

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

LECH ZIELINSKI

## **Complétude asymptotique pour un modèle du transfert de charge**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 58, n° 4 (1993), p. 363-411

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1993\\_\\_58\\_4\\_363\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1993__58_4_363_0)

© Gauthier-Villars, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## **Complétude asymptotique pour un modèle du transfert de charge**

par

**Lech ZIELINSKI**

Équipe de Physique Mathématique et de Géométrie,  
UFR de Mathématiques, université Paris-VII  
Tour 45-55, 2, place Jussieu, 75005 Paris, France.

---

**RÉSUMÉ.** — Nous présentons une méthode de démonstration de la complétude asymptotique des opérateurs d'ondes associés à la diffusion d'une particule quantique dans un champ de particules classiques à l'aide d'estimations de propagation du type utilisé dans la théorie récente des systèmes à  $N$  corps.

**ABSTRACT.** — We present a method of proving the asymptotic completeness of wave operators associated with the scattering of a quantum particle in a field of classical particles, based on some propagation estimates of the type recently developed in the theory of  $N$ -body systems.

---

### **1. INTRODUCTION**

Le modèle du transfert de charge provient du problème de l'approximation du mouvement d'une particule légère en collision avec des particules lourdes, que l'on notera  $P_1, \dots, P_N$ . Une telle situation se produit quand on considère le comportement d'un électron dans un champ d'ions. On suppose alors que chacune des particules lourdes  $P_k$  ( $k=1, \dots, N$ ) suit une trajectoire classique  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \chi_k(t) \in \mathbb{R}^d$  et que seule la particule légère

est soumise à la loi de la dynamique quantique. Cela conduit à l'étude de la diffusion quantique associée à un hamiltonien de la forme

$$H(t) = -\frac{\Delta}{2} + V(t, x), \quad (1.1)$$

où

$$V(t, x) = \sum_{k=1}^N V_k(x - \chi_k(t)). \quad (1.2)$$

Sous l'hypothèse que les particules  $P_1, \dots, P_N$  ont des vitesses constantes, ce problème a été étudié par Yajima [12] (par une approche utilisant la théorie de la diffusion indépendante du temps) et Hagedorn [6] (par une approche utilisant des estimations du type Faddeev) dans le cas des interactions à courte portée, et par Wüller [11] (par une méthode du type Enss) dans le cas des interactions à longue portée. Le cas des trajectoires  $\chi_k(t)$  plus générales a été étudié par Graf [4] (par une méthode du type Enss).

Notre approche est basée sur les méthodes développées récemment dans la théorie de la diffusion des systèmes à  $N$  corps de Sigal et Soffer [10] et Graf [5]. La localisation dans l'espace de phase permet de déduire des estimations de propagation convenables sous des hypothèses peu restrictives sur les trajectoires classiques  $\chi_k(t)$ .

On fait les hypothèses suivantes sur les trajectoires classiques :

$$\exists c_0 > 0, t_0 > 0, \quad \forall t \geq t_0, k \neq m \Rightarrow |\chi_k(t) - \chi_m(t)| \geq c_0 t \quad (H_1)$$

$$\exists C > 0, \quad \forall t \geq 1, \quad |\ddot{\chi}_k(t)| \leq C t^{-1-\rho_0}, \quad (H_2)$$

où  $0 < \rho_0 \leq 1$  et  $\ddot{\chi}_k(t)$  désigne la dérivée seconde par rapport à  $t$ .

Pour les hypothèses sur la dynamique quantique, on suppose que, pour  $k = 1, \dots, N$ , le potentiel  $V_k$  provenant de l'interaction entre la particule  $P_0$  et la particule  $P_k$ , est borné relativement à  $-\Delta$  avec une borne arbitrairement petite, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists C_\varepsilon > 0, \quad \forall \varphi \in H^2(\mathbb{R}^d), \quad \|V_k \varphi\| \leq \varepsilon \|\Delta \varphi\| + C_\varepsilon \|\varphi\|, \quad (H_3)$$

et

$$\left. \begin{aligned} &\exists C > 0, \quad \forall t \geq 1, \\ &\| \mathbf{1}_{\{|x| > t\}}(x) \partial_x^\alpha V_k(x) (1 - \Delta)^{-1} \| \leq C t^{-\mu_1} \quad \text{pour } |\alpha| = 1, \end{aligned} \right\} \quad (H_4)$$

où  $\mu_1 > 1$  et  $\mathbf{1}_Z(x)$  désigne la fonction caractéristique de  $Z$ . On suppose de plus que le potentiel  $V_k$  se décompose

$$V_k = \tilde{V}_k + \tilde{\tilde{V}}_k$$

avec  $\tilde{V}_k$  et  $\tilde{\tilde{V}}_k$ , qui vérifient les conditions ci-dessous :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists C_\alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |\partial_x^\alpha \tilde{V}_k(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{-\mu - |\alpha|}, \quad (H_5)$$

$$\exists C > 0, \forall t \geq 1, \quad \|\mathbf{1}_{\{|x|>t\}}(x) \tilde{\tilde{V}}_k(x) (1 - \Delta)^{-1}\| \leq C t^{-\mu_1}, \quad (H_6)$$

où  $0 < \mu \leq 1$ .

On désigne par  $U(t)$  l'évolution associée à l'hamiltonien  $H(t)$  donné par la formule (1.1), *i. e.*

$$\left. \begin{aligned} i \frac{d}{dt} U(t) \varphi &= H(t) U(t) \varphi \\ U(0) \varphi &= \varphi \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

pour toute  $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^d)$ . Pour  $1 \leq k \leq N$ , on introduit les opérateurs

$$H_k = -\frac{\Delta}{2} + V_k(x) \quad (1.4)$$

et  $P_k^{pp}$  le projecteur orthogonal sur l'espace des vecteurs propres de  $H_k$ .

On définit aussi

$$G_k(t) = \exp\left(-i \sum_{j=1}^d \chi_{k,j}(t) D_{x_j}\right) \times \exp\left(i \sum_{j=1}^d x_j \dot{\chi}_{k,j}(t)\right) \exp\left(\frac{i}{2} \int_0^t ds |\dot{\chi}_k(s)|^2\right) \quad (1.5)$$

où

$$\chi_k(t) = (\chi_{k,1}(t), \dots, \chi_{k,d}(t)) \in \mathbb{R}^d$$

sont les trajectoires,  $\dot{\chi}_k(t) = (\dot{\chi}_{k,1}(t), \dots, \dot{\chi}_{k,d}(t)) \in \mathbb{R}^d$  sont leurs dérivées par rapport à  $t$  et  $D_{x_j} = -i \partial_{x_j}$ . Les transformations  $G_k$  effectuent le changement du système de référence :

$$G_k(t) F(x) = F(x - \chi_k(t)) G_k(t)$$

[où  $F(x)$  est l'opérateur de multiplication] et

$$G_k(t) F(D_x) = F(D_x - \dot{\chi}_k(t)) G_k(t).$$

Le but de cet article est la preuve du théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *Si les conditions (H<sub>1</sub>)-(H<sub>6</sub>) sont satisfaites avec  $\mu, \mu_1$ , et  $\rho_0$  tels que  $\sqrt{3} - 1 < \mu \leq 1 < \min\{\mu\mu_1, \rho_0\mu_1, \rho_0(1 + \mu/2)\}$ , alors on peut trouver des fonctions  $S_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $S_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k = 1, \dots, N$ , telles que les limites suivantes*

$$\Omega_0 = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)^* e^{-iS_0(t, D)}, \quad (1.6)$$

$$\Omega_k = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)^* G_k(t) e^{-iH_k - iS_k(t)} P_k^{pp} \quad (1.6')$$

existent. De plus le système d'opérateurs d'ondes  $\{\Omega_k\}_{k=0, \dots, N}$  est asymptotiquement complet, c'est-à-dire qu'on a

$$\bigoplus_{k=0}^N \text{Im } \Omega_k = L^2(\mathbb{R}^d). \quad (1.7)$$

*Remarque.* — Pour montrer la difficulté principale du problème dans le cas des trajectoires générales  $\chi_k(t)$ , on note

$$H^k(t) = -\Delta/2 + V^k(t, x)$$

où

$$V^k(t, x) = V(t, x + \chi_k(t))$$

et on note  $U^k(t)$  l'évolution associée. Alors on a formellement :

$$i \frac{d}{dt} U(t)^* G_k(t) U^k(t) = U(t)^* \left( i \frac{dG_k(t)}{dt} + G_k(t) H^k(t) - H(t) G_k(t) \right) U^k(t).$$

Mais

$$i \frac{dG_k(t)}{dt} = - \left( \frac{1}{2} |\dot{\chi}_k(t)|^2 + \sum_{j=1}^d ((x_j - \chi_{k,j}(t)) \ddot{\chi}_{k,j}(t) - \dot{\chi}_{k,j}(t) D_{x_j}) \right) G_k(t)$$

et  $G_k(t) V^k(t, x) = V(t, x) G_k(t)$ ; alors

$$\begin{aligned} G_k(t) H^k(t) - H(t) G_k(t) &= G_k(t) \left( \frac{-\Delta}{2} \right) - \left( \frac{-\Delta}{2} \right) G_k(t) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d (G_k(t) D_{x_j}^2 - D_{x_j}^2 G_k(t)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d ((D_{x_j} - \dot{\chi}_{k,j}(t))^2 - D_{x_j}^2) G_k(t) = \left( \frac{1}{2} |\dot{\chi}_k(t)|^2 - \sum_{j=1}^d \dot{\chi}_{k,j}(t) D_{x_j} \right) G_k(t), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} i \frac{dG_k(t)}{dt} + G_k(t) \left( \frac{-\Delta}{2} \right) - \left( \frac{-\Delta}{2} \right) G_k(t) \\ = - \sum_{j=1}^d (x_j - \chi_{k,j}(t)) \ddot{\chi}_{k,j}(t) G_k(t). \quad (1.8) \end{aligned}$$

Si maintenant on suppose que les particules  $P_1, \dots, P_N$  ont des vitesses constantes, alors  $\ddot{\chi}_k(t) = 0$  et on obtient

$$G_k(t) U^k(t) = U(t) G_k(0) \quad (1.9)$$

(cf. [6], [11], [12]).

Par contre, dans la situation générale que nous allons considérer, la présence de l'opérateur non-borné de multiplication par  $x_j$  devient une réelle difficulté chaque fois que l'on essaie de changer le système de

référence : dans ce cas-là on ne sait pas si les limites

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)^* G_k(t) U^k(t), \quad s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U^k(t)^* G_k(t)^* U(t) \quad (1.10)$$

existent.

Dans l'étude de Graf [4], cette difficulté est évitée grâce au remplacement des opérateurs  $G_k(t)$  par les opérateurs  $\tilde{G}_k(t)$  définis par une formule analogue à (1.5), mais en utilisant des trajectoires linéaires  $\tilde{\chi}_k(t) = v_k t + a_k$  (avec certains  $v_k, a_k \in \mathbb{R}^d$ ) au lieu de  $\chi_k(t)$ , donc

$$\tilde{G}_k(t) \tilde{U}^k(t) = U(t) \tilde{G}_k(0), \quad (1.9')$$

où  $\tilde{U}^k(t)$  est l'évolution associée à  $\tilde{H}^k(t) = -\Delta/2 + V(t, x + v_k t + a_k)$ . Ainsi des hypothèses de continuité des  $V_k$  doivent être imposées si on veut traiter raisonnablement le problème non-trivial de l'approximation de  $V(t, x + \chi_k(t))$  par  $V(t, x + v_k t + a_k)$  quand  $t \rightarrow \infty$  (les hypothèses de [4] sont

$$|\chi_k(t) - (v_k t + a_k)| + |\dot{\chi}_k(t) - v_k| \leq C t^{-1-\varepsilon}$$

et

$$|\partial_x^\alpha V_k(x)| \leq C(1 + |x|)^{-1-\varepsilon} \quad \text{pour } |\alpha| \leq 1 \text{ et } \varepsilon > 0.$$

Si les potentiels  $V_k$  possèdent des singularités, on est obligé d'utiliser les  $G_k(t)$  donnés par (1.5) et, à cause des difficultés décrites ci-dessus, on va introduire des troncatures convenables en la variable  $x$ . Plus précisément : au lieu de considérer les limites (1.10), il est suffisant de prouver l'existence des limites suivantes

$$\left. \begin{aligned} s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)^* J \left( \frac{x - \chi_k(t)}{t^\rho} \right) G_k(t) U^k(t), \\ s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U^k(t)^* G_k(t)^* J \left( \frac{x - \chi_k(t)}{t^\rho} \right) U(t), \end{aligned} \right\} \quad (1.10')$$

où  $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  et  $\rho < \rho_0$ . La dernière inégalité dit que dans la région où  $|x - \chi_k(t)| \leq C t^\rho$ , la fonction  $|(x - \chi_k(t)) \ddot{\chi}_k(t)| \leq C' t^{-1-(\rho_0-\rho)}$  est intégrable par rapport à  $t$ .

Remarquons encore que dans le cas où les particules  $P_1, \dots, P_N$  suivent la dynamique newtonienne avec des interactions coulombiennes, l'hypothèse  $(H_1)$  entraîne  $(H_2)$  avec  $\rho_0 = 1$  et on est obligé d'utiliser des troncatures avec  $\rho < 1$ .

Le paragraphe 2 contient des notations et un certain nombre de calculs préliminaires pour obtenir la preuve des estimations de propagation données dans les paragraphes 3 et 4. Dans le paragraphe 3 on considère des troncatures avec  $\rho = 1$  et on démontre des estimations de propagation similaires à celles utilisées dans la théorie des systèmes à  $N$  corps de Sigal-Soffer [10] et Graf [5].

La partie essentielle de cet article est le paragraphe 4 où on considère des troncatures avec  $\rho < 1$  et on démontre l'estimation de propagation

convenable. Dans le paragraphe 5 on étudie les interactions à longue portée à l'aide de la théorie de Hamilton-Jacobi. Le paragraphe 6 est consacré à l'étude de limites auxiliaires, utilisées dans la preuve de la complétude asymptotique, dont la partie finale se trouve au paragraphe 7.

## 2. PROPRIÉTÉS AUXILIAIRES DU CALCUL D'OPÉRATEURS

Pour obtenir les estimations de propagation, l'outil essentiel est donné par les opérateurs positifs. Commençons par un lemme abstrait, assurant la positivité « approximative » du produit de deux opérateurs « approximativement » commutatifs. Si  $B \in \mathbf{B}(L^2(\mathbb{R}^d))$ , alors la notation  $B + hc$  désigne l'opérateur symétrisé  $(B + B^*)/2$ .

LEMME 2.1. — Soit  $B_j(t) \in \mathbf{B}(L^2(\mathbb{R}^d))$ ,  $0 \leq B_j(t) \leq C_0$  pour  $j=1, 2$  et

$$\| [B_1(t), B_2(t)] \| \leq C_1 t^{-\theta} \quad (2.1)$$

pour un certain  $\theta > 0$ . Alors on a l'inégalité

$$B_1(t) B_2(t) + hc \geq -C_2 t^{-2\theta/3}. \quad (2.2)$$

Preuve. — Il suffit de montrer que

$$(B_1(t) + t^{-\beta'}) B_2(t) + hc \geq -C t^{-\beta'} \quad (2.3)$$

avec  $\beta' = \frac{2\theta}{3}$ . Mais

$$\begin{aligned} (B_1(t) + t^{-\beta'}) B_2(t) + hc \\ = (B_1(t) + t^{-\beta'})^{1/2} B_2(t) (B_1(t) + t^{-\beta'})^{1/2} + O(t^{-\beta'}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

puisque

$$\begin{aligned} & [(B_1(t) + t^{-\beta'})^{1/2}, B_2(t)] \\ &= \int_0^\infty \frac{ds}{\pi} s^{1/2} (s + t^{-\beta'} + B_1(t))^{-1} [B_2(t), B_1(t)] (s + t^{-\beta'} + B_1(t))^{-1}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \| [(B_1(t) + t^{-\beta'})^{1/2}, B_2(t)] \| &\leq \| [B_1(t), B_2(t)] \| \int_0^\infty \frac{s^{1/2} ds}{\pi (s + t^{-\beta'})^2} \\ &\leq C t^{-\theta} \int_0^\infty ds (s + t^{-\beta'})^{-3/2} = C' t^{-\theta + \beta'/2} = C' t^{-\beta'}. \end{aligned}$$

On achève la preuve en remarquant que (2.4) implique (2.3), puisque

$$(B_1(t) + t^{-\beta'})^{1/2} B_2(t) (B_1(t) + t^{-\beta'})^{1/2} \geq 0.$$

Q.E.D.

Le raisonnement des paragraphes 3 et 4 utilise une certaine algèbre d'opérateurs  $\mathcal{F}$ , dont les éléments sont « approximativement » commutatifs et dont la définition est la suivante :

DÉFINITION 2.2. — a) Dans toute la suite on suppose que  $\sqrt{3}-1 < \mu \leq 1 < \mu_1$  et  $\rho_0 \leq 1$  sont ceux des hypothèses (H<sub>1</sub>)-(H<sub>7</sub>) et que la condition  $\rho_0(1+\mu/2) > 1$  est satisfaite.

Il est alors possible de trouver  $\rho'$  tel que  $1/\mu_1 < \rho' < \rho_0$  et  $\rho'(1+\mu/2) > 1$ . Mais on a  $1/\mu_1 < \mu \leq 1$  et l'inégalité  $\mu > \sqrt{3}-1$  équivaut à  $\mu(1+\mu/2) > 1$ ; alors on peut supposer de plus que  $2/3 < \rho' < \mu$ .

b) Pour tout  $\rho$  tel que  $\rho' < \rho \leq 1$ , pour  $1 \leq k \leq N$ ,  $1 \leq j \leq d$  et  $t \geq 1$ , définissons les opérateurs

$$A_{\rho, k, j}(t) = \rho \frac{x_j - \chi_{k, j}(t)}{t^\rho}, \tag{2.5}$$

$$A'_{\rho, k, j}(t) = t^{1-\rho} (D_{x_j} - \dot{\chi}_{k, j}(t)). \tag{2.5'}$$

Dans la suite, au lieu d'écrire  $A_{\rho, k, j}(t)$  et  $A'_{\rho, k, j}(t)$ , on va souvent écrire  $A_{\rho, k, j}$  et  $A'_{\rho, k, j}$ ; si les indices  $k, j$  sont fixés au cours d'une preuve, on va aussi noter seulement  $A_\rho$  et  $A'_\rho$ .

c) Si  $-\infty \leq c < c' \leq \infty$ , alors on va noter par  $C_*^\infty(c; c')$  l'ensemble des fonctions  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  dont la dérivée  $f' \in C_0^\infty(c; c')$ , i.e. le support de  $f'$  est compact dans l'intervalle ouvert  $(c; c')$ . On va noter par  $C_R^\infty(c; c')$  [respectivement  $C_L^\infty(c; c')$ ] l'ensemble des fonctions  $f \in C_*^\infty(c; c')$  telles que  $f(\lambda) = 1$  pour  $\lambda \geq c'$  (resp. pour  $\lambda \leq c$ ),  $\text{supp } f \subset (c; \infty)$  (resp.  $(-\infty; c')$ ) et  $f' \geq 0$  (resp.  $f' \leq 0$ ).

d) L'algèbre  $\mathcal{F}$  est définie comme l'algèbre engendrée par les opérateurs de la forme  $J(A_{\rho, k, j}(t))$ ,  $h(A'_{\rho, k, j}(t))$  et  $\eta(A'_{\rho, k, j}(t) - A_{\rho, k, j}(t))$  avec  $J, h, \eta \in C_*^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\rho' < \rho \leq 1$ ,  $1 \leq k \leq N$ ,  $1 \leq j \leq d$  et  $t \geq 1$ . Les éléments de  $\mathcal{F}$  seront notés de façon abrégée  $J(A_{\rho, k, j})$ ,  $h(A'_{\rho, k, j})$  et  $\eta(A'_{\rho, k, j} - A_{\rho, k, j})$ ; si les indices  $k, j$  sont fixés dans la preuve, on notera  $J(A_\rho)$ ,  $h(A'_\rho)$  et  $\eta(A'_\rho - A_\rho)$ .

e) Soit  $\mathcal{F}'$  l'ensemble constitué des opérateurs  $A_{\rho, k, j}(t)$ ,  $A'_{\rho, k, j}(t)$  et des opérateurs appartenant à  $\mathcal{F}$ .

Notons ici que les indices  $k, j$  seront fixés pratiquement tout le temps dans les paragraphes 3 et 4, et le choix de considérer chaque coordonnée séparément permet de simplifier les arguments de microlocalisation (il suffit de décomposer  $\mathbb{R}$  en deux demi-droites au lieu d'utiliser un recouvrement habituel de  $\mathbb{R}^d$  par des cônes). L'étude des fonctions d'une variable est suffisante, car on pourra se limiter aux troncatures  $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  de la forme  $J(x_1, \dots, x_d) = J_1(x_1) \dots J_d(x_d)$  avec  $J_j \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  pour  $1 \leq j \leq d$ .

Donnons quelques propriétés utiles de l'algèbre  $\mathcal{F}$ .

LEMME 2.3. — a) Si  $B_m(t) \in \mathcal{F}'$  pour  $m = 1, 2$ , alors

$$\| [B_1(t), B_2(t)] \| \leq C t^{1-2\rho'}. \tag{2.6}$$



Ainsi le lemme 2.1 assure que pour tous  $B_1(t), B_2(t)$  appartenant à l'algèbre  $\mathcal{F}$ ,

$$B_1(t) \geq 0, B_2(t) \geq 0 \Rightarrow B_1(t)B_2(t) + hc \geq -Ct^{-\varepsilon} \quad (2.7)$$

pour un certain  $\varepsilon > 0$ .

b) Si  $B(t) \in \mathcal{F}$ ,  $g_1 \in C_L^\infty(-\infty; c)$ ,  $g_2 \in C_R^\infty(c; \infty)$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\|g_1(A_{p,k,j})B(t)g_2(A_{p,k,j})\| + \|g_1(A'_{p,k,j})B(t)g_2(A'_{p,k,j})\| \leq C_n t^{-n}. \quad (2.8)$$

c) Si  $J \in C_L^\infty(-\infty; c)$ ,  $h \in C_R^\infty(c'; \infty)$ ,  $g \in C_0^\infty(-\varepsilon; \varepsilon)$  et  $c' \geq c + 2\varepsilon$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\|J(A_{1,k,j})h(A'_{1,k,j})g(A'_{1,k,j} - A_{1,k,j})\| \leq C_n t^{-n}. \quad (2.9)$$

La preuve de ce lemme est contenue dans l'appendice A.

Notre résultat principal de microlocalisation est le suivant :

LEMME 2.4. — Soit  $F_+(A'_{p,k,j} - A_{p,k,j})$  la partie positive de l'opérateur  $A'_{p,k,j} - A_{p,k,j}$ ; i. e. définissons la fonction  $F_+ \in C(\mathbb{R})$  en posant :

$$F_+(\lambda) = 0 \text{ pour } \lambda \leq 0, \quad F_+(\lambda) = \lambda \text{ pour } \lambda \geq 0. \quad (2.10)$$

Soit  $c \in \mathbb{R}$  et supposons que  $J \in C_R^\infty(c; \infty)$ ,  $h \in C_L^\infty(-\infty; c)$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\|F_+^{1/2}(A'_{p,k,j} - A_{p,k,j})J(A_{p,k,j})h(A'_{p,k,j})(1 - \Delta)^{-1}\| \leq C_n t^{-n}. \quad (2.11)$$

Preuve. — Omettons les indices  $k$  et  $j$  dans la preuve. Supposons  $\text{supp } J \subset (c'; \infty)$  avec  $c' > c$ , soit  $r > 0$  suffisamment petit et soit  $\eta \in C_R^\infty(-r; 0)$  telle que  $0 \leq F_+(\lambda) \leq (r + \lambda)\eta^2(\lambda)$ . Il reste à montrer  $Q(t) \leq C_n t^{-n}$  avec

$$Q(t) = (1 - \Delta)^{-1} h(A'_p) J(A_p) \eta(A'_p - A_p) \\ \times (r + A'_p - A_p) \eta(A'_p - A_p) J(A_p) h(A'_p) (1 - \Delta)^{-1}.$$

Cependant, grâce à (2.8), on peut écrire  $Q(t) = Q_1(t) + Q_2(t) + O(t^{-n})$  avec

$$Q_1(t) = (1 - \Delta)^{-1} h(A'_p) J(A_p) \eta(A'_p - A_p) \\ \times (r + h_1(A'_p) A'_p) \eta(A'_p - A_p) J(A_p) h(A'_p) (1 - \Delta)^{-1}$$

$$Q_2(t) = -(1 - \Delta)^{-1} h(A'_p) J(A_p) \eta(A'_p - A_p) \\ \times J_1(A_p) A_p \eta(A'_p - A_p) J(A_p) h(A'_p) (1 - \Delta)^{-1}$$

où  $h_1 \in C_L^\infty(c; c+r)$ ,  $J_1 \in C_R^\infty(c'-r; c')$ . Mais

$$r + A'_p h_1(A'_p) \leq r + (c+r) h_1(A'_p), \\ -A_p J_1(A_p) \leq (r-c') J_1(A_p),$$

donc, après avoir fait disparaître les troncatures auxiliaires  $h_1$  et  $J_1$ , on obtient

$$Q_1(t) \leq (c+2r)(1-\Delta)^{-1} h(A'_p) J(A_p) \times \eta^2(A'_p - A_p) J(A_p) h(A'_p) (1-\Delta)^{-1} + C_n t^{-n},$$

$$Q_2(t) \leq (r-c')(1-\Delta)^{-1} h(A'_p) J(A_p) \times \eta^2(A'_p - A_p) J(A_p) h(A'_p) (1-\Delta)^{-1} + C_n t^{-n}.$$

Ainsi

$$Q(t) \leq (3r+c-c')(1-\Delta)^{-1} h(A'_p) J(A_p) \times \eta^2(A'_p - A_p) J(A_p) h(A'_p) (1-\Delta)^{-1} + \check{C}_n t^{-n} \leq \check{C}_n t^{-n}$$

si seulement  $r \leq (c' - c)/3$ .

Q.E.D.

Le cœur de la preuve des paragraphes 3 et 4 sera basé sur un léger raffinement de l'argument du lemme 2.4. Pour le formuler on va partager la droite réelle en plusieurs parties et considérer les fonctions particulières  $\check{J}$  et  $\check{h}$ , qui jouent le rôle de troncatures convenables de la fonction  $f(\lambda) = \lambda$ .

DÉFINITION 2.5. — Soit  $\{c_m\}_{m=0,1,\dots,6}$  une suite de nombres réels, tel que  $0 < c_m < c_{m+1}$  pour  $0 \leq m \leq 5$ . Désignons par  $\check{J}$  et  $\check{h}$  des fonctions ayant les propriétés suivantes :

$$c\check{J} \in C_{\mathbb{R}}^{\infty}(c_0; c_3) \text{ pour un } c \in (c_2; c_3), \quad \check{J}(\lambda) = \lambda \text{ pour } c_1 \leq \lambda \leq c_2$$

et

$$\check{J}(\lambda) \leq \lambda \text{ pour } \lambda \geq 0,$$

$$c'\check{h} \in C_{\mathbb{R}}^{\infty}(c_0/3; \infty) \text{ pour un } c' > 0, \quad \check{h}(\lambda) = \lambda \text{ pour } c_0/2 \leq \lambda \leq c_4.$$

On va utiliser aussi les notations :  $\check{A}_{p,k,j} = \check{J}(A_{p,k,j})$  et  $\check{A}'_{p,k,j} = \check{h}(A'_{p,k,j})$ .

Les premières conséquences de la définition 2.5 sont les suivantes :

LEMME 2.6. — Désignons par  $F_-(A'_{p,k,j} - A_{p,k,j})$  la partie négative de l'opérateur  $A'_{p,k,j} - A_{p,k,j}$ , i.e. définissons la fonction  $F_- \in C(\mathbb{R})$  en posant :

$$F_-(\lambda) = -\lambda \text{ pour } \lambda \leq 0, \quad F_-(\lambda) = 0 \text{ pour } \lambda \geq 0. \quad (2.10')$$

Si  $h_1 \in C_{\mathbb{R}}^{\infty}(c_3; \infty)$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a les estimations

$$\|F_-^{1/2}(A'_{p,k,j} - \check{A}_{p,k,j}) h_1(A'_{p,k,j}) (1-\Delta)^{-1}\| \leq C_n t^{-n}, \quad (2.12)$$

$$\|F_-^{1/2}(\check{A}'_{p,k,j} - \check{A}_{p,k,j}) h_1(A'_{p,k,j})\| \leq C_n t^{-n}. \quad (2.12')$$

Preuve. — On donne seulement la preuve de (2.12), la preuve de (2.12') étant similaire. Le raisonnement est similaire à celui du lemme 2.4. Supposons que  $h_1 \in C_{\mathbb{R}}^{\infty}(c'; \infty)$  avec  $c' > c_3$  et prenons  $\eta \in C_{\mathbb{R}}^{\infty}(-r; 0)$  telle que  $F_-(\lambda) \leq (r-\lambda)\eta^2(-\lambda)$ . On vérifie que  $Q(t) \leq C_n t^{-n}$  avec

$$Q(t) = (1-\Delta)^{-1} h_1(A'_p) \eta(\check{A}_p - A'_p) (r + \check{A}_p - A'_p) \eta(\check{A}_p - A'_p) h_1(A'_p) (1-\Delta)^{-1},$$

donc  $\tilde{A}_p \leq c_3$  entraîne

$$Q(t) \leq (2r + c_3 - c')(1 - \Delta)^{-1} h_1(A'_p) \\ \times \eta^2(\tilde{A}_p - A'_p) h_1(A'_p) (1 - \Delta)^{-1} + C_n t^{-n} \leq C_n t^{-n}$$

si  $r \leq (c' - c_3)/2$ .

Q.E.D.

Cependant les fonctions  $F_+$  et  $F_-$  n'appartiennent pas à la classe  $C_*^\infty(\mathbb{R})$ , ce qui ne permet pas d'appliquer immédiatement les résultats du lemme 2.3. Il est alors commode de remplacer  $F_+$  et  $F_-$  par des régularisations convenables  $\tilde{F}_+$  et  $\tilde{F}_-$ . Des régularisations de ce type ont été introduites par Sigal et Soffer [10].

DÉFINITION 2.7. — Soit  $\beta > 0$ . Alors on pose

$$\tilde{F}(t, \lambda) = (t^{-2\beta} + \lambda^2)^{1/2}, \quad (2.13)$$

$$\tilde{F}_-(t, \lambda) = (\tilde{F}(t, \lambda) - \lambda)/2, \quad (2.13')$$

$$\tilde{F}_+(t, \lambda) = (\tilde{F}(t, \lambda) + \lambda)/2. \quad (2.13'')$$

Un calcul simple donne les résultats suivants :

$$\tilde{F}_-(t, \lambda) = F_-(\lambda) + O(t^{-\beta}), \quad (2.14)$$

$$|\partial_t \tilde{F}_-(t, \lambda)| \leq C t^{-1-\beta}, \quad (2.14')$$

$$-1 \leq \partial_\lambda \tilde{F}_-(t, \lambda) \leq 0, \quad (2.14'')$$

$$\lambda \partial_\lambda \tilde{F}_-(t, \lambda) = \tilde{F}_-(t, \lambda) + O(t^{-\beta}). \quad (2.14''')$$

Dans la suite on va utiliser les opérateurs  $\tilde{F}_-(t, \tilde{A}'_{p,k,j}(t) - \tilde{A}_{p,k,j}(t))$  qui seront notés de façon abrégée  $\tilde{F}_-(\tilde{A}'_{p,k,j} - \tilde{A}_{p,k,j})$ .

L'importance de cette régularisation vient du fait que la preuve des estimations de propagation ne nécessite que des calculs « au niveau du symbole principal », les termes d'ordre inférieur par rapport à  $t$  étant négligeables. La propriété (2.14) assure que  $F_-$  et  $\tilde{F}_-$  sont égaux « au niveau du symbole principal ». On peut ajouter au lemme 2.4 le résultat suivant :

LEMME 2.4. — e) Si  $B_1(t), B_2(t) \in \mathcal{F}$ , alors

$$\| [B_1(t), \tilde{F}(t, B_2(t))] \| \leq C t^{1-2\rho'+\beta}, \quad (2.6')$$

$$\| [B_1(t), (\partial_\lambda \tilde{F})(t, B_2(t))] \| \leq C t^{1-2\rho'+4\beta}. \quad (2.6'')$$

Par conséquent, si  $\beta < (2\rho' - 1)/4$  et  $B_1(t), B_2(t) \in \mathcal{F}$ , alors

$$B_1(t) \geq 0 \Rightarrow B_1(t) \tilde{F}_-(t, B_2(t)) + hc \geq -C t^{-\varepsilon}, \quad (2.7')$$

$$B_1(t) \geq 0 \Rightarrow -B_1(t) (\partial_\lambda \tilde{F}_-)(t, B_2(t)) + hc \geq -C t^{-\varepsilon}, \quad (2.7'')$$

pour un certain  $\varepsilon > 0$ .

*Preuve.* — Il suffit d'écrire

$$[B_1(t), \tilde{F}(t, B_2(t))] = \int_0^\infty \frac{ds}{\pi} s^{1/2} (s+t^{-2\beta} + B_2(t)^2)^{-1} [B_1(t), B_2(t)^2] (s+t^{-2\beta} + B_2(t)^2)^{-1},$$

donc

$$\| [B_1(t), \tilde{F}(t, B_2(t))] \| \leq \| [B_1(t), B_2(t)^2] \| \int_0^\infty \frac{ds}{(s+t^{-2\beta})^{3/2}} \leq C' t^{\beta+1-2\rho'}.$$

Pour montrer (2.6''), il suffit de remarquer que

$$(\partial_\lambda \tilde{F})(t, \lambda) = \lambda \tilde{F}(t, \lambda) (t^{-2\beta} + \lambda^2)^{-1}$$

et

$$\| [B_1(t), (t^{-2\beta} + B_2(t)^2)^{-1}] \| = \| (t^{-2\beta} + B_2(t)^2)^{-1} [B_1(t), B_2(t)^2] (t^{-2\beta} + B_2(t)^2)^{-1} \| \leq C t^{1-2\rho'+4\beta}.$$

Finalement (2.7'') résulte du lemme 2.1, de (2.6'') et de (2.14'').

Q.E.D.

La propriété (2.14), qui implique

$$\| \tilde{F}_- (A'_{\rho, k, j} - A_{\rho, k, j}) - F_- (A'_{\rho, k, j} - A_{\rho, k, j}) \| \leq C t^{-\beta} \quad (2.15)$$

permet de formuler le lemme 2.6 en termes de  $\tilde{F}_-$  au lieu de  $F_-$  :

LEMME 2.6'. — Si  $h_1 \in C_{\mathbb{R}}^\infty(c_3; \infty)$ , alors

$$\| \tilde{F}_-^{1/2} (A'_{\rho, k, j} - \tilde{A}_{\rho, k, j}) h_1 (A'_{\rho, k, j}) (1 - \Delta)^{-1} \| \leq C t^{-\beta}, \quad (2.12'')$$

$$\| \tilde{F}_-^{1/2} (\tilde{A}_{\rho, k, j} - \tilde{A}_{\rho, k, j}) h_1 (A'_{\rho, k, j}) \| \leq C t^{-\beta}. \quad (2.12''')$$

La régularisation  $\tilde{F}_-$  permet aussi d'obtenir un autre résultat de microlocalisation :

LEMME 2.8. — Supposons  $\beta < 3\rho' - 2$  et soit

$$B(t) = J(A_{\rho, k, j}) h(A'_{\rho, k, j}) (1 - \Delta)^{-1}$$

où

$$J \in C_0^\infty(c_1; c_2) \quad \text{et} \quad h \in C_{\mathbb{R}}^\infty(0; \infty).$$

Alors pour un certain  $\varepsilon > 0$  on a

$$\| B(t)^* (\tilde{F}_- (\tilde{A}'_{\rho, k, j} - \tilde{A}_{\rho, k, j}) - \tilde{F}_- (A'_{\rho, k, j} - A_{\rho, k, j})) B(t) \| \leq C t^{-\varepsilon}. \quad (2.16)$$

*Preuve.* — Omettons les indices  $k$  et  $j$  dans la preuve. Posons

$$M(t) = (\tilde{F}_- (A'_\rho - \tilde{A}_\rho) - \tilde{F}_- (A'_\rho - A_\rho)) J(A_\rho) (1 - \Delta)^{-1}$$

et montrons d'abord que  $\| M(t) \| \leq C t^{-\varepsilon}$ . En effet :

$$M(t) = \int_0^\infty \frac{ds}{\pi} s^{1/2} B(t, s) ((A'_\rho - A_\rho)^2 - (A'_\rho - \tilde{A}_\rho)^2) \tilde{B}(t, s) J(A_\rho) (1 - \Delta)^{-1}$$

où

$$B(t, s) = (s + t^{-2\beta} + (A'_\rho - A_\rho)^2)^{-1},$$

$$\tilde{B}(t, s) = (s + t^{-2\beta} + (A'_\rho - \tilde{A}_\rho)^2)^{-1},$$

donc  $M(t) = M_1(t) + M_2(t)$  avec

$$M_1(t) = \int_0^\infty \frac{ds}{\pi} s^{1/2} B(t, s) ((A'_p - A_p)^2 - (A'_p - \tilde{A}_p)^2) \tilde{B}(t, s) \\ \times [J(A_p)(1 - \Delta)^{-1}, (A'_p - \tilde{A}_p)^2] \tilde{B}(t, s),$$

$$M_2(t) = \int_0^\infty \frac{ds}{\pi} s^{1/2} B(t, s) ((A'_p - A_p)^2 - (A'_p - \tilde{A}_p)^2) J(A_p)(1 - \Delta)^{-1} \tilde{B}(t, s).$$

Mais  $\|B(t, s)(A'_p - A_p)^2\| \leq 1$ ,  $\|(A'_p - \tilde{A}_p)^2 \tilde{B}(t, s)\| \leq 1$  et

$$\|[(A'_p - \tilde{A}_p)^2, J(A_p)(1 - \Delta)^{-1}]\| \leq C t^{1 - \rho' - (2\rho' - 1)},$$

donc

$$\|M_1(t)\| \leq C t^{-(3\rho' - 2)} \int_0^\infty \frac{s^{1/2} ds}{(s + t^{-2\beta})^2} \leq C t^{-(3\rho' - 2) + \beta},$$

tandis que (2. 8) assure

$$\|((A'_p - A_p)^2 - (A'_p - \tilde{A}_p)^2) J(A_p)(1 - \Delta)^{-1}\| \leq C_n t^{-n},$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , d'où  $\|M_2(t)\| \leq \tilde{C}_n t^{-n}$ .

Dans le deuxième pas on montre

$$\|(\tilde{F}(\tilde{A}'_p - \tilde{A}_p) - \tilde{F}(A'_p - \tilde{A}_p)) h(A'_p)\| \leq C t^{-\epsilon},$$

où, en vertu de (2. 12') et de (2. 12''), au lieu de  $h \in C_R^\infty(0; \infty)$ , il suffit de considérer  $h \in C_0^\infty(0; c_4)$ . Ainsi on a

$$\|(\tilde{A}'_p - \tilde{A}_p)^2 - (A'_p - \tilde{A}_p)^2) h(A'_p)\| \leq C_n t^{-n}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et il reste à procéder de façon analogue comme au-dessus avec  $h(A'_p)$  au lieu de  $J(A_p)$ .

Q.E.D.

Introduisons maintenant la notion de dérivée de Heisenberg de façon formelle, c'est-à-dire sans se préoccuper des domaines de définition des opérateurs considérés.

DÉFINITION 2. 9. — On note

$$\mathbb{D}_{\tilde{B}(t)} B(t) = i[\tilde{B}(t), B(t)] + \frac{dB(t)}{dt}. \tag{2. 17}$$

Remarquons que

$$\mathbb{D}_{B(t)}(B_1(t) B_2(t)) = (\mathbb{D}_{B(t)} B_1(t)) B_2(t) + B_1(t) (\mathbb{D}_{B(t)} B_2(t)).$$

Si  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , alors nous allons noter  $\varphi_t = U(t)\varphi$ , ce qui permet d'écrire

$$\frac{d}{dt}(B(t)\varphi_t, \varphi_t) = (\mathbb{D}_{H(t)} B(t)\varphi_t, \varphi_t).$$

Dans les situations où on va utiliser cette notation, il n'y aura pas d'ambiguïtés liées aux domaines de définition. Les deux cas principaux

qui vont être considérés sont les suivants :

$$\mathbb{D}_{-\Delta/2} J(A_{\rho, k, j}) = \frac{\rho}{t} (A'_{\rho, k, j} - A_{\rho, k, j}) J'(A_{\rho, k, j}) - i \rho^2 t^{-2\rho} J''(A_{\rho, k, j}), \quad (2.18)$$

$$\mathbb{D}_{-\Delta/2} h(A'_{\rho, k, j}) = \frac{1-\rho}{t} A'_{\rho, k, j} h'(A'_{\rho, k, j}), \quad (2.19)$$

avec  $J, h \in C^{\infty}_*(\mathbb{R})$ , où le calcul évident donne les égalités désirées sur  $H^2(\mathbb{R}^d)$ .

On va établir le résultat suivant :

LEMME 2.9. — Si  $\beta < 3\rho' - 2$ , alors pour un certain  $\varepsilon > 0$  on a

$$\begin{aligned} & \| \mathbb{D}_{-\Delta/2} \tilde{F}_- (\tilde{A}'_{\rho, k, j} - \tilde{A}_{\rho, k, j}) \\ & \quad - \partial_{\lambda} \tilde{F}_- (\tilde{A}'_{\rho, k, j} - \tilde{A}_{\rho, k, j}) \mathbb{D}_{-\Delta/2} (\tilde{A}'_{\rho, k, j} - \tilde{A}_{\rho, k, j}) \| \leq C t^{-1-\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

*Preuve.* — Il suffit de considérer  $\tilde{F}$  au lieu de  $\tilde{F}_-$ . On remarque que

$$\mathbb{D}_{-\Delta/2} \tilde{F} (\tilde{A}'_{\rho} - \tilde{A}_{\rho}) = (\partial_t \tilde{F}) (\tilde{A}'_{\rho} - \tilde{A}_{\rho}) + M(t),$$

avec

$$\begin{aligned} M(t) &= - \int_0^{\infty} \frac{ds}{\pi} s^{1/2} \tilde{B}(t, s) (\mathbb{D}_{-\Delta/2} ((\tilde{A}'_{\rho} - \tilde{A}_{\rho})^2)) \tilde{B}(t, s) \\ &= - 2 \int_0^{\infty} \frac{ds}{\pi} s^{1/2} \tilde{B}(t, s) (\tilde{A}'_{\rho} - \tilde{A}_{\rho}) (\mathbb{D}_{-\Delta/2} (\tilde{A}'_{\rho} - \tilde{A}_{\rho})) \tilde{B}(t, s) + hc, \end{aligned}$$

où

$$\tilde{B}(t, s) = (s + t^{-2\beta} + (\tilde{A}'_{\rho} - \tilde{A}_{\rho})^2)^{-1}.$$

Mais on a (2.14') et  $M(t) = M_1(t) + M_2(t) + M_3(t)$  avec

$$\begin{aligned} M_1(t) &= - 2 \int_0^{\infty} \frac{ds}{\pi} s^{1/2} \tilde{B}(t, s) (\tilde{A}'_{\rho} - \tilde{A}_{\rho}) \tilde{B}(t, s) \mathbb{D}_{-\Delta/2} (\tilde{A}'_{\rho} - \tilde{A}_{\rho}) \\ &= \partial_{\lambda} \tilde{F} (\tilde{A}'_{\rho} - \tilde{A}_{\rho}) \mathbb{D}_{-\Delta/2} (\tilde{A}'_{\rho} - \tilde{A}_{\rho}), \end{aligned}$$

$$M_2(t) = \int_0^{\infty} \frac{ds}{\pi} s^{1/2} \tilde{B}(t, s) [\tilde{A}'_{\rho} - \tilde{A}_{\rho}, \mathbb{D}_{-\Delta/2} (\tilde{A}'_{\rho} - \tilde{A}_{\rho})] \tilde{B}(t, s),$$

$$\begin{aligned} M_3(t) &= 2 \int_0^{\infty} \frac{ds}{\pi} s^{1/2} \tilde{B}(t, s) (\tilde{A}'_{\rho} - \tilde{A}_{\rho}) \tilde{B}(t, s) \\ & \quad \times [(\tilde{A}'_{\rho} - \tilde{A}_{\rho})^2, \mathbb{D}_{-\Delta/2} (\tilde{A}'_{\rho} - \tilde{A}_{\rho})] \tilde{B}(t, s) \end{aligned}$$

et

$$\| [\mathbb{D}_{-\Delta/2} (\tilde{A}'_{\rho} - \tilde{A}_{\rho}), \tilde{A}'_{\rho} - \tilde{A}_{\rho}] \| \leq C t^{-1-(2\rho'-1)}$$

[en vertu de (2.18), (2.19) et (2.6)].

Q.E.D.

La fin de ce paragraphe est consacrée à l'opérateur de multiplication  $V(t, x)$ . Introduisons la notation suivante :

DÉFINITION 2.11. — Pour  $j = 1, \dots, d$ , on note  $w \in \Xi_j$  si et seulement si  $w$  est une fonction de la forme

$$w(t, x_j) = \prod_{k=1}^N \left( 1 - J \left( \frac{x_j - \chi_{k,j}(t)}{t^{\rho'}} \right) \right), \tag{2.21}$$

où  $J \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  est telle que  $J(s) = 1$  pour  $s$  dans un voisinage de 0.

On a :

LEMME 2.12. — Si  $B(t) \in \mathcal{F}$  ou  $B(t) = \tilde{F}(\tilde{A}'_{p,k,j} - \tilde{A}_{p,k,j})$  avec  $\beta$  suffisamment petit et si  $w \in \Xi_j$ , alors pour un certain  $\varepsilon > 0$  on a

$$\|w(t, x_j)[B(t), V(t, x)](1 - \Delta)^{-1}\| \leq C t^{-1-\varepsilon}. \tag{2.23}$$

La preuve de ce lemme se trouve dans l'appendice A.

### 3. ESTIMATIONS DE PROPAGATION

Ce paragraphe est consacré à la preuve de deux estimations de propagation. La première est la suivante :

PROPOSITION 3.1. — Si  $J \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $w \in \Xi_j$ , alors

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} \left\| (1 - \Delta)^{-1} (A'_{1,k,j} - A_{1,k,j}) J \left( \frac{x_j}{t} \right) w(t, x_j) \varphi_t \right\|^2 \leq C \|\varphi\|^2. \tag{3.1}$$

Notons que l'hypothèse  $(H_2)$  assure l'existence des limites

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\chi}_k(t) = v_k = (v_{k,1}, \dots, v_{k,d}) \in \mathbb{R}^d, \tag{3.2}$$

avec

$$|\dot{\chi}_k(t) - v_k| \leq C t^{-\rho_0}, \tag{3.2'}$$

pour  $k = 1, \dots, N$ . Dans toute la suite on suppose que  $\beta, \varepsilon$  sont positifs et suffisamment petits. La preuve de (3.1) est basée sur les idées de Graf ([4], [5]), et repose sur la construction de fonctions auxiliaires  $u_j$ ,  $1 \leq j \leq d$ . Fixons deux paramètres réels  $\sigma > 0$  et  $\sigma' > 1 + \max_{1 \leq k \leq N, 1 \leq j \leq d} |v_{k,j}|$  et posons

$$u_j(t, \lambda) = \frac{\lambda}{t} + \sum_{k=0}^{N+1} \vartheta_k \left( t^{1-\rho'} \left( \dot{\chi}_{k,j}(t) - \frac{\lambda}{t} \right) \right) \left( \dot{\chi}_{k,j}(t) - \frac{\lambda}{t} \right) \tag{3.3}$$

où on prend  $\chi_{0,j}(t) = -\sigma' t$ ,  $\chi_{N+1,j}(t) = \sigma' t$ ,  $\vartheta_0 \in C_{\mathbb{R}}^\infty(-2\sigma; -\sigma)$ ,  $\vartheta_{N+1} \in C_{\mathbb{L}}^\infty(\sigma; 2\sigma)$  et pour  $k = 1, \dots, N$ ,  $\vartheta_k \in C_0^\infty(-2\sigma; 2\sigma)$  sont telles

que  $\vartheta_k(s) = 1$  pour  $-\sigma \leq s \leq \sigma$ . Les propriétés des  $u_j$  sont les suivantes :

PROPOSITION 3.2 (Graf [4]). — On a

- (i)  $u_j(t, \lambda) = -\sigma'$  si  $\frac{\lambda}{t} \leq -\sigma'$ ,  $u_j(t, \lambda) = \sigma'$  si  $\frac{\lambda}{t} \geq \sigma'$ ,  
 $u_j(t, \lambda) = \frac{\lambda}{t}$  si  $\left| \frac{\lambda}{t} - \dot{\chi}_{k,j}(t) \right| \geq 2\sigma t^{\rho'-1}$  et  $\left| \frac{\lambda}{t} \right| \leq \sigma' - 2\sigma t^{\rho'-1}$ ,  
 $u_j(t, \lambda) = \dot{\chi}_{k,j}(t)$  si  $\left| \frac{\lambda}{t} - \dot{\chi}_{k,j}(t) \right| \leq \sigma t^{\rho'-1}$ ;
- (ii)  $\partial_\lambda u_j \geq 0$ ;
- (iii)  $|\partial_\lambda^\alpha u_j(t, \lambda)| \leq C_\alpha t^{-1-\rho'(|\alpha|-1)}$  pour  $|\alpha| \geq 1$ ;

(iv) si on pose

$$K(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d (D_{x_j} - u_j(t, x_j))^2 + V(t, x), \tag{3.4}$$

alors

$$\mathbb{D}_{H(t)} K(t) = - \sum_{j=1}^d (D_{x_j} - u_j(t, x_j)) \partial_{x_j} u_j(t, x_j) (D_{x_j} - u_j(t, x_j)) + B(t) \tag{3.5}$$

avec

$$\|B(t)(1 - \Delta)^{-1}\| \leq C t^{-1-\varepsilon}. \tag{3.5'}$$

Le point (i) de la proposition 3.2 résulte immédiatement de la définition des  $u_j$ , la preuve des points (ii), (iii) et (iv) est donnée dans l'appendice B.

LEMME 3.3. — L'opérateur  $K(t)$  est borné inférieurement, donc pour un  $r > 0$  fixé suffisamment petit, l'opérateur  $K_r(t) = 1 + rK(t)$  est inversible. De plus il existe une constante  $C$  telle que  $\|(1 - \Delta)K_r(t)^{-1}\| \leq C$  pour tout  $t \geq 1$  et

$$\| [J(A_{p,k,j}), K_r(t)^{-1}] \| \leq C t^{-\varepsilon} \tag{3.6}$$

si  $J \in C_*^\infty(\mathbb{R})$  et

$$\| w(t, x_j) [B(t), K_r(t)^{-1}] \| + \| [B(t), t \mathbb{D}_{H(t)}(K_r(t)^{-1})] \| \leq C t^{-\varepsilon}, \tag{3.7}$$

si  $w \in \Xi_j$  et  $B(t) = D_{x_j}$  ou  $B(t) = \tilde{F}(\tilde{A}'_{p,k,j} - \tilde{A}_{p,k,j})$  ou  $B(t) \in \mathcal{F}$ . De plus

$$\| [K_r(t)^{-1}, t \mathbb{D}_{H(t)}(K_r(t)^{-1})] \| \leq C t^{-\varepsilon}. \tag{3.8}$$



*Preuve.* — Ceci s'obtient facilement en écrivant

$$\begin{aligned} [M, K_r(t)^{-1}] &= -r K_r(t)^{-1} [M, K(t)] K_r(t)^{-1}. \\ \mathbb{D}_{H(t)}(K_r(t)^{-1}) &= -r K_r(t)^{-1} (\mathbb{D}_{H(t)} K(t)) K_r(t)^{-1} \end{aligned}$$

et en utilisant la forme de  $K(t)$  et  $\mathbb{D}_{H(t)} K(t)$  donnée dans la proposition 3.2.

Q.E.D.

*Preuve de la proposition 3.1.* — Supposons que  $\sigma$  et  $\sigma'$  utilisés dans la construction des  $u_j$  sont tels que  $\text{supp } J \subset (-\sigma'; \sigma')$  et  $w(t, x_j) = 0$  pour  $|x_j - \chi_{k,j}(t)| \leq 5\sigma t^{\rho'}$ . On va vérifier que pour  $t \geq t_0$  suffisamment grand on a

$$\frac{J^2(x_j/t) w^2(t, x_j)}{t} \leq C \partial_{x_j} u_j(t, x_j). \quad (3.9)$$

En effet : il suffit de démontrer que

$$u_j(t, x_j) = \frac{x_j}{t} \quad \text{si } t \geq t_0, \quad |x_j - \chi_{k,j}(t)| \geq 5\sigma t^{\rho'} \quad \text{et} \quad \frac{|x_j|}{t} \leq \sigma'. \quad (3.10)$$

Supposons que  $x_j$  est tel que  $|x_j| \leq \sigma' t$  et  $u_j(t, x_j) \neq x_j/t$ . Par construction des  $u_j$  on a alors

$$|tu_j(t, x_j) - t \dot{\chi}_{k,j}(t)| \leq 2\sigma t^{\rho'}. \quad (3.11)$$

Mais d'un autre côté, on a  $|tu_j(t, x_j) - x_j| \leq 2\sigma t^{\rho'}$  si  $|x_j| \leq \sigma' t$ , donc (3.11) implique

$$|x_j - t \dot{\chi}_{k,j}(t)| \leq 4\sigma t^{\rho'}. \quad (3.12)$$

Cependant on a

$$\begin{aligned} |\chi_k(t) - t \dot{\chi}_k(t)| &\leq C' + \int_0^t ds \left| \frac{d}{ds} (\chi_k(s) - s \dot{\chi}_k(s)) \right| \\ &= C' + \int_0^t ds |s \ddot{\chi}_k(s)| \leq C'' t^{1-\rho_0}, \quad (3.13) \end{aligned}$$

par l'hypothèse (H<sub>2</sub>). Alors (3.12) et (3.13) assurent

$$|x_j - \chi_{k,j}(t)| \leq 4\sigma t^{\rho'} + C'' t^{1-\rho_0} < 5\sigma t^{\rho'}$$

si  $t \geq t_0$  est suffisamment grand, ce qui prouve (3.10).

Grâce à (3.5), (3.5') et (3.9), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (K_r(t)^{-1} \varphi_t, \varphi_t) &= - (K_r(t)^{-1} (\mathbb{D}_{H(t)} K_r(t)) K_r(t)^{-1} \varphi_t, \varphi_t) \\ &\geq \left( K_r(t)^{-1} \left( D_{x_j} - \frac{x_j}{t} \right) \frac{J^2(x_j/t) w^2(t, x_j)}{Ct} \left( D_{x_j} - \frac{x_j}{t} \right) K_r(t)^{-1} \varphi_t, \varphi_t \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{Ct} \left( K_r(t)^{-1} w(t, x_j) J \left( \frac{x_j}{t} \right) \left( D_{x_j} - \frac{x_j}{t} \right)^2 J \left( \frac{x_j}{t} \right) w(t, x_j) K_r(t)^{-1} \varphi_t, \varphi_t \right) + O(t^{-1-\varepsilon}) \|\varphi\|^2$$

donc

$$\int_1^T \frac{dt}{t} \left\| \left( D_{x_j} - \frac{x_j}{t} \right) J \left( \frac{x_j}{t} \right) w(t, x_j) K_r(t)^{-1} \varphi_t \right\|^2 \leq \tilde{C} \int_1^T dt \left( \frac{d}{dt} (K_r(t)^{-1} \varphi_t, \varphi_t) + O(t^{-1-\varepsilon}) \|\varphi\|^2 \right) \leq (K_r(T)^{-1} \varphi_T, \varphi_T) - (K_r(1)^{-1} \varphi_1, \varphi_1) + \tilde{C}' \|\varphi\|^2 \leq \tilde{C}'' \|\varphi\|^2$$

Mais (3.13) assure que

$$A'_{1,k,j} - A_{1,k,j} = D_{x_j} - \frac{x_j}{t} + \left( \frac{\chi_{k,j}(t)}{t} - \dot{\chi}_{k,j}(t) \right) = D_{x_j} - \frac{x_j}{t} + O(t^{-\rho_0})$$

et pour terminer il suffit de remarquer que le lemme 3.3 assure

$$\int_1^T \frac{dt}{t} \left\| K_r(t)^{-1} (A'_{1,k,j} - A_{1,k,j}) J \left( \frac{x_j}{t} \right) w(t, x_j) \varphi_t \right\|^2 \leq \int_1^T dt \left( \frac{1}{t} \left\| \left( D_{x_j} - \frac{x_j}{t} \right) J \left( \frac{x_j}{t} \right) w(t, x_j) K_r(t)^{-1} \varphi_t \right\|^2 + \tilde{C} t^{-1-\varepsilon} \|\varphi\|^2 \right) \leq \tilde{C}'' \|\varphi\|^2$$

Q.E.D.

Les inégalités (3.2') et (3.13) impliquent

$$|\chi_k(t) - tv_k| \leq C t^{1-\rho_0} \tag{3.14}$$

Si  $v_k = v_m$ , alors (3.14) entraîne  $|\chi_k(t) - \chi_m(t)| \leq C t^{1-\rho_0}$  et l'hypothèse (H<sub>1</sub>) assure  $k = m$ . En remarquant que toutes les hypothèses et assertions du théorème sont invariantes par rotations, on peut, sans perte de généralité, choisir un système de coordonnées tel que pour tous  $1 \leq j \leq d, 1 \leq k < m \leq N$  on ait  $v_{k,j} \neq v_{m,j}$ . La suite de ce paragraphe est consacrée à la preuve de l'estimation suivante :

PROPOSITION 3.4. — Si

$$J \in C_0^\infty((-\varepsilon_0; \varepsilon_0) \setminus \{0\}), \quad \text{où } \varepsilon_0 = \min_{m' \neq m} |v_{m,j} - v_{m',j}|,$$

alors on a

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t} \left\| |A'_{1,k,j} - A_{1,k,j}|^{1/2} J(A_{1,k,j}) K_r(t)^{-1} \varphi_t \right\|^2 \leq C \|\varphi\|^2. \tag{3.15}$$

Preuve de la proposition 3.4. — On va considérer le cas  $J \in C_0^\infty(0; \varepsilon_0)$ . Le cas  $J \in C_0^\infty(-\varepsilon_0; 0)$  se traite de façon similaire (il suffit de remplacer  $A_{1,k,j}$  et  $A'_{1,k,j}$  par  $-A_{1,k,j}$  et  $-A'_{1,k,j}$ ). On va utiliser la définition 2.5,

$\tilde{J}$  et  $\tilde{h}$  étant associées avec les nombres  $c_m$ ,  $m=0, \dots, 6$ . On va fixer  $c_6 = \varepsilon_0$ , pendant que les  $c_m$  avec  $m \leq 5$  peuvent être choisis de façon quelconque (la seule restriction étant  $c_{m+1} > c_m > 0$  pour  $m=0, \dots, 5$ ). On peut donc supposer que  $J \in C_0^\infty(c_1; c_2)$ . De plus fixons les fonctions auxiliaires :

$\eta \in C_0^\infty(-\varepsilon_1; \varepsilon_1)$  avec  $\varepsilon_1 < \min_{m=0, \dots, 5} \{c_{m+1} - c_m\}$   
telle que  $\eta = 1$  dans un voisinage de 0,

$J_1 \in C_0^\infty(c_1; c_5)$  telle que  $J_1 = 1$   
dans un voisinage de  $[c_2; c_4]$  et  $J_1'(\lambda) \geq 0$  pour  $\lambda < c_2$ .

Dès maintenant les indices  $j$  et  $k$  sont fixés tout le temps, alors on va les omettre. L'estimation (3.15) équivaut à

$$\int_1^T \frac{dt}{t} (K_r(t)^{-1} J(A_1) |A_1' - A_1| J(A_1) K_r(t)^{-1} \varphi_t, \varphi_t) \leq C \|\varphi\|^2 \quad (3.15')$$

avec une constante  $C$  uniforme pour tout  $T > 1$ . Afin d'obtenir une telle estimation contenant  $|A_1' - A_1|$ , on va décomposer le module  $|\lambda| = \lambda + 2F_-(\lambda)$ . On va commencer par le lemme 3.5, où on voit que l'estimation analogue à (3.15') avec  $A_1' - A_1$  au lieu de  $|A_1' - A_1|$ , s'obtient d'une façon très simple, tandis que l'étude de la partie négative nécessite un raisonnement plus complexe, dont la partie essentielle se trouve dans la preuve du lemme 3.8. Toutes les estimations de propagation qu'on considère ici, se réduisent aux majorations de l'intégrale de la dérivée d'une fonction bornée. Plus précisément, pour démontrer l'estimation

$$\int_1^T dt (M_0(t) \varphi_t, \varphi_t) \leq C \|\varphi\|^2, \quad (3.16)$$

on cherche une famille d'opérateurs  $M(t)$  bornée dans  $B(L^2(\mathbb{R}^d))$  telle que

$$\frac{d}{dt} (M(t) \varphi_t, \varphi_t) = (\mathbb{D}_{H(t)} M(t) \varphi_t, \varphi_t) = \sum_{m=0}^{m_0} (M_m(t) \varphi_t, \varphi_t) \quad (3.16')$$

et

$$\int_1^T dt (M_m(t) \varphi_t, \varphi_t) \geq -C_m \|\varphi\|^2 \quad (3.16'')$$

pour  $1 \leq m \leq m_0$ .

LEMME 3.5. — Il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $T \geq 1$  on ait

$$\left| \int_1^T \frac{dt}{t} (K_r(t)^{-1} J(A_p) (A_p' - A_p) J(A_p) K_r(t)^{-1} \varphi_t, \varphi_t) \right| \leq C \|\varphi\|^2. \quad (3.17)$$

Preuve. — Posons

$$M(t) = K_r(t)^{-1} J_0(A_p) K_r(t)^{-1}$$

avec  $J_0(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} d\lambda' J^2(\lambda')$ . Alors

$$\frac{d}{dt}(M(t) \varphi_t, \varphi_t) = ((M_0(t) + M_1(t)) \varphi_t, \varphi_t)$$

où

$$\begin{aligned} M_0(t) &= K_r(t)^{-1} (\mathbb{D}_{-\Delta/2} J_0(A_p)) K_r(t)^{-1}, \\ M_1(t) &= 2 (\mathbb{D}_{H(t)} K_r(t)^{-1}) J_0(A_p) K_r(t)^{-1} + hc. \end{aligned}$$

Cependant on a

$t (\mathbb{D}_{H(t)} K_r(t)^{-1}) + C_0 t^{-\varepsilon} = -t K_r(t)^{-1} (\mathbb{D}_{H(t)} K_r(t)) K_r(t)^{-1} + C_0 t^{-\varepsilon} \geq 0$   
pour un certain  $C_0$  et  $\varepsilon$ , alors (3.8) et le lemme 2.1 assurent

$$\begin{aligned} t |M_1(t)| &\leq (t (\mathbb{D}_{H(t)} K_r(t)^{-1}) + C_0 t^{-\varepsilon}) \|J_0(A_1) K_r(t)^{-1}\| \\ &\leq C_1 t \mathbb{D}_{H(t)} K_r(t)^{-1} + C_2 t^{-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$|(M_1(t) \varphi_t, \varphi_t)| \leq C_1 (\mathbb{D}_{H(t)} K_r(t)^{-1} \varphi_t, \varphi_t) + C_2 t^{-1-\varepsilon} \|\varphi\|^2$$

et l'inégalité

$$\begin{aligned} \int_1^T dt (\mathbb{D}_{H(t)} K_r(t)^{-1} \varphi_t, \varphi_t) \\ = \int_1^T dt \frac{d}{dt} (K_r(t)^{-1} \varphi_t, \varphi_t) \leq (K_r(T)^{-1} \varphi_T, \varphi_T) \leq C \|\varphi\|^2 \end{aligned}$$

assure

$$\int_1^T dt |M_1(t) \varphi_t, \varphi_t| \leq C' \|\varphi\|^2.$$

On a donc

$$\left| \int_1^T dt (M_0(t) \varphi_t, \varphi_t) \right| \leq C'' \|\varphi\|^2$$

et pour achever la preuve il suffit de remarquer qu'en utilisant (2.18), on obtient

$$M_0(t) = \frac{\rho}{t} K_r(t)^{-1} J(A_p) (A'_p - A_p) J(A_p) K_r(t)^{-1} + O(t^{-1-\varepsilon}).$$

Q.E.D.

LEMME 3.6. — *Posons*

$$\begin{aligned} M_1(t) &= -2 K_r(t)^{-1} (\mathbb{D}_{-\Delta/2} \eta(A'_1 - A_1)) J_1(A_1) \tilde{F}_-(\tilde{A}'_1 - \tilde{A}_1) \\ &\quad \times J_1(A_1) \eta(A'_1 - A_1) K_r(t)^{-1} + hc. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Alors

$$\int_1^{\infty} dt |(M_1(t) \varphi_t, \varphi_t)| \leq C \|\varphi\|^2. \quad (3.19)$$

*Preuve.* — On calcule

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{-\Delta/2} \eta(A'_1 - A_1) &= e^{it\Delta/2} \frac{d}{dt} \left( e^{-it\Delta/2} \eta \left( D_{x_j} - \frac{x_j}{t} + \frac{\chi_{kj}(t)}{t} - \dot{\chi}_{kj}(t) \right) e^{it\Delta/2} \right) e^{-it\Delta/2} \\ &= e^{it\Delta/2} \frac{d}{dt} \left( \eta \left( -\frac{x_j}{t} + \frac{\chi_{kj}(t)}{t} - \dot{\chi}_{kj}(t) \right) \right) e^{-it\Delta/2} \\ &= e^{it\Delta/2} \left( \frac{x_j - \chi_{kj}(t)}{t^2} + \frac{\dot{\chi}_{kj}(t)}{t} - \ddot{\chi}_{kj}(t) \right) \eta' \left( -\frac{x_j}{t} + \frac{\chi_{kj}(t)}{t} - \dot{\chi}_{kj}(t) \right) e^{-it\Delta/2} \\ &= -\frac{1}{t} (A'_1 - A_1) \eta'(A'_1 - A_1) + O(t^{-1-\varepsilon}). \end{aligned}$$

Cependant  $|\lambda \eta \eta'(\lambda)| \leq C_0 \lambda^2$  donc

$$|\eta(A'_1 - A_1) \mathbb{D}_{-\Delta/2} \eta(A'_1 - A_1)| \leq \frac{C_0}{t} (A'_1 - A_1)^2 + C t^{-1-\varepsilon} \quad (3.20)$$

et en utilisant (2.7), (2.7') et (3.20) on obtient

$$|M_1(t)| \leq \frac{C}{t} K_r(t)^{-1} J_1(A_1) (A'_1 - A_1)^2 J_1(A_1) K_r(t)^{-1} + C t^{-1-\varepsilon}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_1^\infty dt |(M_1(t) \varphi_t, \varphi_t)| &\leq C \|\varphi\|^2 \\ &+ \int_1^\infty \frac{dt}{t} \|(A'_1 - A_1) J_1(A_1) K_r(t)^{-1} \varphi_t\|^2 \leq C' \|\varphi\|^2 \end{aligned}$$

où la dernière inégalité résulte de (3.1) (*cf.* la preuve de la proposition 3.1).

Q.E.D.

LEMME 3.7. — *Posons*

$$\begin{aligned} M_2(t) &= -2 K_r(t)^{-1} \eta(A'_1 - A_1) J_1(A_1) \tilde{F}_- (\tilde{A}'_1 - \tilde{A}_1) \\ &\quad \times (\mathbb{D}_{-\Delta/2} J_1(A_1)) \eta(A'_1 - A_1) K_r(t)^{-1} + hc. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Alors

$$(M_2(t) \varphi_t, \varphi_t) \geq -C t^{-1-\varepsilon} \|\varphi\|^2. \quad (3.22)$$

*Preuve.* — On peut décomposer  $J_1 = J_{1,1} + J_{1,2}$  avec  $J'_{1,1} \in C_0^\infty(c_1; c_2)$  et  $J'_{1,2} \in C_0^\infty(c_4; c_5)$ . En utilisant (2.18) pour exprimer  $\mathbb{D}_{-\Delta/2} J_1(A_1)$  dans (3.21), on voit que

$$M_2(t) = M_{2,1}(t) + M_{2,2}(t) + O(t^{-1-\varepsilon})$$

où

$$\begin{aligned} M_{2,m}(t) &= -\frac{1}{t} K_r(t)^{-1} \eta(A'_1 - A_1) J_1(A_1) \tilde{F}_- (\tilde{A}'_1 - \tilde{A}_1) (A'_1 - A_1) \\ &\quad \times J'_{1,m}(A_1) \eta(A'_1 - A_1) K_r(t)^{-1} + hc \end{aligned}$$

pour  $m = 1, 2$ . Grâce à (2.9) on peut écrire

$$J'_{1,m}(A_1) \eta(A'_1 - A_1) = h_m(A'_1) J'_{1,m}(A_1) \eta(A'_1 - A_1) + O(t^{-n})$$

pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $m = 1, 2$ , avec certaines  $h_1 \in C_0^\infty(c_1 - \varepsilon_1; c_2 + \varepsilon_1)$ ,  $h_1 \geq 0$  et  $h_2 \in C_0^\infty(c_4 - \varepsilon_1; c_5 + \varepsilon_1)$ .

Alors (2.12') assure

$$\|M_{2,2}(t)\| \leq \frac{C}{t} \|\tilde{F}_-^{1/2}(\tilde{A}'_1 - \tilde{A}_1) h_2(A'_1)\| \leq C' t^{-1-\varepsilon}.$$

Pour terminer la preuve de (3.22), il reste à vérifier :

$$M_{2,1}(t) \geq -C t^{-1-\varepsilon}. \tag{3.23}$$

Pour cela on remarque que  $\tilde{h}(\lambda) = \lambda$  si  $\lambda \in \text{supp } h_1$  et  $\tilde{J}(\lambda) = \lambda$  si  $\lambda \in \text{supp } J'_{1,1}$ , donc

$$\begin{aligned} \tilde{F}_-(\tilde{A}'_1 - \tilde{A}_1)(A'_1 - A_1) J'_{1,1}(A_1) h_1(A'_1) \\ = \tilde{F}_-(\tilde{A}'_1 - \tilde{A}_1)(\tilde{A}'_1 - \tilde{A}_1) J'_{1,1}(A_1) h_1(A'_1) + O(t^{-n}). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Mais  $-\tilde{F}_-(\lambda) \lambda \geq -C \lambda t^{-\varepsilon}$  implique

$$-\tilde{F}_-(\tilde{A}'_1 - \tilde{A}_1)(\tilde{A}'_1 - \tilde{A}_1) \geq -C \|\tilde{A}'_1 - \tilde{A}_1\| t^{-\varepsilon},$$

donc grâce à (2.7), (2.7'),  $J'_{1,1} \geq 0$  et  $h_1 \geq 0$ , on a

$$-\tilde{F}_-(\tilde{A}'_1 - \tilde{A}_1)(\tilde{A}'_1 - \tilde{A}_1) J'_{1,1}(A_1) h_1(A'_1) + hc \geq -C t^{-\varepsilon}. \tag{3.25}$$

Ainsi (3.24), (3.25) et (2.7) impliquent [compte tenu du fait que  $K_r(t)^{-1} \geq 0$ ,  $\eta \geq 0$  et  $J_1 \geq 0$ ] l'inégalité (3.23).

Q.E.D.

LEMME 3.8. — On a

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} \|\tilde{F}_-^{1/2}(\tilde{A}'_1 - \tilde{A}_1) J(A_1) \eta(A'_1 - A_1) K_r(t)^{-1} \varphi_t\|^2 \leq C \|\varphi\|^2. \tag{3.26}$$

Preuve. — Si on pose

$$\begin{aligned} M(t) = -K_r(t)^{-1} \eta(A'_1 - A_1) J_1(A_1) \\ \times \tilde{F}_-(\tilde{A}'_1 - \tilde{A}_1) J_1(A_1) \eta(\tilde{A}'_1 - A_1) K_r(t)^{-1}, \end{aligned}$$

alors la dérivée  $\frac{d}{dt}(M(t) \varphi_t, \varphi_t)$  donne les termes  $(M_m(t) \varphi_t, \varphi_t)$ ,  $m = 0, \dots, 4$  dans (3.16'), où

$$\begin{aligned} M_0(t) = -K_r(t)^{-1} \eta(A'_1 - A_1) J_1(A_1) \\ \times (\mathbb{D}_{-\Delta/2} \tilde{F}_-(\tilde{A}'_1 - \tilde{A}_1)) J_1(A_1) \eta(A'_1 - A_1) K_r(t)^{-1}, \end{aligned}$$

$M_1(t)$  est donné par (3.18),  $M_2(t)$  est donné par (3.21) et

$$M_3(t) = i K_r(t)^{-1} [\eta(A'_1 - A_1) J_1(A_1) \\ \times \tilde{F}_-(\tilde{A}'_1 - \tilde{A}_1) J_1(A_1) \eta(A'_1 - A_1), V(t, x)] K_r(t)^{-1},$$

$$M_4(t) = -2(\mathbb{D}_{H(t)} K_r(t)^{-1}) \eta(A'_1 - A_1) J_1(A_1) \\ \times \tilde{F}_-(\tilde{A}'_1 - \tilde{A}_1) J_1(A_1) \eta(A'_1 - A_1) K_r(t)^{-1} + hc.$$

Pour déduire l'estimation (3.16), on doit vérifier la condition (3.16'') pour  $m=1, \dots, 4$ . Cependant pour  $m=1$  la condition (3.16'') découle de (3.19), pour  $m=1$  de (3.22), pour  $m=3$  de (2.23) (qui assure  $\|M_3(t)\| \leq C t^{-1-\varepsilon}$ ) et finalement pour  $m=4$  elle peut être vérifiée de manière analogue comme dans la preuve du lemme 3.5. Ainsi on a l'estimation (3.16) et pour terminer la preuve de (3.26), il suffit de vérifier

$$\frac{1}{t} \|\tilde{F}_-^{1/2}(\tilde{A}'_1 - \tilde{A}_1) J(A_1) \eta(A'_1 - A_1) K_r(t)^{-1} \varphi_t\|^2 \\ \leq C(M_0(t) \varphi_t, \varphi_t) + C t^{-1-\varepsilon} \|\varphi\|^2. \quad (3.27)$$

Pour cela on remarque que (2.20) permet d'écrire

$$M_0(t) = \frac{1}{t} K_r(t)^{-1} \eta(\tilde{A}'_1 - A_1) J_1(A_1) \partial_\lambda \tilde{F}_-(\tilde{A}'_1 - \tilde{A}_1)(A'_1 - A_1) \\ \times \tilde{J}' J_1(A_1) \eta(A'_1 - A_1) K_r(t)^{-1} + hc + O(t^{-1-\varepsilon}).$$

Cependant

$$A'_1 \tilde{J}' J_1(A_1) \eta(A'_1 - A_1) = \tilde{A}'_1 \tilde{J}' J_1(A_1) \eta(A'_1 - A_1) + O(t^{-n}),$$

puisque  $\tilde{J}' J_1 \in C_0^\infty(c_1; c_3)$  implique [grâce à (2.9)]

$$\tilde{J}' J_1(A_1) \eta(A'_1 - A_1) = h(A'_1) \tilde{J}' J_1(A_1) \eta(A'_1 - A_1) + O(t^{-n})$$

avec une certaine  $h \in C_0^\infty(c_1 - \varepsilon_1; c_3 + \varepsilon_1)$  et  $\tilde{h}(\lambda) = \lambda$  pour  $\lambda \in \text{supp } h$ . De plus

$$-\partial_\lambda \tilde{F}_-(\tilde{A}'_1 - \tilde{A}_1) A_1 J_1(A_1) + hc \geq -\partial_\lambda \tilde{F}_-(\tilde{A}'_1 - \tilde{A}_1) \tilde{A}_1 J_1(A_1) + hc - C t^{-\varepsilon}$$

grâce à (2.7) et (2.7''), puisque  $J_1 \geq 0$  et  $\lambda \geq \tilde{J}(\lambda)$  pour  $\lambda \in \text{supp } J_1$ . Alors

$$M_0(t) \geq \frac{1}{t} K_r(t)^{-1} \eta(A'_1 - A_1) J_1(A_1) \partial_\lambda \tilde{F}_-(\tilde{A}'_1 - \tilde{A}_1)(\tilde{A}'_1 - \tilde{A}_1) \\ \times \tilde{J}' J_1(A_1) \eta(A'_1 - A_1) K_r(t)^{-1} + hc - C t^{-1-\varepsilon}$$

car aussi  $\tilde{J}' \geq 0$ . Pour en déduire (3.27) il suffit d'utiliser (2.14''') et l'inégalité  $J^2 \leq \tilde{J}' J_1^2$  avec (2.7) et (2.7').

Q.E.D.

*Fin de la preuve de la proposition 3.4.* — En vertu de (2.9), il existe  $h \in C_0^\infty(c_1 - \varepsilon_1; c_2 + \varepsilon_1)$  telle que

$$J(A_1) \eta(A'_1 - A_1) = h(A'_1) J(A_1) \eta(A'_1 - A_1) + O(t^{-n}),$$

donc (3.26) et le lemme 2.8 assurent

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} \|F_-^{1/2} (A'_1 - A_1) \eta (A'_1 - A_1) J(A_1) K_r(t)^{-1} \varphi_t\|^2 \leq C \|\varphi\|^2.$$

Alors pour  $c > 0$  tel que  $\mathbf{1}_{[-c; 0]}(\lambda) \leq \eta(\lambda)$ , on a

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} \| \mathbf{1}_{[-c; 0]}(A'_1 - A_1) |A'_1 - A_1|^{1/2} J(A_1) K_r(t)^{-1} \varphi_t \|^2 \leq C \|\varphi\|^2. \quad (3.28)$$

D'un autre côté,  $\mathbf{1}_{(-\infty; -c)}(A'_1 - A_1) |A'_1 - A_1| \leq C(A'_1 - A_1)^2$  avec (3.1), impliquent

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} \| \mathbf{1}_{(-\infty; -c)}(A'_1 - A_1) |A'_1 - A_1|^{1/2} J(A_1) K_r(t)^{-1} \varphi_t \|^2 \leq C \|\varphi\|^2. \quad (3.29)$$

L'addition de (3.28) et (3.29) donne

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} \|F_-^{1/2} (A'_1 - A_1) J(A_1) K_r(t)^{-1} \varphi_t\|^2 \leq C \|\varphi\|^2$$

c'est-à-dire

$$\left| \int_1^T \frac{dt}{t} \langle K_r(t)^{-1} J(A_1) F_- (A'_1 - A_1) J(A_1) K_r(t)^{-1} \varphi_t, \varphi_t \rangle \right| \leq C \|\varphi\|^2. \quad (3.30)$$

Compte tenu de l'égalité  $|A'_1 - A_1| = A'_1 - A_1 + 2F_-(A'_1 - A_1)$ , (3.30) et (3.17) (avec  $\rho = 1$ ) donnent (3.15').

Q.E.D.

#### 4. ÉTUDE PRÈS D'UNE PARTICULE CLASSIQUE

Le but de ce paragraphe est la preuve de l'estimation suivante :

PROPOSITION 4.1. — Si  $J \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ , alors on a l'estimation

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} \| |A'_{p,k,j} - A_{p,k,j}|^{1/2} J(A_{p,k,j}) K_r(t)^{-1} \varphi_t \|^2 \leq C \|\varphi\|^2. \quad (4.1)$$

*Preuve de la proposition 4.1.* — Nous utilisons toujours la notation introduite dans la définition 2.5,  $\tilde{J}$  et  $\tilde{h}$  étant associés aux nombres  $c_m, m = 0, \dots, 6$ . Ainsi, comme dans la preuve de la proposition 3.4, on peut supposer  $J \in C_0^\infty(c_1; c_2)$  et utiliser les fonctions auxiliaires suivantes :

$$J_0 \in C_0^\infty(-\varepsilon_0; \varepsilon_0) \text{ telle que } J_0 = 1 \text{ dans un voisinage de } 0$$



et

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &< \min_{k \neq k'} |v_{k,j} - v_{k',j}|; \\ J_1 &\in C_R^\infty(c_1; c_2) \text{ telle que } J_1 = 1 \text{ sur } \text{supp } J; \\ J_2 &\text{ donnée par la formule } J_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} d\lambda' J^2(\lambda'). \end{aligned}$$

La preuve de (4.1) est similaire à celle de (3.15), la partie cruciale étant le lemme 4.4 analogue au lemme 3.8. La difficulté additionnelle du cas  $\rho < 1$  apparaît dans la forme de  $\mathbb{D}_{-\Delta/2}(\tilde{A}'_{\rho,k,j} - \tilde{A}_{\rho,k,j})$ , qui contient maintenant le terme

$$\mathbb{D}_{-\Delta/2} \tilde{A}'_{\rho,k,j} = \frac{1-\rho}{t} A'_{\rho,k,j} \tilde{h}'(A'_{\rho,k,j}). \tag{4.2}$$

Si on se limite à la région de l'espace de phase où  $A'_{\rho,k,j} > 0$ , le terme (4.2) est positif et on peut l'omettre. La possibilité de l'introduction de la troncature  $h(A'_{\rho,k,j})$  avec  $h$  supportée dans  $(0; \infty)$  est garantie par les estimations démontrées dans les lemmes 4.2 et 4.3. Puisque les indices  $j$  et  $k$  sont fixés tout le temps, alors on va les omettre.

LEMME 4.2. — Si  $h \in C_L^\infty(0; c_0)$ , alors

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} \|F^{1/2}(A'_\rho - A_\rho) J(A_\rho) h(A'_\rho) K_r(t)^{-1} \varphi_t\|^2 \leq C \|\varphi\|^2. \tag{4.3}$$

Preuve. — Si on pose

$$M(t) = -K_r(t)^{-1} J_0(A_1) h(A'_\rho) J_2(A_\rho) h(A'_\rho) J_0(A_1) K_r(t)^{-1},$$

alors selon (3.16''), le calcul de  $\frac{d}{dt}(M(t)\varphi_t, \varphi_t)$  donne les termes

$(M_m(t)\varphi_t, \varphi_t)$ ,  $m=0, 1, 2, 3$ , de la forme

$$\begin{aligned} M_0(t) &= -K_r(t)^{-1} J_0(A_1) h(A'_\rho) (\mathbb{D}_{-\Delta/2} J_2(A_\rho)) h(A'_\rho) J_0(A_1) K_r(t)^{-1}, \\ M_1(t) &= -2 K_r(t)^{-1} J_0(A_1) (\mathbb{D}_{H(t)} h(A'_\rho)) J_2(A_\rho) h(A'_\rho) J_0(A_1) K_r(t)^{-1} + hc, \\ M_2(t) &= -2 K_r(t)^{-1} (\mathbb{D}_{-\Delta/2} J_0(A_1)) h(A'_\rho) J_2(A_\rho) h(A'_\rho) J_0(A_1) K_r(t)^{-1} + hc, \\ M_3(t) &= -2 (\mathbb{D}_{H(t)} K_r(t)^{-1}) J_0(A_1) h(A'_\rho) J_2(A_\rho) h(A'_\rho) J_0(A_1) K_r(t)^{-1} + hc. \end{aligned}$$

On remarque que la condition (3.16'') est satisfaite pour  $m=1$  grâce à l'inégalité

$$M_1(t) \geq -C t^{-1-\varepsilon}. \tag{4.4}$$

En effet : pour obtenir (4.4) on écrit  $\mathbb{D}_{-\Delta/2} h(A'_\rho) = (1-\rho) t^{-1} h'(A'_\rho) A'_\rho$  et on remarque que  $-h'(\lambda) \lambda \geq 0$ , pendant que (2.23) assure  $\| [h(A'_\rho), V(t, x)] J_2(A_\rho) J_0(A_1) (1-\Delta)^{-1} \| \leq C t^{-1-\varepsilon}$ . Ensuite :

$$\begin{aligned} M_2(t) &= -\frac{2}{t} K_r(t)^{-1} h(A'_\rho) J_3^2(A_1) (A'_1 - A_1) \\ &\quad \times J'_0 J_0(A_1) J_2(A_\rho) h(A'_\rho) K_r(t)^{-1} + O(t^{-1-\varepsilon}), \end{aligned}$$

où  $J_3 = 1$  dans un voisinage de  $\text{supp } J'_0$ . Puisque  $J'_0 \in C_0^\infty((-\varepsilon_0; \varepsilon_0) \setminus \{0\})$ , on peut supposer que l'on a aussi  $J_3 \in C_0^\infty((-\varepsilon_0; \varepsilon_0) \setminus \{0\})$  et la condition (3.16'') pour  $m=2$  sera satisfaite grâce à (3.15), car

$$|M_2(t)| \leq \frac{C}{t} K_r(t)^{-1} J_3(A_1) |A'_1 - A_1| J_3(A_1) K_r(t)^{-1} + C t^{-1-\varepsilon}.$$

Pour  $m=3$  on vérifie (3.16'') de la manière analogue comme dans la preuve du lemme 3.5. On a alors l'estimation (3.16) et pour en déduire (4.3), il suffit de remarquer que la décomposition  $A'_p - A_p = F_+ (A'_p - A_p) - F_- (A'_p - A_p)$  permet d'écrire

$$M_0(t) = M_{0,1}(t) + M_{0,2}(t) + O(t^{-1-\varepsilon}) \tag{4.5}$$

où

$$M_{0,1}(t) = \frac{\rho}{t} K_r(t)^{-1} J_0(A_1) h(A'_p) J(A_p) F_- (A'_p - A_p) J(A_p) h(A'_p) J_0(A_1) K_r(t)^{-1},$$

$$M_{0,2}(t) = -\frac{\rho}{t} K_r(t)^{-1} J_0(A_1) h(A'_p) J(A_p) F_+ (A'_p - A_p) J(A_p) h(A'_p) J_0(A_1) K_r(t)^{-1},$$

et (2.11) assure  $\|M_{0,2}(t)\| \leq C_n t^{-n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Q.E.D.

LEMME 4.3. — Si  $h_0 \in C_0^\infty(0; c_0)$ ,  $\rho < 1$ , alors

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} \|h_0(A'_p) J_1(A_p) J_0(A_1) K_r(t)^{-1} \varphi_t\|^2 \leq C \|\varphi\|^2. \tag{4.6}$$

Preuve. — Soit  $h_1(\lambda) = \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda'}{\lambda'} h_0^2(\lambda')$ , alors  $h_1 \in C_L^\infty(0; c_0)$ . Si on pose

$$M(t) = -K_r(t)^{-1} J_0(A_1) J_1(A_p) h_1(A'_p) J_1(A_p) J_0(A_1) K_r(t)^{-1},$$

alors la différentiation selon (3.16') donne les termes

$$\begin{aligned} M_0(t) &= -K_r(t)^{-1} J_0(A_1) J_1(A_p) (\mathbb{D}_{H(t)} h_1(A'_p)) J_1(A_p) J_0(A_1) K_r(t)^{-1}, \\ M_1(t) &= -2 K_r(t)^{-1} J_0(A_1) (\mathbb{D}_{-\Delta/2} J_1(A_p)) h_1(A'_p) J_1(A_p) J_0(A_1) K_r(t)^{-1} + hc, \\ M_2(t) &= -2 (\mathbb{D}_{-\Delta/2} (K_r(t)^{-1} J_0(A_1))) J_1(A_p) h_1(A'_p) J_1(A_p) J_0(A_1) K_r(t)^{-1} + hc. \end{aligned}$$

On a

$$(M_0(t) \varphi_t, \varphi_t) = \frac{1-\rho}{t} \|h_0(A'_p) J_1(A_p) J_0(A_1) K_r(t)^{-1} \varphi_t\|^2 + O(t^{-1-\varepsilon}) \|\varphi\|^2,$$

donc (4.6) découle de (3.16) et il reste à vérifier les conditions (3.16''). Cependant pour  $m=2$  on vérifie (3.16'') de façon analogue comme dans

la preuve du lemme 4.2 et pour achever la preuve il reste à montrer que

$$M_1(t) \geq -C t^{-1-\epsilon}. \tag{4.7}$$

En faisant la décomposition analogue à (4.5) on écrit

$$M_1(t) = M_{1,1}(t) + M_{1,2}(t) + O(t^{-1-\epsilon})$$

où

$$\begin{aligned} M_{1,1}(t) &= \frac{\rho}{t} K_r(t)^{-1} J_0(A_1) F_- (A'_\rho - A_\rho) (J_1 J'_1)(A_\rho) h_1(A'_\rho) J_1(A_\rho) J_0(A_1) K_r(t)^{-1}, \\ M_{1,2}(t) &= -\frac{\rho}{t} K_r(t)^{-1} J_0(A_1) F_+ (A'_\rho - A_\rho) (J_1 J'_1)(A_\rho) h_1(A'_\rho) J_1(A_\rho) J_0(A_1) K_r(t)^{-1}. \end{aligned}$$

Alors (2.11) assure  $\|M_{1,2}(t)\| \leq C_n t^{-n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et (4.7) découle de (2.7), (2.14) et (2.7'), puisque  $h_1, J_0, J'_1 \geq 0$ .

Q.E.D.

LEMME 4.4. — Si  $h \in C_R^\infty(c_0/2; c_0)$ , alors

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} \|\tilde{F}_-^{1/2}(\tilde{A}'_\rho - \tilde{A}_\rho) J(A_\rho) h(A'_\rho) K_r(t)^{-1} \varphi_t\|^2 \leq C \|\varphi\|^2. \tag{4.8}$$

*Preuve.* — Grâce à (2.12'''), au lieu de  $h$  il suffit de considérer  $h_1 \in C_0^\infty(c_0/2; c_4)$  telle que  $h_1 = 1$  dans un voisinage de  $[c_0; c_3]$ . En posant

$$\begin{aligned} M(t) &= -K_r(t)^{-1} J_0(A_1) h_1(A'_\rho) J_1(A_\rho) \\ &\quad \times \tilde{F}_- (\tilde{A}'_\rho - \tilde{A}_\rho) J_1(A_\rho) h_1(A'_\rho) J_0(A_1) K_r(t)^{-1}, \end{aligned}$$

on voit que la différentiation selon (3.16') donne les termes

$$\begin{aligned} M_0(t) &= -K_r(t)^{-1} J_0(A_1) h_1(A'_\rho) J_1(A_\rho) \\ &\quad \times (\mathbb{D}_{H(t)} \tilde{F}_- (\tilde{A}'_\rho - \tilde{A}_\rho)) J_1(A_\rho) h_1(A'_\rho) J_0(A_1) K_r(t)^{-1}, \\ M_1(t) &= -2 K_r(t)^{-1} J_0(A_1) h_1(A'_\rho) (\mathbb{D}_{-\Delta/2} J_1(A_\rho)) \\ &\quad \times \tilde{F}_- (\tilde{A}'_\rho - \tilde{A}_\rho) J_1(A_\rho) h_1(A'_\rho) J_0(A_1) K_r(t)^{-1} + hc, \\ M_2(t) &= -2 K_r(t)^{-1} J_0(A_1) (\mathbb{D}_{H(t)} h_1(A'_\rho)) \\ &\quad \times J_1(A_\rho) \tilde{F}_- (\tilde{A}'_\rho - \tilde{A}_\rho) J_1(A_\rho) h_1(A'_\rho) J_0(A_1) K_r(t)^{-1} + hc \\ M_3(t) &= -2 (\mathbb{D}_{H(t)} (K_r(t)^{-1} J_0(A_1))) h_1(A'_\rho) J_1(A_\rho) \\ &\quad \times \tilde{F}_- (\tilde{A}'_\rho - \tilde{A}_\rho) J_1(A_\rho) h_1(A'_\rho) J_0(A_1) K_r(t)^{-1} + hc. \end{aligned}$$

La condition (3.16'') se vérifie pour  $m=3$  de façon analogue comme dans les preuves des lemmes 4.2 et 4.3. Ensuite on remarque que  $h'_1 = h_2 + h_3$  avec  $h_2 \in C_0^\infty(0; c_0)$  et  $h_3 \in C_0^\infty(c_3; c_4)$ . Grâce à (2.12'''), le terme avec  $h_3$  donne une contribution  $O(t^{-1-\epsilon})$ , donc en introduisant  $\tilde{h}_2 \in C_0^\infty(0; c_0)$  telle

que  $\tilde{h}_2 = 1$  dans un voisinage de  $h_2$ , on obtient

$$|M_2(t)| \leq \frac{C}{t} K_r(t)^{-1} J_0(A_1) J_1(A_p) \tilde{h}_2^2(A'_p) J_1(A_p) J_0(A_1) K_r(t)^{-1} + C t^{-1-\varepsilon},$$

et la condition (3.16'') pour  $m=2$  résulte du lemme 4.3. Ainsi pour en déduire l'estimation (3.16), il reste à vérifier que

$$M_1(t) \geq -C t^{-1-\varepsilon}. \tag{4.9}$$

Pour cela il suffit de remarquer que

$$A'_p h_1(A'_p) = \tilde{A}'_p h_1(A'_p) \quad \text{et} \quad A_p J_1(A_p) \geq \tilde{A}_p J_1(A_p),$$

donc

$$\begin{aligned} -\tilde{F}_-(\tilde{A}'_p - \tilde{A}_p)(A'_p - A_p) J_1(A_p) h_1(A'_p) + hc \\ \geq -\tilde{F}_-(\tilde{A}'_p - \tilde{A}_p)(\tilde{A}'_p - \tilde{A}_p) J_1(A_p) h_1(A'_p) + hc + O(t^{-\varepsilon}), \end{aligned}$$

et (4.9) résulte du fait que  $-\tilde{F}_-(\tilde{A}'_p - \tilde{A}_p)(\tilde{A}'_p - \tilde{A}_p) \geq -C t^{-\varepsilon}$ .

Pour achever la preuve de (4.8), il reste à montrer que

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \|\tilde{F}_-^{1/2}(\tilde{A}'_p - \tilde{A}_p) J(A_p) h_1(A'_p) K_r(t)^{-1} \varphi_t\|^2 \\ \leq C(M_0(t) \varphi_t, \varphi_t) + C t^{-1-\varepsilon} \|\varphi\|^2. \end{aligned} \tag{4.10}$$

En profitant de (2.20) et (2.23), on peut écrire

$$M_0(t) = M_{0,1}(t) + M_{0,2}(t) + O(t^{-1-\varepsilon})$$

avec

$$\begin{aligned} M_{0,1}(t) &= -\frac{\rho}{t} K_r(t)^{-1} J_0(A_1) h_1(A'_p) J_1(A_p) \\ &\quad \times \partial_\lambda \tilde{F}_-(\tilde{A}'_p - \tilde{A}_p)(A_p - A'_p) \tilde{J}' J_1(A_p) h_1(A'_p) J_0(A_1) K_r(t)^{-1} + hc, \\ M_{0,2}(t) &= -\frac{1-\rho}{t} K_r(t)^{-1} J_0(A_1) h_1(A'_p) J_1(A_p) \\ &\quad \times \partial_\lambda \tilde{F}_-(\tilde{A}'_p - \tilde{A}_p) A'_p \tilde{h}' h_1(A'_p) J_1(A_p) J_0(A_1) K_r(t)^{-1} + hc. \end{aligned}$$

On a  $M_{0,2}(t) \geq -C t^{-1-\varepsilon}$  grâce à (2.7'') et  $A'_p \tilde{h}' h_1(A'_p) \geq 0$ . Pour achever la preuve de (4.10) il suffit de remarquer que  $A'_p h_1(A'_p) = \tilde{A}'_p h_1(A'_p)$ ,  $A_p J_1(A_p) \geq \tilde{A}_p J_1(A_p)$  avec l'inégalité  $J^2 \leq \tilde{J}' J_1^2$  permettent de profiter de (2.14''') comme dans la fin de la preuve du lemme 3.8.

Q.E.D.

*Fin de la preuve de la proposition 4.1.* — On remarque que (4.8) et (2.16) assurent

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} \|\tilde{F}_-^{1/2}(A'_p - A_p) J(A_p) h(A'_p) K_r(t)^{-1} \varphi_t\|^2 \leq C \|\varphi\|^2$$

pour  $h \in C_R^\infty(c_0/2; c_0)$ , donc en profitant de (4.3) on obtient

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} \|\tilde{F}_-^{1/2}(A'_p - A_p) J(A_p) K_r(t)^{-1} \varphi_t\|^2 \leq C \|\varphi\|^2.$$

Comme dans la fin de la preuve de la proposition 3.4, on achève la preuve grâce au lemme 3.5, car

$$|A'_p - A_p| = A'_p - A_p + 2F_-(A'_p - A_p).$$

Q.E.D.

## 5. APPROXIMATION DE HAMILTON-JACOBI

Dans ce paragraphe  $W$  est une fonction de  $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$  satisfaisant

$$|\partial_{\tau, x}^\alpha W(\tau, x)| \leq c_{|\alpha|} \tau^{-\rho'(|\alpha| + \mu)} \quad (5.1)$$

pour  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^{d+1}$ ,  $c_2$  est tel que  $c_2 < \rho'(1 + \mu/2) - 1$ . De plus on suppose que  $\rho'$  est tel que  $\rho'(1 + \mu/3) \leq 1$  et  $W(\tau, x) = 0$  pour  $|x| \geq C_0 \tau$ , où  $C_0$  est une certaine constante.

Introduisons l'hamiltonien

$$\tilde{H}(\tau, q, p) = \frac{1}{2} |p|^2 + W(\tau, q) \quad (5.2)$$

et désignons par  $\tilde{U}(t)$  l'évolution associée à  $\tilde{H}(t, x, D)$ . Le but de ce paragraphe est d'établir la proposition suivante :

**PROPOSITION 5.1.** — *Il existe une fonction  $S: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  telle que les limites*

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{U}(t)^* e^{-iS(t, D)} \quad (5.3)$$

et

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{iS(t, D)} \tilde{U}(t) \quad (5.3')$$

existent.

La construction de la fonction  $S$  se fait à l'aide d'un raisonnement analogue à celui de Kitada-Yajima [8] ou Sigal [9].

**LEMME 5.2.** — *Pour tout  $(t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  le problème*

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 q}{d\tau^2}(\tau, t, \xi) + \partial_x W(\tau, q(\tau, t, \xi)) &= 0, \\ q(\tau, t, \xi)|_{\tau=0} &= 0, \quad \frac{dq}{d\tau}(\tau, t, \xi)|_{\tau=t} = \xi \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

à une solution unique satisfaisant pour  $0 \leq \tau \leq t$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^d$ ,

$$|\partial_\xi^\alpha (q(\tau, t, \xi) - \tau \xi)| \leq C_\alpha (1+t)^{2-\rho'(1+\mu)+|\alpha|(1-\rho')} \quad (5.5)$$

et de plus il existe une constante  $C_1$  telle que  $q(\tau, t, \xi) = \tau \xi$  pour  $|\xi| \geq C_1$ .

*Preuve.* — Soit  $P(t, \xi)$  l'application  $X_t \rightarrow X_t$ ,

$$P(t, \xi)(f)(\tau) = \int_0^\tau ds \partial_x W(s, f(s) + s\xi) + \tau \int_\tau^t ds \partial_x W(s, f(s) + s\xi), \quad (5.6)$$

$$X_t = \left\{ f \in C([0; t]; \mathbb{R}^d), \|f\|_{X_t} = \sup_{0 < \tau < t} \frac{|f(\tau)|}{\tau} < \infty \right\} \quad (5.7)$$

Alors

$$\begin{aligned} & (\nabla_f^n (\partial_\xi^\alpha P)(f) f_1 \dots f_n)(\tau) \\ &= \left( \int_0^\tau ds s + \tau \int_\tau^t ds \right) s^{|\alpha|} \nabla_x^n \partial_x^\alpha W(s, f(s) + s\xi) f_1(s) \dots f_n(s), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \frac{|\nabla_f^n (\partial_\xi^\alpha P)(f) f_1 \dots f_n(\tau)|}{\tau} \\ & \leq c_{n+|\alpha|+1} \int_0^t ds (1+s)^{-\rho'(n+|\alpha|+1+\mu)} s^{|\alpha|+n} \frac{|f_1(s)|}{s} \dots \frac{|f_n(s)|}{s} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\|(\partial_{\xi_j} P)(f)\|_{X_t} \leq \frac{c_2}{\rho'(2+\mu)-2}, \quad (5.8)$$

$$\|\nabla_f P(f) f_1\|_{X_t} \leq \frac{c_2}{\rho'(2+\mu)-2} \|f_1\|_{X_t} \leq \frac{1}{2} \|f_1\|_{X_t} \quad (5.8')$$

et

$$\begin{aligned} & \|\nabla_f^n (\partial_\xi^\alpha P)(f) f_1 \dots f_n\|_{X_t} \\ & \leq \frac{c_{n+|\alpha|+1} (1+t)^{1-\rho'(1+\mu)+(|\alpha|+n)(1-\rho')}}{1-\rho'(1+\mu)+(|\alpha|+n)(1-\rho')} \|f_1\|_{X_t} \dots \|f_n\|_{X_t} \quad (5.8'') \end{aligned}$$

pour  $|\alpha|+n \geq 2$ , car dans ce cas là,  $\rho'(1+\mu/3) \leq 1$  implique  $1-\rho'(1+\mu)+(|\alpha|+n)(1-\rho') > 0$ . L'inégalité (5.8') assure que  $P$  est une contraction de  $X_t$  et dans la suite de cette preuve,  $f$  désigne le point fixe de  $P$ . Alors on vérifie facilement que  $q(\tau) = f(\tau) + \tau\xi$  est la solution de (5.4) et, pour  $|\xi| \geq C_1 t$ , la solution  $q(\tau) = \tau\xi$  évite le support de  $W(\tau, q(\tau))$ . La différentiation de l'égalité  $P(f) = f$  par rapport à  $\xi$  donne  $\partial_\xi^\alpha f = \nabla_f P(f) \partial_\xi^\alpha f + g_\alpha$ , c'est-à-dire

$$\partial_\xi^\alpha f = (1 - \nabla_f P(f))^{-1} g_\alpha \quad (5.9)$$

où  $g_\alpha$  est une combinaison linéaire de termes de la forme  $\nabla_f^k (\partial_\xi^{\alpha_0} P)(f) \partial_\xi^{\alpha_1} f \dots \partial_\xi^{\alpha_k} f$  avec  $\alpha_0 + \dots + \alpha_k = \alpha$ ,  $|\alpha_m| \geq 1$  pour  $m=1, \dots, k$  et  $|\alpha_0| \geq 1$  si  $k=0$ . En particulier pour  $|\alpha|=1$ , on a  $g_\alpha = (\partial_\xi^\alpha P)(f)$ , donc  $\|\partial_\xi^\alpha f\|_{X_t} \leq 2 \|g_\alpha\|_{X_t} = 2 \|(\partial_\xi^\alpha P)(f)\|_{X_t} \leq C'$  grâce à (5.9) et (5.8). Ceci signifie

$$|\partial_{\xi_j} f(\tau)| \leq C' \tau. \quad (5.10)$$

En majorant directement (5.6) on obtient

$$|f(\tau)| = |P(f)(\tau)| \leq C \tau^{2-\rho'(1+\mu)},$$

c'est-à-dire (5.5) avec  $\alpha=0$ . La différentiation de (5.6) par rapport à  $\tau$  donne l'égalité

$$\frac{df(\tau)}{d\tau} = \int_{\tau}^t ds \partial_x W(s, f(s) + s\xi). \tag{5.11}$$

En utilisant l'inégalité  $|\partial_{\xi_j} q(s)| \leq C''s$ , qui découle de (5.10), on peut estimer la dérivée de (5.11) par rapport à  $\xi_j$  de la façon suivante

$$\begin{aligned} \left| \partial_{\xi_j} \frac{df(\tau)}{d\tau} \right| &\leq \int_{\tau}^t ds \sum_{k=1}^d |\partial_{x_j} \partial_{x_k} W(s, q(s)) \partial_{\xi_j} q_k(s)| \\ &\leq C \int_{\tau}^t ds (1+s)^{1-\rho'(2+\mu)} \leq C' \tau^{2-\rho'(2+\mu)}, \end{aligned}$$

d'où

$$|\partial_{\xi_j} f(\tau)| \leq \int_0^{\tau} ds \left| \frac{d}{ds} \partial_{\xi_j} f(s) \right| \leq C(1+\tau)^{3-\rho'(2+\mu)} = C(1+\tau)^{2-\rho'(1+\mu)+(1-\rho')},$$

qui est (5.5) avec  $|\alpha|=1$ . Afin de démontrer (5.5) pour tout  $\alpha$ , il suffit d'utiliser (5.9) et de vérifier que

$$\|g_{\alpha}\|_{X_t} \leq C_{|\alpha|} (1+t)^{1-\rho'(1+\mu)+|\alpha|(1-\rho')}. \tag{5.12}$$

En connaissant la forme de  $g_{\alpha}$ , on voit qu'il suffit d'utiliser la récurrence par rapport à  $|\alpha|$  et (5.8'') pour obtenir les majorations

$$\begin{aligned} \|\nabla_f^k (\partial_{\xi^0}^{\alpha_0} P)(f) \partial_{\xi^1}^{\alpha_1} f \dots \partial_{\xi^k}^{\alpha_k} f\|_{X_t} \\ \leq C_{\alpha, k} (1+t)^{1-\rho'(1+\mu)+(|\alpha_0|+k)(1-\rho')+ \sum_{m=1}^k (1-\rho'(1+\mu)+|\alpha_m|(1-\rho'))} \\ = C_{\alpha, k} (1+t)^{1-\rho'(1+\mu)+|\alpha|(1-\rho')+k(1-\rho'+1-\rho'(1+\mu))} \\ \leq C_{\alpha, k} (1+t)^{1-\rho'(1+\mu)+|\alpha|(1-\rho')} \end{aligned}$$

pour  $\alpha_0 + \dots + \alpha_k = \alpha$  [la dernière inégalité résulte de

$$1-\rho'+1-\rho'(1+\mu) = 2(1-\rho'(1+\mu/2)) < 0].$$

Q.E.D.

**COROLLAIRE 5.3.** — *En posant*

$$\begin{aligned} S(t, \xi) \\ = \sum_{j=1}^d \xi_j q_j(t, t, \xi) - \int_0^t ds \left( \frac{1}{2} \left| \frac{dq}{d\tau}(s, t, \xi) \right|^2 - W(s, q(s, t, \xi)) \right), \end{aligned} \tag{5.14}$$

on obtient  $q(t, t, \xi) = \partial_{\xi} S(t, \xi)$  et

$$\partial_t S(t, \xi) = \frac{1}{2} |\xi|^2 + W(t, q(t, t, \xi)) = \frac{1}{2} |\xi|^2 + W(t, \partial_{\xi} S(t, \xi)). \tag{5.15}$$

De plus pour  $|\alpha| \geq 1$  on a

$$\left| \partial_{\xi}^{\alpha} \left( S(t, \xi) - \frac{t}{2} |\xi|^2 \right) \right| \leq C_{\alpha} (1+t)^{2-\rho'(1+\mu)+(|\alpha|-1)(1-\rho')} \quad (5.16)$$

et  $S(t, \xi) = \frac{t}{2} |\xi|^2$  pour  $|\xi| \geq C_1$ .

LEMME 5.4. — Il existe une constante  $C$  telle que

$$\begin{aligned} & \| (W(t, x) - W(t, \partial_{\xi} S(t, D))) \varphi \| \\ & \leq C t^{-\rho'(1+\mu)} \sum_{j=1}^d \| (x_j - \partial_{\xi_j} S(t, D)) \varphi \| + C t^{1-\rho'(2+\mu)} \| \varphi \|, \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} & \| (\partial_{x_k} W(t, x) - \partial_{x_k} W(t, \partial_{\xi} S(t, D))) \varphi \| \\ & \leq C t^{-\rho'(2+\mu)} \sum_{j=1}^d \| (x_j - \partial_{\xi_j} S(t, D)) \varphi \| + C t^{1-\rho'(3+\mu)} \| \varphi \|. \end{aligned} \quad (5.17')$$

Preuve. — On va considérer seulement (5.17); la preuve de (5.17') est analogue. On a

$$\begin{aligned} W(t, x) - W(t, \partial_{\xi} S(t, D)) \\ = \sum_{j=1}^d (b_j(t, x, D) (x_j - \partial_{\xi_j} S(t, D)) + [x_j, b_j(t, x, D)]), \end{aligned}$$

où

$$b_j(t, x, \xi) = \int_0^1 ds \partial_{x_j} W(t, (1-s)x + s \partial_{\xi} S(t, \xi)).$$

En utilisant (5.16), on vérifie que pour tous  $\alpha, \alpha' \in \mathbb{N}^d, j=1, \dots, d$ , on a

$$|\partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\alpha'} b_j(t, x, \xi)| \leq C_{\alpha, \alpha'} (1+\tau)^{-\rho'(1+\mu)+|\alpha|(1-\rho')-|\alpha'|\rho'}.$$

Si  $\tilde{b}_j(t, x, \xi) = \bar{b}_j(t, -\xi, x)$  et  $\mathcal{F}$  est la transformation de Fourier de  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , alors l'opérateur pseudo-différentiel

$$(1+t)^{\rho'(1+\mu)} \mathcal{F}^{-1} b_j(t, x, D) \mathcal{F} = (1+t)^{\rho'(1+\mu)} \tilde{b}_j(t, x, D)$$

a un symbole borné par rapport à la métrique

$$(1+t)^{2(1-\rho')} |dx|^2 + (1+t)^{-2\rho'} |d\xi|^2$$

et le théorème 18.6.3 de Hörmander [7] assure

$$\| b_j(t, x, D) \| \leq C t^{-\rho'(1+\mu)}.$$

Pour terminer la preuve, il suffit de remarquer qu'un argument semblable assure

$$\| [x_j, b_j(t, x, D)] \| = \| (\partial_{\xi_j} b_j)(t, x, D) \| \leq C t^{-\rho'(1+\mu)+(1-\rho')}.$$

Q.E.D.



LEMME 5.5. — Si  $(1 + |x|)\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , alors il existe une constante  $C_\varphi$  (dépendant de  $\varphi$ ), telle que

$$\|(x_j - \partial_{\xi_j} S(t, D)) \tilde{U}(t)\varphi\| \leq C_\varphi (1+t)^{3-\rho'(3+\mu)}. \tag{5.18}$$

Preuve. — On pose

$$\omega(t, \varphi) = \sum_{j=1}^d \|(x_j - \partial_{\xi_j} S(t, D)) \tilde{U}(t)\varphi\|$$

et on va vérifier que

$$\frac{d\omega}{dt}(t, \varphi) \leq C_\varphi ((1+t)^{-1-\varepsilon} \omega(t, \varphi) + t^{2-\rho'(3+\mu)}). \tag{5.19}$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt}(t, \varphi) &\leq \sum_{j=1}^d \left\| \frac{d}{dt} \tilde{U}(t)^* (x_j - \partial_{\xi_j} S(t, D)) \tilde{U}(t)\varphi \right\| \\ &= \sum_{j=1}^d \|(D_{x_j} - i[W(t, x), \partial_{\xi_j} S(t, D)] - \partial_t \partial_{\xi_j} S(t, D)) \tilde{U}(t)\varphi\| \end{aligned}$$

et en remarquant que

$$D_{x_j} - \partial_t \partial_{\xi_j} S(t, D) = \sum_{m=1}^d \partial_{\xi_m} \partial_{\xi_m} S(t, D) \partial_{x_m} W(t, \partial_\xi S(t, D))$$

[par différentiation de l'équation (5.15)], on peut écrire

$$\frac{d\omega}{dt}(t, \varphi) \leq \sum_{j=1}^d (\|M_{j,1}(t)\tilde{U}(t)\varphi\| + \|M_{j,2}(t)\tilde{U}(t)\varphi\|)$$

avec

$$M_{j,1}(t) = 2 \sum_{m=1}^d \partial_{\xi_m} \partial_{\xi_j} S(t, D) (\partial_{x_m} W(t, x) - \partial_{x_m} W(t, \partial_\xi S(t, D))),$$

$$M_{j,2}(t) = \sum_{m=1}^d \partial_{\xi_j} \partial_{\xi_m} S(t, D) \partial_{x_m} W(t, x) - i[W(t, x), \partial_{\xi_j} S(t, D)].$$

Puisque (5.16) assure  $\|\partial_{\xi_j} \partial_{\xi_m} S(t, D)\| \leq Ct$ , alors en utilisant (5.17'), on peut écrire

$$\|M_{j,1}(t)\tilde{U}(t)\varphi\| \leq Ct^{1-\rho'(2+\mu)} \omega(t, \varphi) + Ct^{2-\rho'(3+\mu)} \|\varphi\|.$$

Pour terminer la preuve, il suffit de remarquer que

$$M_{j,2}(t) = i \sum_{2 \leq |\alpha| \leq n} \partial_\xi^\alpha \partial_{\xi_j} S(t, D) \partial_x^\alpha W(t, x) / \alpha! + B_n(t).$$

En utilisant (5.16), on estime chaque terme de la somme, tandis que  $B_n(t)$  est un opérateur intégral dont le noyau satisfait les hypothèses du lemme de Schur si seulement  $n$  a été choisi suffisamment grand comme dans la preuve du lemme 2.3 (intégration par parties d'une fonction à support

compact par rapport à  $\xi$ ). On obtient finalement comme résultat  $\|M_{j,2}(t)\| \leq C t^{2-\rho'(3+\mu)}$ .

Q.E.D.

*Preuve de la proposition 5.1.* — Si  $(1 + |x|)\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , alors (5.17) et (5.18) assurent

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt} e^{iS(t, D)} \tilde{U}(t) \varphi \right\| &= \left\| e^{iS(t, D)} \left( \partial_t S(t, D) - \frac{\Delta}{2} + W(t, x) \right) \tilde{U}(t) \varphi \right\| \\ &= \left\| (W(t, x) - W(t, \partial_{\xi_j} S(t, D))) \tilde{U}(t) \varphi \right\| \\ &\leq C \sum_{j=1}^d t^{-\rho'(1+\mu)} \left\| (x_j - \partial_{\xi_j} S(t, D)) \tilde{U}(t) \varphi \right\| \\ &\quad + C t^{1-\rho'(2+\mu)} \|\varphi\| \leq C_{\varphi} (t^{-\rho'(1+\mu)+3-\rho'(3+\mu)} + t^{1-\rho'(2+\mu)}), \end{aligned}$$

d'où l'existence de (5.3'), puisque

$$-\rho'(1+\mu) + 3 - \rho'(3+\mu) = -1 - 4(\rho'(1+\mu/2) - 1) < -1$$

et

$$1 - \rho'(2+\mu) < -1.$$

L'existence de (5.3) se démontre de façon analogie, car

$$\|(x_j - \partial_{\xi_j} S(t, D)) e^{-iS(t, D)} \varphi\| = \|e^{-iS(t, D)} x_j \varphi\| = \|x_j \varphi\|. \quad (5.20)$$

Q.E.D.

A la fin de ce paragraphe, on va montrer le résultat suivant :

LEMME 5.6. — Si  $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  et si  $\Theta \subset \mathbb{R}^d$  est tel que  $\bar{\Theta} \cap \text{supp } J = \emptyset$ , alors

$$s\text{-lim}_{t \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{\Theta}(D) J\left(\frac{x}{t}\right) \tilde{U}(t) = s\text{-lim}_{t \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{\Theta}(D) J\left(\frac{x}{t}\right) e^{-iS(t, D)} = 0. \quad (5.21)$$

*Preuve.* — Comme dans la preuve du lemme 5.4, on peut écrire

$$J\left(\frac{x}{t}\right) - J(D) = \sum_{j=1}^d B_j(t) \left( D_{x_j} - \frac{x_j}{t} \right) + O(t^{-1}) \quad (5.22)$$

avec  $\|B_j(t)\| \leq C$  pour  $j=1, \dots, d$ . Puisque  $\mathbf{1}_{\Theta}(D) J(D) = 0$ , alors pour prouver (5.21), il suffit de remarquer que  $\|D_{x_j} - \partial_{\xi_j} S(t, D)/t\| \leq C t^{-\varepsilon}$  avec un  $\varepsilon > 0$  implique grâce à (5.18) :

$$\left\| \left( D_{x_j} - \frac{x_j}{t} \right) \tilde{U}(t) \varphi \right\| = \frac{1}{t} \left\| (\partial_{\xi_j} S(t, D) - x_j) \tilde{U}(t) \varphi \right\| + O(t^{-\varepsilon}) \rightarrow 0$$

quand  $t \rightarrow \infty$ ,  $(1 + |x|)\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . Le même raisonnement est valable pour  $e^{-iS(t, D)}$  au lieu de  $\tilde{U}(t)$ , si on utilise (5.20).

Q.E.D.

## 6. EXISTENCE DE CERTAINES LIMITES

Le premier point important dans ce paragraphe, est l'estimation d'énergie énoncée dans la proposition 6.1, dont la preuve suit l'idée de Graf [4] et Wüller [11]. On peut en déduire la possibilité d'une troncature d'énergie à l'aide de  $K_r(t)^{-1}$  (cf. le corollaire 6.2), ce qui permet d'appliquer le résultat du paragraphe 4 pour l'existence des opérateurs d'ondes.

PROPOSITION 6.1. — Il existe  $C > 0$  telle que  $\|D_{x_j} \varphi_t\| \leq C \|(1 - \Delta)^{1/2} \varphi\|$  pour tout  $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d)$ .

Preuve. — Si  $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d)$ , alors on a

$$\|D_{x_j} \varphi_t\| \leq C_r(K_r(t) \varphi_t, \varphi_t). \quad (6.1)$$

D'un autre côté, (3.5) et (3.5') assurent

$$\frac{d}{dt}(K_r(t) \varphi_t, \varphi_t) \leq C'_r(1+t)^{-1-\varepsilon}(1 + (K_r(t) \varphi_t, \varphi_t)). \quad (6.2)$$

Ainsi le résultat désiré découle de (6.1) et du lemme de Gronwall pour (6.2), qui donne

$$(K_r(t) \varphi_t, \varphi_t) \leq C''_r \|(1 - \Delta)^{1/2} \varphi\|.$$

Q.E.D.

COROLLAIRE 6.2. — Pour tout  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , on a

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sup_{t \geq 1} \|(1 - K_r(t)^{-2}) \varphi_t\| = 0.$$

Preuve. — Par définition de  $K_r(t)$ , on a

$$1 - K_r(t)^{-1} = r(1 + rK(t))^{-1}K(t),$$

donc

$$-rC(1 - \Delta) \leq 1 - K_r(t)^{-1} \leq rC(1 - \Delta).$$

Ainsi la proposition 6.1 montre que pour tout  $\psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$ , on a

$$\| |1 - K_r(t)^{-1}|^{1/2} \psi_t \| \leq rC \|(1 - \Delta)^{1/2} \psi_t\| \leq rC' \|(1 - \Delta)^{1/2} \psi\| \rightarrow 0$$

quand  $r \rightarrow 0$ . Si  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$  et  $\varepsilon > 0$  est quelconque, alors il existe une fonction  $\psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$  telle que  $\|\varphi_t - \psi_t\| = \|\varphi - \psi\| < \varepsilon$  et on a

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sup_{t \geq 1} \| |1 - K_r(t)^{-1}|^{1/2} \varphi_t \| = 0.$$

Pour terminer la preuve, on remarque que

$$0 \leq \lambda \leq 2 \Rightarrow (1 - \lambda^2)^2 \leq 9|1 - \lambda|,$$

ce qui donne

$$(1 - K_r(t)^{-2})^2 \leq 9|1 - K_r(t)^{-1}|$$

pour  $r < r_0$ , c'est-à-dire

$$\| (1 - K_r(t))^{-2} \varphi_t \| \leq 9 \| |1 - K_r(t)^{-1}|^{1/2} \varphi_t \|.$$

Q.E.D.

Dans les lemmes 6.3 et 6.4, on montre l'existence des limites contenant une troncature en  $x$  sous la forme d'opérateurs  $J(A_{p,k})$  ou  $J_0\left(\frac{x}{t}\right)$ . Les images des opérateurs  $\Gamma_k(J)$  et  $\Gamma_0(J, J_0)$  du lemme 6.3, donneront une description utile des images d'opérateurs d'ondes (cf. la proposition 7.2).

LEMME 6.3. — Si  $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ , alors pour  $k = 1, \dots, N$ , il existe

$$\Gamma_k(J) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) * J(A_{p,k}) U(t). \tag{6.3}$$

Si de plus  $J_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ , alors il existe aussi

$$\Gamma_0(J, J_0) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) * J_0\left(\frac{x}{t}\right) \left(1 - \sum_{k=1}^N J(A_{p,k})\right) U(t). \tag{6.4}$$

*Preuve.* — On considère d'abord la limite (6.3). Grâce au corollaire 6.2, il suffit de montrer que pour  $k = 1, \dots, N$  et pour tout  $0 < r < r_0$ , il existe la limite

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) * J(A_{p,k}) K_r(t)^{-2} U(t).$$

Cependant on a  $\| [J(A_{p,k}), K_r(t)^{-1}] \| \leq C t^{-\rho}$ , donc il suffit de démontrer l'existence de la limite

$$\Gamma_{k,r}(J) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) * K_r(t)^{-1} J(A_{p,k}) K_r(t)^{-1} U(t). \tag{6.5}$$

Pour ceci on vérifie la condition de Cauchy sous la forme

$$\begin{aligned} & \| (K_r(t'')^{-1} J(A_{p,k}(t'')) K_r(t'')^{-1} \varphi_{t''}, \psi_{t''}) \\ & \quad - (K_r(t')^{-1} J(A_{p,k}(t')) K_r(t')^{-1} \varphi_{t'}, \psi_{t'}) \| \leq c_\varphi(t', t'') \| \psi \| \end{aligned}$$

avec  $c_\varphi(t', t'') \rightarrow 0$  quand  $t', t'' \rightarrow \infty$  où on peut supposer que  $J = \bigotimes_{j=1}^d J_j$ ,

$J_j \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  et  $J_j = \text{Cte}$  dans un voisinage de 0, car l'ensemble des fonctions de ce type est linéairement dense dans  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ . On a

$$\frac{d}{dt} (K_r(t)^{-1} \bigotimes_{j=1}^d J_j(A_{p,k,j}) K_r(t)^{-1} \varphi_t, \psi_t) = ((M_1(t) + M_2(t) \varphi_t, \psi_t)$$

avec

$$\begin{aligned} M_1(t) &= K_r(t)^{-1} \left( \mathbb{D}_{H(t)} \bigotimes_{j=1}^d J_j(A_{p,k,j}) \right) K_r(t)^{-1}, \\ M_2(t) &= 2 (\mathbb{D}_{H(t)} K_r(t)^{-1}) \bigotimes_{j=1}^d J_j(A_{p,k,j}) K_r(t)^{-1} + hc. \end{aligned}$$

L'hypothèse faite sur  $J_j$  assure  $J'_j \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ , donc on peut trouver  $\tilde{J}_j \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  telle que  $\tilde{J}_j = 1$  sur  $\text{supp } J_j$ . Alors

$$(A'_{p,k,j} - A_{p,k,j}) J'_j(A_{p,k,j}) = \tilde{J}_j(A_{p,k,j}) (A'_{p,k,j} - A_{p,k,j}) J'_j(A_{p,k,j}) + O(t^{1-2\rho})$$

et

$$M_1(t) = \sum_{j=1}^d M_{1,j}(t) + O(t^{-1-\varepsilon})$$

avec

$$M_{1,j}(t) = \frac{1}{t} K_r(t)^{-1} \tilde{J}_j(A_{p,k,j}) |A'_{p,k,j} - A_{p,k,j}|^{1/2} B_{p,k,j}(t) \\ \times \bigotimes_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^d J_m(A_{p,k,m}) |A'_{p,k,j} - A_{p,k,j}|^{1/2} J'_j(A_{p,k,j}) K_r(t)^{-1}$$

et  $\|B_{p,k,j}(t)\| \leq 1$ , d'où

$$\int_{t'}^{t''} dt |(M_{1,j}(t) \varphi_t, \psi_t)| \leq C \left[ \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{t} \| |A'_{p,k,j} - A_{p,k,j}|^{1/2} J'_j(A_{p,k,j}) K_r(t)^{-1} \varphi_t \|^2 \right. \\ \left. \times \int_{t'}^{t''} \frac{dt}{t} \| |A'_{p,k,j} - A_{p,k,j}|^{1/2} \tilde{J}_j(A_{p,k,j}) K_r(t)^{-1} \psi_t \|^2 \right]^{1/2} \leq \tilde{c}_\varphi(t', t'') \|\psi\|$$

avec  $\tilde{c}_\varphi(t', t'') \rightarrow 0$  quand  $t', t'' \rightarrow \infty$  en vertu de la proposition 4.1. Pour montrer que l'on a aussi

$$\int_{t'}^{t''} dt |(M_{2,j}(t) \varphi_t, \psi_t)| \leq \tilde{c}_\varphi(t', t'') \|\psi\|$$

avec  $\tilde{c}_\varphi(t', t'') \rightarrow 0$  quand  $t', t'' \rightarrow \infty$ , rappelons que  $K_r(t) = 1 + rK(t)$  avec  $K(t)$  donné par (3.4), où les  $u_j$  s'expriment à l'aide de (3.3) en fonction des paramètres fixes  $\sigma$  et  $\sigma'$ . Soient  $w_j \in \Xi_j$  tels que  $w_j(t, x_j) \neq 1 \Rightarrow \exists 1 \leq k \leq N$ ,  $|x_j - \chi_{k,j}(t)| \leq \sigma t^{\rho'}/2$ . En utilisant (3.14), on voit que l'on a

$$|x_j - \chi_{k,j}(t)| \leq \sigma t^{\rho'}/2 \Rightarrow \left| \frac{x_j}{t} - \dot{\chi}_{k,j}(t) \right| \leq \frac{\sigma}{2} t^{\rho'-1} + C t^{-\rho_0} \leq \sigma t^{\rho'-1} \\ \Rightarrow u_j(t, x_j) = \dot{\chi}_{k,j}(t) \Rightarrow \partial_{x_j} u_j(t, x_j) = 0$$

pour  $t \geq t_0$  suffisamment grand (cf. la proposition 3.2), donc

$$|(M_2(t) \varphi_t, \psi_t)| \leq \sum_{j=1}^d \frac{C}{t} \left\| w_j(t, x_j) (D_{x_j} - u_j(t, x_j)) J_1 \left( \frac{x_j}{t} \right) K_r(t)^{-1} \varphi_t \right\| \\ \times \left\| w_j(t, x_j) (D_{x_j} - u_j(t, x_j)) J_1 \left( \frac{x_j}{t} \right) K_r(t)^{-1} \psi_t \right\|,$$

où  $J_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  est telle que  $J(A_{p,k}) \prod_{j=1}^d J_1^2\left(\frac{x_j}{t}\right) = J(A_{p,k})$  dans le cas de la limite (6.3) ou telle que  $J_0\left(\frac{x}{t}\right) \prod_{j=1}^d J_1^2\left(\frac{x_j}{t}\right) = J_0\left(\frac{x}{t}\right)$  dans le cas de la limite (6.4). Dans la suite supposons que  $K_r(t)$  a été construit avec le paramètre  $\sigma'$  suffisamment grand pour assurer  $J_1(s) = 0$  si  $|s| \geq \sigma'/2$ . Ainsi  $u_j(t, x_j) J_1\left(\frac{x_j}{t}\right) = \frac{x_j}{t} J_1\left(\frac{x_j}{t}\right)$  et la commutation de  $K_r(t)^{-1}$  avec  $w_j(t, x_j) \left(D_{x_j} - \frac{x_j}{t}\right)$  permet d'estimer

$$\begin{aligned} |(M_2(t) \varphi_t, \psi_t)| &\leq C' t^{-1-\varepsilon} \|\varphi\| \|\psi\| \\ &+ \sum_{j=1}^d \frac{C'}{t} \left\| (1-\Delta)^{-1} \left(D_{x_j} - \frac{x_j}{t}\right) w_j(t, x_j) J_1\left(\frac{x_j}{t}\right) \varphi_t \right\| \\ &\quad \times \left\| (1-\Delta)^{-1} \left(D_{x_j} - \frac{x_j}{t}\right) w_j(t, x_j) J_1\left(\frac{x_j}{t}\right) \psi_t \right\|. \end{aligned}$$

Ainsi (6.6) s'obtient comme auparavant grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et à la proposition 3.1 [on a

$$A'_{1,k,j} - A_{1,k,j} = D_{x_j} - \frac{x_j}{t} + O(t^{-\rho_0}).$$

Q.E.D.

Dans le lemme suivant, on va voir que la condition  $\rho < \mu$  permet de localiser l'évolution autour d'une particule classique, dans la région où les interactions avec les autres particules classiques, peuvent être considérées comme constantes par rapport à la variable  $x$  [ne dépendant que du temps  $t$  et permettant d'obtenir ainsi les modificateurs  $S_k(t)$ ].

LEMME 6.4. — Si  $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,  $\rho < \mu$  et si on pose

$$S_k(t) = \sum_{\substack{1 \leq m \leq N \\ m \neq k}} \int_0^t ds V_m(\chi_k(s) - \chi_m(s)) \tag{6.7}$$

pour  $k = 1, \dots, N$ , alors les limites

$$\Omega_k(J) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)^* J(A_{p,k}) G_k(t) e^{-it H_k - i S_k(t)}, \tag{6.8}$$

$$\Omega_k(J)^* = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{it H_k + i S_k(t)} G_k(t)^* J(A_{p,k}) U(t) \tag{6.8'}$$

existent.

*Preuve.* — On va considérer uniquement la limite (6.8), puisque l'étude de la limite (6.8') se fait de manière analogue. Comme dans la preuve

précédente, il suffit de montrer l'existence des limites

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)^* K_r(t)^{-1} \otimes_{j=1}^d J_j(A_{p,k,j}) G_k(t) (1+r H_k)^{-1} e^{-it H_k - i S_k(t)} \quad (6.9)$$

et comme auparavant on écrit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( K_r(t)^{-1} \otimes_{j=1}^d J_j(A_{p,k,j}) G_k(t) (1+r H_k)^{-1} e^{-it H_k - i S_k(t)} \varphi_t, \psi_t \right) \\ = \sum_{m=1}^4 (M_m(t) G_k(t) (1+r H_k)^{-1} e^{-it H_k - i S_k(t)} \varphi_t, \psi_t) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} M_1(t) &= K_r(t)^{-1} \otimes_{j=1}^d J_j(A_{p,k,j}) (\mathbb{D}_{-\Delta/2} G_k(t)) G_k(t)^{-1}, \\ M_2(t) &= i K_r(t)^{-1} \otimes_{j=1}^d J_j(A_{p,k,j}) (V(t, x) - G_k(t) V_k(x) G_k(t)^{-1} - S'_k(t)), \\ M_3(t) &= K_r(t)^{-1} \mathbb{D}_{-\Delta/2} \otimes_{j=1}^d J_j(A_{p,k,j}), \\ M_4(t) &= (\mathbb{D}_{H(t)} K_r(t)^{-1}) \otimes_{j=1}^d J_j(A_{p,k,j}) \end{aligned}$$

et on utilise les estimations de propagation convenables et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour prouver

$$\int_{t'}^{t''} dt | (M_m(t) \varphi_t, \psi_t) | \leq c_\varphi(t', t'') \|\psi\|$$

avec  $c_\varphi(t', t'') \rightarrow 0$  quand  $t', t'' \rightarrow \infty$ ,  $m=1, \dots, 4$ . Ainsi (1.8) assure

$$\|M_1(t)\| = \left\| \otimes_{j=1}^d J_j(A_{p,k,j}) \sum_{j=1}^d \ddot{\chi}_{k,j}(t) (x_j - \chi_{k,j}(t)) \right\| \leq C t^{-1-\varepsilon}.$$

Ensuite

$$\begin{aligned} V(t, x) - G_k(t) V_k(x) G_k(t)^{-1} - S'_k(t) \\ = \sum_{\substack{1 \leq m \leq N \\ m \neq k}} (V_m(x - \chi_m(t)) - V_m(\chi_k(t) - \chi_m(t))). \end{aligned}$$

Mais pour  $m \neq k$ , on a

$$\left\| \otimes_{j=1}^d J_j(A_{p,k,j}) (\tilde{V}_m(x - \chi_m(t)) - \tilde{V}_m(\chi_k(t) - \chi_m(t)) (1 - \Delta)^{-1}) \right\| \leq C t^{-1-\varepsilon} \quad (6.10)$$

et en écrivant

$$\begin{aligned} \tilde{V}_m(x - \chi_m(t)) - \tilde{V}_m(\chi_k(t) - \chi_m(t)) \\ = \sum_{j=1}^d (x_j - \chi_{k,j}(t)) \int_0^1 ds \partial_{x_j} \tilde{V}(\chi_k(t) - \chi_m(t) + s(x - \chi_k(t))), \end{aligned}$$

on voit que (6.10) reste valable avec  $\tilde{V}_m$  au lieu de  $\tilde{V}_m$  si  $\varepsilon \leq \mu - \rho$ . Le terme avec  $M_4(t)$  s'estime comme dans la preuve précédente et également l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'estimer le terme avec  $M_3(t)$ , puisque les preuves de (3.1) et (4.1) restent valables, si on remplace l'évolution  $U(t)$  par  $e^{-itH_k}$ , c'est-à-dire pour  $h$  telle que  $|h(\lambda)| \leq c(1 + |\lambda|)^{-1}$  on a

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} \left\| \left( D_{x_j} - \frac{x_j}{t} \right) J_0 \left( \frac{x_j}{t} \right) w \left( \frac{x_j}{t^\rho} \right) h(H_k) e^{-itH_k} \phi \right\|^2 \leq C \|\phi\|^2,$$

si  $J_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $1 - w \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $w = 0$  dans un voisinage de 0, et

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} \left\| \left| t^{1-\rho} D_{x_j} - \rho \frac{x_j}{t^\rho} \right|^{1/2} J_j \left( \frac{x_j}{t^\rho} \right) h(H_k) e^{-itH_k} \phi \right\|^2 \leq C \|\phi\|^2.$$

Q.E.D.

Le lemme suivant basé sur l'inégalité de Mourre, permettra de caractériser convenablement l'image des opérateurs d'ondes dans la proposition 7.1. On note  $\sigma_{pp}(H_k)$  la fermeture de l'ensemble des valeurs propres de  $H_k$ .

LEMME 6.5. — Si  $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  et  $h \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus (\sigma_{pp}(H_k) \cup \{0\}))$ , alors pour tout  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$  on peut trouver une suite  $t_n \rightarrow \infty$  telle que  $\left\| J \left( \frac{x}{t_n^\rho} \right) h(H_k) e^{-it_n H_k} \psi \right\| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Preuve. — Comme dans les preuves précédentes on ne considère que  $J = \otimes_{j=1}^d J_j$ ,  $J_j = Cte$  dans un voisinage de 0. Ainsi il suffit de démontrer que si  $\lambda \notin \sigma_{pp}(H_k) \cup \{0\}$  et  $h \in C_0^\infty(\lambda - \delta; \lambda + \delta)$  pour un certain  $\delta > 0$ , alors

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} \left\| \otimes_{j=1}^d J_j \left( \frac{x_j}{t^\rho} \right) h(H_k) e^{-itH_k} \psi \right\|^2 \leq C \|\psi\|^2.$$

Si on pose

$$M(t) = \sum_{m=1}^d \frac{1}{t} h(H_k) \otimes_{j=1}^d J_j \left( \frac{x_j}{t^\rho} \right) x_m D_{x_m} \otimes_{j=1}^d J_j \left( \frac{x_j}{t^\rho} \right) h(H_k) + hc,$$

alors

$$\frac{d}{dt} (M(t) e^{-itH_k} \psi, e^{-itH_k} \psi) = ((M_0(t) + M_1(t)) e^{-itH_k} \psi, e^{-itH_k} \psi)$$



avec

$$M_0(t) = \sum_{m=1}^d \frac{1}{t} h(H_k) \otimes_{j=1}^d J_j \left( \frac{x_j}{t^p} \right) \\ \times \left( i[H_k, x_m D_{x_m}] - \frac{x_m D_{x_m}}{t} \right) \otimes_{j=1}^d J_j \left( \frac{x_j}{t^p} \right) h(H_k) + hc$$

et

$$\int_1^\infty dt |(M_1(t) e^{-it H_k} \psi, e^{-it H_k} \psi)| \leq C \|\psi\|^2.$$

Pour terminer il reste à remarquer que

$$\left\| \otimes_{j=1}^d J_j \left( \frac{x_j}{t^p} \right) h(H_k) e^{-it H_k} \psi \right\|^2 \leq C (M_0(t) e^{-it H_k} \psi, e^{-it H_k} \psi),$$

puisque les hypothèses (H<sub>3</sub>)-(H<sub>6</sub>) assurent l'inégalité de Mourre (cf. [5], [10]), qui assure, pour  $\delta > 0$  suffisamment petit,

$$h^2(H_k) \leq C \sum_{m=1}^d h(H_k) i[H_k, x_m D_{x_m}] h(H_k) + hc.$$

Q.E.D.

## 7. FIN DE LA PREUVE DE LA COMPLÉTUDE ASYMPTOTIQUE

PROPOSITION 7.1. — Pour  $k=1, \dots, N$ , les opérateurs  $\Omega_k$  de (1.6') existent et  $\text{Im } \Omega_k = \mathcal{H}_k$  où

$$\mathcal{H}_k = \overline{\bigcap_{J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)} \text{Im } \Gamma_k(J)}, \quad (7.1)$$

$J=1$  sur un voisinage de 0

les  $\Gamma_k(J)$  étant définis au lemme 6.3.

Preuve. — Pour  $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  et  $J=1$  dans un voisinage de 0, on a

$$\Omega_k = \Omega_k(J) P_k^{pp} + s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)^* (1 - J(A_{p,k})) G_k(t) e^{-it H_k - i S_k(t)} P_k^{pp} \quad (7.2)$$

où les  $\Omega_k(J)$  ont été définis dans le lemme 6.4 et il suffit de démontrer que la deuxième limite est 0. Pour cela il suffit de considérer un vecteur propre  $\varphi$  de  $H_k$  associé à la valeur propre  $\lambda$  et de remarquer que

$$(1 - J(A_{p,k})) G_k(t) e^{-it H_k - i S_k(t)} \varphi = G_k(t) e^{-it \lambda - i S_k(t)} \left( 1 - J \left( \frac{x}{t^p} \right) \right) \varphi$$

et  $\left\| \left( 1 - J \left( \frac{x}{t^p} \right) \right) \varphi \right\| \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ , d'où l'existence de (7.2). Cependant

$$\Omega_k = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)^* J(A_{p,k}) U(t) s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)^* G_k(t) e^{-it H_k - i S_k(t)} P_k^{pp} = \Gamma_k(J) \Omega_k$$

grâce au lemme 6.3. Il est donc évident que  $\text{Im } \Omega_k \subset \mathcal{H}_k$  et afin de montrer l'égalité il suffit de vérifier que pour  $\varphi \in \mathcal{H}_k$  il existe

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_k^{pp} e^{it H_k + i S_k(t)} G_k(t)^* U(t) \varphi = \Omega_0^* \varphi$$

et de plus  $\|\Omega_0^* \varphi\| = \|\varphi\|$ . Pour cela il suffit de savoir que pour tout  $\varphi$  tel que  $\varphi = \Gamma_k(J) \varphi$  avec  $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  et  $J=1$  dans un voisinage de 0, il existe

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{it H_k + i S_k(t)} G_k(t)^* U(t) \varphi = \phi$$

et  $\phi \in \text{Im } P_k^{pp}$ . La limite

$$\phi = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{it H_k + i S_k(t)} G_k(t)^* U(t) \lim_{t \rightarrow \infty} U(t)^* J(A_{p,k}) U(t) \varphi = \Omega_k(J)^* \varphi$$

existe en vertu du lemme 6.4. Il reste à montrer que pour toute fonction  $h \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus (\overline{\sigma_{pp}(H_k)} \cup \{0\}))$  on a  $h(H_k)\phi = 0$ . Pour cela on prend  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$  quelconque et on remarque que

$$\begin{aligned} (h(H_k)\phi, \psi) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (h(H_k) e^{it H_k + i S_k(t)} G_k(t)^* J(A_{p,k}) U(t) \varphi, \psi) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{i S_k(t)} G_k(t)^* U(t) \varphi, J \left( \frac{x_j}{t^p} \right) h(H_k) e^{-it H_k} \psi) = 0 \end{aligned}$$

grâce au lemme 6.5.

Q.E.D.

PROPOSITION 7.2. — L'opérateur  $\Omega_0$  défini par (1.6) existe et  $\text{Im } \Omega_0 = \mathcal{H}_0$  où

$$\mathcal{H}_0 = \overline{\bigcup_{J_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)} \bigcap_{\substack{J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \\ J=1 \text{ au voisinage de } 0}} \text{Im } \Gamma_0(J, J_0)}, \quad (7.3)$$

$\Gamma_0(J, J_0)$  étant défini au lemme 6.3.

Preuve. — Soit  $\tilde{J}_0 \in C_0^\infty(\{|y| < 2\})$  telle que  $\tilde{J}_0(y) = 1$  pour  $|y| < 1$ ,  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $f = 1$  dans un voisinage de 0 et posons

$$\begin{aligned} W_n(t, x) &= \left( 1 - f \left( \frac{t}{T_n} \right) \right) \left( 1 - \sum_{k=1}^N \tilde{J}_0 \left( \frac{x - \chi_k(t)}{t^{p'}} \right) \right) \\ &\quad \times \tilde{J}_0 \left( \frac{x}{\sigma_0 t(n+2)} \right) \sum_{k=1}^N \tilde{V}_k(x - \chi_k(t)) \end{aligned}$$

où  $\sigma_0 > 1 + \max_{k \neq m} |v_k - v_m|$ , les  $v_k$  étant donnés par (3.2), et  $T_n$  est suffisamment grand pour assurer  $|\partial_x^\alpha W_n(t, x)| \leq \frac{1}{2} (1+t)^{-\rho'(\mu+2)}$  pour  $|\alpha| = 2$ , ce qui permet d'effectuer la construction de  $S_{0,n}$  selon le procédé du paragraphe 5 avec  $W_n$  au lieu de  $W$ . Posons

$$S_0(t, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{0,n}(t, \xi) \mathbf{1}_{\Theta_n}(\xi)$$

où  $\mathbf{1}_{\Theta_n}(\xi)$  est la fonction caractéristique de l'ensemble

$$\Theta_n = \{ \xi \in \mathbb{R}^d : \sigma_0(n-1) \leq |\xi| < n\sigma_0 \}.$$

On va montrer d'abord que pour toute  $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  avec  $J=1$  dans un voisinage de 0,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $J_n \in C_0^\infty(\{|x| < (n+1)\sigma_0\})$ , il existe

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{U}_n(t) * J_n\left(\frac{x}{t}\right) \left(1 - \sum_{k=1}^N J(A_{p,k})\right) U(t). \tag{7.4}$$

où l'évolution  $\tilde{U}_n(t)$  est engendrée par  $\tilde{H}_n(t) = -\frac{\Delta}{2} + W_n(t, x)$ . On remarque d'abord que le lemme 6.1 et le corollaire 6.2 restent valable avec l'évolution  $\tilde{U}_n(t)$  au lieu de  $U(t)$  et il suffit de considérer l'existence de

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{U}_n(t) * K_r(t)^{-1} J_n\left(\frac{x}{t}\right) \left(1 - \sum_{k=1}^N J(A_{p,k})\right) K_r(t)^{-1} U(t). \tag{7.4'}$$

Pour  $t \geq T_n$ , on a

$$\left\| J_n\left(\frac{x}{t}\right) \left(1 - \sum_{k=1}^N J(A_{p,k})\right) (V(t, x) - W_n(t, x)) (1 - \Delta)^{-1} \right\| \leq C t^{-\rho' \mu_1}$$

donc il reste à vérifier

$$\int_{t'}^{t''} dt | (M_{n,m}(t) \tilde{U}_n(t) \varphi, \Psi_t | \leq c_{\varphi,n}(t', t'') \| \Psi \|,$$

avec  $c_{\varphi,n}(t', t'') \rightarrow 0$  quand  $t', t'' \rightarrow \infty$  pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $m=1, 2$ , où

$$M_{n,1}(t) = K_r(t)^{-1} \left[ \mathbb{D}_{-\Delta/2} \left( J_n\left(\frac{x}{t}\right) \left(1 - \sum_{k=1}^N J(A_{p,k})\right) \right) \right] K_r(t)^{-1},$$

$$M_{n,2}(t) = 2(\mathbb{D}_{H(t)} K_r(t)^{-1}) J_n\left(\frac{x}{t}\right) \left(1 - \sum_{k=1}^N J(A_{p,k})\right) K_r(t)^{-1} + hc$$

et on peut supposer comme auparavant que  $J = \otimes_{j=1}^d J_j$ ,  $J_0 = \otimes_{j=1}^d J_{0,j}$ ,  $J_{0,j} = Cte$  dans un voisinage de 0. Ainsi on peut terminer la preuve de

l'existence de (7.4') comme dans les preuves précédentes, c'est-à-dire grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et aux estimations de propagation convenables en remarquant qu'il est possible de remplacer  $U(t)$  par  $\tilde{U}_n(t)$  dans les propositions 4.1 et 3.4.

Maintenant on va démontrer que pour toute  $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  avec  $J=1$  dans un voisinage de 0 et  $J_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ , il existe

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{iS_0(t, D)} J_0 \left( \frac{x}{t} \right) \left( 1 - \sum_{k=1}^N J(A_{p, k}) \right) U(t). \tag{7.5}$$

Remarquons d'abord que pour tout  $r > 0$ ,

$$\| \mathbf{1}_{\{|\xi| > R\}}(D) K_r(t)^{-2} \| \leq \| \mathbf{1}_{\{|\xi| > R\}}(D) (1 - \Delta)^{-1} \| \| (1 - \Delta) K_r(t)^{-2} \| \rightarrow 0$$

quand  $R \rightarrow \infty$  et le corollaire 6.2 implique

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 1} \| \mathbf{1}_{\{|\xi| > R\}}(D) \Phi_t \| = 0.$$

Ainsi, pour prouver l'existence de (7.5), il suffit de montrer que pour tout  $R > 0$ , il existe

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{\{|\xi| \leq R\}}(D) e^{iS_0(t, D)} J_0 \left( \frac{x}{t} \right) \left( 1 - \sum_{k=1}^N J(A_{p, k}) \right) U(t),$$

ou que pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $g_n \in C_0^\infty(\{|x| < (n+1)\sigma_0\})$ , il existe

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} g_n \mathbf{1}_{\Theta_n}(D) e^{iS_0, n(t, D)} J_0 \left( \frac{x}{t} \right) \left( 1 - \sum_{k=1}^N J(A_{p, k}) \right) U(t). \tag{7.6}$$

En introduisant  $J_n \in C_0^\infty(\{|x| < (n+1)\sigma_0\})$ ,  $J_n=1$  au voisinage de  $\text{supp } g_n$ , on peut écrire (7.6) comme la somme des deux termes

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{\Theta_n}(D) e^{iS_0, n(t, D)} g_n(D) J_n J_0 \left( \frac{x}{t} \right) \left( 1 - \sum_{k=1}^N J(A_{p, k}) \right) U(t), \tag{7.7}$$

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{\Theta_n}(D) e^{iS_0, n(t, D)} g_n(D) (1 - J_n) J_0 \left( \frac{x}{t} \right) \left( 1 - \sum_{k=1}^N J(A_{p, k}) \right) U(t). \tag{7.8}$$

Soit  $\tilde{J}_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  telle que  $\tilde{J}_0=1$  au voisinage de  $\text{supp } J_0$  et soit  $m \in \mathbb{N}$  suffisamment grand pour assurer  $\text{supp } \tilde{J}_0 \subset \{|x| < m\sigma_0\}$ . Alors la limite (7.8) est égale

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{\Theta_n}(D) e^{iS_0, n(t, D)} g_n(D) (1 - J_n) J_0 \left( \frac{x}{t} \right) \tilde{U}_m(t) \\ \times s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{U}_m(t)^* \tilde{J}_0 \left( \frac{x}{t} \right) \left( 1 - \sum_{k=1}^N J(A_{p, k}) \right) U(t) = 0, \tag{7.9}$$

où on a utilisé l'existence de la deuxième limite dans l'expression (7.9) [étant du type (7.4)] et du lemme 5.6, qui assure que la première limite

dans (7.9) est 0. D'autre part, la limite (7.7) est égale à

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} g_n \mathbf{1}_{\Theta_n}(\mathbb{D}) e^{i S_{0,n}(t, \mathbb{D})} \tilde{U}_n(t) \\ \times s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{U}_n(t) * J_n J_0 \left( \frac{x}{t} \right) \left( 1 - \sum_{k=1}^N J(A_{p,k}) \right) U(t) \quad (7.10)$$

où la deuxième limite dans l'expression (7.10) existe, étant du type (7.4), et la première existe en vertu de la proposition 5.1.

Pour montrer l'existence de  $\Omega_0$ , on considère

$$g_n \in C_0^\infty(\{|x| < (n+1)\sigma_0\} \setminus \{v_1, \dots, v_N\})$$

quelconque et le lemme 5.6 utilisé encore une fois permet d'écrire

$$\Omega_0 g_n(\mathbb{D}) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) * J_n \left( \frac{x}{t} \right) \tilde{U}_n(t) s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{U}_n(t) * e^{-i S_{0,n}(t, \mathbb{D})} g_n(\mathbb{D}), \quad (7.11)$$

où  $J_n \in C_0^\infty(\{|x| < (n+1)\sigma_0\} \setminus \{v_1, \dots, v_N\})$  est telle que  $J_n = 1$  au voisinage de  $\text{supp } g_n$ . Alors la deuxième limite dans l'expression (7.11) existe grâce à la proposition 5.1 et l'existence de la première limite de (7.11) découle du raisonnement similaire à celui qui a permis de prouver l'existence de (7.4). De plus si  $g_n$  et  $J_n$  sont comme précédemment,  $J_0$  est telle que  $J_0 = 1$  pour  $|x| \leq (n+1)\sigma_0$  et  $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  avec  $J = 1$  dans un voisinage de 0, alors

$$J_0 \left( \frac{x}{t} \right) \left( 1 - \sum_{k=1}^N J(A_{p,k}) \right) J_n \left( \frac{x}{t} \right) = J_n \left( \frac{x}{t} \right)$$

pour  $t \geq t_0$  suffisamment grand et le lemme 5.6 assure

$$\Gamma_0(J, J_0) \Omega_0 g_n(\mathbb{D}) \\ = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) * J_0 \left( \frac{x}{t} \right) \left( 1 - \sum_{k=1}^N J(A_{p,k}) \right) e^{-i S_{0,n}(t, \mathbb{D})} g_n(\mathbb{D}) \\ = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) * J_0 \left( \frac{x}{t} \right) \left( 1 - \sum_{k=1}^N J(A_{p,k}) \right) J_n \left( \frac{x}{t} \right) e^{-i S_{0,n}(t, \mathbb{D})} g_n(\mathbb{D}) \\ = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) * J_n \left( \frac{x}{t} \right) e^{-i S_{0,n}(t, \mathbb{D})} g_n(\mathbb{D}) = \Omega_0 g_n(\mathbb{D}),$$

ce qui prouve  $\text{Im } \Omega_0 \subset \mathcal{H}_0$ . Pour montrer  $\text{Im } \Omega_0 = \mathcal{H}_0$ , il suffit de montrer l'existence de  $s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{i S_{0,n}(t, \mathbb{D})} U(t) \varphi = \Omega_0^* \varphi$  pour  $\varphi \in \mathcal{H}_0$ . Mais si

$\varphi = \Gamma_0(J, J_0)\varphi$  avec  $J, J_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  et  $J = 1$  au voisinage de 0, alors

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{iS_0(t, D)} U(t) \varphi \\ = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{iS_0(t, D)} U(t) \lim_{t \rightarrow \infty} U(t)^* J_0\left(\frac{x}{t}\right) \left(1 - \sum_{k=1}^N J(A_{p, k})\right) U(t) \varphi \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{iS_0(t, D)} J_0\left(\frac{x}{t}\right) \left(1 - \sum_{k=1}^N J(A_{p, k})\right) U(t) \varphi \end{aligned}$$

existe, étant de la forme (7.5).

Q.E.D.

*Preuve du théorème.* — Compte tenu de propositions 7.1 et 7.2, la preuve sera achevée si on démontre que

$$L^2(\mathbb{R}^d) = \bigotimes_{k=0}^N \mathcal{H}_k.$$

Mais si  $1 \leq k < k' \leq N$ ,  $J_1, J_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,  $\rho < 1$ , alors

$$\Gamma_k(J_1) \Gamma_{k'}(J_2) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)^* J_1(A_{\rho, k}) J_2(A_{\rho, k'}) U(t) = 0$$

car  $J_1(A_{\rho, k}(t)) J_2(A_{\rho, k'}(t)) = 0$  pour  $t \geq t_0$  suffisamment grand, donc  $\mathcal{H}_k \perp \mathcal{H}_{k'}$ . Il est également évident que  $\mathcal{H}_k \perp \mathcal{H}_0$  pour tout  $1 \leq k \leq N$ . Il reste à vérifier que la famille des espaces  $\{\mathcal{H}_k\}_{k=0, \dots, N}$  engendre  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Pour cela il suffit de montrer que

$$\bigcup_{J_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)} \text{Im } s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)^* J_0\left(\frac{x}{t}\right) U(t) = L^2(\mathbb{R}^d). \tag{7.12}$$

Si  $\varphi \in \mathcal{S}(X)$  (espace de Schwarz des fonctions à décroissance rapide),  $f_\varepsilon(x) = x(1 + \varepsilon^2|x|^2)^{-1}$ , alors

$$U(t)^* f_\varepsilon(x) U(t) \varphi = f_\varepsilon(x) \varphi + \int_0^t d\tau U(\tau)^* i[H(\tau), f_\varepsilon(x)] U(\tau) \varphi. \tag{7.13}$$

On vérifie facilement que  $\|[H(\tau), f_\varepsilon(x)](I - \Delta)^{-1/2}\| \leq C_0$  uniformément par rapport à  $0 < \varepsilon \leq 1$ , donc la proposition 6.1 et (7.13) assurent  $\|f_\varepsilon(x) U(t) \varphi\| \leq C_\varphi(1 + t)$ . Le passage  $\varepsilon \rightarrow 0$  donne  $\|x U(t) \varphi\| \leq C_\varphi(1 + t)$ .

Ainsi

$$\begin{aligned} \left\| \varphi - U(t) * J_0 \left( \frac{x}{nt} \right) U(t) \varphi \right\| &= \left\| (1 - J_0) \left( \frac{x}{nt} \right) U(t) \varphi \right\| \\ &\leq \frac{C}{n} \left\| \frac{|x|}{t} U(t) \varphi \right\| \leq \frac{C'_\varphi}{n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quand  $n \rightarrow \infty$ , d'où résulte (7. 12).

Q.E.D.

## APPENDICE A : PREUVE DES LEMMES 2.3 ET 2.12

*Preuve du lemme 2.3.* — (a) et (b) Soient  $B_1(t) = J(A_{\rho, k, j}(t))$  et  $B_2(t) = h(A'_{\rho, k, j}(t))$ . Supposons  $j=1$  et notons  $x = (x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  on peut écrire

$$\begin{aligned} h(A'_{\rho, k, j}) J(A_{\rho, k, j}) \\ = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{i^m}{m!} \rho^m t^{-m(2\rho-1)} J^{(m)}(A_{\rho, k, j}) h^{(m)}(A'_{\rho, k, j}) + B_n(t) \otimes I_{\mathbb{R}_x^{d-1}} \end{aligned}$$

où  $B_n(t)$  est l'opérateur intégral sur  $L^2(\mathbb{R})$ ,

$$B_n(t) \varphi(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} b_n(t, x_1, x'_1) \varphi(x'_1) dx'_1$$

de noyau

$$b_n(t, x_1, x'_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_1}{2\pi} e^{i(x_1 - x'_1)\xi_1} \tilde{b}_n(t, x_1, \xi_1, x'_1)$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{b}_n(t, x_1, \xi_1, x'_1) &= \frac{i^n \rho^n t^{-n(2\rho-1)}}{(n-1)!} \\ &\times \int_0^1 ds (1-s)^{n-1} J^{(n)} \left( \rho \frac{x_1 + s(x_1 - x'_1) - \chi_{k,1}(t)}{t^\rho} \right) h^{(n)}(t^{1-\rho}(\xi_1 - \dot{\chi}_{k,1}(t))). \end{aligned}$$

Une intégration par parties donne

$$(x_1 - x'_1)^2 b_n(t, x_1, x'_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_1}{2\pi} e^{i(x_1 - x'_1)\xi_1} \partial_{\xi_1}^2 \tilde{b}_n(t, x_1, \xi_1, x'_1),$$

donc

$$|b_n(t, x_1, x'_1)| \leq C t^{-n(2\rho-1)+2(1-\rho)} (1 + (x_1 - x'_1)^2)^{-1}$$

et le lemme de Schur assure  $\|B_n(t)\| \leq C' t^{-n(2\rho-1)+2(1-\rho)}$ .

Supposons maintenant que  $B_1(t) = \eta(A'_{\rho, k, j}(t) - A_{\rho, k, j}(t))$ . Définissons les opérateurs unitaires

$$\begin{aligned} \Phi_{\rho, k, j}(t) &= \exp\left(i\rho \frac{x_j^2}{2t} - i\rho \frac{x_j}{t} \chi_{k, j}(t)\right), \\ \Psi_{\rho, k, j}(t) &= \exp\left(-i \frac{t D_{x_j}^2}{2\rho} + it \frac{\dot{\chi}_{k, j}(t)}{\rho} D_{x_j}\right). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \Phi_{\rho, k, j}(t) \eta(A'_{\rho, k, j} - A_{\rho, k, j}) \Phi_{\rho, k, j}(t)^* &= \eta(A'_{\rho, k, j}), \\ \Psi_{\rho, k, j}(t) \eta(A'_{\rho, k, j} - A_{\rho, k, j}) \Psi_{\rho, k, j}(t)^* &= \eta(-A_{\rho, k, j}). \end{aligned}$$

Ainsi, dans le cas où  $B_2(t) = J(A_{\rho, k, j}(t))$  [resp.  $B_2(t) = h(A'_{\rho, k, j}(t))$ ], l'application de  $\Phi_{\rho, k, j}(t)$  [resp.  $\Psi_{\rho, k, j}(t)$ ], qui commute avec  $J(A_{\rho, k, j}(t))$  [resp.  $h(A'_{\rho, k, j}(t))$ ], permet de se ramener à la situation considérée au début.

c) C'est un résultat standard, qui résulte aussi du raisonnement présenté dans le lemme 2.4.

Q.E.D.

*Preuve du lemme 2.12.* — On a

$$\|w(t, x_j) \tilde{V}_k(x - \chi_{k, j}(t)) (1 - \Delta)^{-1}\| \leq C t^{-\rho' \mu_1} \quad \text{avec} \quad \rho' \mu_1 > 1$$

(cf. la définition 2.2 a), donc il reste à démontrer que

$$\|w(t, x_j) [B(t), \tilde{V}_k(x - \chi_{k, j}(t))]\| \leq C t^{-1-\epsilon}.$$

Dans le cas  $B(t) = h(A'_{\rho, k, j}(t))$ , le résultat découle d'un développement analogue, comme dans la preuve du lemme 2.3. Le cas  $B(t) = \eta(A'_{\rho, k, j} - A_{\rho, k, j})$  se réduit au cas précédent à l'aide de  $\Phi_{\rho, k, j}(t)$ , et enfin le cas  $B(t) = \tilde{F}(\tilde{A}'_{\rho, k, j} - \tilde{A}_{\rho, k, j})$  se traite comme dans la preuve du lemme 2.4'.

Q.E.D.

### APPENDICE B: PREUVE DE LA PROPOSITION 3.2

Les propriétés (ii) et (iii) résultent du fait que

$$\partial_\lambda^m u_j(t, \lambda) = \partial_\lambda^m \left(\frac{\lambda}{t}\right) + \sum_{k=0}^{N+1} (-1)^k t^{\rho'-1-m\rho'} \mathfrak{F}_k^{(m)} \left(t^{1-\rho'} \left(\dot{\chi}_{k, j}(t) - \frac{\lambda}{t}\right)\right)$$

où  $\mathfrak{F}_k(s) = s \mathfrak{G}_k(s)$ , car  $\mathfrak{F}'_k \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  et  $|\mathfrak{F}'_k| \leq 1$ . Définissons  $Z = \frac{1}{t} \partial_\lambda + \partial_t$  et montrons

$$|Z u_j(t, \lambda)| \leq C t^{-1-\epsilon}. \tag{B.1}$$



Pour ceci on remarque que  $Z(\lambda/t) = 0$  et

$$\begin{aligned} Z\left(t^{1-\rho'}\left(\dot{\chi}_{k,j}(t) - \frac{\lambda}{t}\right)\right) &= (\rho' - 1)t^{-\rho'}\left(\dot{\chi}_{k,j}(t) - \frac{\lambda}{t}\right) \\ &+ t^{1-\rho'}Z\left(\dot{\chi}_{k,j}(t) - \frac{\lambda}{t}\right) = (\rho' - 1)t^{-\rho'}\left(\dot{\chi}_{k,j}(t) - \frac{\lambda}{t}\right) + O(t^{-2\rho'}), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} Z\left(\mathfrak{G}_k\left(t^{1-\rho'}\left(\dot{\chi}_{k,j}(t) - \frac{\lambda}{t}\right)\right)\right)\left(\dot{\chi}_{k,j}(t) - \frac{\lambda}{t}\right) \\ + \mathfrak{G}_k\left(t^{1-\rho'}\left(\dot{\chi}_{k,j}(t) - \frac{\lambda}{t}\right)\right)Z\left(t^{1-\rho'}\left(\dot{\chi}_{k,j}(t) - \frac{\lambda}{t}\right)\right) \\ = \mathfrak{G}'_k\left(t^{1-\rho'}\left(\dot{\chi}_{k,j}(t) - \frac{\lambda}{t}\right)\right)(\rho' - 1)t^{-\rho'}\left(\dot{\chi}_{k,j}(t) - \frac{\lambda}{t}\right)^2 + O(t^{-2\rho'}) \end{aligned}$$

et le premier terme du membre de droite se majore par  $O(t^{-\rho'+2(\rho'-1)})$ , d'où (B.1).

Ensuite on calcule :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbb{D}_{-\Delta/2}((\mathbf{D}_{x_j} - u_j(t, x_j))^2) \\ = -(\mathbf{D}_{x_j} - u_j(t, x_j))\partial_\lambda u_j(t, x_j)(\mathbf{D}_{x_j} - u_j(t, x_j)) + f_j(t, x_j)\mathbf{D}_{x_j} + hc + \tilde{f}_j(t, x_j) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} f_j(t, \lambda) &= Z u_j(t, \lambda), \\ \tilde{f}_j(t, \lambda) &= u_j(t, \lambda)Z u_j(t, \lambda) + \frac{1}{4}\partial_\lambda^3 u_j(t, \lambda), \end{aligned}$$

donc (B.1) assure

$$|f_j(t, \lambda)| + |\tilde{f}_j(t, \lambda)| \leq C t^{-1-\varepsilon}.$$

Ainsi (iv) résulte de

$$\mathbb{D}_{\mathbf{H}(t)}\mathbf{K}(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \mathbb{D}_{-\Delta/2}((\mathbf{D}_{x_j} - u_j(t, x_j))^2) - i[\mathbf{K}(t), \mathbf{V}(t, x)] + \partial_t \mathbf{V}(t, x)$$

et

$$\begin{aligned} \left\| (-i[\mathbf{K}(t), \mathbf{V}(t, x)] + \partial_t \mathbf{V}(t, x))(1 - \Delta)^{-1} \right\| \\ = \left\| \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^N (u_j(t, x_j) - \dot{\chi}_{k,j}(t))\partial_{x_j} \mathbf{V}_k(x - \chi_k(t))(1 - \Delta)^{-1} \right\| \leq C t^{-\rho' \mu_1}, \end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned} u_j(t, x_j) \neq \dot{\chi}_{k,j}(t) &\Rightarrow \left| \frac{x_j}{t} - \dot{\chi}_k(t) \right| \geq 2 t^{\rho'-1} \\ &\Rightarrow |x - \chi_k(t)| \geq 2 t^{\rho'} - C t^{1-\rho'}, \end{aligned}$$

car  $|t \dot{\chi}_k(t) - \chi_k(t)| \leq C t^{1-\rho'}$ .

Q.E.D.

## RÉFÉRENCES

- [1] A.-M. BERTHIER-BOUTET DE MONVEL, Spectral Theory and Wave Operators for the Schrödinger Equation, *Research Notes in Math.*, vol. 71, Pitman, 1982, p. 1-306.
- [2] V. ENNS, Asymptotic Completeness for Quantum-mechanical Potential Scattering, Singular and Long-range Potentials, *Ann. Phys.*, vol. 119, 1979, p. 117-132.
- [3] V. ENNS, Completeness of Three-Body Quantum Scattering, dans *Dynamics and Processes* P. BLANCHARD, L. STREIT, éd., Lecture Notes in Mathematics, vol. 1031, 1983, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, p. 62-88.
- [4] G. M. GRAF, Phase Space Analysis of the Charge Transfer Model, *Helv. Phys. Acta*, vol. 63, 1990, p. 107-138.
- [5] G. M. GRAF, Asymptotic Completeness for N-body Short-range Systems: a New Proof, *Comm. Math. Phys.*, vol. 132, 1991, p. 77-104.
- [6] G. A. HAGEDORN, Asymptotic Completeness for the Impact Parameter Approximation to the Three Particle Scattering, *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. A36, 1982, p. 19-40.
- [7] L. HÖRMANDER, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, vol. 3, 4, 1985, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo.
- [8] H. KITADA et K. YAJIMA, A Scattering Theory for Time Dependent Long Range Potentials, *Duke Math. J.*, vol. 49, 1982, p. 1005-1016.
- [9] I. M. SIGAL, On the Long-range Scattering, preprint, université de Toronto, 1988.
- [10] I. M. SIGAL et A. SOFFER, The N-particle Scattering Problem: Asymptotic Completeness for Short-range Systems, *Annals Math.*, vol. 125, 1987, p. 35-108.
- [11] U. WÜLLER, Asymptotische Vollständigkeit beim Charge-Transfer-Modell, *Thèse de doctorat*, Berlin, 1988.
- [12] K. YAJIMA, A Multi-channel Scattering Theory for Some Time Dependent Hamiltonians, Charge Transfer Problem, *Comm. Math. Phys.*, vol. 75, 1980, p. 153-178.

(Manuscrit reçu le 27 septembre 1991;  
version corrigée reçue le 15 juillet 1992.)