ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

G. MICHON

Mesures de Gibbs sur les Cantor réguliers

Annales de l'I. H. P., section A, tome 58, nº 3 (1993), p. 267-285
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1993__58_3_267_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 58, n° 3, 1993, p. 267-285. *Physique théorique*

Mesures de Gibbs sur les Cantor réguliers

par

G. MICHON

Université de Bourgogne
URA 755, Mathématiques,
BP 138, 21004 Dijon, France

RÉSUMÉ. — L'objet de ce travail est d'établir un théorème d'existence de mesures de Gibbs sur les ensembles de Cantor dont l'arbre est équipé d'une fonction (ou d'un vecteur) d'énergie quasi additif. A cette fin, nous utilisons des résultats de type « Grandes déviations » adaptés aux arbres ainsi que le concept de fonction génératrice.

Mots clés : Ensemble de Cantor, mesure de Gibbs, grandes déviations, arbres.

ABSTRACT. — We prove an existence theorem for Gibbs measures on a Cantor set whose tree is equiped with a quasi additive energy function (or vector). We use large deviations results adapted to trees and generating functions.

0. INTRODUCTION

L'objet de ce travail est d'établir un théorème d'existence de mesures de Gibbs sur les ensembles de Cantor dont l'arbre est équipé d'une fonction (ou d'un vecteur) d'énergie quasi additif. A cette fin, nous utilisons des résultats de type « Grandes déviations » adaptés aux arbres ainsi que le

Classification A.M.S. : 60 F 10, 54 F 45/05 C 05, 82 A 30.

concept de fonction génératrice. L'aire d'application de nos résultats est différente de celle du théorème de Ruelle-Perron-Frobénius, sur l'existence des mesures de Sinaï-Ruelle-Bowen, donné par ce dernier dans [1]. Lorsque chacun s'applique, les mesures trouvées sont équivalentes. Mais, par exemple, lorsqu'un Cantor est obtenu par itération d'une fonction non définie partout sur [0, 1], la différentiabilité des branches donne naissance à la fonction potentielle qui permet d'appliquer le théorème de Ruelle (*cf.* [2] pour un traitement classique). Sans différentiabilité, sous l'hypothèse de quasi-additivité (substitut du lemme de distorsion), notre théorème s'applique, assurant l'existence de mesures de Gibbs. C'est essentiellement l'existence de ces mesures de Gibbs démontrée dans un cadre différent quoique voisin du cadre dynamique classique qui distingue ce travail des travaux [10] et [3].

Chemin faisant, nous donnons, outre l'existence, deux informations sur les mesures de Gibbs : elles sont concentrées sur des ensembles dont l'énergie est dans la sous-différentielle que nous précisons et leur entropie est – comme il convient – donnée par la transformée de Legendre d'une énergie libre, du moins lorsque l'énergie est différentiable. Il s'agit là d'un avatar du principe variationnel de D. Ruelle.

Ce travail, essentiellement centré sur des théorèmes d'existence, n'envisage pas d'applications autres que celles, immédiates, portant sur le Cantor itéré défini plus haut. Ce dernier est utilisé comme paradigme tout au long de ce travail : il assure une sorte de médiation entre le côté très formel des arbres et certains Cantor de l'intervalle [0, 1]. Des applications, notamment à la théorie de la dimension, feront l'objet d'autres publications.

Voici le plan commenté. Dans une première partie, Arbre et Cantor, nous introduisons le formalisme des arbres en le dégageant de l'exemple des Cantors itérés. En effet, l'arbre pondéré d'un Cantor itéré s'impose de lui-même, lorsqu'on remplace, à quasi-isométrie près, la métrique usuelle, induite par [0, 1], par une ultramétrique. Cette possibilité de changer la métrique exprime la nature profonde du lemme de distorsion. Nous rappelons rapidement que tout espace métrique compact, totalement discontinu, s'offre à nous avec un arbre pondéré, et que, lorsque le Cantor est régulier (dans un sens que nous précisons), les invariants par quasi-isométrie sont inscrits dans l'arbre pondéré associé (pour plus de détails *voir* [5], [6]). A partir de là, nous substituons au Cantor proprement dit un arbre pondéré. Les points du Cantor sont les branches de l'arbre, les nœuds forment une base d'ouverts fermés. C'est sur l'ensemble des nœuds, rangés par niveaux, que nous plaquerons le formalisme des grandes déviations.

Dans une seconde partie, nous adaptons aux arbres le formalisme des grandes déviations tel qu'il est présenté par R. S. Ellis [4]. D'une construction niveau par niveau des mesures de Gibbs finies classiques, nous induisons la définition d'une mesure de Gibbs sur les branches de l'arbre, *i.e.* sur les points du Cantor. Postulant l'existence, nous donnons deux informations importantes sur ces mesures : caractérisation des ensembles sur lesquels elles sont concentrées et valeur de leur entropie. Ces résultats doivent beaucoup à la présentation par R. S. Ellis des théorèmes de grandes déviations.

Les troisième et quatrième parties traitent de l'existence des mesures de Gibbs dans le cas quasi additif : c'est ici qu'interviennent les fonctions génératrices des nœuds de l'arbre. Disons qu'à chaque nœud a de l'arbre est associée une série $Z_a(s)$ (de Dirichlet dans le cas général) qui converge pour les valeurs s strictement plus grandes qu'une valeur c. Le scalaire c est une valeur singulière pour toutes les fonctions $Z_a(s)$. Même dans le cas quasi additif, il ne semble pas que la singularité soit polaire (ce qui simplifierait bien les choses). Tout au plus a-t-on un contrôle (uniforme sur les nœuds) des quotients Z_a/Z_b en des nœuds différents, lorsque s tend vers c. Ce contrôle des quotients exprime le fait que la renormalisation en chaque nœud, sans redonner exactement le comportement en la racine de l'arbre ne s'en éloigne pas trop : il y a quasi renormalisation. Ce phénomène, replacé dans un cadre plus général, semble très lié à l'existence des états de Gibbs.

Nous terminons en donnant des conditions très générales, portant sur le comportement des fonctions génératrices, qui assurent l'existence de mesures de Gibbs.

Je remercie Jacques Peyrière à qui ce travail doit beaucoup.

1. ARBRE ET CANTOR

1.1. Rappelons la construction d'un Cantor par itération d'une fonction dilatante $C^{1+\varepsilon}$, non partout définie sur [0, 1], introduite par Sullivan. De tels Cantors seront qualifiés dans la suite de « Cantors itérés ». Notre but est de dégager à travers eux, le concept d'arbre pondéré d'un Cantor (pour les démonstrations détaillées, *cf.* [8]).

Soient $I_0, I_1, \ldots, I_{p-1}$ p intervalles fermés $(p \geqq 2)$ disjoints contenus dans l'intervalle [0, 1] et une application $T: \bigcup_{k=0}^{p-1} I_k \to [0, 1]$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) *Pour chaque* k, $T|I_k$ *est surjective.*

(ii) T est de classe $C^{1+\varepsilon}$ *et dilatante.*

On sait définir T^2, à condition d'exclure certaines parties des I_k, de même définit-on T^3, ... Finalement, apparaît un Cantor K tel que $T|K$ est à valeur dans K. A l'étape $n \geqq 0$ de la construction, ce Cantor est approximé par des intervalles I_a, indexés par $\{0 \ldots p-1\}^n$ (noté rapidement p), définis relativement aux intervalles donnés $I_0, \ldots, I_{p-1}$ par

$$I_a = \bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k}(I_{a_k}).$$

Ainsi, se trouve-t-on avec la donnée suivante : une famille d'intervalles I_a, indexée par $\bigcup_{n \geqq 0} \{0, 1, \ldots, p^{-1}\}^n$. Notons l_a la longueur de l'intervalle I. Nous allons montrer que, à quasi-isométrie près, le Cantor K est complètement décrit par la famille

$$(l_a \,|\, a \in \bigcup_{n \geqq 0} \{0, 1, \ldots, p-1\}^n).$$

Par arbre p-aire ($p \geqq 2$), nous entendons l'arbre formé à chaque niveau $n \geqq 0$ des mots de longueur n construits sur l'ensemble $\{0, \ldots, p-1\}$. Le schéma en arborescence est classique lorsque p égale 2, qui suffit pour visualiser. Une branche de l'arbre est un mot infini, *i.e.* un élément de $\{0, 1, \ldots, p-1\}^{\mathbb{N}}$, et chaque nœud de l'arbre définit un ensemble de branches : celles qui passent par ce nœud. Ces nœuds définissent une base de topologie en ouverts fermés, qui munit l'ensemble des branches d'une topologie compacte totalement discontinue. Revenons au Cantor itéré. Tout point de ce Cantor est caractérisé par la suite des intervalles I_a qui le définissent, ce qui conduit à une branche de l'arbre p-aire qui est le code du point considéré. Ainsi, à homéomorphisme près, peut-on voir le Cantor itéré comme l'ensemble des branches de l'arbre p-aire, les nœuds s'identifiant aux ensembles ouverts fermés $I_a \cap K$, qui sont une base de la topologie du Cantor K.

Passons à l'aspect métrique. La fonction l, le long de chaque branche, décroît et tend vers 0. Si les branches différentes x, y se séparent au nœud a, posons $\delta(x, y) = l_a$ (et $\delta(x, x) = 0$).

(1.1.1) *L'application* δ *définie ci-dessus est une ultramétrique sur l'ensemble* $\{0, 1, \ldots, p-1\}^{\mathbb{N}}$ *des branches* (i.e. *vérifie l'inégalité ultramétrique* $\delta(x, y) \leqq \sup(\delta(x, z), \delta(z, y))$.

Ainsi, l'ensemble des branches de l'arbre est muni de deux métriques : l'ultramétrique qu'on vient de définir est la métrique issue du plongement dans [0, 1], qu'on notera $|x-y|$, si x et y sont deux branches. Une application du lemme de distorsion (nommé principe de variation bornée dans [2]) permet de prouver :

(1.1.2) *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour tout* x, y :

$$C^{-1}\delta(x, y) \leqq |x-y| \leqq C\,\delta(x, y).$$

En d'autres termes,

(1.1.3) *Le Cantor itéré* K, *muni de la métrique induite par* [0, 1] *est quasi isométrique à l'ensemble des branches de l'arbre p-aire muni de l'ultramétrique* δ.

De ce fait, tout concept de nature métrique relatif au Cantor K, invariant par quasi-isométrie, peut être étudié sans réduction, via l'arbre p-aire et l'application $l: \bigcup_{n \geqq 0} \{0, 1, \ldots, p-1\}^n \to \mathbf{R}_+^*$.

1.2. Une nouvelle application du lemme de distorsion conduit au résultat suivant :

(1.2.1) *Il existe une constante* $C>0$ *telle que, pour tous nœuds* a, b, *de l'arbre* p-*aire* (i.e. *pour tous mots finis* a, b) :

$$C^{-1} l_a l_b \leqq l_{ab} \leqq C l_a l_b.$$

Une application $l: \bigcup_{n \geqq 0} \{0, 1, \ldots, p-1\}^n \to \mathbf{R}_+^*$ vérifiant cette propriété sera qualifiée de quasi additive (en fait, son logarithme est quasi additif). Nous verrons plus loin qu'une telle propriété entraîne l'existence d'une mesure de Gibbs. Rappelons que le théorème de Ruelle, dans ce contexte, repose sur la dérivation par rapport au shift le long des branches dans le sens suivant. Notons $\sigma(a_0, \ldots, a_{n-1}) = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ le mot shifté. Tout point du Cantor, identifié à son code, produit à chaque niveau un mot fini de longueur n et :

(1.2.2) $\lim_{n \to \infty} l_{\sigma x_n}/l_{x_n} = T'(x)$.

La dérivation de l le long des branches fournit le potentiel $-\log T'$. En postulant seulement la quasi-additivité, qui n'implique pas la dérivabilité, notre théorème d'existence s'applique, alors que le théorème de Ruelle ne s'applique pas.

1.3. Donnons la définition d'un arbre dans toute sa généralité.

(1.3.1) *Un arbre* (*de racine donnée*) *est une suite d'ensembles finis* $(E_0, E_1, \ldots)$ *et d'applications surjectives* $(f_n: E_{n+1} \to E_n \mid n \geqq 0)$ *appelées transitions* (*toutes notées* f). *On suppose en outre que* E_0 *est réduit à un élément* (*la racine*).

$$E_0 \leftarrow E_1 \leftarrow \ldots \leftarrow E_n \leftarrow E_{n+1} \leftarrow \ldots$$

L'arbre est schématisé ainsi. On porte sous 0 l'unique élément de E_0, sous 1 les éléments de E_1, etc. Ce sont les nœuds de l'arbre rangés par niveaux. Ensuite, on joint le nœud $x_n \in E_n$ au nœud $x_{n+1} \in E_{n+1}$, si $fx_{n+1} = x_n$, f étant la transition du niveau $n+1$ au niveau n. Le prototype est l'arbre binaire, les transitions étant les projections. Le passage du fini à l'infini se fait en considérant les branches de l'arbre. Une branche est une suite de nœuds $(x_n \mid n \geqq 0)$ telle que, pour chaque n, $fx_{n+1} = x_n$. L'ensemble des branches E est, pour chaque n muni d'une application $\pi_n : E \to E_n$ qui consiste à prendre le nœud d'indice n de la branche. Clairement, l'ensemble des branches munies des projections π_n est une limite projective du système projectif d'ensembles finis particulier qu'est un arbre. Comme limite projective d'ensembles finis, l'ensemble des branches est un espace compact totalement discontinu, et les nœuds forment une base dénombrable d'ensemble ouverts-fermés : il suffit pour s'en convaincre d'identifier un nœud aux branches qui passent par lui. Visiblement, la suite des nœuds qui définissent une branche forment une base de voisinages ouverts fermés de la branche.

1.4. L'aspect métrique, ou plutôt ultramétrique passe par la notion très simple de pondération.

(1.4.1) *On appelle pondération de l'arbre* $(E_0, E_1, \dots)$ *une suite de scalaires* $(\varepsilon_0, \varepsilon_1. \dots)$ *strictement décroissante vers* 0.

A une telle pondération est associée une ultramétrique. Si x et y sont des branches différentes qui se séparent au nœud $a \in E_n$, posons $\delta(x, y) = \varepsilon_n$. On montre facilement que

(1.4.2) *L'application* δ *est une ultramétrique sur l'espace compact totalement discontinu des branches.*

Nous avons montré ([5], [6]) que

(1.4.3) *Tout espace compact ultramétrique est l'espace des branches d'un arbre pondéré unique, muni de l'ultramétrique définie par la pondération.*

Remarquons que l'espace des branches de l'arbre p-aire muni de l'application $l: \bigcup_{n \geqq 0} \{0, 1, \dots, p-1\}^n \to \mathbf{R}_+^*$ est équipé d'une ultramétrique (1.1.1). Mais l'arbre p-aire n'est pas l'arbre de cette ultramétrique. Les branches sont les mêmes, mais les nœuds sont rangés par niveaux de façon différente : plutôt que rangés par longueur de mots, ils le sont en tenant compte de la longueur de l'intervalle qu'ils représentent. On dit que l'arbre a été réorganisé. Les longueurs sont strictement positives et s'accumulent en 0. Leur ensemble, dénombrable, s'ordonne en une suite décroissante qui donne la pondération de l'ultramétrique (*cf.* [6]).

1.5. Le cantor itéré K considéré plus haut fait partie de la famille des ensembles de Cantor réguliers, ainsi définie :

(1.5.1) *On dit qu'un espace métrique compact totalement discontinu est un ensemble de Cantor régulier s'il est quasi isométrique à un espace compact ultramétrique.*

Ainsi, de tels espaces s'étudient via un arbre pondéré. Les points sont des branches, les nœuds des ouverts fermés qui génèrent la topologie. A chaque niveau $n \geqq 0$, on dispose d'un ensemble fini de nœuds. *L'étude thermodynamique d'un tel ensemble revient à l'étude de la thermodynamique des arbres pondérés.*

Des résultats plus précis sur les ensembles de Cantor réguliers sont donnés dans [5], [6]. On y montre en particulier qu'à tout espace métrique compact totalement discontinu est associé fonctoriellement un arbre pondéré, lequel arbre ne dépend que de l'espace à l'exclusion de tout procédé de contruction : en résumé, les espaces nommés ci-dessus possèdent un arbre pondéré intrinsèque.

2. ARBRES ET GRANDES DÉVIATIONS

2.0. On se propose ici d'adapter aux arbres le formalisme des grandes déviations et d'énoncer les résultats qui serviront dans la suite. Nous adoptons la présentation de R. S. Ellis [4] et pour les démonstrations, renvoyons à cet auteur.

2.1. Soient un arbre $(E_0, E_1, \ldots)$, une pondération $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots)$, et une fonction $l: \bigcup_{n \geqq 0} E_n \to \mathbf{R}_+^{*d}$ ($d \geqq 1$ est un entier fixé). Pour chaque $n \geqq 1$ vient une application

$$\frac{\log l_n}{\log \varepsilon_{n-1}} : E_n \to \mathbf{R}^d$$

(où l_n note la restriction de l à E_n), qu'on convient d'appeler le vecteur énergie du niveau n.

Maintenant, soit $(\mu_n \mid n \geqq 1)$ une suite de probabilités, où chaque μ_n est une probabilité sur E_n. *On dira qu'une telle suite est un état de l'arbre.* A chaque niveau $n \geqq 1$, on associe la fonction $C_n : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ donnée en $t \in \mathbf{R}^d$ par

$$C_n(t) = \frac{1}{-\log \varepsilon_{n-1}} \log \left(\sum_{a \in E_n} e^{\langle t,\, -\log l_n a \rangle} \mu_n a \right).$$

Chaque fonction C_n est convexe, analytique, nulle en zéro. Nous ferons l'hypothèse suivante :

(2.1.1) *Pour chaque* $t \in \mathbf{R}^d$, *la suite des* $C_n(t)$ *converge vers* $C(t)$.

La fonction $C(t)$, limite simple de fonctions convexes, est convexe. Dans ce cas, la convergence est uniforme sur les compacts de $\mathbf{R}^d$. R. S. Ellis nomme énergie libre cette fonction [en fait, $C(t)$ n'est pas un potentiel thermodynamique mais une fonction de Massieu].

2.2. Notons I la transformée de Legendre de l'énergie libre. Pour $y \in \mathbf{R}^d$:

$$I(y) = \sup_{t \in \mathbf{R}^d} (\langle t, y \rangle - C(t)).$$

Vu que $C(0) = 0$, $I(y)$ est positive. Elle est à valeur dans $[0, \infty]$, puisqu'infinie sur le complémentaire de l'image de C'. Elle est convexe par nature, et pour chaque scalaire fini, l'ensemble de niveau est compact (et convexe). Le résultat essentiel porte sur le comportement des probabilités images directes

$$Q_n = \left(\frac{\log l_n}{\log \varepsilon_{n-1}} \right)_* (\mu_n) \qquad \text{pour} \quad n \geqq 1.$$

(2.2.1) THÉORÈME. — *Avec les données, hypothèses et notations qui précèdent, pour tout* K *fermé* $\subset \mathbf{R}^d$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log Q_n(K)}{-\log \varepsilon_{n-1}} \leqq -\inf_K I.$$

2.3. Le résultat suivant relie la sous-différentiabilité de la fonction d'énergie libre à la convergence exponentielle en probabilité. Rappelons qu'un vecteur z est un sous-gradient de C en y si, pour tout h : $C(y+h) \geqq C(y) + \langle z, h \rangle$. La sous-différentielle de C en y est l'ensemble des sous-gradients de C en y. Cet ensemble est noté $\partial C(y)$.

(2.3.1) $I(z)=0$ *si et seulement si* $z \in \partial C(0)$. *En outre,* $\partial C(0)$ *est un convexe fermé, borné, non vide.*

Ce résultat introduit à la notion de convergence exponentielle : si U est un voisinage ouvert de $\partial C(0)$, alors

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log Q_n(U^C)}{-\log \varepsilon_{n-1}} \leqq -\inf_{U^C} I < 0.$$

Ceci se traduit par : pour tout voisinage ouvert U de $\partial C(0)$, il existe $r>0$ et n_0 tels que, si $n>n_0 : Q_n(U^C) \leqq \varepsilon_{n-1}^r$.

(2.3.2) *On dit que la suite* $(Q_n \mid n \geqq 1)$ *converge exponentiellement sur* K *relativement à la suite* $(-\log \varepsilon_{n-1} \mid n \geqq 1)$ *si, pour tout voisinage ouvert* U *de* K *on a la propriété précédente.*

Lorsque K est un point, on dit que la limite est la valeur d'équilibre.

2.4. Soient $(\mu_n \mid n \geqq 1)$ et $(\nu_n \mid n \geqq 1)$ des suites de probabilités, l'indice n donnant des probabilités sur E_n (on parle d'états sur l'arbre).

(2.4.1) *On dit que les suites sont équivalentes s'il existe* $A>0$ *tel que*

$$A^{-1} \mu_n \leqq \nu_n \leqq A \mu_n.$$

Il est clair que l'existence de la fonction énergie libre, de la limite exponentielle aussi bien que leurs valeurs ne dépendent que des classes modulo cette relation. En particulier, l'état $(\nu_n \mid n \geqq 1)$, par exemple peut provenir d'une probabilité ν sur E, chaque ν_n étant l'image de ν sur E par la projection d'indice n.

(2.4.2) *On dira que la probabilité* ν *sur* E *est équivalente à* $(\mu_n \mid n \geqq 1)$ *si les suites des* ν_n *et des* μ_n *sont équivalentes.*

2.5. Les vecteurs d'énergie $\log l_n / \log \varepsilon_{n-1} : E_n \to \mathbf{R}^d$ définissent par composition avec les projections $\pi_n : E \to E_n$ une suite de fonctions définies sur E, à valeurs dans $\mathbf{R}^d$. Chacune de ces fonctions est abusivement notée

$$\frac{\log l_n}{\log \varepsilon_{n-1}} : E \to \mathbf{R}^d.$$

Rappelons un dernier résultat, corollaire du lemme de Borel-Cantelli.

(2.5.1) *Supposons que la suite* $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots)$ *vérifie la propriété suivante : pour tout* $r>0$, $\varepsilon_0^r+\varepsilon_1^r+\ldots<\infty$ *et soit* μ *une probabilité sur* E. *Si la suite des probabilités*

$$\left(\frac{\log l_n}{\log \varepsilon_{n-1}}\right)_* (\mu)$$

converge exponentiellement dans $\mathbf{R}^d$ *sur un compact* K, *et si* E_K *note l'ensemble des branches* x *de l'arbre le long desquelles la suite* $\log lx_n/\log \varepsilon_{n-1}$ *est bornée et dont les valeurs d'adhérence appartiennent à* K, *alors :*

$$\mu(E_K)=1.$$

2.6. Le résultat précédent affirme que, sous certaines conditions, la mesure μ est concentrée sur E_K : c'est la terminologie que nous adopterons dans la suite. Ce résultat, joint à (2.3.1), donne finalement :

(2.6.1) *Si une mesure* μ *sur* E *induit un état* $(\mu_n \mid n\geqq 1)$ *conduisant à une énergie libre* $C(t)$, *cette mesure est concentrée sur* $E_{\partial C(0)}$.

Rappelons que cela signifie que la mesure est concentrée sur les branches x dont les valeurs d'adhérence z sont bornées, et telles que, quel que soit t : $C(t)\geqq\langle z, t\rangle$.

3. MESURE DE GIBBS

3.0. Nous travaillons maintenant avec les données suivantes :

– un arbre $(E_0, E_1, \ldots)$ pondéré par $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots)$,

– une fonction $l : \bigcup_{n\geqq 0} E_n \to \mathbf{R}_+^{*d}$,

– une mesure μ sur E, telle que l'état $(\mu_n \mid n\geqq 1)$ sur l'arbre admette une énergie libre $C(t)$.

Nous avons vu que la mesure μ est concentrée sur les branches dont les adhérences d'énergie sont dans $\partial C(0)$. Nous allons définir la mesure de Gibbs de paramètre $s\in\mathbf{R}^d$ de telle sorte qu'elle soit concentrée sur les branches dont les adhérences d'énergie appartiennent à $\partial C(s)$.

3.1. Plaçons-nous au niveau n. Nous sommes en présence d'un ensemble fini E_n, d'un état μ_n et d'un vecteur d'énergie $\log l_n/\log \varepsilon_{n-1} : E_n \to \mathbf{R}^d$. Toutes ces données permettent la construction de mesures de Gibbs, paramétrées par $s\in\mathbf{R}^d$. Notons plus sobrement $l^{-s}a$ le scalaire

$$e^{\langle s,\, -\log l_a\rangle}=\prod_{k=0}^{d-1} l_k^{-s_k}(a).$$

La mesure de Gibbs, indexée par $s \in \mathbf{R}^d$, est la mesure $l^{-s}\mu$ sur E_n, normalisée par

$$\sum_{a \in E_n} l^{-s}(a)\,\mu_n\, a = \varepsilon_{n-1}^{-C_n(s)},$$

puisque, rappelons-le (2.1) :

$$C_n(s) = \frac{1}{-\log \varepsilon_{n-1}} \log \Big(\sum_{a \in E_n} l^{-s}(a)\,\mu_n\, a\Big).$$

A $s \in \mathbf{R}^d$ fixé, affectons l'ensemble E_n de la mesure de Gibbs

$$\mu_{n,s} = \varepsilon_{n-1}^{C_n(s)}\, l^{-s}\,\mu_n.$$

Évidemment, en général, ces probabilités ne sont pas issues d'une probabilité μ_s sur E : *tout le problème des mesures de Gibbs est là.* Calculons l'énergie libre pour l'état $(\mu_{n,s} \mid n \geqq 1)$ sur l'arbre :

$$C_{n,s}(t) = \frac{1}{-\log \varepsilon_{n-1}} \log \sum_{a \in E_n} l^{-(s+t)}(a)\,\mu_n\, a\, \varepsilon_{n-1}^{C_n(s)},$$

d'où

$$C_{n,s}(t) = C_n(t+s) - C_n(s),$$

finalement :

$$C_s(t) = C(t+s) - C(s).$$

et, en utilisant (2.6.1) :

(3.1.1) *La suite des probabilités* $(\log l_n/\log \varepsilon_{n-1})_* \mu_{n,s}$ *converge exponentiellement dans* $\mathbf{R}^d$ *sur* $\partial C(s)$.

3.2. L'état $(\mu_{n,s} \mid n \geqq 1)$ sur l'arbre *ne se recolle pas* en un état μ_s sur E, plus précisément, nous ne sommes pas en présence d'un système projectif de mesures. Comme nous le remarquions en (2.4), travailler à équivalence près n'altère pas certaines propriétés asymptotiques, d'où la définition suivante :

(3.2.1) *On appelle état de Gibbs d'indice* $s \in \mathbf{R}^d$ *tout état* γ *sur* E *équivalent à* $(\mu_{n,s} \mid n \geqq 1)$, i.e. *pour lequel existe une constante* $k > 0$ *telle que, pour tout* $a \in E_n$:

$$K^{-1} \leqq \frac{\gamma\, a}{\varepsilon_{n-1}^{C_n(s)}\, l^{-s}(a)\,\mu\, a} \leqq K.$$

Clairement, deux états de Gibbs de même indice étant tels que

$$A^{-1}\gamma_0 \leqq \gamma_1 \leqq A\,\gamma_0$$

sont des mesures sur E équivalentes au sens usuel. De ce fait, un état de Gibbs est en fait une classe pour cette équivalence.

Comme il résulte de (2.5.1) :

(3.2.2) *Un état de Gibbs d'indice* $s \in \mathbf{R}^d$ *est concentré sur les branches dont les adhérences d'énergie appartiennent à* $\partial C(s)$.

3.3. Tout concept attaché à une mesure, invariant par équivalence, a un sens pour les mesures de Gibbs définies ci-dessus. Au niveau n, nous avons, en passant au logarithme :

$$\log K^{-1} + C_n(s) \log \varepsilon_{n-1} - \sum_k s_k \log l_k \leqq \log \frac{\gamma}{\mu} \leqq \log K + C_n(s) \log \varepsilon_{n-1} - \sum_k s_k \log l_k.$$

En intégrant sur le niveau n, en divisant par $-\log \varepsilon_{n-1}$ et en notant S_n la fonction d'entropie du niveau n :

$$\frac{\log K}{\log \varepsilon_{n-1}} - C_n(s) + \sum_k s_k \int \frac{\log l_k}{\log \varepsilon_{n-1}} d\gamma \leqq S_n\left(\frac{\gamma}{\mu}\right) \leqq \frac{\log K}{-\log \varepsilon_{n-1}} + \ldots$$

d'où, *si nous supposons l'existence de* $C'(s)$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{-\log \varepsilon_{n-1}} S_n(\gamma/\mu) = \langle s, C'(s) \rangle - C(s).$$

Or, $\langle s, C'(s) \rangle - C(s)$ est justement la valeur de la fonction d'entropie I au point $C'(s)$, d'où

(3.3.1) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{-\log \varepsilon_{n-1}} S_n\left(\frac{\gamma}{\mu}\right) = I(C'(s))$ *si* γ *est un état de Gibbs en un point* $s \in \mathbf{R}^d$ *où* $C'(s)$ *existe.*

4. THÉORÈME D'EXISTENCE

4.0. Tout compte fait, la fonction énergie et l'état de Gibbs au point $s \in \mathbf{R}^d$ font intervenir, pour chaque $a \in E_n$, non pas le vecteur

$$(l_0^{-s_0}, l_1^{-s_1}, \ldots, l_{d-1}^{-s_{d-1}}),$$

mais le produit

$$l_0^{-s_0} l_1^{-s_1} \ldots l_{d-1}^{-s_{d-1}}.$$

Nous sommes donc amenés, pour traiter de l'existence de l'une et l'autre, à répondre aux questions suivantes : l'arbre, la pondération, la mesure étant donnés. Soit $l : \bigcup_{n \geqq 0} E_n \to \mathbf{R}_+^*$.

(i) *Pour chaque* $n \geqq 1$, *soit* $C_n = (\log \varepsilon_{n-1})^{-1} \sum_{a \in E_n} l a \mu a$. *La suite des* C_n *admet-elle une limite ?*

(ii) *Peut-on trouver une mesure* γ *sur* E *pour laquelle existe une constante* $K>0$ *telle que, pour tout* $a \in E_n$:

$$K^{-1}\gamma a \leqq \varepsilon_{n-1}^{C_n}\, la\, \mu a \leqq K\gamma a$$

Nous allons voir que pour les arbres p-aires, équipés de la pondération $\varepsilon_{n-1}=e^{-n}$, *les réponses sont positives lorsque la mesure* μ *est quasi-Bernoulli et lorsque la fonction l est quasi additive.*

4.1. Rappelons que par arbre p-aire ($p \geqq 2$), nous entendons l'arbre formé à chaque niveau $n \geqq 0$ par les mots de longueur n construits sur l'ensemble $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. Les transitions sont les projections oubliant la dernière lettre. La limite est $\{0, 1, \ldots, p-1\}^{\mathbf{N}}$. La projection $\pi_n : \{0, 1, \ldots, p-1\}^{\mathbf{N}} \to \{0, 1, \ldots, p-1\}^n$ consiste à associer $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ au mot infini $(a_0, a_1, \ldots)$. Rappelons enfin qu'une mesure μ sur $\{0, 1, \ldots, p-1\}^{\mathbf{N}}$ est la donnée de scalaires positifs μa, pour $a \in \{0, 1, \ldots, p-1\}^n$ tels que :

$$\mu a = \mu(a0) + \mu(a1) + \ldots + \mu(a(p-1)).$$

Du fait que $\bigcup_{n \geqq 0} \{0, 1, \ldots, p-1\}^n$ est un monoïde libre, tout morphisme de monoïde, *i.e.* toute application l telle que :

$$l\varnothing = 1, \qquad l(ab) = l(a)\, l(b)$$

à valeur dans $\mathbf{R}_+^*$ est caractérisée par les valeurs $l_0, l_1, \ldots, l_{p-1}$: c'est le cas additif et, du point de vue probabilité, le cas Bernoulli. Introduisons les cas quasi additifs et quasi Bernoulli.

(4.1.1) *On dit que* $l : \bigcup_{n \geqq 0} \{0, 1, \ldots, p-1\}^n \to \mathbf{R}_+^*$ *est une application quasi additive s'il existe une constante* $K>0$ *telle que, pour tous mots finis a, b :*

$$L^{-1}\, lab \leqq la\, lb \leqq L\, lab.$$

Une probabilité μ sur $\{0, 1, \ldots, p-1\}^{\mathbf{N}}$ quasi additive sera dite quasi Bernoulli, *i.e.* il existe une constante $M>0$ telle que, pour tous mots finis a, b :

$$L^{-1}\, \mu ab \leqq \mu a\, \mu b \leqq L\, \mu ab.$$

L'intérêt de la quasi additivité, outre l'abondance des exemples, est sa grande stabilité :

– La quasi additivité se conserve par produits et par puissances quelconques.

– La quasi additivité se conserve par renormalisation. Voici ce qu'on entend par là. Soient l quasi additive et $a \in \{0, 1, \ldots, p-1\}^n$. Définissons une application $\tilde{l}$ en posant : $\tilde{l}b = lab/la$.

(4.1.2) *si :* $L^{-1}\, lcd \leqq lcld \leqq L\, lcd$ *alors, pour tout* $a \in \{0, 1, \ldots, p-1\}^n$ *:*

$$L^{-4}\, \tilde{l}cd \leqq \tilde{l}c\tilde{l}d \leqq L^4\, \tilde{l}cd.$$

Exemples d'applications quasi additives :

– les applications additives, en particulier les exponentielles du nombre d'apparitions d'un symbole donné,

– les longueurs d'intervalles provenant des Cantor itérés [*cf.* (1.2.1)],

– les mesures de Sinaï-Ruelle-Bowen et les mesures de Gibbs que nous avons définies plus haut.

4.2. Énonçons le théorème principal :

(4.2.1) *Soient un arbre p-aire, équipé de la pondération* $(e^{-(n+1)} \mid n \geqq 0)$, *d'une mesure* μ *quasi Bernoulli et d'une application*

$$l : \bigcup_{n \geqq 0} \{0, 1, \ldots, p-1\}^n \to \mathbf{R}_+^*.$$

quasi additive.

(i) *La suite des* $C_n = n^{-1} \log\Big(\sum_{a \in \{0, 1, \ldots, p-1\}^n} la\, \mu\, a\Big)$ *admet une limite* C.

En outre, il existe une constante $K \geqq 1$ *telle que, pour tout* $n \geqq 1$ *:*

$$|C - C_n| \leqq \frac{\log K}{n}.$$

(ii) *Il existe un état de Gibbs* γ *pour ces données,* i.e. *il existe une constante* $R > 0$ *telle que, pour tout mot fini* $a \in \{0, 1, \ldots, p-1\}^n$ *:*

$$R^{-1} \leqq \frac{\gamma\, a}{e^{-nC_n}\, la\, \mu\, a} \leqq R.$$

Avant de passer à la démonstration, situons ces mesures par rapport aux mesures de Sinaï-Ruelle-Bowen, issues d'un potentiel. Dans le cas où l'application l est la longueur des intervalles résultant de la construction du cantor itéré, et où $\mu\, a = p^{-n}$, l'inégalité donnée par (ii) ci-dessus est :

$$R^{-1} K^{-1} \leqq \frac{\gamma\, a}{e^{-n(C + \log p)}\, la} \leqq RK,$$

ce qui fait que γ est équivalente à une mesure de Ruelle-Bowen, $C + \log p$ étant la pression.

4.3. Démonstration de la première partie du théorème principal. Notons L et M les constantes strictement positives telles que pour tous mots a, b :

$$L^{-1}\, lalb \leqq lab \leqq L\, lalb, \qquad M^{-1}\, \mu\, a\, \mu\, b \leqq \mu\, ab \leqq M\, \mu\, a\, \mu\, b$$

et posons $Z_n = \sum_{a \in \{0, 1, \ldots, p-1\}^n} la\, \mu\, a$, d'où $C_n = n^{-1} \log Z_n$.

Écrivant $p^{n+k}=\{0, 1, \ldots, p-1\}^n \times p^k$, on montre que $M^{-1} L^{-1} Z_n Z_k \leqq Z_{n+k} \leqq MLZ_n Z_k$ d'où :

$$\frac{\log Z_n}{\log ML}+\frac{\log Z_k}{\log ML}-1 \leqq \frac{\log Z_{n+k}}{\log ML} \leqq \frac{\log Z_n}{\log ML}+\frac{\log Z_k}{\log ML}+1.$$

On se souvient alors de l'exercice 99, proposé par G. Pólya et G. Szegö [9], dont la solution est précisément la première partie du théorème :

(4.3.1) *Soit une suite* $(a_1, a_2, \ldots)$ *vérifiant*

$$a_n + a_k - 1 \leqq a_{n+k} \leqq a_n + a_k + 1.$$

La limite ω *de la suite* a_n/n *existe et :*

$$n\omega - 1 \leqq a_n \leqq n\omega + 1.$$

Une remarque : la constante K qui intervient dans le théorème est ML.

4.4. Introduisons la fonction génératrice en le mot $a \in p^k$. Il s'agit de la série suivante :

$$Z_a(s)=1+\left(\sum_{c \in p} \frac{lac}{la}\frac{\mu ac}{\mu a}\right)e^{-s}+\left(\sum_{c \in p^2} \frac{lac}{la}\frac{\mu ac}{\mu a}\right)e^{-2s}+\ldots$$

On posera

$$Z_n(a)=\sum_{c \in \{0, 1, \ldots, p-1\}^n} \frac{lac}{la}\frac{\mu ac}{\mu a}.$$

On peut voir les choses ainsi. Plaçons-nous au nœud a de l'arbre p-aire, situé au niveau $k>0$. Si l'on prend les branches qui partent de ce nœud, on définit un arbre p-aire, dont les nœuds sont les mots finis qui prolongent le mot a. Sur cet arbre, on définit une mesure en posant $\mu ac/\mu a$ comme masse du mot c (on a simplement conditionné par le cylindre a) et une fonction quasi additive donnée par lac/la.

On peut dire qu'on a renormalisé les données. Dans le cas « tout additif », les fonctions génératrices en chaque nœud sont toutes égales : les données se renormalisent parfaitement. Dans le cas quasi additif, les fonctions génératrices sont, dans un sens à préciser, proches les unes des autres. L'existence de mesures de Gibbs, même dans un cadre plus général, est liée à ce phénomène.

(4.4.1) *La série* $Z_a(s)$ *possède une abscisse de convergence donnée par*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log Z_n(a).$$

L'étude de cette limite se fait avec la première partie du théorème principal. En effet, puisque lac/la et $\mu ac/\mu a$ sont quasi additives, la suite envisagée converge, et du fait que

$$L^{-1}\, lc \leqq \frac{lac}{la} \leqq L\, lc, \qquad M^{-1}\, \mu c \leqq \frac{\mu ac}{\mu a} \leqq M\, \mu c.$$

Cette limite ne dépend pas du mot a et est égale à C, qui correspond au cas $a=\varnothing$. En outre, comme nous le remarquions en (4.1.2), en renormalisant, on peut prendre des constantes indépendantes du mot a car, rappelons-le,

$$L^{-4}\frac{lacd}{la} \leqq \frac{lac}{la}\,\frac{lcd}{la} \leqq L^4 \frac{lacd}{la},$$

$$M^{-4}\frac{\mu acd}{\mu a} \leqq \frac{\mu ac}{\mu a}\,\frac{\mu cd}{\mu a} \leqq M^4 \frac{\mu acd}{\mu a},$$

On obtient le résultat intermédiaire suivant en localisant les résultats de la première partie du théorème principal au nœud a.

(4.4.2) *Soit* $Z_a(s)=1+Z_1(a)e^{-s}+Z_2(a)e^{-2s}+\ldots$ *la fonction génératrice d'un nœud a.*

(i) *Toutes ces séries ont même abscisse de convergence* C.

(ii) *Il existe une constante* $K>0$, *indépendante du mot a, telle que, pour tout* $n \geqq 0$:

$$K^{-1}\, e^{nC} \leqq Z_n(a) \leqq K\, e^{nC}.$$

Comme corollaire, on obtient un encadrement uniforme en le nœud des fonctions génératrices $Z_a(s)$ pour $s>C$. C'est une propriété fondamentale des fonctions génératrices dans le cas additif.

(4.4.3) *Il existe une constante* $K>0$ *telle que, pour* $s>C$ *et chaque nœud a,*

$$\frac{K^{-1}}{1-e^{C-s}} \leqq Z_a(s) \leqq \frac{K}{1-e^{C-s}}.$$

On peut prendre $K=(LM)^4$.

4.5. Existence de la mesure de Gibbs. Nous noterons abusivement l_n : $\{0, 1, \ldots, p-1\}^N \to \mathbf{R}_+^*$ la composée de l_n avec la projection π_n : $\{0, 1, \ldots, p-1\}^N \to \{0, 1, \ldots, p-1\}^n$. Considérons la fonction φ_s, pour $s \in \mathbf{R}$, à valeur dans $[1, \infty]$ donnée par la série

$$\varphi_s = l_0 + e^{-s} l_1 + e^{-2s} l_2 + \ldots$$

Clairement, $\int \varphi_s\, d\mu = Z_{\varnothing}(s)$. On définit ainsi une famille de probabilités $P_s = (\varphi_s / Z_{\varnothing}(s))\, \mu$ pour $s>C$, dont il est facile de calculer la valeur au nœud $a \in p^k$:

$$Z_\varnothing(s) P_s(a) = \mu a (la_0) + e^{-s} la_1 + \ldots + e^{-(k-1)s} la_{k-1}) \\ + \mu a la e^{-ks} + e^{-(k+1)s} \sum_{c \in p} lac\, \mu ac + \ldots$$

Écrit autrement,

$$P_s(a) = \frac{\mu a}{Z_\varnothing(s)} (la_0 + e^{-s} la_1 + \ldots + e^{-(k-1)s} la_{k-1}) + \mu a la e^{-ks} \frac{Z_a(s)}{Z_\varnothing(s)}.$$

Lorsque s tend vers C, la famille $(P_s \mid s > C)$ admet au moins une valeur d'adhérence pour la convergence faible. D'après (4.4.3), on sait que $Z_\varnothing(s)$ tend vers l'infini et que le rapport $Z_a(s)/Z_\varnothing(s)$ reste compris entre K^{-2} et K^2, et ce, indépendamment de a, si bien que, si γ est une valeur d'adhérence, on a, pour $a \in p^k$:

$$K^{-2} \leqq \frac{\gamma a}{e^{-kC} la\, \mu a} \leqq K^2.$$

Puisqu'en outre $e^{-k(C-C_k)}$ demeure borné, γ est une mesure de Gibbs. Notons qu'on peut prendre $K = (ML)^{12}$. Le théorème est prouvé.

4.6. Soient toujours un arbre p-aire, pondéré par $(e^{-(n+1)} \mid n \geqq 0)$, muni d'une mesure quasi Bernoulli, et d'une vecteur

$$l : \bigcup_{n \geqq 0} \{0, 1, \ldots, p-1\}^n \to \mathbf{R}_+^{*d}$$

dont chaque composante est quasi additive. Pour chaque $t \in \mathbf{R}^d$, le produit l^{-t} est quasi additif, d'où, avec le théorème principal, une fonction énergie libre $C(t)$ et une mesure de Gibbs. Énonçons le théorème d'existence dans ce cas.

(4.6.1) *Soient un arbre p-aire, pondéré par* $(e_{-(n+1)} \mid n \geqq 0)$, *muni d'une mesure* μ *quasi Bernoulli et d'un vecteur d'énergie* l *à valeur dans* $\mathbf{R}^d$ *dont chaque composante est quasi additive.*

(i) *Pour chaque* $t \in \mathbf{R}^d$, *la limite de*

$$C_n(t) = n^{-1} \log \Big(\sum_{a \in \{0, 1, \ldots, p-1\}^n} la^{-t} \mu a \Big)$$

existe, définissant une fonction énergie libre $C : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$.

(ii) *Pour chaque* $t \in \mathbf{R}^d$, *il existe une mesure* μ_t *sur* $\{0, 1, \ldots, p-1\}^{\mathbf{N}}$ *dite de Gibbs, pour laquelle existe une constante* $K > 0$ *telle que, pour tout* $a \in \{0, 1, \ldots, p-1\}^n$:

$$K^{-1} e^{-nC_n(t)} la^{-t} \mu a \leqq \mu_t a \leqq K e^{-nC_n(t)} la^{-t} \mu a.$$

(iii) *Notons* $E_{\partial C(t)}$ *l'ensemble des* $a \in \{0, 1, \ldots, p-1\}^{\mathbf{N}}$ *tels que la suite* $(n^{-1} \log la_n \mid n \geqq 0)$ *ait ses valeurs d'adhérence bornées et dans* $\partial C(t)$.

La mesure μ_t *est concentrée sur* $E_{\partial C(t)}$.

(iv) *Lorsque la fonction* $C(t)$ *est différentiable en* $t \in \mathbf{R}^d$, *la mesure* μ_t *est concentrée sur l'ensemble des* $a \in \{0, 1, \ldots, p-1\}^{\mathbf{N}}$ *tels que*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log l a_n = C'(t)$$

et l'entropie de la mesure μ_t *est donnée par* $I(C'(t))$.

La démonstration des points (iii) et (iv) résulte de (2.5.1) et (3.3.1). Évidemment, la constante K qui intervient dépend de $t \in \mathbf{R}^d$. Précisons cette dépendance. Notons M la constante de quasi additivité de la mesure et L_k celle de chacune des composantes quasi additives l_k du vecteur d'énergie l. En passant à la puissance t_k, vient une constante $L_k^{|t_k|}$. Pour la convergence de $C_n(t)$ vers $C(t)$, on a :

$$|C(t) - C_n(t)| \leqq \frac{1}{n}\left(\log M + \sum_{k=0}^{d-1} |t_k| \operatorname{Log} L_k\right).$$

(remarquons que ceci assure la convergence uniforme sur les compacts.)

(4.6.2) *Pour la constante* K *du théorème précédent, on peut prendre :*

$$\log K = 12\left(\log M + \sum_{k=0}^{d-1} |t_k| \log L_k\right).$$

5. RETOUR AU CAS GÉNÉRAL

5.0. Replaçons-nous dans le cadre général d'un arbre $(E_0, E_1, \ldots)$ pondéré par $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots)$, muni d'un vecteur-énergie l à valeur dans $\mathbf{R}_+^{*d}$ et d'une probabilité μ. Rappelons que μ_n note la probabilité image sur E_n, et l_n le vecteur restreint à E_n. Nous ferons en outre l'hypothèse qui suit sur la pondération :

(5.0.1) *Pour tout* $s > 0$, $\varepsilon_0^s + \varepsilon_1^s + \ldots < \infty$.

5.1. Pour $t \in \mathbf{R}^d$ fixé, et pour chaque niveau n, viennent la fonction de partition

$$Z_n(t) = \sum_{a \in E_n} l_n^{-t} a \, \mu_n a$$

et l'énergie libre

$$C_n(t) = \frac{1}{-\log \varepsilon_{n-1}} \log Z_n(t).$$

Notons $Z(t, s)$ la somme de la série suivante, prise dans $[0, \infty]$:

$$Z(t, s) = 1 + Z_1(t)\varepsilon_0^s + Z_2(t)\varepsilon_1^s + \ldots$$

Clairement,

(5.1.1) *Pour* $t \in \mathbf{R}^d$, *l'abscisse de convergence de cette série est donnée par* $\limsup_{n \to \infty} C_n(t)$.

Nous maintenons l'hypothèse (2.1.1) sur la convergence de $C_n(t)$ vers $C(t)$. Reprenons la construction de la famille de probabilités faite en 4.5, en remplaçant la suite $(e^{-s}, e^{-2s}, \ldots)$ par $(\varepsilon_0^s, \varepsilon_1^s, \ldots)$. Ceci conduit à une fonction sur E, à valeur dans $[0, \infty]$

$$\varphi_{(t, s)} = 1 + l_1^{-t} \varepsilon_0^s + l_2^{-t} \varepsilon_1^s + \ldots$$

telle que $\int \varphi_{(s, t)} d\mu = Z(t, s)$. De la sorte, lorsque (t, s) est dans l'épigraphe de la fonction convexe $C : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$, on obtient une probabilité $P_{(t, s)} = Z(t, s)^{-1} \varphi_{(t, s)} \mu$.

5.2. Par données renormalisées en le nœud $a \in E_k$ de l'arbre, nous entendons les données suivantes sur l'arbre de racine a :

– pondération $(\varepsilon_{k+n}/\varepsilon_{k-1} \mid n \geqq 0)$

– vecteur énergie, à valeur dans $\mathbf{R}_+^{*d}$: $l/l_k(a)$.

Écrivons cette fonction génératrice $Z_a(t, s)$:

$$Z_a(t, s) = 1 + \Big(\sum_{fb=a} l_{k+1}^{-t} b / l_k^{-t} a \, \mu_b/\mu_a\Big)(\varepsilon_k/\varepsilon_{k-1})^s + \ldots$$

Toujours en suivant 4.5, écrivons :

$$P_{(t, s)}(a) = \frac{\mu a}{Z(t, s)}(1 + l^{-t} a_1 \varepsilon_0^s + \ldots + l^{-t} a_{k-1} \varepsilon_{k-2}^s) + \mu a l^{-t} a \varepsilon_{k-1}^s \frac{Z_a(t, s)}{Z(t, s)}.$$

On montre alors :

(5.2.1) *Il existe une mesure de Gibbs de paramètre* $t \in \mathbf{R}^d$ *sous les hypothèses suivantes :*

(i) $C(t) = C_n(t) + O\left(\dfrac{1}{-\log \varepsilon_{n-1}}\right)$

(ii) *Il existe une constante* $K > 0$ *telle que, pour tout nœud a :*

$$K^{-1} \leqq \frac{Z_a(t, s)}{Z(t, s)} \leqq K.$$

RÉFÉRENCES

[1] R. Bowen, Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms, *Lectures Notes in Mathematics*, n° 470, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[2] T. Bohr et D. Rand, The Entropy Function for characteristic Exponents, *Physica*, 25 D, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[3] P. Collet, J. Lebowitz et A. Porzio, The Dimension Spectrum of some Dynamical Systems, *J. Statistical Physics*, vol. **47**, 1987, p. 609-644.

[4] R. S. ELLIS, *Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics*, Grundlehren der Math. Wiss., Springer-Verlag, New York. 1985.
[5] G. MICHON, Les Cantors réguliers, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **300**, Séries I, 1987, p. 673-675.
[6] G. MICHON, *Arbre, Cantor, Dimension*, Preprint, Dijon, 1988, 122 p.
[7] G. MICHON, Preprint, Dijon, 1988.
[8] G. MICHON, *Sur la dimension de Bouligand du Cookie-cutter Cantor set*, Preprint, Dijon, 1988.
[9] G. PÓLYA et G. SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Grundlehren der Math. Wiss., Springer-Verlag, Berlin, 1964.
[10] D. RAND, The singularity Spectrum $f(\alpha)$ for Cookie-Cutters, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, vol. **9**, 1989, p. 527-541.

(*Manuscrit reçu le* 7 *juillet*, 1991;
version révisée reçue le 15 *juillet* 1992.)