ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

PATRICK CABAU
JOSEPH GRIFONE
MOHAMAD MEHDI

Existence de lois de conservation dans le cas cyclique

Annales de l'I. H. P., section A, tome 55, nº 3 (1991), p. 789-803
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1991__55_3_789_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 55, n° 3, 1991, p. 789-803. *Physique théorique*

Existence de lois de conservation dans le cas cyclique

par

Patrick CABAU, Joseph GRIFONE et Mohamad MEHDI

Laboratoire de Topologie et Géométrie, U.R.A. C.N.R.S. 1408,
Département de Mathématiques, Université Paul-Sabatier,
118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex, France

RÉSUMÉ. — En utilisant la théorie de l'intégrabilité formelle de Spencer-Quillen-Goldschmidt, on démontre l'existence de lois de conservation par rapport à un champ d'endomorphismes cyclique h dont la torsion de Nijenhuis est nulle. On améliore ainsi un résultat de Osborn. Les techniques utilisées permettent de résoudre le problème dans le cas où h n'est pas cyclique (*cf.* [4]).

ABSTRACT. — Using the theory of formal integrability of Spencer-Quillen-Goldschmidt, we show the existence of conservation laws by respect a field of cyclic endomorphisms h whose Nijenhuis torsion is zero. We thus improve one Osborn's result. The techniques used here allow to solve the case where h is not cyclic (*cf.* [4]).

INTRODUCTION

Une loi de conservation sur une variété M par rapport à un champ d'endomorphismes h de TM est une 1-forme scalaire θ telle que $d\theta = 0$ et $dh^* \theta = 0$, où h^* est le transposé de $h((h^* \theta)(X) := \theta(hX))$. Le rôle des lois de conservation dans l'intégration des systèmes différentiels est bien connu (*cf.* par exemple [5]). Elles interviennent aussi dans l'étude des systèmes complètement intégrables, h étant l'opérateur de récursion (*cf.* [6] où elles sont appelées « formes fondamentales »).

Osborn a établi l'existence (locale) des lois de conservation lorsqu'il existe un système de coordonnées locales dans lequel h est représenté par une matrice à coefficients constants, (*cf.* [7]).

L'étude de l'intégrabilité formelle du système $d\theta=0$, $dh^*\theta=0$ dans le cadre général fait intervenir, d'une manière pratiquement incontournable, la condition $[h, h]=0$, où $[h, h]$ est le crochet de Nijenhuis. Une variété munie d'un champ d'endomorphismes h tel que $[h, h]=0$ est appelée « variété de Nijenhuis ». Dans ce contexte le problème est encore ouvert et il semble bien que la démonstration doive se faire en passant par l'étude des parties cycliques de h (1).

Dans [8] Osborn a montré l'existence des lois de conservation par rapport à h sur une variété de Nijenhuis dans le cas où h est cyclique et vérifie de plus la condition suivante : il existe une génératrice v [c'est-à-dire un champ de vecteurs v tel que en tout point $v, h(v), h^2(v), \ldots, h^{n-1}(v)$ forment une base telle que $v, h(v), \ldots, h^{n-1}(v)$ commutent].

Cette condition non seulement n'a pas une interprétation géométrique claire, mais en plus, dans la pratique, elle n'est pas utilisable, car il n'existe pas d'algorithme qui permette de savoir si une telle génératrice existe ou non.

Dans cet article nous nous proposons de nous débarrasser de cette condition, en utilisant la théorie l'intégrabilité formelle des systèmes d'équations aux dérivés partielles, *cf.* par exemple [3], [9], [10].

En plus de généraliser le résultat de Osborn, la présentation que nous donnons ici permet de mettre en évidence les techniques pour la démonstration de l'involution de l'opérateur différentiel et pour la recherche de l'espace des obstructions, qui devrait faciliter l'étude dans le cas général.

REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient M. le Professeur J. Gasqui pour les savoir initiés aux techniques utilisées et leur avoir signalé ce problème.

---

(1) *Cf.* [4] : résultats obtenus en cours de publication du présent article.

1. NOTATIONS ET RAPPELS SUR LA THÉORIE DE L'INTÉGRABILITÉ FORMELLE

On peut trouver un bon exposé de la théorie de l'intégrabilité formelle dans [2]. Nous donnons ici l'idée générale qui permet de préciser les notations et de suivre la démarche de la démonstration.

Soit M une variété différentiable de dimension n; on notera T et T^* les fibrés tangent de cotangent, $\Lambda^k T^*$ et $S^k T^*$ les fibrés des k-formes respectivement alternées et symétriques. Soit $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibré vectoriel de rang m sur M. $\underline{E}$ désignera l'espace des sections de E et $J_k(E)$ le fibré des jets d'ordre k des sections de E.

Si $\pi_k : J_k(E) \to J_{k-1}(E)$ désigne la surjection canonique, on a :

$$\operatorname{Ker} \pi_k \simeq S^k T^* \otimes E$$

d'où la suite exacte :

$$0 \to S^k T^* \otimes E \xrightarrow{\varepsilon} J_k(E) \xrightarrow{\pi_k} J_{k-1}(E) \to 0.$$

Soit F un autre fibré vectoriel sur M et $P : \underline{E} \to \underline{F}$ un opérateur différentiel linéaire d'ordre k. On peut identifier P à un morphisme de fibrés vectoriels $p_0(P) : J_k(E) \to F$. Si $p_0(P)$ est de rang constant et $R_k := \operatorname{Ker} p_0(P)$, on a la suite exacte

$$0 \to R_k \to J_k(E) \xrightarrow{p_0(P)} F \to 0.$$

Le *l-ième prolongement* de P est défini par

$$\begin{aligned} p_l(P) : \quad & J_{k+l}(E) \to J_l(F) \\ & j_{k+l}(s)(x) \to j_l(P\,s)_x. \end{aligned}$$

On pose

$$R_{k+l} := \operatorname{Ker} p_l(P).$$

R_{k+l} est dit *espace des solutions formelles d'ordre* $k+l$.

DÉFINITION 1.1. — L'opérateur P est dit *formellement intégrable* si toutes les applications $\pi_{k+l} \to R_k$ $(l \geqq 1)$ sont surjectives.

Dans le contexte analytique l'intégrabilité formelle équivaut à l'existence de solutions « pour toute condition initiale ». Plus précisément on a :

THÉORÈME 1.1. — *Si* P *est un opérateur différentiel linéaire d'ordre* k *analytique et formellement intégrable, alors* $\forall x_0 \in M$ *et* $\forall F_0 \in R_{k, x_0}$, *il existe une section* f *de* E *définie sur un voisinage* U *de* x_0, *telle que sur* U

$$P(f) = 0 \qquad et \qquad (j_k f)(x_0) = F_0.$$

Pour montrer l'intégrabilité formelle il faudrait, d'après la définition, vérifier une infinité de conditions. Le théorème de Cartan-Kähler permet d'établir l'intégrabilité formelle à l'aide d'un nombre fini de vérifications. Il faut pour cela définir la notion d'« involution ». (Pour simplifier l'exposé nous donnons ici comme définition la condition nécessaire et suffisante de Serre.)

On appelle *symbole de* P l'application

$$\sigma_0(\mathrm{P}) := p_0(\mathrm{P}) \circ \varepsilon$$

$$\sigma_0(\mathrm{P}): \quad \mathrm{S}^k \mathrm{T}^* \otimes \mathrm{E} \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{J}_k \mathrm{E} \xrightarrow{p_0(\mathrm{P})} \mathrm{F}.$$

On rappelle que ε est défini de la manière suivante. Soit $x \in \mathrm{M}$, $s \in \underline{\mathrm{E}}$ et $f_1, \ldots, f_k$ des germes de fonctions en x sur M s'annulant en x; on a :

$$\varepsilon((df_1)_x \bullet \ldots \bullet (df_k)_x \otimes s(x)) = j_k(f_1 \ldots f_k s)(x)$$

où $\bullet$ désigne le produit symétrique. Ceci permet de calculer explicitement $\sigma_0(\mathrm{P})$.

Le symbole du l-ième prolongement est défini par

$$\sigma_l(\mathrm{P}): \quad \mathrm{S}^{k+l}\mathrm{T}^* \otimes \mathrm{E} \xrightarrow[\text{naturelle}]{\text{injection}} \mathrm{S}^l \mathrm{T}^* \otimes \mathrm{S}^k \mathrm{T}^* \otimes \mathrm{E} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathrm{S}^l\mathrm{T}^*} \otimes \sigma_0} \mathrm{S}^l \mathrm{T}^* \otimes \mathrm{F}$$

En particulier $\sigma_1(\mathrm{P}): \mathrm{S}^{k+1}\mathrm{T}^* \otimes \mathrm{E} \to \mathrm{T}^* \otimes \mathrm{F}$ est défini par

$$i_{\mathrm{X}} \sigma_1(\mathrm{P})(t) = \sigma_0(\mathrm{P})(i_{\mathrm{X}} t),$$
$$\forall \mathrm{X} \in \mathrm{TM}, \qquad \forall t \in \mathrm{S}^{k+1}\mathrm{T}^* \otimes \mathrm{E}$$

où i_{X} désigne le produit intérieur par X.

Soit $g_l := \mathrm{Ker}\, \sigma_l$. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de T_x, on pose, pour $j = 1, 2, \ldots, n-1$

$$(g_0)_{\{e_1, \ldots, e_j\}} = \{\mathrm{A} \in (g_0)_x \mid i_{e_1}\mathrm{A} = 0, \ i_{e_2}\mathrm{A} = 0, \ldots, i_{e_j}\mathrm{A} = 0\}$$

DÉFINITION 1.2. — *Une base* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_x est dite quasi régulière si

$$\dim(g_1)_x = \dim(g_0)_x + \sum_{j=1}^{n-1} \dim(g_0)_{\{e_1, \ldots, e_j\}}$$

L'opérateur différentiel (linéaire) P est dit *involutif* si en tout point il existe une base quasi régulière.

On a :

THÉORÈME 1.2 (Cartan-Kähler). — *Si* P *un opérateur différentiel linéaire d'ordre* R. *Si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. P *est involutif;*
2. $\pi_{k+1}: \mathrm{R}_{k+1} \to \mathrm{R}_k$ *est surjective*

alors P *est formellement intégrable.*

Pour montrer la surjectivité de π_{k+1}, on considère le diagramme suivant de suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & S^{k+1}T^*\otimes E \arrow[rr, "\sigma_1(P)"] \arrow[d, "\varepsilon"] & & T^*\otimes F \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\varepsilon"] & K := \dfrac{T^*\otimes F}{\operatorname{Im}\sigma_1} \arrow[r] & 0 \\
R_{k+1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{k+1}"] & J_{k+1}(E) \arrow[rr, "p_1(P)"] \arrow[d, "\pi_{k+1}"] & & J_1(F) \arrow[d, "\pi_1"] & & \\
R_k \arrow[r] & J_k(E) \arrow[rr, "p_0(P)"] & & F & & \\
 & & S^kT^*\otimes E \arrow[ul, "\varepsilon"] \arrow[ur, "\sigma_0(P)"'] & & &
\end{tikzcd}$$

A l'aide d'un lemme classique d'algèbre homologique, on en déduit l'existence d'une application

$$\varphi: \quad R_k \to K := \frac{T^*\otimes F}{\operatorname{Im}\sigma_1}$$

et $\pi_{k+1}: R_{k+1} \to R_k$ est surjective si et seulement si $\varphi = 0$. K est dit *espace des obstructions*.

Pour calculer φ, on considère une connexion ∇ quelconque sur le fibré F : $\nabla: \underline{F} \to \underline{T^*\otimes F}$. On a :

$$p_0(\nabla): \quad J_1(F) \to T^*\otimes F.$$

Si $x \in M$ et $s \in \underline{E}$ vérifie $P(s)_x = 0$, on voit facilement que

$$\varphi(j_k(s)(x)) = \tau(\nabla P(s))_x.$$

En résumant, pour montrer l'intégralité formelle, il faut :

1. Montrer l'involution de l'opérateur.
2. Construire l'application τ et pour cela avoir une « bonne interprétation » de K.
3. Construire une connexion ∇ sur F telle que pour tout $x \in M$ et pour toute section s de E telle que $P(s)_x = 0$ on ait

$$\tau(\nabla P(s))_x = 0.$$

2. LOIS DE CONSERVATION

DÉFINITION 2.1. — Soit $h \in \underline{T}^*\otimes\underline{T}$. On appelle loi de conservation pour h, en champ de 1-formes $\theta \in \underline{T}$ tel que $d\theta = 0$ et $d(h^*\theta) = 0$.

Puisque le problème qui nous intéresse est local, étudier l'existence des lois de conservation revient à étudier l'existence des fonctions f sur M telles que

$$(1) \qquad d(h^* df)=0.$$

En utilisant les notations de Frölicher-Nijenhus [1], on peut écrire

$$h^* df = i_h df$$

où i_h est la dérivation de type i_* associée à h. La condition (1) s'écrit donc :

$$(1') \qquad dd_h f = 0$$

où d_h est la dérivation de type d_* associée à f : $d_h = i_h d - di_h$ (i_h est nulle sur les fonctions).

Toujours selon la théorie de Frölicher-Nijenhuis, à h est associé le tenseur $[h, h] \in \Lambda^2 \mathrm{T}^* \otimes \mathrm{T}$, défini par

$$\frac{1}{2}[h, h](\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = [h\mathrm{X}, h\mathrm{Y}] + h^2[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] - h[h\mathrm{X}, \mathrm{Y}] - h[\mathrm{X}, h\mathrm{Y}].$$

Une variété munie d'un champ d'endomorphismes h tel que $[h, h]=0$ est dite variété de Nijenhuis.

On montre que :

$$d_h^2 = d_{(1/2)[h, h]}.$$

Il s'ensuit que sur une variété de Nijenhuis $d_h^2 = 0$.

Le but de cet article est d'étudier l'intégrabilité formelle de l'opérateur différentiel

$$\mathrm{P} : \quad \mathscr{C}^\infty(\mathrm{M}) \to \underline{\Lambda^2 \mathrm{T}^*}$$
$$f \to dd_h f$$

sur une variété de Nijenhuis dans le cas où h est cyclique.

On rappelle qu'un endomorphisme h d'un espace vectoriel est dit cyclique si son polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique, ou, ce qui est équivalent, il existe un vecteur v tel que $\{v, h(v), h^2(v), \ldots, h^{n-1}(v)\}$ est une base; v est dit génératrice.

Les paragraphes qui suivent sont consacrés à la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. — *Soit* (M, h) *une variété de Nijenhuis avec h cyclique. Alors l'opérateur différentiel*

$$\mathrm{P} : \quad \mathscr{C}^\infty(\mathrm{M}) \to \underline{\Lambda^2 \mathrm{T}^*}$$
$$f \to dd_h f$$

est formellement intégrable.

Puisque P est d'ordre 2 il s'agit d'étudier le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & S^3 T^* \arrow[rr, "\sigma_1 (P)"] \arrow[d, "\varepsilon"] & & T^* \otimes \Lambda^2 T^* \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\varepsilon"] & K \arrow[r] & 0 \\
R_3 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_3"] & J_3 (\mathbb{R}) \arrow[rr, "p_1 (P)"] \arrow[d, "\pi_3"] & & J_1 (\Lambda^2 T^*) \arrow[d, "\pi_1"] & & \\
R_2 \arrow[r] & J_2 (\mathbb{R}) \arrow[rr, "p_0 (P)"] & & \Lambda^2 T^* & & \\
 & & S^2 T^* \arrow[ul, "\varepsilon"] \arrow[ur, "\sigma_0 (P)"'] & & &
\end{tikzcd}$$

3. INVOLUTION DU SYMBOLE

LEMME 3.1. — *Le symbole de* P *est l'application*

$$\begin{aligned} \sigma_0 (P) : \quad & S^2 T^* \to \Lambda^2 T^* \\ & A \to \sigma_0 (A) \end{aligned}$$

où

$$\sigma_0 (A) (X, Y) = A (X, h Y) - A (h X, Y).$$

Soient en effet f et g deux germes de fonctions en x tels que $f(x) = g(x) = 0$. On a, pour toute $s \in \underline{\mathbb{R}}$ [c'est-à-dire $s \in \mathscr{C}^\infty (M)$]

$$\begin{aligned} \sigma_0 (df \bullet dg \otimes s)_x = dd_h (f . g . s)_x = d ((f d_h g + g d_h f) s)_x \\ = s (x) [(df \wedge d_h g)_x + (dg \wedge d_h f)_x]. \end{aligned}$$

Donc pour tout X, $Y \in T_x M$

$$\begin{aligned} & \sigma_0 (df \bullet dg)_x (X, Y) \\ & \qquad = (df \otimes dg)_x (X, h Y) - (df \otimes dg)_x (Y, h X) \\ & \qquad (df \otimes dg)_x (h Y, X) - (df \otimes dg)_x (h X, Y) \\ & \qquad\qquad = (df \bullet dg) (X, h Y) - (df \bullet dg) (h X, Y) \end{aligned}$$

d'où, par linéarité, l'expression de $\sigma_0 (P)$. □

On en déduit immédiatement que le premier prolongement du symbole est donné par

$$\begin{aligned} \sigma_1 : \quad & S^3 T^* \to T^* \otimes \Lambda^2 T^* \\ & B \to \sigma_1 (B) \end{aligned}$$

où

$$\sigma_1 (B) (X, Y, Z) = (B (X, Y, h Z) - B (X, h Y, Z).$$

PROPOSITION 3.2. — *L'opérateur* P *défini sur* $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{M})$ *par* $\mathrm{P}f := dd_h f$ *est involutif.*

Soit en effet $v_1 \in \mathrm{T}_x\mathrm{M}$ une génératrice et considérons la base $\{v_i\}_{i=1,\ldots,n}$ définie par

$$v_i = h^{i-1}(v_1) \qquad (h^0 = id).$$

On a :

$$(g_0)_x = \mathrm{Ker}(\sigma_0)_x = \{\mathrm{A} \in \mathrm{S}^2\mathrm{T}_x^* \mid \mathrm{A}(\mathrm{X}, h\mathrm{Y}) = \mathrm{A}(h\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \forall \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{T}_x\mathrm{M}\}.$$

Donc si $\mathrm{A} \in \mathrm{Ker}(\sigma_0)_x$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{A}(v_i, v_j) &= \mathrm{A}(h^{i-1}v_1, h^{j-1}v_1)\\ &= \mathrm{A}(v_1, h^{i+j-2}v_1) \quad \text{pour tout } i, j = 1, 2, \ldots, n.\end{aligned}$$

Puisque pour tout $q \in \mathbb{N}$, $h^q v_1$ est combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$, $\mathrm{A}(v_i, v_j)$ s'écrit à l'aide des $\mathrm{A}(v_1, v_j)_{j=1,\ldots,n}$. En d'autres termes, les $\mathrm{A}_i \in \mathrm{S}^2\mathrm{T}_x^*$ définies par

$$\begin{cases} \mathrm{A}_i(v_j, v_k) = 0 & \text{si } j \geqq 2, \quad k \geqq 2\\ \mathrm{A}_i(v_1, v_j) = \mathrm{A}_i(v_j, v_1) = \delta_{ij} & \text{pour } j = 1, \ldots, n\end{cases}$$

forment une famille génératrice de $(g_0)_x$. Puisqu'il s'agit d'une famille libre, on a :

$$\dim(g_0)_x = n.$$

De même :

$$\begin{aligned}(g_1)_x &= \mathrm{Ker}(\sigma_1)_x\\ &= \{\mathrm{B} \in \mathrm{S}^3\mathrm{T}_x^* \mid \mathrm{B}(\mathrm{X}, h\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \mathrm{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, h\mathrm{Z}), \forall \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z} \in \mathrm{T}_x\}\end{aligned}$$

donc, si $\mathrm{B} \in (g_1)_x$:

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(v_i, v_j, v_k) &= \mathrm{B}(h^{i-1}v_1, h^{j-1}v_1, h^{k-1}v_1)\\ &= \mathrm{B}(h^{i-1}v_1, v_j, h^{j+k-2}v_1) = \mathrm{B}(v_1, h^{i-1}v_1, h^{j+k-2}v_1)\\ &= \mathrm{B}(v_1, v_1, h^{i+j+k-3}v_1) \text{ pour tous } i, j, k \geqq 1.\end{aligned}$$

Un argument analogue à celui exposé ci-dessous, montre que

$$\dim(g_1)_x = n.$$

Montrons maintenant que la base $\{v_i\}_{i=1,\ldots,n}$ est quasi régulière. On a :

$$(g_0)_{x\{v_1\}} = \{\mathrm{A}' \in \mathrm{Ker}(\sigma_0)_x \mid i_{v_1}\mathrm{A}' = 0\}.$$

Si $\mathrm{A}' \in (g_0)_{x\{v_1\}}$ et $\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n} a_i h^{i-1}v_1$, on a :

$$\mathrm{A}'(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{A}'(h^{i-1}v_1, \mathrm{Y}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{A}'(v_1, h^{i-1}\mathrm{Y}) = 0.$$

Donc $\dim(g_0)_{x\{v_1\}}=0$ et, par conséquent, $\dim(g_0)_{x\{v_1,\ldots,v_j\}}=0$ pour $j=1,\ldots,n-1$.

Ainsi :

$$\dim(g_1)_x=\dim(g_0)_x+\sum_{j=1}^{n-1}\dim(g_0)_{x\{v_1,\ldots,v_j\}}$$

ce qui montre que la base $\{v_i\}_{i=1,\ldots,n}$ est quasi régulière. $\square$

4. RECHERCHE DES OBSTRUCTIONS

LEMME 4.1. – *L'espace des obstructions* $\mathrm{K}:=\dfrac{\mathrm{T}^*\otimes\Lambda^2\mathrm{T}^*}{\mathrm{Im}\,\sigma_1}$ *est isomorphe à* $\Lambda^3\mathrm{T}^*\times\Lambda^3\mathrm{T}^*$.

On a en effet

$$\dim(\mathrm{Im}\,\sigma_1)=\dim\mathrm{S}^3\mathrm{T}^*-\dim(\mathrm{Ker}\,\sigma_1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}-n$$

donc

$$\begin{aligned}\dim\mathrm{K}&=\frac{n^2(n-1)}{2}-\dim(\mathrm{Im}\,\sigma_1)\\&=\frac{n^2(n-1)}{2}-\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+n\\&=\frac{n^3-3n^2+2}{6}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=2\dim(\Lambda^3\mathrm{T}^*).\quad\square\end{aligned}$$

PROPOSITION 4.2. – *Soient*

$$\tau_i:\quad \mathrm{T}^*\otimes\Lambda^2\mathrm{T}^*\to\Lambda^3\mathrm{T}^*\qquad(i=1,2)$$

définies par

$$(\tau_1\mathrm{C})(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})=\underset{\mathrm{XYZ}}{\mathfrak{S}}\mathrm{C}(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})$$
$$(\tau_2\mathrm{C})(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})=\underset{\mathrm{XYZ}}{\mathfrak{S}}\mathrm{C}(h\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})$$

(*où* $\underset{\mathrm{XYZ}}{\mathfrak{S}}$ *désigne la somme sur les permutations cycliques de* X, Y, Z). *Alors la suite*

$$\mathrm{S}^3\mathrm{T}^*\xrightarrow{\sigma_1(p)}\mathrm{T}^*\otimes\Lambda^2\mathrm{T}^*\xrightarrow{\tau=\tau_1\times\tau_2}\Lambda^3\mathrm{T}^*\times\Lambda^3\mathrm{T}^*\to 0$$

est exacte.

DÉMONSTRATION. — On voit facilement que l'on a bien $\operatorname{Im}\tau_i \subset \Lambda^3 T^*$ (pour $i=1, 2$) et que $\operatorname{Im}\sigma_1 \subset \operatorname{Ker}\tau$. Il suffira donc de montrer que τ est surjective, c'est-à-dire que :

$$\dim \operatorname{Im}\tau = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}.$$

Or $\dim \operatorname{Im}\tau$ est donnée par le nombre d'équations linéairement indépendantes du système

$$\begin{cases} \underset{ijk}{\mathfrak{S}} C(v_i, v_j, v_k)=0, & 1 \leqq i<j<k \leqq n \\ \underset{ijk}{\mathfrak{S}} C(hv_i, v_j, v_k)=0, & 1 \leqq i<j<k \leqq n \end{cases}$$

Puisque ce système comporte $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3}$ équations, il s'agit de montrer que ces équations sont toutes indépendantes entre elles.

Préliminaires algébriques

La démonstration repose sur une application de la méthode du pivot de Gauss que nous formaliserons de la façon suivante. *D'une manière intuitive*, étant donné un système d'équations linéaires $\mathscr{S}=\{E_1, \ldots, E_k\}$, on dira qu'une équation E_i est *séparable de $\mathscr{S}$* si parmi les inconnues du système il en existe une — dite pivot — qui apparaît explicitement dans E_i et n'apparaît pas dans les autres équations. Il est clair que si cette équation est séparable du système elle est indépendante des autres équations et que pour montrer que les équations d'un système sont indépendantes entre elles, il suffit de vérifier que l'on peut séparer successivement une par une toutes les équations du système. En effet, on peut ordonner successivement les équations dans l'ordre où elles sont séparées et renuméroter les inconnues selon l'ordre où l'on prend les pivots de manière à ce que la matrice du système soit du type :

$$\begin{pmatrix} a_1 & * & \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \\ 0 & a_2 & * & \ldots & & \\ 0 & 0 & a_3 & * & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \\ 0 & \ldots & 0 & a_k & * & \ldots \end{pmatrix}$$

où les $a_1, \ldots, a_k$ sont les coefficients des pivots et donc sont non nuls.

D'une manière plus précise, soit $\mathscr{S}=\{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ un système de formes linéaires d'un espace vectoriel E muni d'une base $\mathscr{B}=\{v_1, \ldots, v_n\}$. On dit que la forme $\omega_i \in \mathscr{S}$ est *séparable de $\mathscr{S}$* s'il existe un vecteur $v_s \in \mathscr{B}$ — dit pivot — tel que

$$\omega_i(v_s) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \omega_j(v_s)=0 \quad (\text{pour } j \neq i).$$

(dans l'exemple ci-dessus le pivot était l'élément correspondant à v_s dans la base duale de $\mathscr{B}$).

On vérifie facilement les propriétés suivantes :

(*a*) Soit $\mathscr{S}_i = \mathscr{S} - \{\omega_i\}$. Si ω_i est séparable de $\mathscr{S}$, alors ω_i n'appartient pas à l'espace engendré par la famille $\mathscr{S}_i$, c'est-à-dire $\operatorname{rg} \mathscr{S} = \operatorname{rg} \mathscr{S}_i + 1$.

En effet si $\omega_i \in \operatorname{Vect}(\mathscr{S}_i)$ on aurait $\omega_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j \omega_j$; en prenant la valeur sur v_s :

$$\omega_i(v_s) = \sum_{j \neq i} \omega_j(v_s) = 0$$

ce qui est exclus.

(*b*) Soit $\mathscr{S}_{ij} = (\mathscr{S}_i)_j$. S'il existe une permutation σ de $\{1, \ldots, k\}$ telle que

$$\begin{array}{l} \omega_{\sigma_1} \text{ est séparable de } \mathscr{S} \\ \omega_{\sigma_2} \text{ est séparable de } \mathscr{S}_{\sigma_1} \\ \omega_{\sigma_3} \text{ est séparable de } \mathscr{S}_{\sigma_1 \sigma_2} \\ \vdots \\ \omega_{\sigma_k} \text{ est séparable de } \mathscr{S}_{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{k-1}} \end{array}$$

alors la famille $\{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ est libre. (On dira que les ω_i sont séparables « successivement » de $\mathscr{S}$.)

En effet, quitte à changer la numérotation des ω_i et de la base $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ on peut supposer que $\sigma = \mathrm{id}$ et que les pivots sont $v_1, \ldots, v_k$ c'est-à-dire que

$$\begin{array}{lll} \omega_1(v_1) \neq 0, & \omega_j(v_1) = 0 & \text{pour } j > 1 \\ \omega_2(v_2) \neq 0, & \omega_j(v_2) = 0 & \text{pour } j > 2 \\ \vdots & & \\ \omega_{k-1}(v_{k-1}) \neq 0, & \omega_k(v_{k-1}) = 0 & \\ \omega_k(v_k) \neq 0 & & \end{array}$$

Si $\lambda_1 \omega_1 + \ldots + \lambda_k \omega_k = 0$, en prenant la valeur successivement sur v_1, $v_2, \ldots, v_k$, on trouve respectivement $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_k = 0$.

Étude de la surjectivité de τ

Revenons au système à étudier. Nous allons montrer que toutes les équations sont séparables successivement du système.

Notons E_{ijk} l'équation $\underset{ijk}{\mathfrak{S}} \mathrm{C}(v_i, v_j, v_k) = 0$ et E'_{ijk} l'équation $\underset{ijk}{\mathfrak{S}} \mathrm{C}(hv_i, v_j, v_k) = 0$. En posant

$$\mathrm{C}_{abc} = \mathrm{C}(v_a, v_b, v_c)$$

le système $\mathscr{S}$ peut s'écrire

$$\begin{cases} \mathrm{E}_{ijk}: & \mathrm{C}_{ijk}+\mathrm{C}_{jki}+\mathrm{C}_{kij}=0, & 1\leqq i<j<k\leqq n \\ \mathrm{E}'_{ijk}: & \mathrm{C}_{i+1,j,k}+\mathrm{C}_{j+1,i,k}+\mathrm{C}_{k+1,i,j}=0, & 1\leqq i<j\leqq n. \\ \mathrm{E}'_{ijn}: & \mathrm{C}_{i+1,j,n}+\mathrm{C}_{j+1,n,i}+\mathrm{C}_{n+1,i,j}=0, & 1\leqq i<j\leqq n. \end{cases}$$

Or

$$\mathrm{C}_{n+1,i,j}=\mathrm{C}(hv_n, v_i, v_j)=\sum_{l=1}^{n} a_l \mathrm{C}_{lij};$$

le système s'écrit donc :

$$\begin{cases} \mathrm{E}_{ijk}: & \mathrm{C}_{ijk}+\mathrm{C}_{jki}+\mathrm{C}_{kij}=0, & 1\leqq i<j<k\leqq n \\ \mathrm{E}'_{ijk}: & \mathrm{C}_{i+1,j,k}+\mathrm{C}_{j+1,k,i}+\mathrm{C}_{i+1,j,k}=0, & 1\leqq i<j<k\leqq n \\ \mathrm{E}'_{ijn}: & \mathrm{C}_{i+1,j,n}+\mathrm{C}_{j+1,n,i}+\sum_{l=1}^{n} a_l \mathrm{C}_{lij}=0, & 1\leqq i<j\leqq n \end{cases}$$

qui est un système de $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3}$ équations en $\dfrac{n^2(n-1)}{2}$ inconnues, les C_{ijk} $(1\leqq i\leqq n,\ 1\leqq j<k\leqq n)$.

Remarque. — Introduisons la notation suivante :

Soient $\beta\in\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ et $i, j\in\{1, \ldots, n\}$ avec $i<j$. On pose :

$$[\beta, i, j]=\begin{cases} \Phi \text{ si } \beta=0 \text{ ou si } \beta, i, j \\ \text{ne sont pas tous les trois distincts} \\ \quad (\beta, i, j) \quad \text{si} \quad \beta<i \\ \quad (i, \beta, j) \quad \text{si} \quad i<\beta<j \\ \quad (i, j, \beta) \quad \text{si} \quad j<\beta \end{cases}$$

et $\mathrm{E}_\Phi=\Phi$, $\mathrm{E}'_\Phi=\Phi$.

Avec ces notations *l'inconnue* $\mathrm{C}_{\alpha ij}$ $(\alpha\in\{1, \ldots, n\},\ 1\leqq i<j\leqq n)$ *intervient uniquement dans les équations*

$$\mathrm{E}_{[\alpha, i, j]},\quad \mathrm{E}'_{[\alpha-1, i, j]},\quad \mathrm{E}'_{i, j, n}$$

comme on le vérifie immédiatement.

Cette remarque permet de vérifier facilement les lemmes suivants :

LEMME 4.3. — *Les équations* E_{ijn}, E'_{ijn} (*pour chaque* i, j *tels que* $1\leqq i<j\leqq n-1$) *sont successivement séparables du système.*

Démonstration. — Posons $j=i+s$ avec $s=1, 2, \ldots, n-1-i$ et démontrons le lemme par récurrence sur s.

(a) $s=1$. $\mathrm{E}_{i,i+1,n}$ et $\mathrm{E}'_{i,i+1,n}$ sont séparables respectivement par les pivots $\mathrm{C}_{i+1,n,i}$ et $\mathrm{C}_{i+1,i+1,n}$ qui n'interviennent que dans ces équations.

(b) Supposons $\mathrm{E}_{i,i+s,n}$ et $\mathrm{E}'_{i,i+s,n}$ séparables de $\mathscr{S}$ pour tout s tel que $1\leqq s\leqq p$ et notons $\mathscr{S}'$ le système obtenu en supprimant ces équations.

$E'_{i,\,i+p+1,\,n}$ est séparable de $\mathscr{S}'$ par le pivot $C_{i+1,\,i+p+1,\,n}$. Soit $\mathscr{S}''$ le système obtenu de $\mathscr{S}'$ en supprimant ces équations; on voit facilement que $E_{i,\,i+p+1,\,n}$ est séparable de $\mathscr{S}''$ par le pivot $C_{i+p+1,\,n,\,i}$. □

On est ainsi amené à étudier l'indépendance du système

$$\mathscr{S}^* = \{ E_{i,\,j,\,k}\, E'_{i,\,j,\,k} \text{ avec } 1 \leqq i < j < k \leqq n-1 \}.$$

LEMME 4.2. – *Toutes les équations* E_{ijk} *et* E'_{ijk} *avec* $1 \leqq i < j < k \leqq n-1$ *sont successivement séparables de* $\mathscr{S}^*$.

Démonstration. – Posons $k=j+s$ avec $1 \leqq s \leqq n-1-j$ et montrons le lemme par récurrence sur s.

(*a*) $s=1$. $E_{i,\,j,\,j+1}$ est séparable par le pivot $C_{j+1,\,i,\,j}$. $E'_{i,\,j,\,j+1}$ est séparable par le pivot $C_{j+1,\,j+1,\,i}$.

(*b*) Supposons que $E_{i,\,j,\,j+s}$ et $E'_{i,\,j,\,j+s}$ sont séparables de $\mathscr{S}^*$ par tout s tel que $1 \leqq s \leqq p$ et soit $\mathscr{S}^*$ le système obtenu en supprimant ces équations. On voit immédiatement que $E'_{i,\,j,\,j+p+1}$ est séparable de $\mathscr{S}^{*\prime}$ par le pivot $C_{j+1,\,j+p+1,\,i}$.

Soit $\mathscr{S}^{*\prime\prime}$ le système obtenu de $\mathscr{S}^{*\prime}$ en supprimant ces équations; $E_{i,\,j,\,j+1}$ est séparable de $\mathscr{S}^{*\prime\prime}$ par le pivot $C_{j+p+1,\,i,\,j}$. □

COROLLAIRE 4.5. – *La suite du symbole du premier prolongement :*

$$S^3T^* \to T^* \otimes \Lambda^2 T^* \xrightarrow{\tau=\tau_1 \times \tau_2} \Lambda^3 T^* \times \Lambda^3 T^* \to 0$$

est exacte.

5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.1

Il reste à démontrer qu'il existe une connexion linéaire ∇ sur $\Lambda^2 T^*$ qui vérifie

$$\tau(\nabla(dd_h f))_x = 0 \quad \text{pour tout } x \in M \text{ tel que } (dd_h f)_x = 0.$$

(Il suffira bien entendu de construire une connexion ∇ sur la variété M c'est-à-dire sur le fibré $TM \to M$, et la prolonger au fibré $\Lambda^2 T^* \to M$.)

LEMME 5.1. – *Pour toute connexion linéaire* ∇ *sur* M *de torsion* T *et pour toute* $\Omega \in \Lambda^2 T^*$, *on a :*

1. $(\tau_1 \nabla \Omega)(X, Y, Z) = (d\Omega)(X, Y, Z) - \underset{XYZ}{\mathfrak{S}}\, \Omega(T(X, Y), Z)$
2. $(\tau_2 \nabla \Omega)(X, Y, Z) = (d_h \Omega)(X, Y, Z)$

$$+ \underset{XYZ}{\mathfrak{S}} [(i_{\nabla_X h} \Omega)(Y, Z) + \Omega(T(hX, Y), Z) - \Omega(T(X, hY), Z) + \Omega(hT(X, Y), Z)].$$

En particulier, si $\Omega_x = 0$ *on a*

$$(\tau_1 \nabla \Omega)_x (X, Y, Z) = (d\Omega)_x (X, Y, Z)$$
$$(\tau_2 \nabla \Omega)_x (X, Y, Z) = (d_h \Omega)_x (X, Y, Z).$$

Démonstration. — On a

1. $$\begin{aligned}(d\Omega)(X, Y, Z) &= \underset{XYZ}{\mathfrak{S}} (X.\Omega(Y, Z) - \Omega([X, Y], Z)) \\ &= \underset{XYZ}{\mathfrak{S}} (X.\Omega(Y, Z) - \Omega(\nabla_X Y, Z) \\ &\quad + \Omega(\nabla_Y X, Z) + \Omega(T(X, Y), Z)) \\ &= \underset{XYZ}{\mathfrak{S}} [X.\Omega(Y, Z) + \Omega(T(X, Y), Z)] \\ &\quad - \Omega(\nabla_X Y, Z) - \Omega(\nabla_Y Z, X) - \Omega(\nabla_Z X, Y) \\ &\quad - \Omega(Z, \nabla_Y X) - \Omega(Y, \nabla_X Z) - \Omega(X, \nabla_Z Y)] \\ &= \underset{XYZ}{\mathfrak{S}} [(\nabla_X \Omega)(Y, Z) + \Omega(T(X, Y), Z)] \\ &= (\tau_1 \nabla \Omega)(X, Y, Z) + \underset{XYZ}{\mathfrak{S}} \Omega(T(X, Y), Z).\end{aligned}$$

2. Se déduit de 1. par quelques calculs, compte tenu du fait que

$$d_h \Omega = i_h d\Omega - d i_h \Omega$$

et que

$$\nabla_X (i_h \Omega) = i_{\nabla_X h} \Omega + i_h (\nabla_X \Omega) \quad \square$$

COROLLAIRE 5.2. — *Si* $(dd_h f)_x = 0$, *alors* $\tau(\nabla(dd_h f))_x = 0$.
En effet

$$\begin{aligned}\tau(\nabla dd_h f)_x &= (\tau_1 (\nabla dd_h f)_x, \tau_2 (\nabla dd_h f)_x) \\ &= (d^2 d_h f)_x + (d_h (dd_h f))_x = (d_h (dd_h f))_x \\ &= -(dd_h^2 f)_x = 0 \text{ car } d_h^2 = 0 \text{ puisque } [h, h] = 0.\end{aligned}$$

Le théorème est ainsi démontré.

RÉFÉRENCES

[1] A. FRÖLICHER et A. NIJENHUIS, Theory of Vector-Valued Differential Forms, I, *Nedel. Akad. Wetinsch. Proc.*, vol. **59**, 1956, p. 338-359.

[2] J. GASQUI, Formal Integrability of Systems of Partial Differential Equations, in *Non Linear Equations in Classical and Quantum Fields Theory*, N. SANCHEZ, *Lect. Notes Physics*, n° **226**, 1985, Springer Verlag, p. 21-36.

[3] H. GOLDSCHMIDT, Existence Theorems for Analytic for Analytic Linear Differential Equations, *Ann. Math.*, 1967, p. 246-270.

[4] J. GRIFONE et M. MEHDI, Existence de lois de conservation dans le cas général (à paraître).

[5] P. D. LAX, Hyperbolic Systems of Conservation Laws II, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. **10**, 1957, p. 537-566.

[6] F. MAGRI et C. MOROSI, Quaderno 5/19, *A geometrical characterization of integrable hamiltonian systems*, Université di Milano, 1984.
[7] H. OSBORN, The Existence of Conservation Laws, I, *Ann. Math.*, vol. **69**, 1959, p. 105-118.
[8] H. OSBORN, Les lois de conservation, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, vol. **14**, 1964, p. 71-82.
[9] J. F. POMMARET, *Systems of partial differential equations and Lie pseudogroups*, Gordon and Breach Sc. Publ.
[10] D. C. SPENCER, Overdetermined Systems of Linear Partial Differential Equations, *Bull A.M.S.*, vol. **75**, 1969, p. 179-239.

(*Manuscrit reçu le* 15 *novembre* 1990*;*
version révisée le 13 *mars* 1991.)