $\xi \in \mathcal{G}$, le champ fondamental $\mathcal{X}^\xi$, défini par $\mathcal{X}^\xi(x) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial G}(e, x)(\xi) = T_e \Phi_x(\xi)$, est injectif.

On écrira indifféremment $\Phi(g, X)$ ou $g(X)$ pour $X \in \mathbb{B}$.

Les champs de vecteurs appartenant à $\mathcal{X}(\mathcal{G})$ (resp. au dual) sont appelés **G-cotorseurs** (resp. **G-torseurs**), ou par abus, cotorseurs et torseurs.

L'ensemble $\Sigma = \bigcup_{g\in G}(g, g(\mathbb{B}))$ est un fibré différentiel, à trivialisation globale, de base G de fibre type $\mathbb{B}$, appelé **fibré des positions** du système.

Une **liaison géométrique** est la donnée d'une sous-variété M de $\mathcal{C}$ (ou de G), dont les éléments sont appelés **configurations compatibles** avec la liaison.

Notons $p : TM \to M$ le fibré tangent à la **variété de configuration** M. Une **liaison cinématique** (Marle [94]), est la donnée d'un sous-ensemble C de TM tel que $p(C) = M_1$ soit une sous-variété de M, C soit une sous-variété de TM_1, et la restriction p' de p à C soit une submersion.

Les éléments de C sont les **états cinématiques compatibles** avec la liaison. La liaison est dite **holonome** lorsque C est un sous-fibré vectoriel intégrable de TM.

Un **mouvement** de $\mathcal{S}$ est un arc paramétré g_t deux fois différentiable (le paramètre est le **temps**), tracé sur G, le relèvement tangent $\dot{g}$ est la **vitesse** du mouvement. En cas de liaison cinématique, la condition $\dot{g} \in C$ est caractéristique des **mouvements compatibles** avec la liaison.

Les relèvements $x_t = \Phi(g_t, X)$, $X \in \mathbb{B}$ de g_t dans le fibré des positions, sont appelés **mouvements spatiaux** des particules du système.

$V(t, X) = V_t(X) = \dot{x}_t$ est le **vecteur vitesse de la particule X** à l'instant t, et $\mathcal{V}_t = V_t \circ g_t^{-1}$ est le **champ des vitesses** à cet instant.

On note ω_t et Ω_t les éléments de $\mathcal{G}$, translatés respectivement à droite et à gauche de g_t par g_t^{-1}.

PROPOSITION 1. – *A chaque instant, le champ $\mathcal{V}_t$ est la restriction à $g_t(\mathbb{B})$ du cotorseur $\mathcal{X}^{\omega_t}$ (appelé* **cotorseur cinématique** *à cet instant).*

Dans la suite, l'espace d'évolution $\mathbb{E}$ est **supposé riemannien**, la forme de connexion canonique est notée ν.

Un mouvement de $\mathcal{S}$ étant donné, envisageons le mouvement spatial $x : t \to x_t$ d'une particule X.

L'application $\dot{x} : t \rightarrow \dot{x}_t = \mathcal{V}_t(x_t)$ définit un champ de vecteurs le long de x.

Notons $\ddot{x} : t \rightarrow T_t(\dot{x})(1)$ le deuxième relèvement canonique de x (on sait que $\ddot{x}_t \in T^2\mathbb{E}$).

Alors, le vecteur tangent à $\mathbb{E}$ au point x_t, défini par

$$A(X, t) \qquad \text{ou} \qquad A_t(X) = \nu(\ddot{x}_t)$$

est appelé **vecteur accélération** de la particule X à **l'instant** t, et

$$\mathcal{A}_t = A_t \circ g_t^{-1}$$

est le **champ des accélérations à cet instant**.

Une **masse** est une mesure de Borel positive bornée m_0 à support contenu dans $\mathbb{B}$, la masse sur $g(\mathbb{B})$ étant la mesure image $m = g_* m_0$ (cette définition revient à postuler la conservation de la masse sous l'action de G). En général, la masse est absolument continue pour la mesure volumique canonique de $\mathbb{E}$.

A l'aide de la métrique riemannienne $\langle\ ,\ \rangle$ de $\mathbb{E}$, les relations :

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(y, y') &= \int_{\mathbb{B}} \langle T\Phi_g \circ \mathcal{X}^{\Xi}(X), T\Phi_g \circ \mathcal{X}^{\Xi'}(X)\rangle\, dm_0(X)\\ &= \int_{g(\mathbb{B})} \langle \mathcal{X}^{\xi}(x), \mathcal{X}^{\xi'}(x) > \mathrm{dm}(x)\end{aligned}$$

où $y = TL_g\,\Xi$, $y' = TL_g\,\Xi'$, $\xi = Ad_g\,\Xi$, $\xi' = Ad_g\,\Xi'$, $\Xi, \Xi' \in \mathcal{G}$ définissent une forme symétrique sur G, que l'on suppose non dégénérée, $\mathcal{K}$ est appelée **métrique** (riemannienne) **cinétique**.

L'isomorphisme de Legendre correspondant à $\mathcal{K}$ est le **tenseur d'inertie** $\mathcal{J}$ du système.

Lorsque G est un groupe d'isométries de $\mathbb{E}$, la métrique cinétique est invariante à gauche.

Si un mouvement est donné, l'**énergie cinétique** du système à chaque instant, est le réel

$$T(\dot{g}) = \frac{1}{2}\mathcal{K}(\dot{g}, \dot{g}).$$

III. VITESSES VIRTUELLES ET FORMES SEMI-BASIQUES

III.1. Vitesses virtuelles

Un système mécanique $(\mathbb{E}, \mathbb{B}, G)$ étant donné, notons $p_G : TG \rightarrow G$ la projection canonique du fibré tangent à G, $Tp_G : T(TG) \rightarrow TG$

son prolongement aux vecteurs, et $p_{TG} : T(TG) \to TG$ la projection canonique du fibré tangent à TG.

DÉFINITION 1. – Pour un état cinématique $y \in TG$, un élément X de $T(TG)$, tangent en y à TG, est appelé un **état cinématique d'ordre 2**.

Ce vecteur X est appelé **G-vitesse virtuelle** (dans l'état cinématique y) s'il est vertical, c'est-à-dire si $Tp_G(X) = 0$.

L'expression locale d'un état cinématique d'ordre 2 est donc $X = (q, v, Q, V)$ ou $Q\dfrac{\partial}{\partial q} + V\dfrac{\partial}{\partial v}$, pour $y = (q, V)$, et $Q = 0$ pour une G-vitesse virtuelle.

On utilisera librement l'isomorphisme du fibré tangent aux fibres $TG \times_G TG$ sur le fibré vertical $v\,TG$, d'expression locale $H(q, v, V) = (q, v, 0, V)$ (Godbillon [8]).

Un état cinématique y étant donné, on peut identifier une G-vitesse virtuelle (y, y') au couple $(y, \Xi) \in TG \times \mathcal{G}$, avec $\Xi = T_e L_g^{-1} y'$ et $g = p_G(y)$.

Il est donc possible de considérer les G-vitesses virtuelles comme couples $(y, \mathcal{X}^\xi) \in TG \times \mathcal{X}(\mathcal{G})$ *formés d'un état cinématique et d'un cotorseur.*

Lorsqu'un *mouvement* g_t est donné, on peut associer à chaque élément $\xi \in \mathcal{G}$, une *G-vitesse virtuelle à chaque instant*, il suffit de prendre $(\dot{g}_t, T_e L_{g_t} \xi)$.

DÉFINITION 2. – Inversement, le cotorseur $\mathcal{X}^\xi$ (ou l'élément $\xi \in \mathcal{G}$), associé à une G-vitesse virtuelle de la forme $(\dot{q}_t, y')$ sera appelé un **cotorseur cinématique virtuel à l'instant** t.

Supposons maintenant que le système est soumis à une liaison géométrique, la variété de configuration étant notée M.

DÉFINITION 3. – Pour un état cinématique *compatible* y, une M-**vitesse virtuelle dans l'état cinématique compatible** y est un élément Y du fibré vertical $v\,TM$:

$$Y \in T_y(T_{p_G(y)} M).$$

Si M est de la forme $F^{-1}(s)$, pour une submersion $F : G \to Q$ et $s \in Q$, l'expression locale $Y = (q, v, 0, V)$ doit vérifier les relations :

$$\sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial F^k}{\partial q^i}(q) = \sum_{i=1}^{n} V^i \frac{\partial F^k}{\partial q^i}(q) = 0$$
$$k = 1, \ldots, \dim Q \qquad n = \dim G$$

qui expriment respectivement les conditions

$$y \in T_x M \qquad \text{et} \qquad Y \in T_y (T_x M).$$

DÉFINITION 4 (d'après Marle [11]). – Si le système, dont la variété de configuration est M après la prise en compte de liaisons géométriques, est en outre soumis à une liaison cinématique correspondant aux données de (M_1, C, p'), une **C-vitesse virtuelle dans l'état cinématique compatible** $y \in C$, est un élément

$$Y \in T_y (C_x) \qquad x = p' (y) \in M_1.$$

Lorsque $C = f^{-1}(0)$, pour une submersion f de TM_1 dans $\mathbb{R}^r$, les C-vitesses virtuelles sont caractérisées par :

$$\sum_{i=1}^{m} V^i \frac{\partial f^k}{\partial v^i}(q, v) = 0 \qquad k = 1, \ldots, r \qquad m = \dim M_1.$$

Remarque. – En mécanique, cette relation caractérise habituellement les « déplacements virtuels compatibles avec la liaison », ou « conditions de Chetaev » (Pironneau [12], d'après Chetaev [5]). Ces vecteurs de $\mathbb{R}^m$ ne sont autres que les coordonnées locales des G-vitesses virtuelles.

III.2. Formes semi-basiques associées aux torseurs

Par dualité, un élément $(y, \mathcal{C}) \in TG \times \mathcal{X}^* \mathcal{G}$, c'est-à-dire un couple état cinématique-torseur, définit un couple $(y, \alpha_{\mathcal{C}}) \in TG \times \mathcal{G}^*$, d'où un élément $(y, z) \in TG \times_G T^* G$ défini par le couplage avec une G-vitesse virtuelle (y, y') :

$$\langle (y, z), (y, y') \rangle = \langle \alpha_{\mathcal{C}}, \xi \rangle = \langle \mathcal{C}, \mathcal{X}^{\xi} \rangle$$

où (y, ξ) et (y, y') sont associés comme indiqué ci-dessus.

DÉFINITION 5. – Le résultat (réel) du couplage est appelé **puissance virtuelle du torseur $\mathcal{C}$ pour la vitesse virtuelle** (y, y') (ou bien pour le cotorseur $\mathcal{X}^{\xi}$ associé).

Finalement, *un torseur $\mathcal{C}$ définit une section du fibré $TG \times_G T^* G \to TG$, c'est-à-dire une forme semi-basique*, sur TG, relativement à la projection canonique de TG sur G, que l'on notera encore $\alpha_{\mathcal{C}}$, telle que le couplage de $\alpha_{\mathcal{C}}(y)$ avec une vitesse virtuelle (y, y') soit la puissance virtuelle du torseur $\mathcal{C}$ pour le cotorseur ξ correspondant à la vitesse virtuelle (y, y').

IV. DYNAMES

Introduction

En prenant comme variété de configuration d'un système mécanique un groupe de Lie G de difféomorphismes de $\mathbb{E}$ (avant que soient prises en compte d'éventuelles liaisons), on a obtenu une relation entre les torseurs, qui sont des champs de covecteurs sur $\mathbb{E}$, et les formes semi-basiques sur G.

Ce choix permet d'établir le lien entre les deux aspects de la dynamique d'un système : mouvement « abstrait » de la configuration sur G, et mouvement « physique » des particules du système dans l'espace d'évolution.

Il reste à étudier comment on associe un torseur à un champ de vecteurs ou certains champs de tenseurs sur $\mathbb{E}$, pour obtenir la modélisation des efforts et de l'accélération d'un mouvement.

La modélisation des efforts sur un système mécanique se fait en deux étapes :

1 – Donnée de champs de vecteurs ou de tenseurs sur $\mathbb{E}$, représentant une densité volumique ou massique.

2 – Construction d'un torseur associé, en postulant que les champs précédents interviennent, en tant qu'effort sur le système, uniquement par leur torseur associé (Germain [7]).

Remarquons que dans certains cas, tel qu'un solide euclidien soumis à une force concentrée en un point, on donne directement le torseur qui représente l'effort, sans exprimer le champ des forces exercées sur chaque particule.

IV.1. Constructions de torseurs

$(\mathbb{E}, \mathbb{B}, G)$ est un système mécanique muni d'une mesure massique dm, un mouvement g_t du système est donné, et l'espace d'évolution $\mathbb{E}$ est supposé riemannien, la métrique étant notée $\langle\ ,\ \rangle$.

Décrivons deux procédés fréquemment employés pour obtenir des torseurs.

Un *premier procédé* consiste à envisager un champ de vecteurs sur $T\mathbb{E}$, dépendant éventuellement du temps, et vertical pour la fibration tangente $\tau\mathbb{E}$, soit $\mathcal{X}_t \in \Gamma(v\mathbb{E})$ (autrement dit, un champ pouvant dépendre de la vitesse et du temps si on le restreint à la trajectoire d'une particule).

Selon que le champ $\mathcal{X}$ représente une densité « volumique » ou « massique », il définit un **torseur** dépendant du temps, noté $\tilde{\mathcal{X}}_t \in \mathcal{X}(\mathcal{G})^*$, par le couplage

$$(1) \qquad (\tilde{\mathcal{X}}_t, \mathcal{X}^\xi) = \int_{\mathbb{B}_t} \langle \mathcal{X}_t(x, \dot{x}), \mathcal{X}^\xi(x) \rangle \, dx$$

ou bien par

$$(1\ bis) \qquad (\tilde{\mathcal{X}}_t, \mathcal{X}^\xi) = \int_{\mathbb{B}_t} \langle \mathcal{X}_t(x, \dot{x}), \mathcal{X}^\xi(x) \rangle \, dm(x)$$
$$\xi \in \mathcal{G}, \qquad \mathbb{B}_t = g_t(\mathbb{B}).$$

DÉFINITION 6. – Le résultat est appelé **puissance virtuelle du champ $\mathcal{X}$ à l'instant t, pour la vitesse virtuelle associée à ξ.**

Cette puissance virtuelle ne dépend que de la restriction de $\mathcal{X}$ au fibré des positions.

On définirait de même un torseur à partir d'un champ de vecteurs sur le bord de $\mathbb{B}_t$.

Expression locale. – Le champ $\mathcal{X}$ étant donné, exprimons le torseur $\tilde{\mathcal{X}}$ dans la base naturelle duale associée à une carte de G, par exemple pour une densité massique (1 *bis*) :

$$(2) \qquad (\tilde{\mathcal{X}}_t, \mathcal{X}^\xi) = v \int_{\mathbb{B}_t} \left\langle \frac{\partial x}{\partial q}, \mathcal{X} \right\rangle dm$$

compte tenu de l'expression locale d'un cotorseur :

$$\mathcal{X}_x^\xi = v \frac{\partial x}{\partial q} \qquad \text{pour} \quad \xi = v \frac{\partial}{\partial q} \in \mathcal{G}.$$

D'où

$$(3) \qquad \alpha_{\tilde{\mathcal{X}}} = \left(\int_{\mathbb{B}_t} \left\langle \frac{\partial x}{\partial q}, \mathcal{X} \right\rangle dm \right) dq.$$

Un *deuxième procédé* consiste à envisager un champ de 2-tenseurs euclidiens $T \in \Gamma(T\mathbb{E} \otimes T^*\mathbb{E})$, pouvant dépendre du temps.

Ce tenseur définit un torseur $\tilde{T}$ (dépendant du temps), par le couplage

$$(4) \quad (\tilde{T}, \mathcal{X}^\xi) = \int_{\mathbb{B}_t} (\mathcal{S} \nabla \mathcal{X}^\xi : \mathcal{S} T)(x) + (\mathcal{A} \nabla \mathcal{X}^\xi : \mathcal{A} T)(x) \, dx$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sont les parties antisymétriques et symétriques, ∇ la dérivation covariante dans $\mathbb{E}$, et : la contraction (2, 3), (1, 4) définie localement, pour

$T = a^i_j\, e^i \otimes e_j$ et $T' = b^i_j\, e^i \otimes e_j$, par $T{:}T' = (T \otimes T')\,(e^i,\, e_k,\, e^k,\, e_i) = b^i_k\, a^k_i$. (Ce produit contracté est donc la trace du produit des matrices de T et T'.)

DÉFINITION 6 *bis*. – Appelons le réel obtenu **puissance virtuelle du tenseur T à l'instant t, pour la vitesse virtuelle associée à ξ.**

Un exemple simple consiste à prendre $T = -p\, I$, p étant une fonction réelle donnée, dépendant du temps, sur le fibré des positions. En effet, on obtient dans ce cas :

$$(\tilde{T},\, \mathcal{X}^\xi) = \int_{\mathbb{B}_t} p\,(x,\, t)\, \mathrm{div}\,(\mathcal{X}^\xi)\, dx. \tag{4 bis}$$

La proposition suivante est essentielle pour obtenir les équations du mouvement dans $\mathbb{E}$ lorsque T est symétrique.

PROPOSITION 2. – *Lorsque T est symétrique $(\mathcal{S}\,T = T,\ \mathcal{A}\,T = 0)$, et que $\mathbb{B}$ vérifie les hypothèses du théorème de la divergence, la puissance virtuelle de T se décompose en :*

$$(\tilde{T},\, \mathcal{X}^\xi) = \int_{\mathbb{B}_t} \langle\, \mathrm{div}\, T,\, \mathcal{X}^\xi\, \rangle\, dx - \int_{\partial\mathbb{B}_t} \langle\, T\nu,\, \mathcal{X}^\xi\, \rangle\, dx \tag{5}$$

ν étant le vecteur normal unitaire sortant du bord orienté de $\mathbb{B}$. □

Suivant une terminologie introduite par Brelot [3], dans un cas particulier, on appellera **dynames** les torseurs définis par l'un de ces deux procédés.

IV.2. Exemple du champ des accélérations

DÉFINITION 7. – Appelons **torseur dynamique ou dyname des accélérateurs** le torseur $\tilde{\mathcal{A}}$ associé au champ $\mathcal{A}$ des accélérations du mouvement dans $\mathbb{E}$, par le premier procédé décrit au paragraphe IV.I, en utilisant la mesure massique.

Comme pour les vitesses, on dispose d'une deuxième notion d'accélération : Le **vecteur accélération** relatif à G, pour la configuration g_t, est l'élément de TG défini par : $\nabla^{\mathcal{K}}_{\dot{g}}\, \dot{g}$, à l'aide de la dérivation covariante associée à la métrique cinétique $\mathcal{K}$ sur G.

En raison de cette métrique, le tenseur d'inertie $\mathcal{J}$ coïncide avec la transformation de Legendre $\mathcal{L}_T$, si $\hat{d}$ est la dérivation verticale, $\Omega = d\,\hat{d}T$ est une forme symplectique sur TG. Enfin, $\mathcal{J}$ est un symplectomorphisme de TG sur $T^*\,G$ muni de la 2-forme de Liouville ω.

Lorsque le système est soumis à des liaisons géométriques, la variété de configuration M est riemannienne pour la métrique induite, et la relation entre ces deux aspects de l'accélération s'établit ainsi :

PROPOSITION 3. – *Le champ des accélérations* $\nabla^{\mathcal{K}}_{\dot{g}}\, \dot{g}$ *du mouvement sur* M *est transformé, par* $\mathcal{J}^{-1}$ *de la forme semi-basique* $\alpha_{\tilde{\mathcal{A}}}$ *associée au torseur dynamique* $\tilde{\mathcal{A}}$ *sur* $\mathbb{E}$.

Autrement dit :

$$\alpha_{\tilde{\mathcal{A}}} = \mathcal{L}_T\,(\nabla^{\mathcal{K}}_{\dot{g}}\, \dot{g}) \quad \square \tag{6}$$

Cette proposition, bien connue dans sa formulation locale, se démontre en vérifiant que les expressions locales des deux membres s'écrivent :

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q}\right) dq. \tag{6 bis}$$

La relation entre la forme semi-basique $\alpha_{\tilde{\mathcal{A}}}$ et le champ $\mathcal{X}$ est assurée par la structure symplectique de TM associée à l'énergie cinétique :

PROPOSITION 4. – *Pour tout mouvement du système, la relation de la Proposition* 3 *entre les deux aspects de l'accélération s'écrit :*

$$\alpha_{\tilde{\mathcal{A}}} = i_{\mathcal{X}}\,\Omega + dT = i_{(\mathcal{X}-\Sigma)}\,\Omega \tag{7}$$

où $\mathcal{X}$ *est l'équation différentielle du second ordre sur* M *dont le mouvement est solution, et* Σ *la gerbe géodésique de la métrique cinétique.* $\square$

Démonstration abrégée :

– Sur la variété riemanienne $(M,\, \mathcal{K})$, l'accélération d'un mouvement g_t s'exprime par $\nabla^{\mathcal{K}}_{\dot{g}}\, \dot{g} = \gamma\,(\mathcal{X} - \Sigma)\,(\dot{g})$ où Σ est la gerbe canonique et γ l'isomorphisme naturel de VTM sur TM.

– De plus, l'isomorphisme de Legendre $\mathcal{L}_T$ transforme $\gamma\,(\mathcal{X} - \Sigma)$ en $i_{(\mathcal{X}-\Sigma)}\,\Omega$.

– Enfin, la gerbe géodésique Σ est aussi un champ hamiltonien : $i_\Sigma\,\Omega = -dT$.

V. DYNAMIQUE D'UN SYSTÈME LIBRE

Comme précédemment, $(\mathbb{E},\, \mathbb{B},\, G)$ est un système mécanique muni d'une mesure massique dm, pour laquelle la variété $\mathbb{B}$ est supposée intégrable.

Dans le modèle de la mécanique dite classique, les mouvements auxquels on s'intéresse, pour un système libre, sont caractérisés par le théorème suivant, que l'on utilisera dans la suite sous la dénomination « **Théorème fondamental de la dynamique** ».

V.1 Théorème

Pour

– un torseur $\mathcal{F} \in \mathcal{X}(\mathcal{G})^*$

et

– un mouvement du système,

les propriétés suivantes sont **équivalentes :**

P1) *Newton 1687*

Le mouvement x_t de chaque particule dans $\mathbb{E}$ est tel qu'à tout instant, le torseur dynamique $\tilde{\mathcal{A}}$ soit égal au torseur $\mathcal{F}$.

Une condition équivalente portant sur le mouvement représenté dans G est l'égalité des formes semi-basiques associées : $\alpha_{\tilde{\mathcal{A}}} = \alpha_{\mathcal{F}}$.

P2) *D'Alembert 1743, Lagrange 1788*

A tout instant du mouvement, et pour toute G-vitesse virtuelle, les puissances virtuelles des torseurs $\mathcal{F}$ et $\tilde{\mathcal{A}}$, sont égales :

$$\forall \xi \in \mathcal{G} \qquad \langle \mathcal{F} - \tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{X}^{\xi} \rangle = 0.$$

P3) *Formulation symplectique sur TG* (Klein [9], Godbillon [8])

La vitesse $\dot{g}_t$ du mouvement sur la variété de configuration est, sur TG, une courbe intégrale du champ de vecteurs $\mathcal{X}$ défini par :

$$i_{\mathcal{X}}\,\Omega = \alpha_{\mathcal{F}} - dT \quad \text{ou bien} \quad i_{(\mathcal{X}-\Sigma)}\,\Omega = \alpha_{\mathcal{F}}$$

où T est l'énergie cinétique, Σ le champ géodésique sur TG pour la métrique cinétique, et $\Omega = d\,\hat{d}T$ la 2-forme symplectique sur TG associée à cette métrique.

P3 *bis*) *Formulation symplectique sur T^*G*

Le relèvement contangent $z_t = \mathcal{J} \circ \dot{g}_t$ du mouvement, sur l'espace des phases T^*G, est une courbe intégrale du champ $\mathfrak{Z} \in \Gamma(TT^*G)$ défini par :

$$i_{\mathfrak{Z}}\,\omega = (\mathcal{J}^{-1})^*\,(\alpha_{\mathcal{F}} - dT) \quad \text{avec} \quad \mathfrak{Z} = T\,\mathcal{J} \circ \mathcal{X} \circ \mathcal{J}^{-1}$$

où ω est la 2-forme de Liouville sur T^*M, et $\mathcal{J}$ le tenseur d'inertie (isomorphisme de Legendre). □

COROLLAIRE. – *Pour tout torseur $\mathcal{F}$, l'unique champ $\mathcal{X}$* vérifiant (P3), définit une *équation différentielle du second ordre sur G.* □

Remarque. – Moyennant quelques modifications de ces énoncés, on pourrait supposer que le torseur $\mathcal{F}$ dépend du temps.

DÉFINITION 8. – Pour un système mécanique ($\mathbb{E}$, $\mathbb{B}$, G, dm), s'il existe un couple (g_t, $\mathcal{F}$) constitué d'un mouvement et d'un torseur, vérifiant le théorème fondamental, $\mathcal{F}$ est appelé **torseur des efforts** sur le système, pour le mouvement g_t.

Du point de vue physique, le corollaire montre que

– la donnée du torseur $\mathcal{F}$ et d'un état cinématique « initial » détermine un mouvement admissible qui est alors unique. Sans évoquer les approximations de calcul, une différence entre ce mouvement théorique et le mouvement observé peut signifier que le système ne relève pas de ce modèle classique (par exemple en raison d'effet relativiste dû à des vitesses élevées), ou bien révéler une inadéquation dans le choix du torseur des efforts, ou de l'espace $\mathbb{E}$ (Pendule de Foucault), ou du groupe G (par exemple le groupe des déplacements de l'espace lorsque le système présente des déformations).

– la donnée (ou l'observation) d'un mouvement g_t détermine de manière unique un champ des accélérations, donc un torseur $\mathcal{F}$.

Entre ces deux situations extrêmes, on peut envisager que soient donnés *a priori* seulement certaines propriétés du mouvement et du torseur des efforts, résultant de l'expérimentation (hypothèses de modélisation). Si l'application du théorème fondamental conduit à l'existence et l'unicité d'un couple (g_t, $\mathcal{F}$) vérifiant les prorpiétés requises, on dira que le **système est déterminé**.

Des situations de ce type sont étudiées au paragraphe VI.

Cas particuliers. – 1) Si le torseur $\mathcal{F}$ est **conservatif**, autrement dit la forme $\alpha_{\mathcal{F}}$ basique, exacte : $\alpha_{\mathcal{F}} = d(U \circ p)$, les propriétés énoncées dans le théorème fondamental de la dynamique prennent la forme suivante (en abrégé) :

P1) $\nabla^{\mathcal{K}}_{\dot{g}} \dot{g} = \operatorname{grad} U$ avec $\operatorname{grad} U = \mathcal{J}^{-1}(dU \circ p)$.

P2) Idem.

P3) $i_{\mathcal{X}} \Omega = -dH'$ en posant $H' = T - U \circ p$.

P3 *bis*) $i_{\mathfrak{Z}} \omega = -dH$ en posant $H = H' \circ \mathcal{J}^{-1}$.

H et H' sont appelés **Hamiltoniens** du système (respectivement pour ω et Ω). Les flots respectifs $\dot{g}$ et z de $\mathcal{X}$ et $\mathfrak{Z}$ sont des symplectomorphismes.

Appelons **Lagrangien** du système, la fonction L, définie sur TG par

$$L = T + U \circ p.$$

P3) prend alors la forme équivalente : $L_{\mathcal{X}} \wedge = dL$

où $\wedge$ est la 1-forme de Liouville sur TG.

En effet, $L_{\mathcal{X}}\wedge = i_{\mathcal{X}}\, d\wedge + di_{\mathcal{X}}\wedge$ et, sachant que $L + H' = 2T$, cela revient à vérifier que $i_{\mathcal{X}}\wedge = 2T$, ce qui est immédiat avec l'expression locale $\wedge = \dfrac{\partial L}{\partial v}$.

PROPOSITION 5. – H **est transformée de Legendre de L**, *(Libermann & Marle* [10]), *autrement dit : $H = (V \cdot L - L) \circ \mathcal{J}^{-1}$ (V champ de Liouville sur TM).* □

Enfin toujours dans le cas des systèmes conservatifs, on a la formulation variationnelle équivalente (Hamilton, 1834) : L'arc g_t, sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, avec extrémités données, est une courbe extrémale de la fonctionnelle d'action

$$A(\gamma) = \int_a^b L(\dot\gamma(t))\, dt.$$

2) Lorsque le torseur $\mathcal{F}$ est **gyroscopique**, (Wang, Krishnaprasad [13]), c'est-à-dire : $\alpha_C(Y) = i_y\, d(\mathcal{J}\mathcal{Y})$, pour un champ de vecteurs donné $\mathcal{Y}$ sur G, la propriété P1 s'écrit :

$$\nabla^{\mathcal{K}}_{\dot g}\, \dot g = \mathcal{J}^{-1}(d(\mathcal{J}\mathcal{Y})(\dot g, \cdot)).$$

VI. DYNAMIQUE D'UN SYSTÈME LIÉ

VI.1. Dynamique d'un système soumis à une liaison géométrique

VI.1.1. *Caractérisation des mouvements étudiés*

On suppose désormais qu'une liaison géométrique sur un système mécanique $(\mathbb{E}, \mathbb{B}, G, dm)$ est représentée par un couple (M, α_ι) constitué d'une sous-variété M de G, et d'une forme semi-basique α_ι pour le fibré tangent τG (représentant les efforts de la liaison).

On s'intéresse aux couples $(g_t, \mathcal{F})$,

– constitués d'un mouvement g_t du système, et d'un torseur $\mathcal{F}$ dont la forme $\alpha_{\mathcal{F}}$ associée s'écrit $a_\iota + \alpha_d$ où α_d représente les efforts hors liaisons;

– vérifiant la propriété suivante :

(i) g_t est un mouvement (cinématiquement) compatible avec la liaison (c'est-à-dire $g_t \in M$) et le couple $(g_t, \mathcal{F})$ vérifie le théorème fondamental.

DÉFINITION 9. – La liaison géométrique est **parfaite** lorsque la forme α_ι s'annule sur le sous-fibré des M-vitesses virtuelles à chaque instant d'un mouvement.

VI.1.2. *Détermination du système*

Envisageons les situations suivantes :

1) On connaît tous les efforts : Supposons donnés M, $\mathcal{F}$, et un état cinématique initial (appartenant à TM). Alors, d'après le corollaire du théorème fondamental, il existe au plus un mouvement répondant aux conditions posées ci-dessus. (On peut dire que le mouvement existe toujours si l'on accepte qu'il soit réduit à un point de M).

DÉFINITION 10. – La liaison géométrique est dite **primitive** lorsque la forme $\alpha_{\tilde{\mathcal{A}}} - \alpha_{\mathcal{F}}$ induit une forme semi-basique β sur TM, et que la propriété (i) est équivalente à

(ii) g_t est un mouvement compatible avec la liaison et vérifie la propriété P2 du théorème fondamental où l'on remplace G par M, c'est-à-dire une G-vitesse virtuelle par une M-vitesse virtuelle, et $\alpha_{\tilde{\mathcal{A}}} - \alpha_{\mathcal{F}}$ par β.

Cette restriction de la variété de configuration, utile pour simplifier le calcul de l'énergie cinétique T, et diminuer le nombre de variables, est souvent opérée implicitement.

Exemple. – Pour un point de l'espace usuel $\mathbb{E}$ $(G = \vec{E})$, de masse unité, astreint à rester sur un plan, avec un repère convenable, et en posant $\alpha_{\mathcal{F}} = Q_x\,dx + Q_y\,dy + Q_z\,dz$, les mouvements vérifiant les conditions (i) et (ii) sont respectivement solutions de :

(i) $\ddot{x} - Q_x = 0,\ \ddot{y} - Q_y = 0,\ Q_z = 0$

(ii) $\ddot{x} - Q_x = 0,\ \ddot{y} - Q_y = 0.$

On constate que la liaison est primitive lorsque tous les efforts sont tangents au plan, ou encore lorsque $\alpha_{\mathcal{F}}$ est une somme de formes dont les composantes selon dz s'annulent.

2) On suppose maintenant que seuls M et α_d sont donnés. Alors,

PROPOSITION 6. – *Si la liaison est parfaite, le mouvement ainsi que a_ι sont déterminés par un état cinématique initial.* □

Remarque. – Lorsqu'une liaison est parfaite, certains auteurs appliquent au mouvement la condition (nécessaire) suivante :

(iii) g_t est un mouvement compatible avec la liaison et vérifie la propriété P2 du théorème fondamental, où l'on remplace une G-vitesse virtuelle par une *M-vitesse virtuelle.*

On n'obtient plus dans ce cas les conclusions de la Proposition 6, mais seulement une relation dont l'expression locale est :

$$\left\langle (\delta T_i - Q_i^d - Q_i^l)\,dq^i,\ V^j \frac{\partial}{\partial q^j} \right\rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad (q_\alpha)\ fix\acute{e}.$$

On a supposé que M était définie par une submersion, de sorte que dans une carte adaptée, les configurations appartenant à M soient caractérisées par $g = (q_j, q_\alpha)$ et (q_α) fixé. Q_i^d et Q_i^l sont les coordonnées respectives des formes α^d et α^l.

Ceci, par un raisonnement classique d'algèbre linéaire, équivaut au système :

$$\begin{aligned} \delta T_j &= Q_j^d \\ 0 &= Q_\alpha^d + Q_\alpha^l + \lambda_\alpha \end{aligned}$$

L'apparition des « multiplicateurs de Lagrange » λ conduit à une conclusion partielle : le mouvement est déterminé, mais les efforts de liaison restent inconnus.

Pour l'exemple précédent, l'application de la relation (iii) conduit à :

$$\ddot{x} - Q_x = 0 \qquad \ddot{y} - Q_y = 0 \qquad Q_z = \lambda$$

On voit que les multiplicateurs de Lagrange ne représentent pas nécessairement des efforts de liaisons : dans cet exemple, λ est la composante de la puissance virtuelle de tous les efforts normaux au plan.

VI.2. Dynamique d'un système soumis à une liaison cinématique

VI.2.1. *Caractérisation des systèmes étudiés, équations du mouvement*

a) Les *données* sont les suivantes :

– Un système mécanique, soumis éventuellement à des liaisons géométriques primitives, de variété de configuration M.

– Une liaison cinématique, représentée maintenant par un couple (C, α_l) où C est une sous-variété de TM, satisfaisant les conditions décrites précédemment, (en particulier, C est une sous-variété de TM_1, où M_1 est la projection de C sur M), et α_l une forme semi-basique représentant l'effort de liaison, comme pour une liaison géométrique.

– $\mathbb{F}$ est un sous-fibré vectoriel de vTM, plus précisément, l'image réciproque, par l'isomorphisme H, de $TM \times_M TM$ sur VTM, d'un sous-fibré de vTM.

b) On s'intéresse aux couples $(g_t, \mathcal{F})$ qui vérifient les propriétés suivantes à tout instant :

(1) $g_t \in M_1$ et $\dot{g}_t \in C$ (Le mouvement respecte la liaison cinématique.

(2) Les restrictions à M des formes $\alpha_\mathcal{A}$ et $\alpha_\mathcal{F}$ vérifient les relations $\alpha_\mathcal{A} = \alpha_\mathcal{F}$ et $\alpha_\mathcal{A} - \alpha_d \in \mathbb{F}^0$ (plus précisément, il s'agit d'une section de l'annulateur $\mathbb{F}^0$ de $\mathbb{F}$).

$\alpha_{\mathcal{A}}$ et $\alpha_{\mathcal{F}}$ sont des formes semi-basiques sur TM, $\alpha_{\mathcal{F}}$ est la somme d'une forme semi-basique α_d connue (représentant les « efforts donnés »), et d'une forme semi-basique inconnue α_l (représentant des efforts de liaison), appartenant à $\mathbb{F}^0$;

($\mathbb{F} \subset \operatorname{Ker} \alpha_l$, formulation due à Dazord [6] dans le cas particulier des asservissements, que l'on étudiera au paragraphe suivant).

Compte tenu de la Proposition 3, la seconde relation de la propriété (2) s'écrit aussi :

$$i_{(\mathcal{X}-\Sigma-{}^{\#}\alpha_d)}\,\Omega \in \mathbb{F}^0 \quad \text{ou bien} \quad \mathcal{X} - \Sigma - {}^{\#}\alpha_d \in \mathbb{F}^{\Omega}$$

en notant ${}^{\#}\alpha_d$ le champ associé à la forme α_d par dualité symplectique dans $(TM,\ \Omega)$, et $\mathbb{F}^{\Omega}$ l'orthogonal symplectique de $\mathbb{F}$. Rappelons que $\mathcal{X}$ définit une équation différentielle du second ordre, c'est donc une section du fibré $\tau\,(TM_1)$ vérifiant la propriété $T\,p \circ \mathcal{X} = P \circ \mathcal{X} = \mathrm{Id}$, où p et P sont les projections respectives des fibrés tangents $\tau\,M_1$ et $\tau\,(TM_1)$.

D'autre part, Σ est la gerbe géodésique de la variété riemannienne $(G,\ \mathcal{K})$ (*cf.* Prop. 3), c'est-à-dire $-{}^{\#}dT$.

De plus, compte tenu de (1), $\mathcal{X}\,(\dot{g}_t) \in T_{g_t}\,C$.

Dans une carte locale de M, adaptée à la sous-variété M_1, les propriétés (1) et (2) se traduisent respectivement par :

(1) $\dot{g}_t = ((q_1,\ \ldots,\ q_m,\ 0,\ \ldots,\ 0),\ (\dot{q}_1,\ \ldots,\ \dot{q}_m,\ 0,\ \ldots,\ 0))\,(t)$ et

$$\dot{q}^{\alpha} = F^{\alpha}\,(q,\ \dot{q}^j) \qquad j = 1,\ldots,m-r \qquad \alpha = m-r,\ldots,m$$

$$m = \dim M_1 \qquad n = \dim M \quad \text{et} \quad \dim C = 2\,n - r.$$

(2) Si (ω_β) est une base locale de sections de $\mathbb{F}^0$, $\alpha_d = Q_i\,dq^i$ et $w_\beta = \omega_{\beta i}\,dq^i$ les expressions locales, on a

$$\delta T_h = Q_h + \mu^{\beta}\,\omega_{\beta h} \qquad \text{pour} \quad h = 1,\ \ldots,\ m$$

et

$$0 = Q_k + \mu^{\beta}\,\omega_{\beta k} \qquad \text{pour} \quad k = m+1,\ \ldots,\ n.$$

Les μ^{β} sont des fonctions inconnues du temps.

c) Lorsque les efforts hors liaison sont conservatifs (de hamiltonien H), la deuxième relation de la propriété 2) s'exprime ainsi pour le relèvement cotangent $z = \mathcal{J} \circ \dot{g}$ du mouvement sur $(T^*M,\ \omega)$, avec le champ hamiltonien ${}^{\#}dH$ ou X_H :

$\dot{z} - X_H\,(z)$ *appartient à l'orthogonal symplectique du sous-fibré* $T\,\mathcal{J}\,(\mathbb{F})$ *de* $TT^*\,M$.

VI.2.2. *Détermination du système*

Pour étudier les questions d'existence et d'unicité d'un mouvement, résumons les conditions imposées précédemment, sous la forme :

(1) $g_t \in M_1$ et $\dot{g}_t \in C$

(2) $\mathcal{X} - {}^{\#}(dT + \alpha_d + \alpha_l) = 0$ et ${}^{\#}\alpha_l \in \mathbb{F}^{\Omega}$

(3) Conditions initiales

en rappelant que M, C, α_d, T, $\mathbb{F}$ sont donnés.

Notons $T_C\, p$ la restriction de l'application $Tp : TTM \to TM$ aux vecteurs Y tels que $y = P(Y) \in C$, et $(T_C\, p)^{-1}(TM_1)$ le fibré vectoriel de base C, ensemble des $Y \in TTM$ tels que $P(Y) \in C$ et $T_C\, p(Y) \in TM_1$. L'expression locale des éléments de $(T_C\, p)^{-1}(TM_1)$ est donc, dans une carte adaptée à la sous-variété M_1 :

$$\begin{aligned} Y = ((q_1, \ldots, q_m, 0, \ldots, 0), \quad (v_1, \ldots, v_m, 0, \ldots, 0),\\ (Q_1, \ldots, Q_m, 0, \ldots, 0), \quad (V_1, \ldots, V_n)) \end{aligned}$$

$y = (q, v)$ vérifiant les équations de C.

Il en résulte que $\dim (T_C\, p)^{-1}(TM_1)_y = n + m$

Ces données étant posées, remarquons que si un mouvement vérifie les propriétés (1) et (2), on a, avec $y = \dot{g}_t$, ${}^{\#}(dT + \alpha_d)(y) \in (T_C\, p)^{-1}(TM_1)_y$ car Σ est le champ d'une équation du second ordre, et ${}^{\#}\alpha_d$ est vertical.

D'autre part, $\mathcal{X}(y) \in T_y\, C$, qui est un sous-espace de $(T_C\, p)^{-1}(TM_1)_y$, de dimension $2m - r$.

En résumé, on a la

PROPOSITION 7. – *Si, pour tout $y \in C$, le sous-espace $\mathbb{F}_y^{\Omega}$ vérifie les deux propriétés :*

$\dim \mathbb{F}_y^{\Omega} = n - m + r$ (*ou* $\dim \mathbb{F}_y = m - r$) *et* $\mathbb{F}_y^{\Omega} \cap T_y\, C = \{0\}$ *alors les conditions* (1), (2) *et* (3) *déterminent un mouvement unique et par suite* α_l. $\square$.

On s'intéresse maintenant à deux situations où la Proposition 7 s'applique :

1) Corollaire 1 et définition 11. – Supposons que la puissance virtuelle des efforts inconnus, représentés par α_l, s'annule pour les C-vitesses virtuelles. Autrement dit, choisissons

$$\mathbb{F} = \bigcup_{y \in C,\, x = p\,(p)} T_y\,(C_x).$$

Alors les hypothèses de la Proposition 7 sont vérifiées. Une telle liaison cinématique est dite **parfaite** (Marle [11]).

2) Asservissements. – Pour un système de variété de configuration M, associons à la double donnée d'une submersion surjective $f : M \to Q$, sur une variété Q, et d'une application fibrée $X_0 : V_f M = \operatorname{Ker} T f \to TQ$, la sous-variété C de TM, définie par :

$$C = \{ y + (X_0 (y))^{\text{hor}},\ y \in V_f M \}$$

où i est l'injection canonique i de $V_f M$ dans TM, et hor le relèvement horiztontal pour la connexion (dite **connexion cinétique** sur M), dont la distribution horizontale est le sous-fibré $\mathcal{K}$-orthogonal de $V_f M$. Notons $\bar{\omega}$ la forme de connexion.

Ce sont les données de l'une des situations étudiées dans Dazord [6].

Proposition 8 et définition 12. – La sous-variété C de TM définit une liaison cinématique, et les mouvements compatibles sont caractéristisés par

$$T f (\dot{g}) = (X_0 \circ \bar{\omega}) (\dot{g}). \quad \square$$

Appelons **asservissements** ces liaisons cinématiques.

Le sens physique des choix de f et X_0 apparaît si l'on envisage le cas particulier suivant :

Définition 13 (Dazord [6]). – Un asservissement est dit parfait si $\mathbb{F} = TM \times_M V_f M$. Autrement dit, on suppose que la puissance virtuelle des efforts inconnus s'annule pour les vitesses virtuelles qui respectent la liaison géométrique consistant à bloquer les paramètres asservis.

Remarquons que les expressions locales de ces conditions ont été données respectivement par Chetaev en 1932 [5] et Beghin en 1922 [3].

Remarque. – Comme pour les liaisons géométriques, on ne peut éliminer les efforts de liaison en se restreignant aux M-vitesses virtuelles ou aux C-vitesses virtuelles. Cela fait apparaître des multiplicateurs dans les équations.

VII. EXEMPLES

Exemple. – Un point de masse 1 dans l'espace usuel $\mathbb{E}$ est astreint à rester sur un cylindre de rayon 1.

Dans un repère convenable de $\mathbb{E}$, la variété de configuration M, identifiée à $\mathbb{R} \times S^1$, est paramétrée par $q = (x,\ \theta)$.

Une liaison cinématique est donnée par la relation : $v_x + x\, v_\theta = 0$. Cette équation définit une sous-variété C de dimension 3 dans TM par l'équation de $C_q = C \cap T_q M$.

Ici, $M_1 = M$, $T_y C_q$ est la droite d'équation $V_x + x V_\theta = 0$.

Sur $G = \vec{\mathbb{E}}$, les équations prenant en compte les deux liaisons s'écrivent, si $\alpha_{\mathcal{F}} = (f_r + g_r)\, dr + (f_\theta + g_\theta)\, d\theta + (f_x + g_x)\, dx$

(1) $r = 1$; $\dot{x} + x\,\dot{\theta} = 0$

(2) $-\dot{\theta}^2 - f_r - g_r = 0$; $\ddot{\theta} - f_\theta - g_\theta = 0$; $\ddot{x} - f_x - g_x = 0$.

a) Supposons les liaisons parfaites : la forme α_l s'annule sur les vecteurs du type $V_\theta \left(-x \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial \theta}\right)$, donc $x\, g_x = g_\theta$.

Ceci donne les 5 relations suivantes (deux équations du mouvement et trois équations précisant la force de liaison à chaque instant).

$$\ddot{\theta} = f_\theta + x\, g_x; \qquad \ddot{x} = f_x + g_x$$

$$g_x = \frac{-\dot{x}\,\dot{\theta} - x\, f_\theta - f_x}{1 + x^2}; \qquad g_r = \dot{\theta}^2 + f_r; \qquad g_\theta = \ddot{\theta} - f_\theta.$$

On remarque la présence d'un effort radial non nul lorsque $\alpha_d = 0$.

b) Si la liaison est considérée comme un asservissement parfait du paramètre x, qu'un dispositif extérieur contrôle de manière à obtenir la relation $\dot{x} = -x\,\dot{\theta}$, on a nécessairement $g_\theta = 0$, d'où les équations dans ce cas :

$$\ddot{\theta} = f_\theta; \qquad \ddot{x} = -\dot{x}\,\dot{\theta} - x\, f_\theta$$

$$g_x = -f_x - \dot{x}\,\dot{\theta} - x\, f_\theta; \qquad g_r = -\dot{\theta}^2 - f_r; \qquad g_\theta = 0.$$

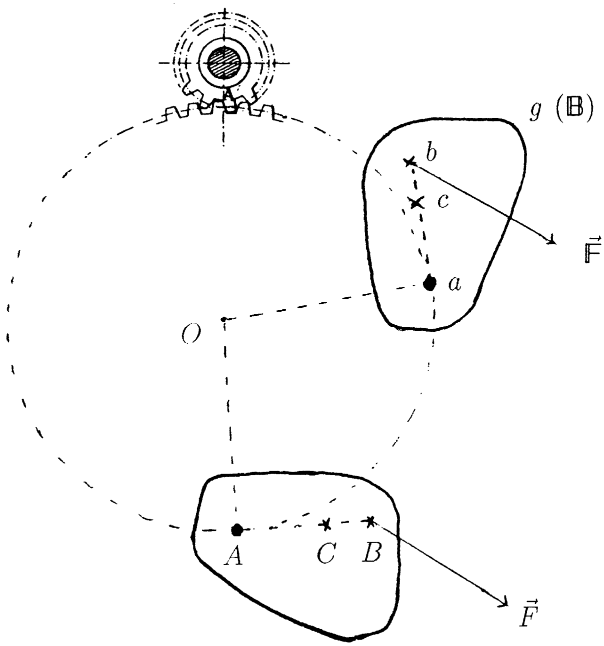
Exemple 2 (d'après Appell [2]). – $\mathbb{E}$ est l'espace usuel, $\mathbb{P}$ un plan de $\mathbb{E}$, le système est un solide (G est le groupe $SE(\mathbb{E})$ des déplacements de $\mathbb{E}$), homogène de modèle $\mathbb{B}$, de centre de masse C; A et B sont des points de $\mathbb{B}$, de sorte que A, B, C soient tous distincts et alignés sur une droite $\mathbb{D}$ de $\mathbb{P}$. Enfin, O est un point de $\mathbb{P}$ distinct de A. Les distances OA, AB, AC sont notées respectivement R, d, d'.

Le transformé d'un point P de $\mathbb{E}$ par une configuration $g \in SE(\mathbb{E})$ est noté p.

Le solide est soumis à une liaison géométrique, définissant une sous-variété M de $SE(\mathbb{E})$ par les conditions : $g \in M$ si $g(\mathbb{P}) = \mathbb{P}$ et $a = g(A)$ appartient à un cercle de $\mathbb{P}$, de centre O, de rayon R.

Dans $\mathbb{P}$, une direction arbitrairement fixée $\vec{U}$, permet de paramétrer M par (α, β), angles de $\overrightarrow{aO}$ et $\overrightarrow{ab}$ avec $\vec{U}$.

Il est facile de mettre en évidence un paramétrage du solide libre, pour lequel la liaison consiste à fixer les quatre paramètres autres que α et β. Pour la suite, $M = S^1 \times S^1$.



Envisageons enfin une liaison d'asservissement holonome résultant de l'action d'un moteur qui entraîne le point a, (on agit sur α), de sorte que $\beta - \alpha = \pi/2$.

Avec les notations du paragraphe VI.2.2, cela revient à prendre $Q = S^1$, $f(\alpha, \beta) = \alpha$, $X_0(\alpha, \beta, 0, v_\beta) = v_\beta$, M_1 la sous-variété de M définie par $\beta - \alpha = \pi/2$, et $C = TM_1$.

Du point de vue dynamique, on suppose que le torseur $\mathcal{F}$ des efforts sur le solide, pour une configuration donnée, est la somme du torseur associé à un glisseur $(b, \vec{F})$, dont le vecteur $\vec{F}$ est donné, constant et colinéaire à $\vec{U}$, et du torseur inconnu associé à une forme $\lambda\, d\alpha$, représentant l'effort dû à la liaison d'asservissement.

Cette hypothèse revient à supposer que l'asservissement est parfait.

Avec ces données, la liaison géométrique est primitive, d'où le calcul de l'énergie cinétique et de la puisance α_d du glisseur : On complète O, $\vec{U}$ par $\vec{V}$, $\vec{K}$ pour définir un repère orthonormé de $\mathbb{E}$ dans lequel le vecteur du cotorseur des vitesses soit $\vec{w} = \dot{\beta}\vec{K}$ et $\vec{F} = F\vec{U}$.

Si I est le moment d'inertie de $\mathbb{B}$ par rapport à l'axe $(C, \vec{K})$, et m la masse de $\mathbb{B}$, on obtient

$$\begin{aligned} 2T(\dot{g}) &= m\mathcal{V}(c)^2 + I\dot{\beta}^2 \\ &= m\dot{\alpha}^2 R^2 + m\dot{\beta}^2 d'^2 + 2m\dot{\alpha}\dot{\beta}Rd' \cos(\alpha-\beta) + I\dot{\beta}^2 \end{aligned}$$

et, suivant le paragraphe III.1, pour tout cotorseur ξ, associé à une M-vitesse virtuelle arbitraire.

$$\langle \alpha_d, \xi \rangle = \langle \vec{F}, \xi(b) \rangle$$

avec

$$\xi(b) = v\frac{\partial b}{\partial q} = v_\alpha R(-\sin\alpha\vec{U} + \cos\alpha\vec{V}) + \dots$$

soit $\alpha_d = -FR\sin\alpha\, d\alpha - F\, d\sin\beta\, d\beta$.

Suivant le paragraphe VI.2.1, le problème est la résolution du système suivant, d'inconnues β et λ :

$$g_t = (\beta_t - \pi/2, \beta_t) \quad \text{sur } TM : \alpha_{\mathcal{A}} = \alpha_d + \lambda\, d\alpha.$$

Soit $\ddot{\beta}(I + m\,d'^2) - m\,R\,d'\,\dot{\beta}^2 + F\,d\sin\beta = 0$ (qui détermine β) et $m\,R^2\,\ddot{\beta} + m\,R\,d'\,\dot{\beta}^2 + FR\cos\beta = \lambda$ (qui détermine λ).

Remarque. – Si l'on interprète la relation $\beta-\alpha = \pi/2$ comme une liaison géométrique parfaite, la puissance virtuelle de l'effort de liaison s'annule sur les M-vitesses virtuelles, autrement dit, est de la forme $\alpha_l = \lambda(d\alpha - d\beta)$. La somme des deux équations de Lagrange donne alors

$$(m\,R^2 + md'^2 + I)\ddot{\beta} + F(d\sin\beta + R\cos\beta) = 0$$

ce qui correspond à un mouvement pendulaire.

RÉFÉRENCES

[1] P. Aimé, Sur quelques points des Fondements Géométriques de la Mécanique Classique, Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes, 1995.

[2] P. Appell, Traité de Mécanique Rationelle T.2, Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[3] H. Beghin, Étude théorique des compas gyrostatiques Anschütz et Sperry, Thèse, Paris, 1922.

[4] Brelot, Les Principes Mathématiques de la Mécanique Classique, Arthaud, Paris, 1945.

[5] N.-G. Chetaev, On Gauss's principle, *Izv. Kazan. Fiz. Mat.*, Obsc., vol. **6**, 1932-1933, p. 323-326.

[6] P. Dazord, Mécanique Hamiltonienne en présence de Contraintes, *Illinois Journal of Mathematics*, vol. **38**, N.I., 1994, p. 148-175.

[7] P. Germain, La Méthode des Puissances Virtuelles en Mécanique des Milieux Continus, *Journal de Mécanique*, vol. **12**, 2, 1973, p. 235-274.

[8] C. Godbillon, Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique, Hermann, Paris, 1969.

[9] J. KLEIN, Espaces Variationnels et Mécanique, *Ann. Inst. Fourier*, vol. **12**, 1962, p. 1-124.

[10] P. LIBERMANN et C.-M. MARLE, Symplectic Geometry and Analytical Mechanics, D. Reidel, Dordrecht, 1987.

[11] C.-M. MARLE, Reduction of Constrained Mechanical Systems and Stability of Relative Equilibra (à paraître).

[12] Y. PIRONNEAU, Sur les liaisons non holonomes non linéaires, déplacements virtuels à travail nul, conditions de Chetaev UTAM_IS1MM Symposium on Modern Developments in Analytical Mechanics, Torino 1982, *Atti della Acad. della sc. di Torino*, vol. **117**, 1983, p. 671-686.

[13] L.-S. WANG et P. S. KRISHNAPRASAD, Gyroscopic Control and Stabilization, *Technical Research Report*, Univ. of Maryland, USA, 1992.

(Manuscrit reçu le 3 mars 1995;
version révisée reçue le 15 septembre 1995.)