ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

IRINA ANA TURTOI

Prolongement des structures spinorielles sur la variété des jets

Annales de l'I. H. P., section A, tome 61, nº 1 (1994), p. 63-73
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1994__61_1_63_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 61, n° 1, 1994, p. 63-73. *Physique théorique*

Prolongement des structures spinorielles sur la variété des jets

par

Irina Ana TURTOI

Institut de Construction, Département de Mathématique, 124 Bd. Lacul Tei, sect 2, Bucarest, Roumanie

RÉSUMÉ. — On considère une variété différentiable réelle de dimension n, munie d'une structure spinorielle et on démontre qu'on peut construire, d'une manière canonique, une structure spinorielle sur la variété des jets d'ordre 1 de la variété considérée. Dans le paragraphe 1, on présente certains résultats sur la théorie des jets. Le but du paragraphe 2 est de montrer que la variété des jets $J_q^1 C(Q)$ d'une algèbre de Clifford $C(Q)$ peut être munie d'une structure d'algèbre. Dans le paragraphe 3, on étudie d'abord le groupe de Lie $J_q^1 \operatorname{Pin} Q$ et l'on démontre que ce groupe est homomorphe au groupe de Lie $\operatorname{Pin} \tilde{Q}$, $\tilde{Q}$ étant une forme quadratique convenablement choisie sur l'espace vectoriel des jets de l'espace vectoriel sur lequel est donnée la forme quadratique Q. L'étude du groupe $J_q^1 O(Q)$ entreprise dans le même paragraphe montre que ce groupe est homomorphe au groupe $O(\tilde{Q})$. On met en évidence un diagramme commutatif qui va servir au but proposé. Le paragraphe 4 présente un exemple de prolongement d'une structure spinorielle de la variété différentiable $M = \mathbb{R}^2$ sur la variété des jets $J_q^1 \mathbb{R}^2$, quel que soit q.

ABSTRACT. — Let us consider a real differential manifold of dimension n, with a spinorial structure. We proved that it is possible to construct, in a canonical way, a spinorial structure on the 1-jets' manifold of the considered manifold. In the first paragraph, there are presented some general results in the theory of 1-jets. In the second paragraph, it is proved that 1-jets' manifold $J_q^1 C(Q)$ of a Clifford algebra $C(Q)$ could be organized as an algebra. In the third paragraph, there is studied firstly the Lie group $J_q^1 \operatorname{Pin} Q$ and it is proved that this one is homomorphic with the

Lie group Pin $\tilde{Q}$, $\tilde{Q}$ being a quadratic form, chosen in a convenient way, on the vectorial space of 1-jets $J_q^1 V$, of the vectorial space V on which the quadratic form Q was given. The study of the group $J_q^1 O(Q)$, in the same paragraph, shows that this group is homomorphic with the Lie group $O(\tilde{Q})$. There is also given here a commutative diagram, which will serve for our purpose. In the last paragraph, there is given an example of prolongation of a spin structure of the differential manifold $M = \mathbb{R}^2$ in the manifold of 1-jets $J_q^1 M$.

1. PROPRIÉTÉS DE BASE

Soient M une variété différentiable, réelle, de dimension n et $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications différentiable C^∞, définies sur R^q à valeurs dans M. On définit sur $\mathscr{F}$ une relation d'équivalence comme suit : deux applications φ, $\psi \in \mathscr{F}$ sont en relation si et seulement si $\varphi(0) = \psi(0)$ et $\left.\frac{\partial \varphi}{\partial t^\alpha}\right|_0 = \left.\frac{\partial \psi}{\partial t^\alpha}\right|_0$, quel que soit $\alpha = 1, 2, \ldots, q$. La classe d'équivalence d'une application $\varphi \in \mathscr{F}$ s'appelle le jet d'ordre 1 de φ et on le note par $j_q \varphi$. L'ensemble des jets d'ordre 1 des applications de $\mathscr{F}$ est noté par $J_q^1 M$ [2]. Il est facile de munir cet ensemble d'une structure de variété différentiable réelle de dimension $n(q+1)$. En effet, si U est le domaine d'une carte de la variété M, avec les coordonnées (x^i), $i = 1, 2, \ldots, n$, alors $J_q^1 U$ est le domaine d'une carte de $J_q^1 M$ avec les coordonnées (x^i, x_α^i), $i = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha = 1, 2, \ldots, q$, où nous avons noté par (x^i), $i = 1, 2, \ldots, n$ les coordonnées de $\varphi(0)$ dans la carte (U, x^i) et par :

$$x_\alpha^i = \left.\frac{\partial \varphi^i}{\partial t^\alpha}\right|_0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, q.$$

La variété différentiable $J_q^1 M$ appelée la variété de jets d'ordre 1 de la variété différentiable M, contient la variété M comme sous-variété.

Si $f : M \to N$ est une application différentiable de classe C^∞ entre les variétés différentiables réelles M et N, on peut construire $f^1 : J_q^1 M \to J_q^1 N$, application différentiable de classe C^∞, donnée par :

$$f^1(j_q \varphi) = j_q(f \circ \varphi)$$

quel que soit $j_q \varphi \in J_q^1 M$.

Supposons maintenant la variété différentiable M pseudo-riemannienne. Soit $P(M, O(Q))$ le fibré principal des repères orthonormés de M, où Q est une forme quadratique réelle de la même signature que celle de la métrique de M.

Une structure spinorielle sur M est un homomorphisme de fibrés principaux $f : \Sigma(M, \mathrm{Pin}\, Q) \to P(M, O(Q))$ qui se projette sur l'application identique de M et qui correspond à la représentation $p : \mathrm{Pin}\, Q \to O(Q)$ ([1], [3], [4]). En remplaçant Pin Q avec Spin Q et $O(Q)$ avec $SO(Q)$, nous obtenons une structure spinorielle spéciale sur M.

On montre facilement, [2], que si $f : \Sigma(M, \mathrm{Pin}\, Q) \to P(M, O(Q))$ est une structure spinorielle sur M, alors

$$f^1 : \quad J_q^1 \Sigma (J_q^1 M, J_q^1 \mathrm{Pin}\, Q) \to J_q^1 P (J_q^1 M, J_q^1 O(Q))$$

est un homomorphisme de fibrés principaux qui se projette sur l'application identique de $J_q^1 P$ et qui correspond à l'homomorphisme $p^1 : J_q^1 \mathrm{Pin}\, Q \to J_q^1 O(Q)$. Ce résultat est une conséquence du fait que si $P(M, G)$ est un fibré principal, alors $J_q^1 P (J_q^1 M, J_q^1 G)$ est aussi un fibré principal. De plus, si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ est un recouvrement de trivialisation locale du fibré P avec les fonctions de transition $s_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$, alors $\{J_q^1 U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ est un recouvrement de trivialisation locale du fibré $J_q^1 P$ avec les fonctions de transition $s_{\alpha\beta}^1 : J_q^1 U_\alpha \cap J_q^1 U_\beta \to J_q^1 G$ [2].

Nous nous proposons de construire, à l'aide des applications f^1 et p^1, une structure spinorielle sur la variété $J_q^1 M$, si

$$f : \Sigma(M, \mathrm{Pin}\, Q) \to P(M, O(Q))$$

est une telle structure sur M.

2. L'ÉTUDE DE LA VARIÉTÉ DES JETS D'UNE ALGÈBRE DE CLIFFORD

Soit $Q : V \to R$ une forme quadratique réelle, non dégénérée, sur l'espace vectoriel réel V de dimension n et $B : V \times V \to \mathbb{R}$ sa forme polaire.

L'algèbre de Clifford $C(Q)$ associée à la forme quadratique Q est définie par une propriété universelle, [1], comme indiqué ci-dessous :

(i) il y a une application linéaire $\theta : V \to C(Q)$, tel que

$$(\theta(x))^2 = Q(x) . 1,$$

quel que soit $x \in V$;

(ii) quel que soit l'application linéaire $u: V \to A$, (A étant une algèbre réelle) tel que $(u(x))^2 = Q(x).1$, il existe un homomorphisme unique d'algèbres u' tel que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & C(Q) \arrow[dr, "u'"] & \\ V \arrow[ur, "\theta"] \arrow[rr, "u"] & & A \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

En conséquence, pour chaque $x, y \in V$, il y a la relation :

$$xy + yx = 2B(x, y).1,$$

où la juxtaposition dénote la loi de multiplication de l'algèbre C(Q).

La variété différentiable des jets $J_q^1 V$ est munie d'une manière canonique d'une structure d'espace vectoriel. On peut définir alors la forme bilinéaire symétrique non dégénérée :

$$\tilde{B}: \quad J_q^1 V \times J_q^1 V \to \mathbb{R}$$

par

$$\tilde{B}(j_q \varphi, j_q \psi) = B(\varphi(0), \psi(0)) + \sum_{\alpha=1}^{q} B\left(\left.\frac{\partial \varphi}{\partial t^\alpha}\right|_0, \left.\frac{\partial \psi}{\partial t^\alpha}\right|_0\right), \tag{1}$$

quels que soient $j_q \varphi, j_q \psi \in J_q^1 V$. *Soit* $\tilde{Q}: J_q^1 V \to \mathbb{R}$ la forme quadratique associée à la forme bilinéaire $\tilde{B}$. Nous allons donner sur l'espace vectoriel $J_q^1 C(Q)$ une loi de multiplication :

$$*: \quad J_q^1 C(Q) \times J_q^1 C(Q) \to J_q^1 C(Q)$$

par

$$j_q \varphi * j_q \psi = j_q(\varphi\psi) \tag{2}$$

quels que soient $j_q \varphi, j_q \psi \in J_q^1 C(Q)$, où l'application $\varphi\psi: \mathbb{R}^q \to C(Q)$ est donnée par :

$$(\varphi\psi)(t) = \varphi(t)\psi(t), t \in \mathbb{R}^q.$$

Il en résulte que $J_q^1 C(Q)$ devient une algèbre avec la loi de multiplication $*$. Nous pouvons remarquer encore que $J_q^1 V \subset J_q^1 C(Q) \cap C(\tilde{Q})$.

3. SUR LES GROUPES J_q^1 Pin Q ET $J_q^1 O(Q)$

On sait que le groupe Pin Q est le groupe des éléments d'algèbre de Clifford C(Q), tel que $x = x_1 x_2 \ldots x_h$ avec $x_1, x_2, \ldots, x_h \in V$ et $Q(x_i) = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, h$, avec h un nombre entier quelconque. Dans la théorie des algèbres de Clifford on construit un revêtement (p, Pin Q) d'ordre 2 de $O(Q)$, [1], avec $p(x) = s_{x_1} \circ s_{x_2} \circ \ldots \circ s_{x_h}$ où $s_{x_1}, s_{x_2}, \ldots, s_{x_h}$

sont respectivement les symétries définies par les vecteurs non isotropes $x_1, x_2, \ldots, x_h$.

La variété différentiable $J_q^1 \operatorname{Pin} Q$ est inclue dans la variété différentiable $J_q^1 C(Q)$ et, de plus, devient un groupe de Lie avec la loi de multiplication $*$ de l'algèbre $J_q^1 C(Q)$.

Soit maintenant l'application différentiable $\varphi : \mathbb{R}^q \to \operatorname{Pin} Q$ tel que $\varphi(t) \in V$, quel que soit $t \in \mathbb{R}^q$. Nous avons donc, $j_q \varphi \in J_q^1 \operatorname{Pin} Q \cap J_q^1 V$, ce qui implique $Q(\varphi(t)) = \pm 1$, quel que soit $t \in \mathbb{R}^q$. Il en résulte $\dfrac{\partial}{\partial t^\alpha} Q(\varphi(t)) = 0$ quels que soient $\alpha = 1, 2, \ldots, q$ et $t \in \mathbb{R}^q$, donc $\tilde{Q}(j_q \varphi) = \pm 1$; en conséquence $j_q \varphi \in \operatorname{Pin} \tilde{Q}$. Dans le cas général, soit $j_q \varphi \in J_q^1 \operatorname{Pin} Q$; donc $\varphi(0) \in \operatorname{Pin} Q$ et alors :

$$\varphi(0) = x_1 x_2 \ldots x_h \quad \text{avec } x_1, x_2, \ldots, x_h \in V, \quad Q(x_i) = \pm 1, \quad i = 1, 2, \ldots, h.$$

Il en résulte $\tilde{Q}(j_q x_i) = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, h$.

On prend l'application

$$i : \quad J_q^1 \operatorname{Pin} Q \to \operatorname{Pin} \tilde{Q}, \qquad i(j_q \varphi) = j_q x_1 \,\tilde{*}\, j_q x_2 \,\tilde{*}\, \ldots \,\tilde{*}\, j_q x_h,$$

où $\tilde{*}$ dénote la loi de multiplication de l'algèbre $C(\tilde{Q})$.

Nous avons ainsi la :

PROPOSITION 1. — *Il existe un homomorphisme de groupes :*

$$i : \quad J_q^1 \operatorname{Pin} Q \to \operatorname{Pin} \tilde{Q}$$

donné par :

$$i(j_q \varphi) = j_q x_1 \,\tilde{*}\, j_q x_2 \,\tilde{*}\, \ldots \,\tilde{*}\, j_q x_h, \tag{3}$$

avec $\varphi(0) = x_1, x_2 \ldots x_h$, *avec* $x_1, x_2, \ldots, x_h \in V$, $Q(x_i) = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, h$, *pour chaque* $j_q \varphi \in J_q^1 \operatorname{Pin} Q$.

Démonstration. — Soient $j_q \varphi, j_q \psi \in J_q^1 \operatorname{Pin} Q$, *avec* $\varphi(0) = x_1 x_2 \ldots x_h$ et $\psi(0) = y_1 y_2 \ldots y_k$, les vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_h, y_1, y_2, \ldots, y_k$ de V ayant $Q(x_i) = \pm 1$, $Q(y_j) = \pm 1$, quels que soient $i = 1, 2, \ldots, h$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Nous avons :

$$i(j_q \varphi \,\tilde{*}\, j_q \psi) = i(j_q(\varphi\psi)).$$

D'autre part,

$$(\varphi\psi)(0) = \varphi(0)\psi(0) = x_1 x_2 \ldots x_h y_1 y_2 \ldots y_k.$$

Donc

$$i(j_q \varphi * j_q \psi) = j_q x_1 \,\tilde{*}\, j_q x_2 \,\tilde{*}\, \ldots \,\tilde{*}\, j_q x_h \,\tilde{*}\, j_q y_k \,\tilde{*}\, j_q y_2 \,\tilde{*}\, \ldots \,\tilde{*}\, j_q y_k,$$

ce que nous montre que :

$$i(j_q \varphi * j_q \psi) = i(j_q \varphi) \,\tilde{*}\, i(j_q \psi),$$

Q.E.D.

quels que soient $j_q \varphi$, $j_q \in J_q^1 \operatorname{Pin} Q$.

Maintenant nous allons étudier la variété différentiable $J_q^1\, O(Q)$. Comme l'on sait, [2], $J_q^1\, O(Q)$ est un groupe de Lie, d'une manière canonique.

En effet, quels que soient $j_q f,\ j_q g \in J_q^1\, O(Q)$ on prend leurs produits :

$$j_q f \cdot j_q g = j_q (fg),$$

où l'application $fg : \mathbb{R}^q \to O(Q)$ est donnée par :

$$(fg)(t) = f(t)\, g(t),$$

quels que soient $t \in \mathbb{R}^q$, la juxtaposition $f(t)\, g(t)$ dénotant la loi de multiplication de $O(Q)$.

Soit $j : J_q^1\, O(Q) \to O(\tilde{Q})$ l'application donnée comme ci-dessous. Quel que soit $j_q f \in J_q^1\, O(Q)$, on a $f(0) \in O(Q)$, donc $f(0)$ est un produit de symétries, en tenant compte du théorème de Cartan-Dieudonné. Soit :

$$f(0) = s_{x_1} \circ s_{x_2} \circ \ldots \circ s_{x_h},$$

avec $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_h \in V$, $Q(x_i) = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, h$ et $s_{x_1},\ s_{x_2},\ \ldots,\ s_{x_h}$ les symétries définies respectivement par $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_h$, dans l'espace vectoriel V. On a aussi $\tilde{Q}(j_q x_i) = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, h$. Nous prenons:

$$j(j_q f) = \tilde{s}_{j_q x_1} \circ \tilde{s}_{j_q x_1} \circ \ldots \circ \tilde{s}_{j_q x_h}, \tag{3'}$$

avec $\tilde{s}_{j_q x_1},\ \tilde{s}_q x_1,\ \ldots,\ \tilde{s}_{j_q x_h}$ les symétries définies respectivement par $j_q x_1$, $j_q x_2,\ \ldots,\ j_q x_h$ dans l'espace vectoriel $J_q^1\, V$.

Nous avons donc tout de suite la :

PROPOSITION 2. — *L'application :*

$$j : \quad J_q^1\, O(Q) \to O(\tilde{Q})$$

définie ci-dessus est un homomorphisme de groupes

Il est facile maintenant de montrer la :

PROPOSITION 3. — *Soit* $\tilde{p} : \operatorname{Pin} \tilde{Q} \to O(\tilde{Q})$ *la représentation de* $\operatorname{Pin} \tilde{Q}$ *analogue à la représentation* $p : \operatorname{Pin} Q \to O(Q)$. *Alors, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} J_q^1 \operatorname{Pin} Q & \xrightarrow{i} & \operatorname{Pin} \tilde{Q} \\ {\scriptstyle p^1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{p}} \\ J_q^1\, O(Q) & \xrightarrow{j} & O(\tilde{Q}) \end{array} \tag{4}$$

est commutatif.

Démonstration. — Il faut montrer que $\tilde{p} \circ i = j \circ p^1$. Pour chaque $j_q \varphi \in J_q^1 \operatorname{Pin} Q$, nous avons, en utilisant (3) :

$$(\tilde{p} \circ i)(j_q \varphi) = \tilde{p}(j_q \varphi(0)) = \tilde{s}_{j_q x_1} \circ \tilde{s}_{j_q x_1} \circ \ldots \circ \tilde{s}_{j_q x_h},$$

si $\varphi(0) = x_1 x_2 \ldots x_h$, avec $x_1, x_2, \ldots, x_h \in V$, $Q(x_1) = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, h$. D'autre part, en utilisant (3'), nous avons :

$$(j \circ p^1)(j_q \varphi) = j(j_q(p \varphi)) = j(s_{x_1} \circ s_{x_2} \circ \ldots \circ s_{x_h}) = \tilde{s}_{j_q x_1} \circ \tilde{s}_{j_q x_1} \circ \ldots \circ \tilde{s}_{j_q x_h}.$$

Q.E.D.

Nous allons maintenant montrer le :

THÉORÈME 4. — *Chaque structure spinorielle d'une variété pseudo-riemanienne peut être prolongée à une structure spinorielle sur la variété des jets de la variété donnée.*

Démonstration. — Soit $f : \Sigma(M, \operatorname{Pin} Q)) \to P(M, O(Q))$ une structure spinorielle sur la variété différentiable pseudo-riemannienne M. Nous pouvons considérer :

$$h : \quad J_q^1 \Sigma(J_q^1 M, J_q^1 \operatorname{Pin} Q) \to \Sigma'(J_q^1 M, \operatorname{Pin} \tilde{Q})$$

l'homomorphisme de fibrés principaux qui se projette sur l'application identique de $J_q^1 M$ et correspond à l'homomorphisme $i : J_q^1 \operatorname{Pin} Q \to \operatorname{Pin} \tilde{Q}$, donné dans la proposition 1.

Soit aussi $g : J_q^1 P(J_q^1 M, J_q^1 O(Q)) \to P'(J_q^1 M, O(\tilde{Q}))$ l'homomorphisme de fibrés principaux qui se projette sur l'application identique de $J_q^1 M$ et correspond à l'homomorphisme $j : J_q^1 O(Q) \to O(\tilde{Q})$, donné dans la proposition 2.

Soit, en fin, $f^1 : J_q^1 \Sigma(J_q^1 M, J_q^1 \operatorname{Pin} Q) \to J_q^1 P(J_q^1 M, J_q^1 O(Q))$ l'homomorphisme de fibrés principaux qui se projette sur l'application identique de $J_q^1 M$ et correspond à l'homomorphisme $p^1 : J_q^1 \operatorname{Pin} Q \to J_q^1 O(Q)$.

Nous allons construire une structure spinorielle sur la variété des jets $J_q^1 M$, en utilisant les fonctions de transition correspondant à un recouvrement de trivialisation locale pour les fibrés principaux en discussion, [5].

Soit $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un recouvrement de trivialisation locale pour les fibrés principaux $P(M, O(Q))$ et $\Sigma(M, \operatorname{Pin} Q)$ aussi. En considérant $\{\sigma_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in I}$, les fonctions de transition du fibré $\Sigma(M, \operatorname{Pin} Q)$ correspondant au recouvrement donné, il en résulte $\{\sigma_{\alpha\beta}^1\}_{\alpha, \beta \in I}$ les fonctions de transition du fibré $P(M, O(Q))$.

D'autre part, soit $\{J_q^1 U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ le recouvrement de trivialisation locale des fibrés principaux $J_q^1 P(J_q^1 M, J_q^1 O(Q))$ et $J_q^1 \Sigma(J_q^1 M, J_q^1 \operatorname{Pin} Q)$ aussi, recouvrement qui s'obtient d'une manière canonique en tenant compte du recouvrement $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ci-dessus. Alors, les fonctions de transition correspondant pour les fibrés $J_q^1 P(J_q^1 M, J_q^1 O(Q))$ [resp. $J_q^1 \Sigma(J_q^1 M, J_q^1 \operatorname{Pin} Q)$] sont $\{p^1(\sigma_{\alpha\beta}^1)\}_{\alpha\beta \in I}$ (resp. $\{\sigma_{\alpha\beta}^1\}_{\alpha\beta \in I}$).

Considérons maintenant $\Sigma'(J_q^1 M, \operatorname{Pin}\tilde{Q})$ – le fibré principal ayant $\{i(\sigma_{\alpha\beta}^1)\}_{\alpha\beta \in I}$ comme fonctions de transition qui correspondent au recouvrement de trivialisation locale $\{J_q^1 U_\alpha\}_{\alpha \in I}$. En même temps, soit $P'(J_q^1 M, O(\tilde{Q}))$ – le fibré principal avec les fonctions de transition $\{j(p^1(\sigma_{\alpha\beta}^1))\}_{\alpha\beta \in I}$ qui correspondent aussi au recouvrement de trivialisation locale $\{J_q^1 U_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Il existe

$$\tilde{f}: \quad \Sigma'(J_q^1 M, \operatorname{Pin}\tilde{Q}) \to P'(J_q^1 M, O(\tilde{Q}))$$

un homomorphisme de fibrés principaux, qui se projette sur l'application identique de $J_q^1 M$ et correspond à la représentation $\tilde{p}: \operatorname{Pin}\tilde{Q} \to O(\tilde{Q})$ car, grâce au diagramme commutative (4), nous avons

$$(\tilde{p} \circ i)(\sigma_{\alpha\beta}^1) = (j \circ p^1)(\sigma_{\alpha\beta}^1) \tag{5}$$

quels que soient α, $\beta \in I$.

En tenant compte de (5), il en résulte que $\tilde{f}$ est une structure spinorielle sur la variété des jets $J_q^1 M$.

Q.E.D.

Remarques. – (i) Chaque structure spinorielle sur la variété différentiable pseudo-riemannienne M peut être prolongée en une structure spinorielle, unique à un isomorphisme près, sur la variété des jets $J_q^1 M$.

(ii) La prolongation d'une structure spinorielle spéciale sur M en une structure spinorielle sur $J_q^1 M$ d'après le théorème 4 nous donne sur $J_q^1 M$ une structure spinorielle spéciale aussi.

4. EXEMPLE

On sait qu'il y a des variétés différentiables qui ne possèdent pas des structures spinorielles, tandis qu'il y a des variétés différentiables sur lesquelles on peut donner une ou plusieurs structures spinorielles. Si la deuxième classe de Stiefel-Whitney d'une variété différentiable est nulle, alors il existe des structures spinorielles sur la variété considérée.

Nous allons construire un exemple de structure spinorielle sur la variété différentiable $M = \mathbb{R}^2$ munie de la métrique euclidienne.

Soient $\{e_1, e_2\}$ le repère canonique de $\mathbb{R}^2$ et $P = P(M, SO(2))$ le fibré des repères orthogonaux de $\mathbb{R}^2$, positifs orientés, c'est-à-dire P est l'ensemble des paires $\{(x, X)\}$ avec $x \in M$ et $X = \{f_1, f_2\}$ un repère orthonormal de $\mathbb{R}^2$ de la même orientation que le repère canonique de $\mathbb{R}^2$.

D'autre part, soit Spin(2) – le groupe Spin de l'algèbre de Clifford associée à la forme quadratique $Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + x_2^2$, quels que soient $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Ce groupe peut être considérer comme le groupe des éléments de la forme

$$\cos\varphi \,.\, 1 + (\sin\varphi)\, e_1 e_2, \qquad \text{avec} \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

En effet, Spin (2) est le groupe des éléments de C(Q) de la forme $x_1 x_2 \ldots x_h$ avec $x_1, x_2, \ldots, x_h \in \mathrm{R}^2$, avec $Q(x^i)=1$, $i=1,2,\ldots,h$ et h un nombre pair. En considérant $x_1 x_2 \in \mathrm{Spin}(2)$ et en utilisant les conditions : $Q(x_1)=Q(x_2)=1$ il en résulte $(x_1^1)^2+(x_1^2)^2=(x_2^1)^2+(x_2^2)^2=1$ où $x_1=(x_1^1, x_1^2)$ et $x_2=(x_2^1, x_2^2)$. Alors, il existe, α_1, $\alpha_2 \in [0, 2\pi)$ de manière que l'on peut considérer $x_1=(\cos\alpha_1)e_1+(\sin\alpha_1)e_2$ et $x_2=(\cos\alpha_2)e_1+(\sin\alpha_2)e_2$ où $\{e_1, e_2\}$ est le repère canonique de $\mathbb{R}^2$. Donc : $x_1 x_2=\cos\beta.1+(\sin\beta)e_1 e_2$, $\beta\equiv\alpha_2-\alpha_1 \pmod{2\pi}$, $\beta\in[0, 2\pi)$. D'autre part, en prenant $x_3 x_4 \in \mathrm{Spin}(2)$ avec $x_3=(\cos\alpha_3)e_1+(\sin\alpha_3)e_2$ et $x_4=(\cos\alpha_4)e_1+(\sin\alpha_4)e_2$ nous obtenons : $x_3 x_4=\cos\gamma.1+(\sin\gamma)e_1 e_2$, $\gamma=\alpha_4-\alpha_3 \pmod{2\pi}$, $\gamma\in[0, 2\pi)$. Donc : $x_1 x_2 x_3 x_4=\cos\delta.1+(\sin\delta)e_1 e_2$, $\delta\equiv\beta+\gamma \pmod{2\pi}$, $\delta\in[0, 2\pi)$ et

$$\mathrm{Spin}(2)=\{\cos\varphi.1+(\sin\varphi)\mathrm{e}_1 e_2 \mid \varphi\in[0, 2\pi)\}.$$

Il n'est pas difficile à voir que la représentation $p:\mathrm{Spin}(2)\to SO(2)$ est donnée par :

$$p(\cos\varphi.1+(\sin\varphi)e_1 e_2)=r_{2\varphi},$$

où $r_{2\varphi}$ est la rotation d'angle 2φ de $\mathbb{R}^2$, dont les équations dans le repère canonique de $\mathbb{R}^2$ sont :

$$y^1=x^1\cos 2\varphi-x^2\sin 2\varphi$$
$$y^2=x^1\sin 2\varphi+x^2\cos 2\varphi.$$

Soit maintenant la variété différentiable $\Sigma=\mathbb{R}^2\times S^1$ sur laquelle le groupe Spin (2) agit de manière suivante. Quels que soient

$$z_1=(\rho_1\cos\alpha_1, \rho_1\sin\alpha_1)\in\mathbb{R}^2$$
$$z_2=(\cos\alpha_2, \sin\alpha_2)\in S^1$$
$$g=\cos\varphi.1+(\sin\varphi)e_1 e_2\in\mathrm{Spin}(2)$$

nous définissons :

$$(z_1, z_2)g=(z_1', z_2')$$

avec

$$z_1'=(\rho_1\cos\alpha_1', \rho_1\sin\alpha_1'), \qquad z_2'=(\cos\alpha_2', \sin\alpha_2')$$

où

$$\alpha_1'=\alpha_1+\varphi, \qquad \alpha_2'=\alpha_2+\varphi.$$

Il en résulte que $\Sigma/\sim\,=\mathbb{R}^2$, où « $\sim$ » est la relation d'équivalence induite par l'action de Spin (2) sur Σ. La projection canonique est l'application $\pi:\Sigma\to M$, donnée par

$$\pi(z_1, z_2)=(\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2), \rho_1\sin(\alpha_1-\alpha_2))$$

Donc nous avons obtenu un fibré principal $\Sigma=\Sigma(M, \mathrm{Spin}(2))$.

En gardant les notations ci-dessus, soit $f:\Sigma\to P$, l'application donnée par

$$f(z_1, z_2)=(x, X),$$

où

$$x=(\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2),\ \rho_1\sin(\alpha_1-\alpha_2)),$$

$X=\{f_1, f_2\}$ étant le repère de R^2 obtenu du repère canonique de R^2 par la rotation d'angle $\alpha_1+\alpha_2$.

On montre sans difficulté que

$$f((z_1, z_2)g)=(x, X)p(g)$$

car $(x, X)p(g)=(x, Y)$ où Y représente le repère de $\mathbb{R}^2$ obtenu du repère canonique de R^2 par la rotation d'angle 2φ.

D'autre part, en notant par $\pi' : P \to M$ la projection du fibré principal $P=P(M, SO(2))$, nous obtenons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & P \arrow[d, "\pi'"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Donc $f:\Sigma \to P$ représente une structure spinorielle sur $M=\mathbb{R}^2$.

Nous allons construire, en ce qui suit, une structure spinorielle sur la variété différentiable $J_q^1 M$, quels que soit $q=1, 2, \ldots, n$. Nous allons suivre la démonstration du théorème 4. Considérons d'abord

$$s:\quad \pi^{-1}(M)=\Sigma \to M \times \mathrm{Spin}(2)$$

l'application de trivialisation locale, donnée par :

$$s(z_1, z_2)=(x, a)$$

où

$$x=(\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2),\ \rho_1\sin(\alpha_1-\alpha_2))$$
$$a=\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\,.\,1+\left(\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)e_1 e_2.$$

Donc nous avons l'application

$$t:\quad \pi^{-1}(M) \to \mathrm{Spin}(2), \qquad t(z_1, z_2)=a,$$

qui vérifie la propriété :

$$t((z_1, z_2)g)=ag,$$

quel que soit $g\in\mathrm{Spin}(2)$. Donc $\{M\}$ est un recouvrement de trivialisation locale pour le fibré Σ avec la seule fonction de transition

$$\sigma:\quad M \to \mathrm{Spin}(2)$$
$$\sigma(x)=1, \qquad \forall x\in M$$

D'autre part, $\{M\}$ étant aussi un recouvrement de trivialisation local pour le fibré P, la seule fonction de transition de P sera $p(\sigma): M \to SO(2)$ donnée par $p(\sigma)(x)=I_2$.

Soient $\Sigma'(J_q^1 M, \mathrm{Spin}\,\tilde{Q})$ le fibré principal dont la base est la variété différentiable $J_q^1 M$ et l'application $i(\sigma^1)=\tilde{1}$, où $\tilde{1}$ est l'élément neutre de Spin $\tilde{Q}$. Il en résulte que le fibré principal Σ' est isomorphe au fibré $J_q^1 M \times \mathrm{Spin}\,\tilde{Q}$. D'une manière analogue, les fibrés principaux $P' = P'(J_q^1 M, SO(\tilde{Q}))$ et $J_q^1 M \times SO(\tilde{Q})$ sont aussi isomorphes. Alors, l'application $\tilde{f}: \Sigma \rightarrow P'$ donnée par

$$\tilde{f}(j_q \varphi, \tilde{a}) = (j_q \varphi, \tilde{p}(\tilde{a}))$$

quels que soient $j_q \varphi \in J_q^1 M$ et $\tilde{a} \in \mathrm{Spin}\,\tilde{Q}$, est une structure spinorielle sur la variété différentiable $J_q^1 M$.

RÉFÉRENCES

[1] M. ATIYAH, R. BOTT et A. SHAPIRO, *Clifford Moduls*, *Topology*, vol. **3**, Suppl. 1, 1964, p. 3-38.

[2] L. A. CORDERO, C. T. J. DODSON et M. DE LEON, *Differential Geometry of Frame Bundles*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1988.

[3] A. CRUMEYROLLE, Structures spinorielles, *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. **11**, 1, 1969, p. 19-25.

[4] A. CRUMEYROLLE, Groupes de spinorialité, *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. **14**, 4, 1971, p. 309-323.

[5] S. KOBAYASHY et K. NOMIZU, *Fundations of Differential Geometry*, Interscience Publishers, New York, London, 1963.

(*Manuscrit reçu le* 30 *juillet* 1992;
version corrigée reçue le 14 *mai* 1993.)