ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

YVONNE CHOQUET-BRUHAT
NORBERT NOUTCHEGUEME

Système de Yang-Mills-Vlasov en jauge temporelle

Annales de l'I. H. P., section A, tome 55, nº 3 (1991), p. 759-787
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1991__55_3_759_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 55, n° 3, 1991, p. 759-787. *Physique théorique*

Système de Yang-Mills-Vlasov en jauge temporelle

par

Yvonne CHOQUET-BRUHAT et Norbert NOUTCHEGUEME

Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, Place Jussieu, 75006 Paris Cedex 05, France

RÉSUMÉ. — Nous démontrons pour le système intégrodifférentiel de Yang-Mills-Vlasov, régissant par exemple l'évolution d'un plasma de quarks et de gluons, un théorème d'existence d'une solution locale dans le temps du problème de Cauchy. Nous utilisons la jauge temporelle et des majorations dans des espaces avec un poids approprié pour les impulsions.

ABSTRACT. — We prove a local in time existence theorem of a solution of the Cauchy problem for the Yang-Mills-Vlasov integrodifferential system. Such equations govern the evolution of plasmas, for instance of quarks and gluons (quagmas), where non abelian gauge fields and Yang-Mills charges replace the usual electromagnetic field and electric charge. We work with the temporal gauge and use functional spaces with appropriate weight on the momenta, but no fall off is required in the space direction.

INTRODUCTION

On envisage qu'à très haute température, telle qu'elle se trouvait par exemple dans l'univers primordial, quarks et gluons forment un plasma (quagma) analogue à celui constitué par des électrons se déplaçant librement dans le champ électromagnétique qu'ils créent. Le système d'équations classiques modèlant une telle situation est un système dit de Yang-Mills-Vlasov, couplant les équations d'un champ de jauge dont la source est engendrée par une fonction de distribution de particules chargées, elle-même solution d'une équation de Liouville-Vlasov exprimant la conservation des particules qui suivent, en l'absence de collisions, les trajectoires du champ moyen qu'elles engendrent.

Nous montrons dans cet article que le problème de Cauchy pour un système de Yang-Mills-Vlasov sur une variété régulièrement hyperbolique a une solution locale dans le temps. Nous utilisons la jauge temporelle et des majorations, avec poids dans la direction des impulsions pour la fonction de distribution. Nous ne faisons par contre pas d'hypothèses de décroissance dans les directions spatiales, travaillant dans des ouverts bornés dans ces directions (méthode utilisée dans d'autres cas par [13], [11]).

Le théorème démontré ici et la méthode conforme (*cf.* [8]) permettent de démontrer l'existence globale si la variété est l'espace temps de Minkovski M_4 et les particules ont une masse propre nulle.

1. CHAMP DE YANG-MILLS SUR UNE VARIÉTÉ PSEUDO-RIEMANNIENNE

Soit V une variété différentiable, C^∞, de dimension $d=n+1$ munie d'une métrique riemannienne g de signature hyperbolique $(-, +, \ldots, +)$. Nous supposerons que (V, g) est *régulièrement hyperbolique*, c'est-à-dire :

1° V est un produit $S \times \mathbb{R}$, avec $S_t = S \times \{t\}$ spatial et $\{x\} \times \mathbb{R}$ temporel. Nous désignerons par x^i des coordonnées sur S, par x^0 ou $t \in \mathbb{R}$ une coordonnée temporelle. Sans restreindre la généralité on prendra les lignes de temps orthogonales aux sections d'espace, c'est-à-dire la métrique sous la forme

$$g = -\alpha^2 (dx^0)^2 + g_{ij}\, dx^i\, dx^j \qquad (1.1)$$

Les métriques $g_t = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ induites par g sur S_t sont proprement riemaniennes et uniformément équivalentes à une métrique $\bar{g}$ à rayon d'injectivité δ_0 non nul, donc complète. On suppose qu'il existe des constantes B_1, $B_2 > 0$ telles que dans chaque boule géodésique de rayon $\delta < \delta_0$ pour g_t sur chaque S_t on a en coordonnées normales

$$B_1 \Sigma ((\xi^i)^2 \leqq g_{ij} \xi^i \xi^j \leqq B_2 \Sigma (\xi^i)^2, \qquad \forall (\xi^i) \in \mathbb{R}^n \qquad (1.1)$$

2. Il existe des constantes A_1 et $A_2 > 0$ telles que sur V la fonction lapse α vérifie

$$0 < A_1 < \alpha < A_2 \qquad (1.2)$$

On désigne par A *un potentiel de Yang-Mills* représenté par une 1-forme sur V à valeurs dans une algèbre de Lie $\mathscr{G}$ d'un groupe de Lie G, munie d'un produit scalaire Ad-invariant. On désigne par A^a_μ les composantes de A dans des coordonnées locales x^μ, $\mu=0, 1, \ldots, n$, de V et une base ε_a de $\mathscr{G}$. On désigne par F la *2-forme de courbure* de A, représentée en coordonnées locales x^μ et base ε_a par

$$F^a_{\lambda\mu}=\nabla_\lambda A^a_\mu-\nabla_\mu A^a_\lambda+c^a_{bc}A^b_\lambda A^c_\mu \tag{1.2}$$

où c^a_{bc} sont les constantes de structure du groupe G et ∇ est la dérivée covariante riemannienne dans g. La 2-forme F vérifie les identités

$$\hat{\nabla}_\alpha F_{\lambda\mu}+\hat{\nabla}_\mu F_{\alpha\lambda}+\hat{\nabla}_\lambda F_{\alpha\mu}\equiv 0, \qquad \text{avec} \quad \hat{\nabla}=\nabla+[A, \;] \tag{1.3}$$

où [,] désigne le crochet dans l'algèbre de Lie $\mathscr{G}$.

2. TRAJECTOIRE D'UNE PARTICULE

La charge de Yang-Mills q est représentée par une fonction sur V à valeurs dans $\mathscr{G}$, $q=q^a\varepsilon_a$, de type Ad comme F par changement de jauge. On dénote par un point le produit scalaire Ad-invariant dans $\mathscr{G}$, que l'on suppose défini positif bien que ce ne soit pas nécessaire pour l'instant.

Les trajectoires d'une particule d'impulsion p et de charge q dans un champ de Yang-Mills sur la variété (V, g) vérifient le système différentiel

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx^\alpha}{ds}=p^\alpha, \qquad \frac{dp^\alpha}{ds}=-\Gamma^\alpha_{\lambda\mu}p^\lambda p^\mu+p^\beta q\,.\,F_\beta{}^\alpha \\ &\frac{dq^a}{ds}=-p^\alpha[A_\alpha, q]^a\equiv -p^\alpha c^a_{bc}A^b_\alpha q^c \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

la dernière équation, dite équation de Wong, exprime que la dérivée covariante de jauge de q le long d'une trajectoire est nulle.

L'espace des phases $\mathbb{P}$ des particules avec charge de Yang-Mills est le produit tensoriel fibré au-dessus de V du fibré tangent T(V) et du fibré vectoriel de base V, fibre type $\mathscr{G}$ et groupe l'action adjointe de G. Ce dernier fibré étant ici trivial on prend $\mathbb{P}=T(V)\times\mathscr{G}=\mathbb{R}^2\times T(S)\times\mathscr{G}$. Le système différentiel (2.1) exprime que le vecteur tangent Y à la trajectoire d'une particule dans cet espace de phases est représenté par le triplet

$$Y=(p, P, Q), \qquad \text{avec} \quad P^\alpha=-\Gamma^\alpha_{\lambda\mu}p^\lambda p^\mu+p^\beta q\,.\,F_\beta{}^\alpha, \quad Q^a=-c^a_{bc}p^\alpha A^b_\alpha q^c$$

Si les particules considérées ont une masse propre donnée m, leur espace de phase est le sous-ensemble $\mathscr{P}_m$ de $\mathbb{P}$ défini par

$$-g_{\alpha\lambda}p^\alpha p^\lambda=m^2\geqq 0, \qquad p^0\geqq 0 \tag{2.2}$$

Le champ de vecteurs Y est tangent à l'hyperboloïde $\mathscr{P}_m$ passant par ce point : les trajectoires sont contenues dans l'espace de phase (*i.e.* la masse propre est conservée dans le mouvement), la normale à $\mathscr{P}_m$ est en effet $(\partial_\mu g_{\alpha\lambda} p^\alpha p^\lambda,\ g_{\alpha\lambda} p^\lambda, 0)$ que l'on vérifie être orthogonale à Y. On a $\mathscr{P}_m = \mathbb{R} \times \mathrm{T(S)} \times \mathscr{G}$; des coordonnées locales sur $\mathscr{P}_m$ sont $x^0 = t,\ x^i,\ p^i,\ q^a$. On a sur $\mathscr{P}_m$

$$p^0 = \alpha^{-1} \{ g_{ij} p^i p^j + m^2 \}^{1/2}. \tag{2.3}$$

On a $p^0 \geqq \alpha^{-1} m$ donc, si $m > 0$, x^0 est un paramètre strictement croissant sur une trajectoire. Si $m = 0$ il n'en sera ainsi que tant que $p^0 \neq 0$. Si $p^0 = 0$ on a $p = 0$, c'est un point singulier pour le système différentiel.

Nous écrirons le système différentiel des trajectoires d'une particule de masse m sous la forme

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dz}{d\tau} = \mathrm{X}(z), \\ z = (t, y) \in \mathscr{P}_m, \qquad &t \in \mathrm{r}, \qquad y \in \mathrm{T(S)} \times \mathscr{G}, \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

où le vecteur X est tel que le système (2.4) s'écrit localement

$$\frac{dx^0}{1} = p^0 \frac{dx^i}{p^i} = p^0 \frac{dp^i}{p^i} = p^0 \frac{dq^a}{\mathrm{Q}^a} = d\tau. \tag{2.4}$$

On déduit de (2.3) que p^0 est une fonction C^∞ de x^α et p^i si $p^0 \neq 0$. Alors $(p^0)^{-1} p^i$, et aussi $(p^0)^{-1} p^i$, $(p^0)^{-1} \mathrm{Q}^a$ sont des fonctions de classe C^k sur $\mathscr{P}_m$ s'il en est ainsi de A et F.

On désigne par $\mathrm{V_T}$ [resp. $\mathbb{P}_\mathrm{T}$] *la variété* $\mathrm{S} \times (-\mathrm{T}, \mathrm{T})$ [resp. $\mathrm{T(V_T)} \times \mathscr{G}$].

THÉORÈME. — *Si* F *est différentiable sur* $\mathrm{V_T}$ *et bornée ainsi que sa dérivée la trajectoire* $\tau \mapsto z(\tau, z_0) = (t_0 + \tau, y_\tau(z_0))$ *d'une particule de masse m issue de* $z_0 = (t_0, y_0)$ *est définie pour tout* τ *tel que* $0 \leqq \tau < \mathrm{T} - t_0$ *quel que soit* y_0 *quand* $m > 0$.

Si de plus A et F sont C^∞ l'application $y_0 \mapsto y_\tau$ est C^∞.

COROLLAIRE. — *Si* $m = 0$ *et* $p_0^0 > 0$ *la trajectoire est définie dans un intervalle tel que* $0 \leqq \tau < \mathrm{Min}(\mathrm{T} - t_0, \varepsilon(z_0))$, *où* $\varepsilon(z_0) > 0$ *ne dépend que de la borne* C^1 *de* F *sur* $\mathrm{V_T}$, *et de* p_0^0.

Preuve. — 1° Existence et unicité locales : le champ de vecteurs X est de classe C^1 sur $\mathbb{P}_\mathrm{T}$. Pour tout $z_0 \in \mathbb{P}_\mathrm{T}$ il existe donc $\varepsilon(z_0) > 0$ tel que le système (2.4) ait pour $\tau < \varepsilon(z_0)$ une solution et une seule telle que $z(0) = z_0$. On a $z = (t, y)$, $y \in \mathrm{T(S)} \times \mathscr{G}$. La solution $z(\tau)$ est donnée par

$$t(\tau, t_0, y_0) = t_0 + \tau \tag{2.5 a}$$

alors que $y(\tau, t_0, y_0)$ est en coordonnées locales

$$(x^i(\tau, t_0, y_0),\ p^i(\tau, t_0, y_0),\ q^a(\tau, t_0, y_0)) \tag{2.5 b}$$

prenant pour $\tau = 0$ les valeurs (x_0^i, p_0^i, q_0^a). Il résulte de (2.5 a) que cette trajectoire coupe chaque sous-variété $\mathrm{T(S}_t) \times \mathscr{G}$, avec $0 \leqq t - t_0 < \varepsilon(z_0)$, $t < \mathrm{T}$ en un point $y_t(z_0) = y(t - t, t_0, y_0)$.

Remarque. — On déduit des hypothèses faites sur (V, g) que

$$\varepsilon(z_0)=\mathrm{Min}(\mathrm{T}-t_0,\ \varepsilon(\mathrm{T},\mathrm{K}))$$

où $\varepsilon(\mathrm{T},\mathrm{K})$ ne dépend que des normes C^1 de F et A sur $\mathrm{V_T}$ et de $g_{ij}p_0^i p_0^j$, $|q_0|$.

2° L'existence et unicité globales reposeront sur les lemmes suivants.

LEMME 1. — *Toute trajectoire issue d'un point z_0 vérifie des inégalités* a priori

$$g_{ij}p^i p^j<\mathrm{K}_1,\qquad |q|<\mathrm{K}_2 \tag{2.6}$$

Preuve. — (*a*) On voit sur l'expression de Q^a que $q.\mathrm{Q}=0$, les solutions de (2.4) vérifient donc

$$\frac{d|q|^2}{d\tau}=0,\qquad \text{donc}\quad |q(\tau,z_0)|=|q(0,z_0)| \tag{2.7}$$

(*b*) Posons

$$u(\tau)=(g_{ij}p^i p^j)(\tau,z_0).$$

On a :

$$\frac{du}{d\tau}=2\,g_{ij}p^i\frac{dp^j}{d\tau}+\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau}p^i p^j$$

d'où, en utilisant le système (2.4) et l'expresssion des $\Gamma^j_{\lambda\mu}$

$$\frac{du}{d\tau}=2p^i\mathrm{F}_{0\,i}.q-p^h p^k\frac{\partial g_{hk}}{\partial x^0}+p^i p^0\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}$$

d'où (C et $\mathrm{C}_{\partial g}$ désignent des constantes, $\mathrm{C}_{\partial g}$ est nul pour une métrique plate)

$$\frac{du}{d\tau}\leqq \mathrm{C}\,u^{1/2}|\mathrm{F}|.|q|+u\,\mathrm{C}_{\partial g} \tag{2.7}$$

on en déduit par un théorème classique pour les équations différentielles (on utilise aussi le résultat $|q|=\mathrm{Cte}$ sur une trajectoire)

$$u^{1/2}(\tau)\leqq u^{1/2}(0)\exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{C}_{\partial g}\tau\right)+\exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{C}_{\partial g}\tau\right)\times\int_0^\tau\frac{1}{2}\mathrm{C}\,\|\mathrm{F}\|_{\mathrm{C}^0(\mathrm{V_T})}\exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{C}_{\partial g}\sigma\right)d\sigma \tag{2.8}$$

d'où l'existence de la constante C(T) telle que $u(\tau)\leqq\mathrm{C(T)}$ quand $\tau\leqq\mathrm{T}-t_0$, $0\leqq t_0<\mathrm{T}$.

LEMME 2. — *Soient x_0 et x_t les images dans la projection* $\mathrm{T(S)}\to\mathrm{S}$ *des points y_0 et y_t où une même trajectoire de* X *coupe les variétés* $\mathrm{T(S_0)}\times\mathscr{G}$ *et*

$T(S_t) \times \mathscr{G}$. *Soit d la distance dans* $(S, \bar{g})$ *on a :*

$$d(x_0, x_t) \leqq C(t - t_0) \tag{2.10}$$

Preuve. — Considérons la courbe $\gamma : \tau \mapsto x(\tau)$ projection sur S de la trajectoire de X passant par (t_0, y_0). La distance $d(x_0, x_t)$ est au plus égale à la longueur le long de cette courbe, c'est-à-dire

$$d(x_0, x_t) \leqq \int_0^t \left\{ \bar{g}_{ij}(x(\tau)) \frac{dx^i\, dx^j}{d\tau\, d\tau} \right\}^{1/2} d\tau \tag{2.11}$$

le long de γ on a

$$\bar{g}_{ij} \frac{dx^i\, dx^j}{d\tau\, d\tau} = \frac{\bar{g}_{ij} p^i p^j}{(p^0)^2} \leqq C,$$

d'où le resultat annoncé.

Preuve du théorème. — On déduit l'existence globale de l'existence locale et des majorations *a priori* comme suit : désignons par μ le supremum des valeurs de τ pour lesquelles la solution $\tau \mapsto z(\tau, z_0)$ existe. Supposons $\mu < T - t_0$. Prenons $\tau_\eta = \mu - \eta$ et posons $z_\eta = z(\tau_\eta, z_0)$. Le système (2.4) admet une solution $\sigma \mapsto z(\sigma, z_\eta)$, avec $z(0, z_\eta) = z_\eta$, pour $\sigma < \varepsilon(T, K)$. On a (résultat classique conséquence de l'unicité) $z(\sigma, z_\eta) = z(\sigma + \tau_\eta, z_0)$. Il suffit de prendre $\eta < \mu - \varepsilon(T, K)$ pour voir que $\mu < T - t_0$ ne peut pas être le supremum concerné.

Preuve du corollaire. — Elle résulte de la minoration sur une trajectoire

$$g_{ij} p^i p^j \geqq c > 0 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq \tau < \varepsilon(z_0) \tag{2.9}$$

que l'on prouve, avec la propriété annoncée de $\varepsilon(z_0)$, en déduisant de (2.7) l'inégalité obtenue en soustrayant $u^{1/2}(0)$ des deux côtés.

3. ÉQUATION DE LIOUVILLE-VLASOV

Soit f une fonction de distribution pour les particules Yang-Mills chargées c'est-à-dire une fonction numérique positive sur l'espace des phases $\mathbb{P}$, physiquement interprétée comme probabilité de densité de présence des particules. L'équation de Liouville, aussi dite de Vlasov, qui exprime la conservation du nombre de particules, est l'annulation de la dérivée de Lie de f dans la direction du vecteur Y tangent aux trajectoires. Elle s'écrit :

$$\mathscr{L}_Y(f) = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + P^\alpha \frac{\partial f}{\partial p^\alpha} + Q^a \frac{\partial f}{dq^a} = 0 \tag{3.1}$$

Nous supposerons que *les particules ont une masse donnée m* et que *leur charge a une grandeur donnée e*, c'est-à-dire prend ses valeurs dans une orbite $\mathcal{O}$ de la transformation adjointe dans $\mathcal{G}$.

$$q \cdot q = |q|^2 = e^2, \tag{3.3}$$

l'espace des phases $\mathcal{P}$ est le sous-espace de $\mathcal{P}_m$ défini par (3.3). Le vecteur Y en un point de $\mathcal{P}$ lui est tangent, à cause de l'antisymétre des c^a_{bc}. On désigne encore par f la fonction de distribution sur $\mathcal{P} = \mathrm{T}(\mathrm{S}) \times \mathbb{R} \times \mathcal{O}$. L'équation de Liouville-Vlasov s'écrit maintenant en coordonnées locales

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Y}} f \equiv p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + \mathrm{P}^i \frac{\partial f}{\partial p^i} + \mathrm{Q}^{\mathrm{A}} \frac{\partial f}{\partial q^{\mathrm{A}}} = 0 \tag{3.4}$$

où les q^{A} sont des coordonnées sur $\mathcal{O}$, Q^{A} les composantes du vecteur Q tangent à $\mathcal{O}$.

4. ÉQUATION DE YANG-MILLS

Le courant engendré par les particules de charge q et de fonction de distribution f est représenté par un vecteur J sur V, à valeurs dans $\mathcal{G}$, de type Ad par changement de jauge, donné au point $x \in \mathrm{V}$ par l'intégrale sur la fibre $\mathcal{P}_x$

$$\mathrm{J}^{\beta, a} = \int_{\mathcal{P}_x} p^\beta q^a f \omega_p \omega_q \tag{4.1}$$

où ω_p est l'élément d'intégration usuel dans l'espace des impulsions d'une particule de masse m, forme de Leray induite par l'élément de volume de $\mathrm{T}_x \mathrm{V}$

$$\omega_p = |g|^{1/2} \frac{dp^1\, dp^2\, dp^3}{p_0} \tag{4.2}$$

et ω_q la forme de Leray induite sur $\mathcal{O}$ par un élément de volume Ad invariant dans $\mathcal{G}$. Sous les hypothèses faites on a en coordonnées canoniques sur $\mathcal{G}$ pour élément de volume $dq^1 \ldots dq^{\mathrm{N}}$, et ω_q est l'élément de volume d'une sphère $\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}$.

LEMME. — *Si le groupe* G *admet un produit scalaire* Ad *invariant et si f vérifie l'équation de Liouville-Vlasov la divergence covariante de jauge du courant* J *est nulle.*

Preuve. — Cette divergence est

$$\hat{\nabla}_\alpha \mathrm{J}^\alpha \equiv \nabla_\alpha \mathrm{J}^\alpha + [\mathrm{A}_\alpha, \mathrm{J}^\alpha] \tag{4.3}$$

le calcul montre que cette expression s'annule si les constantes de structure ont une trace nulle, $c^a_{bc}=0$, c'est-à-dire si le groupe G est unimodulaire, et en particulier si $\mathscr{G}$ admet un produit scalaire Ad invariant.

Les équations de Yang-Mills sont

$$\hat{\nabla}_\alpha F^{\alpha\beta,a} \equiv \nabla_\alpha F^{\alpha\beta,a} + c^a_{bc} A^b_\alpha F^{\alpha\beta,c} = J^{\beta,a} \tag{4.4}$$

L'identité

$$\hat{\nabla}_\alpha \hat{\nabla}_\beta F^{\alpha\beta} \equiv 0$$

implique que (4.4) ne peut être satisfait que si le courant J est à divergence covariante de jauge nulle.

Le *système de Yang-Mills-Vlasov* sur la variété (V, g), aux inconnues f fonction sur $\mathscr{P}$ et A, potentiel de Yang-Mills sur V, est constitué des équations (3.2) et (4.4), ce système peut avoir des solutions, d'après le lemme, sous l'hypothèse faite sur $\mathscr{G}$.

5. PROBLÈME DE CAUCHY

Les données de Cauchy à l'instant $x^0=0$ pour le système Y.M.V. sont :

1° Pour le champ de Yang-Mills la donnée d'un potentiel de Yang-Mills a sur $S=S\times\{0\}$ et d'un vecteur E tangent à S à valeurs dans $\mathscr{G}$ et de type Ad qui seront respectivement l'image réciproque du potentiel de Yang-Mills par l'inclusion $S \rightarrow V$ et la restriction à S de la partie électrique αF^{0i} du champ.

2° Une fonction φ sur le produit $\hat{S}=T(S)\times\mathcal{O}$, qui sera la valeur du représentant de f pour $x^0=0$.

Contrainte. — Les données de Cauchy doivent satisfaire l'équation (4.3) d'indice zéro sur S, qui s'écrit

$$\mathscr{C} \equiv \operatorname{div} E - \alpha \int_{\mathscr{P}_x} \varphi p^0 q \,\omega_p \omega_q = 0, \qquad x \in S \tag{5.1}$$

où div est la divergence covariante de jauge et riemannienne sur S. Pour la solution de cette équation en E quand a et φ sont donnés, *voir* [8].

Évolution. — Nous déterminerons le potentiel en jauge temporelle, c'est-à-dire satisfaisant $A_0=0$. Alors on a

$$\partial_0 A_i = F_{0i}. \tag{5.2}$$

Les équations (4.4) d'indice i s'écrivent

$$\hat{\nabla}_0 F^{0i} + \hat{\nabla}_j F^{ji} = \int_{\mathscr{P}} f p^i q \,\omega_p \omega_q \tag{5.3}$$

on leur adjoint comme équations une part des identités (1.1)

$$\hat{\nabla}_0 F_{ij} + \hat{\nabla}_j F_{0i} - \hat{\nabla}_i F_{0j} = 0. \tag{5.4}$$

Il est facile de voir que

LEMME 1. — *Quand f est connu,* (5.2), (5.3), (5.4) *forment un système symétrique hyperbolique du premier ordre pour* A_i, F_{0i}, F_{ij}.

LEMME 2. — *Si* (5.2), (5.3), (5.4) *et* (3.2) *sont vérifiés* $\mathscr{C}$ *et* $F_{ij} - \nabla_i A_j + \nabla_j A_i - [A_i, A_j]$ *vérifient un système hyperbolique du premier ordre homogène.*

Preuve. — Utiliser les identités.

6. SYSTÈME LINÉAIRE ASSOCIÉ

Supposons donnés $\tilde{f}$, $\tilde{A}_i$, $\tilde{F}_{0i}$, $\tilde{F}_{ij}$. Considérons le système linéaire

$$\nabla_0 F^{0i} + \nabla_j F^{ji} = -[\tilde{A}_j, \tilde{F}^{ji}] + \int_{\mathscr{P}_x} q\tilde{f} p^i \omega_p \omega_q \tag{6.1}$$

$$\nabla_0 F_{ij} + \nabla_j F_{0i} - \nabla_i F_{0j} = -[\tilde{A}_j, \tilde{F}_{0i}] + [\tilde{A}_i, \tilde{F}_{0j}] \tag{6.2}$$

$$\mathscr{L}_{\tilde{Y}} f \equiv p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + \tilde{P}^i \frac{\partial f}{\partial p^i} + \tilde{Q} \cdot \frac{\partial f}{\partial q} = 0 \tag{6.3}$$

avec

$$\tilde{P}^i = -\Gamma^i_{\lambda\mu} p^\lambda p^\mu + q \cdot (\tilde{F}^i{}_0 p^0 + \tilde{F}^i{}_j p^j), \qquad \tilde{Q} = -[\tilde{A}_i p^i, q]$$
$$\partial_0 A_i = \tilde{F}_{0i}. \tag{6.4}$$

Les données de Cauchy pour $x^0 = 0$ sont : a_i, E^i, φ.

On rappelle que V_T désigne la variété $S \times (\_T, T)$. On désigne par $C_0^\infty(V_T)$ [resp. $C_0^\infty(\mathscr{P}_T)$] l'espace des restrictions à V_T [resp. $\mathscr{P}_T$] des fonctions ou tenseurs C^∞ sur V [resp. $\mathscr{P}$] à support compact.

THÉORÈME 1. — *Supposons que* $\tilde{A}$ *et* $\tilde{F}$ *soient dans* $C_0^\infty(V_T)$, *alors l'équation linéaire* (6.1) *a une solution et une seule* $f \in C_0^\infty(\mathscr{P}_T)$, *prenant la donnée de Cauchy* $\varphi(x^i, p^i, q^a) \in C_0^\infty(\hat{S}_0)$,

1° *quels que soient* T *et* φ *si* $m > 0$,

2° *pour* T *assez petit et* Support $(\varphi) \subset \{ g_{ij} p^i p^j \geqq c > 0 \}$ *si* $m = 0$.

Preuve. — L'équation (6.1) s'écrit comme équation différentielle sur les trajectoires

$$\frac{df}{d\tau} = 0 \tag{6.5}$$

Si $\tilde{A}$ et $\tilde{F} \in C_0^\infty(V_T)$ ils vérifient les hypothèses du lemme 1, § 2, pour tout $T' < T$. Soit $(t, x^i, p^i, q^a) = (t, y_t)$ un point de S_t. La trajectoire du champ de vecteurs $\tilde{Y}$ passant par ce point est

$$\tau \mapsto (t+\tau, y(\tau, t, y_t))$$

elle coupe $\hat{S}_0$ pour la valeur $\tau = -t$ si cette valeur de τ est incluse dans l'intervalle de définition, donc toujours si $m > 0$. Le point d'intersection est

$$x^0 = 0, \qquad y_0 = y(-t, t, x^i, p^i, q^A) \tag{6.6}$$

On en déduit les résultats du théorème, la fonction $f \in C_0^\infty(\mathscr{P}_T)$ prenant la donnée de Cauchy φ étant :

$$f(t, x^i, p^i, q^A) = \varphi(y(-t, t, x^i, p^i, q^A)) \tag{6.7}$$

THÉORÈME 2. — *Si* $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathscr{P}_T)$ *et* $\tilde{A}$, $\tilde{F} \in C_0^\infty(V_T)$, *le système linéaire* (6.1), (6.2), (6.4) *aux inconnues* A, F *admet une solution dans* $C_0^\infty(V_T)$, *unique, prenant les données de Cauchy* a, $E \in C_0^\infty(S)$.

Preuve. — Lemme 1, § 5, et appartenance du second membre à $C_0^\infty(V_T)$.

Nous montrerons l'existence d'une solution du système non linéaire à l'aide de majorations que nous allons maintenant établir.

7. MAJORATION DE f DANS $L^p(\hat{S}_t)$

Soient Θ une forme élément de volume, et Y un champ de vecteurs sur une variété différentiable W, on rappelle les identités

$$\mathscr{L}_Y \Theta \equiv d(i_Y \Theta) \equiv (\operatorname{div} Y)\Theta, \tag{7.1}$$

où div Y est la divergence relative à cette forme Θ, c'est-à-dire que si Θ est en coordonnées locales

$$\Theta = \rho\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^P$$

(ρ densité tensorielle) on a, dans ces coordonnées :

$$\operatorname{div} Y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^I}(\rho Y^I). \tag{7.2}$$

Soit w une sous-variété de codimension 1 de W. Supposons qu'en chaque point de w le champ de vecteurs Y lui soit tangent. Désignons par θ la forme de Leray induite par Θ sur w. On déduit de (7.1) que si Y a une divergence nulle sur (W, Θ) et est tangent à w, il a aussi une divergence nulle sur (w, θ). On va en déduire :

LEMME. — *Le vecteur* Y *donné par* (2.1 *b*) *a une divergence nulle sur* $(\mathscr{P}, \theta)$.

Preuve. — La forme élément de volume sur $\mathscr{P}$

$$\theta=\alpha^2 \,|\det g\,|\,(p_0)^{-1}\, dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^n \wedge dp^1 \wedge \ldots \wedge dp^n \wedge \omega_q \qquad (7.3)$$

est induite par la forme élément de volume Θ sur $T(V) \times \mathscr{G}$ pour laquelle il est facile de vérifier que, par suite de l'antisymétrie des constantes de structure Y a une divergence nulle sur $T(V) \times \mathscr{G}$ (la propriété correspondante dans le cas électromagnétique est bien connue).

Conservation de $\| f \|_{L^p(\hat{S}_t)}$

Remarquons d'abord que $\mathscr{L}_Y f=0$ entraîne :

$$\mathscr{L}_Y f^p=0, \qquad \forall \text{ entier } p \geqq 1. \qquad (7.4)$$

D'où, d'après (7.1) et le lemme précédent :

$$\mathscr{L}_Y (f^p \theta)=0. \qquad (7.5)$$

En utilisant à nouveau (7.1), en intégrant sur $\mathscr{P}_t$, on obtient :

THÉORÈME. — *Si* $f \in C_0^\infty(V_T)$, *on a, pour tout* $|t|<T$:

$$\int_{\hat{S}_t} f^p p^0 \theta_t = \int_{\hat{S}_0} f^p p^0 \theta_0, \qquad |t|<T, \qquad (7.6)$$

où

$$\hat{S}_t = T(S_t)\, x\, \dot{\mathscr{O}}, \qquad p^0 \theta_t \equiv i_Y \theta\,|_{S_t},$$

c'est-à-dire

$$\theta_t = \mu_t \wedge \omega_p \wedge \omega_q, \qquad \mu_t = \alpha_t \,|\det g_t\,|_{x^0=t}^{1/2}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

8. MAJORATIONS AVEC POIDS

Soit h une fonction positive, de classe C^1 sur V_T. L'équation où b est une fonction donnée

$$\mathscr{L}_Y f = b \qquad (8.1)$$

entraîne

$$\mathcal{L}_Y(hf^2) \equiv h\,\mathcal{L}_Y f^2 + f^2\,\mathcal{L}_Y h = f^2\,\mathcal{L}_Y h + 2\,bhf,$$

d'où, si $f \in C_0^1(V_T)$ et vérifie (8.1) :

$$\int_{\hat{S}_t} hf^2 p^0\,\theta_t = \int_{\hat{S}_0} hf^2 p^0\,\theta_0 + \int_0^t \int_{\hat{S}_\tau} \{f^2\,\mathcal{L}_Y h + 2\,bhf\}\,\theta_\tau\,d\tau. \qquad (8.2)$$

Si on prend pour h la fonction donnée en coordonnées adaptées à $V = S \times \mathbb{R}$ par

$$h = (p^0)^{2k}$$

on a

$$\mathcal{L}_Y h = k\,(p^0)^{2k-2}\,\mathcal{L}_Y (p^0)^2,$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y (p^0)^2 &= \mathcal{L}_Y\,\alpha^{-2}(g_{ij}p^i p^j + m^2)\\ &= \alpha^{-2}\left(p^\alpha \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} p^i p^j + 2\,g_{ij}\,P^i p^j\right) - 2\,\alpha^{-1} p^\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x^\alpha}(p^0)^2\\ &= \alpha^{-2}\left\{p^\alpha p^i p^j \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} - 2\,g_{ij}\,\Gamma^i_{\lambda\mu} p^\lambda p^\mu p^j\right.\\ &\qquad \left. + 2\,g_{ij}(F_0{}^i p^0 + F_h{}^i p^h)\,p^j - 2\,\alpha\,p^\lambda\,\partial_\lambda\,\alpha\,(p^0)^2\right\}\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}_Y (p^0)^2 = \alpha^{-2}\{-2\,\alpha\,(p^0)^3\,\partial_0\,\alpha - p^0 p^i p^j\,\partial_0\,g_{ij} + 2\,F_{0i}\,p^i p^0\}.$$

On en déduit que, quel que soit $m \geqq 0$ (∂g n'intervient que par $\partial_0\,\alpha$ et $\partial_0\,g_{ij}$) on a

$$|\mathcal{L}_Y h| \leqq C_{\partial g}\,(p^0)^{2k+1} + |F|\,(p^0)^{2k}, \qquad (8.3)$$

On a $p^0 \geqq m$. On suppose, si $m = 0$, que

$$\text{Support}\, f \subset \{p^0 \geqq c > 0\}.$$

on a alors sur le support de f

$$(p^0)^{2k-1} \leqq c^{-2}\,(p^0)^{2k+1}. \qquad (8.4)$$

On pose

$$y(t) = \int_{\hat{S}_t} f^2\,(p^0)^{2k+1}\,\theta_t.$$

1° Si $b = 0$, on déduit de (8.2) et (8.3), (8.4) :

$$y(t) \leqq y(0) + \int_0^t \{C_{\partial g} + C \sup_{S_\tau} |F|\}\,y(\tau)\,d\tau. \qquad (8.5)$$

D'où :

$$y(t) \leqq y(0) \exp\left(C_{\partial g} t + \int_0^t \sup_{S_\tau} |F| \, d\tau\right). \tag{8.6}$$

2° Si $b \neq 0$, on note

$$\beta(t) = \left\{ \int_{\hat{S}_t} b^2 (p^0)^{2k-1} \theta_t \right\}^{1/2}.$$

L'inégalité (8.5) est à remplacer par

$$y(t) \leqq y(0) + \int_0^t \{ (C_{\partial g} + C \sup_{S_\tau} |F|) y(\tau) + 2 \beta(\tau) y^{1/2}(\tau) \} \, d\tau \tag{8.7}$$

et implique

$$y^{1/2}(t) \leqq \left(y^{1/2}(0) + \int_0^t \beta(\tau) \, d\tau \right) \exp \frac{1}{2} \left(C_{\partial g} t + C \int_0^t \sup_{S_\tau} |F| \, d\tau \right). \tag{8.8}$$

9. LOCALISATION

La localisation permet d'une part de raisonner en coordonnées locales, ce qui allège les notations pour les dérivées, elle permet d'autre part d'obtenir des théorèmes (locaux dans le temps) sans restrictions sur le comportement à l'infini spatial des données de Cauchy.

Soit B_δ, $\delta < \delta_0$, une boule géodésique de rayon δ de $(S, \bar{g})$. Prenons sur B_δ des coordonnées géodésiques rapportées à son centre.

Considérons l'ouvert borné $\Omega_t \subset B_\delta \times \mathbb{R}$ défini par

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_t = \{0 < x^0 < t, \ K(T - x^0) > [\textstyle\sum_i (x^i)^2]^{1/2}\}, \\ &0 \leqq t \leqq \frac{T}{2}, \qquad T < \frac{\delta}{K}. \end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

La frontière de Ω_t est

$$\partial\Omega_t = \omega_t \cup \omega_0 \cup L, \tag{9.2}$$

où ω_t [resp. ω_0] est la boule de S_t [resp. S_0].

$$\sum_i (x^i)^2 < K^2 (T - t)^2 \qquad [\text{resp.} \leqq K^2 T^2], \tag{9.3}$$

et L (frontière latérale) est donnée par

$$K(T - x^0) - \{\textstyle\sum_i (x^i)^2\}^{1/2} = 0, \qquad 0 \leqq x^0 \leqq t. \tag{9.4}$$

Cette frontière est spatiale si

$$K^2 \alpha^{-2} - g^{ij} \frac{x^i x^j}{r^2} > 0, \qquad r^2 = \sum_i (x^i)^2. \tag{9.5}$$

D'après les hypothèses sur la métrique, il existe sur $B_\delta \times \mathbb{R}$ des nombres A et $B > 0$ tels que

$$|g^{00}| \equiv \alpha^{-2} > A^2, \qquad g^{ij} \frac{x^i x^j}{r^2} < B^2.$$

(9.5) est donc vérifié dès que $K > A^{-1} B$. On pose $\hat{\Omega}_t = \Omega_t \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{O}$, les coordonnées dans $\hat{\Omega}_t$ sont (x^α, p^i, q^A). La frontière de $\hat{\Omega}_t$ est

$$\partial\hat{\Omega}_t = \{ \omega_t \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{O} \} \cup \{ \omega_0 \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{O} \} \cup \{ L \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{O} \} \equiv \hat{\omega}_t \cup \hat{\omega}_0 \cup \hat{L}$$

mais $\hat{\Omega}_t$ n'est pas borné : il s'étend à l'infini dans la direction du facteur $\mathbb{R}^n$.

On a l'identité, pour tout élément de volume et toute fonction a :

$$\mathscr{L}_Y a \equiv \operatorname{div}(a Y) - a \operatorname{div} Y, \tag{9.6}$$

d'où, pour l'élément de volume θ, puisque $\operatorname{div} Y = 0$ dans ce cas,

$$\mathscr{L}_Y a \equiv \operatorname{div}(a Y) = b. \tag{9.7}$$

Nous désignerons par $C_0^k(\hat{\Omega}_t)$ l'espace des restrictions à $\hat{\Omega}_t$ de fonctions C^k à support compact sur $\mathscr{P}$. Soit $a \in C_0^1(\hat{\Omega}_t)$. En appliquant la formule de Stokes à (9.7) on trouve :

$$\int_{\partial\hat{\Omega}_t} a i_Y \theta \equiv \int_{\hat{\omega}_t} a i_Y \theta - \int_{\hat{\omega}_0} a i_Y \theta + \int_{\hat{L}} a i_Y \theta = \int_{\hat{\Omega}_t} b \theta, \tag{9.8}$$

où les intégrales sont prises sur les variétés indiquées orientées de façon que leur volume induit par celui de $\hat{\Omega}_t$ soit positif. Sur $\hat{\omega}_t$ [resp. $\hat{\omega}_0$] on a

$$| i_Y \theta |_{\hat{\omega}_t} = p^0 \theta_t \qquad [\text{resp. } p^0 \theta_0],$$

et sur $\hat{L}$, vérifiant $dx^0 = -\dfrac{x^i dx^i}{K r}$,

$$| i_Y \theta |_{\hat{L}} = \left(p^0 + \sum_i \frac{x^i p^i}{k r} \right) \theta_{\hat{L}},$$

$\theta_{\hat{L}}$ forme de Leray induite sur $\hat{L}$.

On a :

$$\left| \sum_i \frac{x^i p^i}{r p^0} \right| \leqq \frac{\{ \sum_i (p^i)^2 \}^{1/2}}{p^0}.$$

Sur $B_\delta \times \mathbb{R}$, il existe des nombres A_1 et $B_1 > 0$ tels que

$$\alpha \leqq A_1, \qquad \sum_i (p_i^2) \leqq B_1^2 g_{ij} p^i p^j.$$

D'où, en utilisant la relation entre p^0 et les p^i,

$$\left|\sum_i \frac{x^i p^i}{rp^0}\right| \leqq A_1 B_1;$$

il suffit de prendre $K > A_1 B_1$ pour avoir

$$p^0 + \sum_i \frac{x^i p^i}{kr} > 0,$$

donc

$$\int_{\hat{L}} a i_Y \theta \geqq 0 \qquad \text{si} \quad a \geqq 0.$$

(9.8) entraîne donc

$$\int_{\hat{\omega}_t} a p^0 \theta_t \leqq \int_{\hat{\omega}_0} a p^0 \theta_0 + \int_0^t \int_{\hat{\omega}_\tau} b\, \theta_\tau\, d\tau. \tag{9.9}$$

On en déduit pour $a = f^2$, puisque $\mathscr{L}_Y f^2 = 0$, la majoration localisée

$$\int_{\hat{\omega}_t} f^2 p^0 \theta_t \leqq \int_{\hat{\omega}_0} f^2 p^0 \theta_0. \tag{9.10}$$

10. MAJORATIONS AVEC POIDS

Prenons $a = (p^0)^{2k} f^2$, posons maintenant

$$y(t) = \int_{\hat{\omega}_t} \mathrm{f}^2 (p^0)^{2k+1} \theta_t, \qquad \beta(t) = \left\{ \int_{\hat{\omega}_t} b^2 (p^0)^{2k-1} \theta_t \right\}^{1/2}$$

Les calculs faits au paragraphe 8 et l'inégalité (9.9) montrent que l'inégalité (8.7) est valable avec ces définitions pour $t < \frac{\delta}{2} B_1 A_1$, le supremum de $|F|$ étant maintenant pris sur ω_τ.

Majoration des dérivées

Nous désignons par D^l une dérivée d'ordre $|l| = l_1 + \ldots + l_P$ d'une fonction sur $\hat{\Omega}_t$, avec $l = (l_1, \ldots, l_P) = (l_I)$, notons par $\bar{l}$, $\hat{l}$ et $\check{l}$ le nombre des dérivations en x, p et q incluses dans l.

L'équation $\mathscr{L}_Y f = b$ implique, avec les C_l^σ des nombres, et en ordonnant partiellement les suites par leurs éléments,

$$\mathscr{L}_Y (D^\sigma f) = D^\sigma b - \sum_{|l| \geqq 1}^{l \leqq \sigma} C_l^\sigma (D^l Y^I) D^{\sigma - l} \frac{\partial f}{\partial x^I}, \tag{10.1}$$

on voit par inspection que les dérivées de Y vérifient les majorations :

$$|D^l Y^\alpha| \leqq C (p^0)^{1-\hat{l}} \tag{10.2 a}$$

$$|D^l Y^{n+1+i}| \leqq C_{\partial g} (p^0)^{2-\hat{l}} + C \sum_{\check{r}=\hat{r}=0}^{r \leqq l} |D^r F| (p^0)^{1-\hat{l}} \tag{10.2 b}$$

$$|D^l Y^A| \leqq C \sum_{\check{r}=\hat{r}=0}^{r \leqq l} |D^r A| (p^0)^{1-\hat{l}}. \tag{10.2 c}$$

Posons

$$u_\sigma = (p^0)^{k+\hat{\sigma}+(1/2)} |D^\sigma f|.$$

On déduit des majorations (10.2) :

$$|D^l Y^\alpha| . \left| D^{\sigma - l} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \right| . |D^\sigma f| (p^0)^{2(k+\hat{\sigma})} \leqq C u_{\sigma - l + (\delta_\alpha^I)} u_\sigma \tag{10.3 a}$$

$$|D^l Y^{n+1+i}| . \left| D^{\sigma - l} \frac{\partial f}{\partial p^i} \right| . |D^\sigma f| (p^0)^{2(k+\hat{\sigma})}$$

$$\leqq \left(C_{\partial g} + C \sum_{\hat{r}=\check{r}=0}^{r \leqq l} |D^r F| \right) u_\sigma u_{\sigma - l + (\delta_{n+1+i}^I)} \tag{10.3 b}$$

$$|D^l Y^A| . \left| D^{\sigma - l} \frac{\partial f}{\partial q^A} \right| . |D^\sigma f| (p^0)^{2k+\hat{\sigma}} \leqq C \sum_{\hat{r}=\check{r}=0}^{r \leqq l} |D^r A| u_\sigma u_{\sigma - l + (\delta_A^I)}. \tag{10.3 c}$$

Posons

$$(\bar{u}_\sigma)^2 = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{O}} u_\sigma^2 \omega_p \omega_q \equiv \int_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{O}} (p^0)^{1+2k+2\hat{\sigma}} (D^\sigma f)^2 \omega_p \omega_q$$

Notons

$$y_\sigma(t) = \int_{\omega_t} \bar{u}_\sigma^2 \mu_t \equiv \int_{\hat{\omega}_t} (p^0)^{1+2k+2\hat{\sigma}} (D^\sigma f)^2 \theta_t$$

on a

$$\int_{\hat{\omega}_t} |D^r F| u_\sigma u_{\sigma - l + (\delta_{n+1+i}^I)} \theta_t \leqq y_\sigma^{1/2}(t) \left\{ \int_{\omega_t} |D^r F|^2 \bar{u}_{\sigma - l + (\delta_{n+1+i}^I)}^2 \mu_t \right\}^{1/2}$$

Normes et espaces fonctionnels, définitions

On désigne par $C_0^\infty(\Omega_t)$ [resp. $C_0^\infty(\hat{\Omega}_t)$] l'espace des restrictions à Ω_t [resp. $\hat{\Omega}_t$] des éléments de $C^\infty(V)$ [resp. $C^\infty(\mathscr{P})$] à support compact dans V [resp. $\mathscr{P}$].

1° L'espace $E_{2,k}^s(\hat{\Omega}_t)$ est la fermeture de $C_0^\infty(\hat{\Omega}_t)$ dans la norme

$$\|f\|_{E_{2,k}^s} = \sup_{0 \leqq \tau \leqq t} \|f\|_{s,2,k}^\tau$$

avec

$$\|f\|_{s,2,k}^\tau = \left\{ \sum_{|l| \leqq s} \int_{\hat{\omega}_\tau} (p^0)^{2k+2\hat{l}+1} (D^l f)^2 \theta_\tau \right\}^{1/2}.$$

2° L'espace $E_2^s(\Omega_t)$ est la fermeture de $C_0^\infty(\Omega_t)$, dans la norme

$$\|F\|_{E_2^s} = \sup_{0 \leqq \tau \leqq t} \|F\|_{s,2}^\tau$$

avec

$$\|F\|_{s,2}^\tau = \left\{ \int_{\omega_\tau} \sum_{|r| \leqq S} |D^r F|^2 \mu_\tau \right\}^{1/2}.$$

avec $|D^r F|^2 = \sum_{\lambda < \mu} (D^r F_{\lambda\mu})^2$.

LEMME 1. – *Si* $f \in E_{2,k}^s(\hat{\Omega}_t)$, *alors* $\overline{u_\sigma^2} \in E_1^{s-|\sigma|}(\Omega_t)$, *fermeture de* $C_0^\infty(\Omega_t)$ *dans la norme*

$$\|U\|_{E_1^{s-|\sigma|}} = \sup_{0 \leqq \tau \leqq t} \|U\|_{s-|\sigma|,1}^\tau$$

avec

$$\|U\|_{s-|\sigma|,1}^\tau = \sum_{|l| \leqq s-|\sigma|} \int_{\omega_\tau} |D^l U| \mu_\tau.$$

Preuve. – Soit $f \in C_0^\infty(\hat{\Omega}_t)$. On a

$$\left| \frac{\partial}{\partial x^\alpha} |\bar{u}_\sigma|^2 \right| \leqq 2 |\bar{u}_\sigma| . \left| \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \bar{u}_\sigma \right|,$$

or

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \bar{u}_{\sigma + (\delta_\alpha^l)} \in \{ \bar{u}_\lambda, |\lambda| = |\sigma| + 1 \},$$

de même

$$|D^l (\bar{u}_\sigma)^2| \leqq C \sum_{\lambda \leqq l} \bar{u}_{\sigma+\lambda} \bar{u}_{l-\lambda},$$

d'où

$$\int_{\omega_\tau} \sum_{l \leqq m-\sigma} |D^l(\bar{u}_\sigma)^2| \mu_\tau \leqq C(\|f\|^\tau_{|m|, 2, k})^2.$$

Le résultat pour $f \in E^s_{2, k}$ est conséquence de l'inégalité et des définitions par complétion.

LEMME 2. — *Si* $f \in E^s_{2, k}(\hat{\Omega}_t)$, $s \geqq 1$, *et* $F \in E^s_2$, *avec* $S > n+1$, *et* $r \leqq l \leqq \sigma$, $|\sigma| \leqq s$, *on a*

$$\int_{\omega_\tau} |D^r F|^2 \bar{u}^2_{\sigma - l + (\delta^I_{n+1+i})} \mu_\tau \leqq (\|f\|^\tau_{s-1, 2, k} \|F\|^\tau_{S, 2})^2.$$

Preuve. — Prenons $F \in C^\infty_0(\Omega_t)$, $f \in C^\infty_0(\hat{\Omega}_t)$. Appliquons le théorème de multiplication pour les espaces de Sobolev sur ω_τ:

$$W^{s_1}_1 \times W^{s_2}_1 \subsetneq L^1 \qquad \text{si} \quad s_t + s_2 > n,$$

avec

$$s_1 = S - |r|, \qquad s_2 = s - (|\sigma| - |l| + 1).$$

Par intégration de l'équation (10.1), en utilisant les inégalités démontrées dans les lemmes 1 et 2, puis le lemme de Gronwall on obtient le théorème

THÉORÈME. — *Si* $f \in C^\infty_0(\hat{\Omega}_t)$ *et si* A, $F \in E^s_2(\Omega_t)$ *avec* $S > n+1$, *vérifient l'équation* $\mathscr{L}_Y f = b$ *alors on a pour* $s \leqq S$, $\tau \in [0, t]$

$$\|f\|^\tau_{s, 2, k} \leqq C\left\{\|f\|^0_{s, 2, k} + \int_0^\tau \|b\|^\sigma_{s, 2, k} d\sigma\right\} \times \exp \int_0^\tau C(C_{\partial g} + \|A\|^\sigma_{S, 2} + \|F\|^\sigma_{S, 2}) d\sigma \quad (10.4)$$

11. MAJORATIONS DU COURANT

LEMME. — *Si* $f \in E^s_{2, k}(\hat{\Omega}_t)$, *avec* $k > \dfrac{n}{2}$, *alors* $J \in E^s_2(\Omega_t)$.

Preuve. — Soit $f \in C^\infty_0(\hat{\Omega}_t)$. On a

$$\|J\|^\tau_{s, 2} = \left\{\int_{\omega_\tau} \sum_{|l| \leqq s} |D^l J|^2 \mu_t\right\}^{1/2},$$

où

$$J^i = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{O}} q f p^i \omega_p \omega_q,$$

d'où

$$|J|^2 \leqq C \left\{ \int_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{O}} (p^0)^{-2k+1} \omega_p \omega_q \right\} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{O}} f^2 (p^0)^{2k+1} \omega_p \omega_q \right\};$$

on a

$$\omega_p = |g|^{1/2} \frac{dp^1 \ldots dp^n}{p_0},$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{O}} (p^0)^{-2k+1} \omega_p \omega_p \leqq C \qquad \text{si} \quad k > \frac{n}{2};$$

alors

$$\int_{\omega_\tau} |J|^2 \mu_\tau \leqq C \int_{\hat{\omega}_\tau} f^2 (p^0)^{2k+1} \theta_\tau.$$

Dans Ω_t on a, avec évidemment $\hat{l} = \check{l} = 0$,

$$|D^l J| \leqq C \int_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{O}} |D^l f| p^0 \omega_p \omega_q + \sum_{r<l} C_{\partial g} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathcal{O}} |D^r f| p^0 \omega_p \omega_q,$$

d'où, si $k > \frac{n}{2}$,

$$\int_{\omega_\tau} |D^l J|^2 \mu_\tau \leqq C \int_{\hat{\omega}_\tau} |D^l f|^2 (p^0)^{2k+1} \theta_\tau + C_{\partial g} \sum_{r<l} \int_{\hat{\omega}_\tau} |D^r f|^2 (p^0)^{2k+1} \theta_\tau,$$

donc,

$$\|J\|_{s,2}^\tau \leqq C \|f\|_{s,2,k}^\tau, \qquad \text{si} \quad k > \frac{n}{2}. \tag{11.1}$$

12. INÉGALITÉS ÉNERGÉTIQUES POUR LE SYSTÈME LINÉAIRE EN F

On considère ici l'opérateur linéaire L sur F défini par les premiers membres de (6.1), (6.2).

On définit la métrique proprement riemannienne γ par :

$$\gamma_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha}\, dx^{\beta} = \alpha^2\, dt^2 + g_{ij}\, dx^i\, dx^j.$$

Elle est uniformément équivalente à la métrique euclidienne.

Si $T=(T^{\alpha_1 \cdots \alpha_l})$ est un champ de tenseurs de classe C^k sur Ω_T et à valeurs dans $\mathcal{S}$, on définit maintenant la norme de $\nabla^k T$ au point x par :

$$|\nabla^k T|^2 = \gamma_{\rho_1 \sigma_1} \dots \gamma_{\rho_k \sigma_k} \gamma_{\alpha_1 \beta_1} \dots \gamma_{\alpha_l \beta_l} \nabla^{\rho_1} \times \dots \times \nabla^{\rho_k} T^{\alpha_1 \cdots \alpha_l} . \nabla^{\sigma_1} \dots \nabla^{\sigma_k} T^{\beta_1 \cdots \beta_l}$$

et on pose :

$$\|\nabla^k T\|^2_{\omega_t} = \int_{\omega_t} |\nabla^k T|^2\, \alpha\mu_t$$

On a, pour la 2-forme de courbure $F=(F^{\alpha\beta})$ de A, étant données son antisymétrie et la définition de γ :

$$|\nabla^k F|^2 = \gamma_{\rho_1 \sigma_1} \dots \gamma_{\rho_k \sigma_k} (-2 \nabla^{\rho_1} \dots \nabla^{\rho_k} F^{0i} . \nabla^{\sigma_1} \dots \nabla^{\sigma_k} F_{0i}) + \nabla^{\rho_1} \dots \nabla^{\rho_k} F^{ij} . \nabla^{\sigma_1} \dots \nabla^{\sigma_k} F_{ij}.$$

Proposition. — *Si* F *et* d *sont dans* $C_0^{\infty}(\Omega_T)$ *et vérifient le système* $LF = d$, *alors on a, pour tout* $t \in [0, T]$, *les inégalités :*

$$\|\nabla^k F\|_{\omega_t} \leq e^{C_{\partial g} t} \left\{ \|\nabla^k F\|_{\omega_0} + C_{\partial g} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{j=1}^{k-i} t^j \right) \|\nabla^i F\|_{\omega_0} + C \int_0^t \left[\|\nabla^k d\|_{\omega_\tau} + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{j=1}^{k-i} (t-\tau)^j \right) \|\nabla^j d\|_{\omega_\tau} \right] d\tau \right\}, \quad (12.1)$$

(*on rappelle qu'on désigne par* C *des constantes ne dépendant que de* V, g, $\mathcal{S}$, *et par* $C_{\partial g}$ *de telles constantes qui s'annulent avec les dérivées de* g).

Pour $k=0$ *les termes en* $k-1$ *ne figurent pas dans* (12.1)

Preuve. — 1° Considérons le cas $k=0$. Le système $LF=d$ s'écrit, avec $d=(a, b)$:

$$\nabla_0 F^{0i} + \nabla_j F^{ji} = a^i, \quad (12.2)$$

$$\nabla_0 F_{ij} + \nabla_i F_{j0} + \nabla_j F_{0i} = b_{0ij}. \quad (12.3)$$

Le produit scalaire contracté de (12.2) par F_{0i} et de (12.3) par F^{ij} donne, compte tenu de l'antisymétrie de F, des propriétés de ∇ et de la forme de la métrique :

$$\frac{1}{2} \nabla_0 (F_{0i} . F^{0i}) + F_{0i} . \nabla_j F^{ji} = F_{0i} . a^i, \quad (12.4)$$

$$\frac{1}{2} \nabla_0 (F^{ij} . F_{ij}) + 2 F^{ij} . \nabla_j F_{0i} = F^{ij} . b_{0ij}. \quad (12.5)$$

D'où l'on déduit, vues l'expression de $|F|^2$ et l'antisymétrie de F :

$$\nabla_0(|F|^2)+4\nabla_j(F_{0i}.F^{ij})=-4F_{0i}.a^i+2F^{ij}.b_{0ij}. \qquad (12.6)$$

Introduisons l'analogue du tenseur de Maxwell :

$$\tau^{\alpha\beta}=-\frac{1}{4}g^{\alpha\beta}F_{\lambda\mu}.F^{\lambda u}+F^{\alpha\lambda}.F^{\beta}{}_{\lambda}.$$

On a :

$$\tau^{00}=-\frac{g^{00}}{4}|F|^2;$$

$$\tau^{j0}=-F^0{}_i.F^{ij}=-g^{00}F_{0i}.F^{ij}, \qquad g^{00}\equiv-\alpha^{-2}.$$

(12.6) est, comme prévisible :

$$\nabla_\lambda\tau^{\lambda 0}=\alpha^{-2}\left(-F_{0i}.a^i+\frac{1}{2}F^{ij}.b_{0ij}\right)$$

On a par ailleurs, en fixant l'indice 0 :

$$\nabla_\alpha\tau^{\alpha 0}=\nabla_\alpha\tau^{\alpha(0)}+\Gamma^0{}_{\alpha\lambda}\tau^{\alpha\lambda}.$$

On en déduit par un calcul élémentaire

$$\nabla_\lambda(\tau^{\lambda(0)}\alpha^2)=\left(-F_{0i}.a^i+\frac{1}{2}F^{ij}.b_{0ij}\right)-\frac{1}{2}\tau^{ij}\partial_0 g_{ij}+\tau^{00}\alpha\,\partial_0\alpha. \qquad (12.7)$$

Intégrons l'égalité (12.7) sur

$$\Omega_t=\{(x^0, x^i)\in\Omega_T,\ 0\leq x^0\leq t\}$$

en utilisant l'identité :

$$\nabla_\lambda(\alpha^2\tau^{\lambda(0)})\equiv\frac{1}{\sqrt{\alpha^2|\det g|}}\partial_\lambda(\alpha^3\sqrt{|\det g|}\,\tau^{\lambda(0)})$$

et la formule de Stokes. On obtient :

$$\int_{\Omega_t}\nabla_\lambda(\alpha^2\tau^{\alpha(0)})\mu=\int_{\omega_t}\tau^{00}\alpha^2\mu_t-\int_{\omega_0}\tau^{00}\alpha^2\mu_0+\int_L\alpha^2\tau^{\lambda 0}\sigma_\lambda \qquad (12.8)$$

avec sur L, donné par (9.4) avec une normale extérieure orientée vers le futur

$$\tau^{\lambda 0}\sigma_\lambda=\left(\tau^{00}+\tau^{0i}\frac{x^i}{Kr}\right)|\det g|^{1/2}dx^1\ldots dx^n$$

Il est bien connu et facile à vérifier que le vecteur $\tau^{(0)\lambda}$ est temporel (ou isotrope), orienté vers le futur : $\tau^{00}\geq\alpha^{-1}(g_{ij}\tau^{0i}\tau^{0j})^{1/2}$. On en déduit, compte tenu de (9.5), la positivité de l'intégrale sur L. D' où

$$\int_{\omega_t} |F|^2 \mu_t \leqq \int_{\omega_0} |F|^2 \mu_0 + \int_0^t d\tau \int_{\omega_\tau} \left\{ \left| -F_{0i}.a^i + \frac{1}{2} F^{ij}.b_{0ij} \right| + C_{\partial g} |\tau| \right\} \mu_\tau. \quad (12.9)$$

(12.9) donne alors, compte tenu de l'inégalité de Schwarz :

$$\| F^2_{\omega_t} \leqq \| F \|^2_{\omega_0} + \int_0^t \{ C_{\partial g} \| F \|^2_{\omega_\tau} + C \| F \|_{\omega_\tau} \| d \|_{\omega_\tau} \} d\tau$$

et le lemme de Gromwall donne :

$$\| F \|_{\omega_t} \leqq e^{C_{\partial g} t} \left(\| F \|_{\omega_0} + C \int_0^t \| d \|_{\omega_\tau} d\tau \right). \quad (12.10)$$

(12.10) est l'inégalité (12.1) pour $k=0$,

Remarque. — On a ici $C_{\partial g} = 0$ si la métrique g est statique.

2° Supposons l'inégalité (12.1) vraie pour $l = 0, 1, 2, \ldots, k$, et montrons qu'elle l'est encore pour $l = k+1$.

Appliquons $\nabla^{\sigma_1} \ldots \nabla^{\sigma_{k+1}}$ aux équations (12.2) et (12.3). On obtient :

$$\nabla_0 \nabla^{\sigma_1 \ldots \sigma_{k+1}} F^{0i} + \nabla_j \nabla^{\sigma_1 \ldots \sigma_{k+1}} = \nabla^{\sigma_1 \ldots \sigma_{k+1}} a^i + L^{\sigma_1 \ldots \sigma_{k+1} i}, \quad (12.11)$$

$$\nabla_0 \nabla^{\sigma_1 \ldots \sigma_{k+1}} F_{ij} + \nabla_i \nabla^{\sigma_1 \ldots \sigma_{k+1}} F_{j0} + \nabla_j \nabla^{\sigma_1 \ldots \sigma_{k+1}} F_{0i} = \nabla^{\sigma_1 \ldots \sigma_{k+1}} b_{0ij} + M_{ij}^{\sigma_1 \ldots \sigma_{k+1}}, \quad (12.12)$$

où

$$L^{\sigma_1 \ldots \sigma_{k+1} i} = \sum_{l=0}^{k} \sum_{s=l}^{k} (\nabla^{s-l} R . \nabla^{k-s+l} F)^{\sigma_1 \ldots \sigma_{k-l}; \sigma_{k-l+1} \ldots \sigma_{k+1} i}, \quad (12.13)$$

$$M_{ij}^{\sigma_1 \ldots \sigma_{k+1}} = \sum_{l=0}^{k} \sum_{s=l}^{k} (\nabla^{s-l} R . \nabla^{k-s+l} F)^{\sigma_1 \ldots \sigma_{k-l}; \sigma_{k-l+1} \ldots \sigma_{k+1}}, \quad (12.13')$$

où on a posé dans (12.13) et (12.13') :

$$\sum_{s=l}^{k} (\nabla^{s-l} R . \nabla^{k-s+l} F)^{\sigma_1 \ldots \sigma_{k-l}; \sigma_{k-l+1} \ldots \sigma_{k+1}} = \nabla^{\sigma_1 \ldots \sigma_{k-l}} (R . \nabla^l F)^{\sigma_{k-l+1} \ldots \sigma_{k+1}}. \quad (12.13'')$$

On déduit de ces équations

$$\nabla_0 (|\nabla^{k+1} F|^2) + 4 \nabla_j (\gamma_{\rho_1 \sigma_1} \ldots \gamma_{\rho_{k+1} \sigma_{k+1}} \times \nabla^{\rho_1 \ldots \rho_{k+1}} F_{0i} . \nabla^{\sigma_1 \ldots \sigma_{k+1}} F^{ij}) = M \quad (12.14)$$

où M vérifie une inégalité de la forme

$$|M| \leqq C |\nabla^{k+1} F| . \left(|\nabla^{k+1} a| + |\nabla^{k+1} b| + C_{\partial g} \sum_{l=0}^{k} |\nabla^l F| \right), \quad (12.14')$$

On introduit alors le tenseur :

$$\tau^{\alpha\beta}_{(k+1)} = \gamma_{\rho_1 \sigma_1} \dots \gamma_{\rho_{k+1} \sigma_{k+1}} \times \left(-\frac{g^{\alpha\beta}}{4} \nabla^{\rho_1 \dots \rho_{k+1}} F_{\lambda\mu} . \nabla^{\sigma_1 \dots \sigma_{k+1}} F^{\lambda\mu} + \nabla^{\rho_1 \dots \rho_{k+1}} F^{\alpha\lambda} . \nabla^{\sigma_1 \dots \sigma_{k+1}} F^{\beta}{}_{\lambda} \right). \quad (12.15)$$

On a :

$$\tau^{00}_{(k+1)} = \frac{\alpha^{-2}}{4} |\nabla^{k+1} F|^2$$

$$\tau^{j0}_{(k+1)} = \gamma_{\rho_1 \sigma_1} \dots \gamma_{\rho_{k+1} \sigma_{k+1}} \nabla^{\rho_1 \dots \rho_{k+1}} F_{0i} \nabla^{\sigma_1 \dots \sigma_{k+1}} F^{ij}.$$

En utilisant (12.14) on trouve

$$\nabla_\lambda (\alpha^2 \tau^{\lambda (0)}_{(k+1)}) = \frac{1}{4} M - \frac{1}{2} \tau^{ij}_{(k+1)} \partial_0 g_{ij} + \tau^{00}_{(k+1)} \alpha \partial_0 \alpha.$$

En intégrant cette égalité sur Ω_t et en utilisant les expressions de M et de $\tau^{\alpha\beta}_{(k+1)}$ on trouve :

$$\|\nabla^{k+1} F\|^2_{\omega_t} \leqq \|\nabla^{k+1} F\|^2_{\omega_0} + \int_0^t C \|\nabla^{k+1} F\|_{\omega_\tau} \left(\|\nabla^{k+1} d\|_{\omega_\tau} + C_{\partial g} \sum_{h}^{k+1} \|\nabla^h F\|_{\omega_\tau} \right) d\tau \quad (12.16)$$

et le lemme de Gronwall donne :

$$\|\nabla^{k+1} F\|_{\omega_t} \leqq e^{C_{\partial g} t} \left\{ \|\nabla^{k+1} F\|_{\omega_0} + C \int_0^t \left(\|\nabla^{k+1} d\|_{\omega_\tau} + C_{\partial g} \sum_{l=0}^{k} \|\nabla^l F\|_{\omega_\tau} \right) d\tau \right\}. \quad (12.17)$$

On déduit de cette inégalité et de (12.10) que l'on a pour tout $k \geqq 0$, entier

$$\|\nabla^{k+1} F\|_{\omega_t} \leqq e^{C_{\partial g} t} \left\{ \|\nabla^{k+1} F\|_{\omega_0} + C_{\partial g} \sum_{i=0}^{k} \left(\sum_{j=1}^{k+1-i} t^j \right) \|\nabla^i F\|_{\omega_0} + C \int_0^t \left(\|\nabla^{k+1} d\|_{\omega_\tau} + \sum_{i=0}^{k} \left(\sum_{j=1}^{(k+1)-i} t^j \right) \|\nabla^i d\|_{\omega_\tau} \right) d\tau, \right. \quad (12.18)$$

c'est-à-dire la formule (12.1).

THÉORÈME. — *Si* F *et* d *sont dans* $C_0^\infty(\Omega_T)$ *et vérifient* $LF = d$ *alors on a pour tout* s *et pour tout* $t \in [0, T]$ *les inégalités*

$$\| F \|_s^t \leqq C e^{C_{\partial g} t} \left\{ \| F \|_s^0 + C \int_0^t \| d \|_s^\tau d\tau \right\} \tag{12.19}$$

Preuve. — L'équivalence uniforme sur Ω_T des quantités $\sum_{h=0}^{s} \| \nabla^h F \|_{\omega_t}$ donne avec l'inégalité (12.16) et quelques manipulations usuelles

$$(\| F \|_s^t)^2 \leqq C (\| F \|_s^0)^2 + \int_0^t \{ C_{\partial g} (\| F \|_s^\tau)^2 + C \| F \|_s^\tau \| d \|_s^\tau \} d\tau. \tag{12.20}$$

13. INÉGALITÉS POUR A

A étant un vecteur à valeurs dans $\mathcal{G}$ de composantes $(A^i, 0)$, on va montrer

PROPOSITION. — *Si* A *est dans* $C_0^\infty(\Omega_T)$ *et vérifie l'équation* $\partial_0 A_i = \tilde{F}_{0i}$, *alors on a, pour tout* $t \in [0, T]$, *les inégalités*

$$\| \nabla^k A \|_{\omega_t} \leqq e^{C_{\partial g} t} \left\{ \| \nabla^k A \|_{\omega_0} + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-i} t^j \| \nabla^i A \|_{\omega_0} \right. \\ \left. + \int_0^t C \| \nabla^k \tilde{F} \|_{\omega_\tau} + C_{\partial g} \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-i} (t-\tau)^j \| \nabla^i \tilde{F} \|_{\omega_\tau} d\tau \right\} \tag{13.1}$$

Preuve. — On déduit de $\partial_0 A_i = \tilde{F}_{0i}$ que

$$\frac{1}{2} \partial_0 (A^i . A_i) = A^i . (\tilde{F}_{0i} + \partial_0 g^{ij} A_j).$$

On intègre la dernière relation sur Ω_t, on utilise la formule de Stokes et la positivité de $A^i . A_i$ pour obtenir

$$\| A \|_{\omega_t}^2 \leqq \| A \|_{\omega_0}^2 + \int_0^t \{ C_{\partial g} \| A \|_{\omega_\tau}^2 + C \| A \|_{\omega_\tau} \| \tilde{F} \|_{\omega_\tau} \} d\tau$$

La formule générale (13.1) se démontre comme dans le cas de F, § 12, par récurrence sur k et utilisation du lemme de Gromwall. On a aussi

THÉORÈME. — *Si* A, $\tilde{F}$ *sont dans* $C^\infty(\bar{\Omega}_T)$ *alors pour chaque* s *et pour tout* $t \in [0, T]$

$$\| A \|_s^t \leqq C e^{C_{\partial g} t} \left\{ \| A \|_s^0 + C \int_0^t \| \tilde{F} \|_s^\tau d\tau \right\} \tag{13.2}$$

14. ITÉRATIONS (cas $m>0$)

Nous allons utiliser les solutions du système linéarisé pour construire une suite d'itérées qui convergera dans des espaces appropriés vers une solution du problème non linéaire, nous supposons $m>0$ pour simplifier.

Construction des itérées

Soit donné $(F_1, A_1, f_1) \in C_0^\infty(\Omega_T) \times C_0^\infty(\Omega_T) \times C_0^\infty(\hat{\Omega}_T)$. on définit la suite (F_ν, A_ν, f_ν) par résolution du système linéaire du paragraphe 6 où on fait $\tilde{F}=F_\nu$, $\tilde{A}=A_\nu$, $\tilde{f}=f_\nu$:

$$LF_{\nu+1}=d_\nu, \qquad \partial_0 A_{\nu+1}=F_{\nu,0i}, \qquad \mathscr{L}_{Y_\nu} f_{\nu+1}=0, \tag{14.1}$$

avec les données de Cauchy $(\Phi, a, \varphi) \in C_0^\infty(\omega_0) \times c^\infty(\omega_0) \times C_0^\infty(\hat{\omega}_0)$.

Convergence des itérées

PROPOSITION. — *Pour chaque entier positif s et chaque* $k>\frac{n}{2}$ *la suite* (F_ν, A_ν, f_ν) *est de Cauchy dans* $\mathscr{E}_k^s(t) \equiv E_2^s(\Omega_t) \times E_2^s(\Omega_t) \times E_{2,k}^s(\hat{\Omega}_t)$ *si t est suffisamment petit.*

Preuve. — Choisissons un entier $s>n+1$ et un nombre $k>\frac{n}{2}$.

1° Montrons que la suite est bornée. Soit M_0, M'_0, N_0 les bornes $\|F\|_s^0$, $\|A\|_s^0$, $\|f\|_{s,k}^0$ déduites des données de Cauchy. Posons $E_2^s(t) \equiv E_2^s(\Omega_t)$, $E_{2,k}^s(t) \equiv E_{2,k}^s(\hat{\Omega}_t)$. Supposons

$$\|F_\nu\|_{E_2^s(t)} \leqq M, \qquad \|A_\nu\|_{E_2^s(t)} \leqq M', \qquad \|f_\nu\|_{E_2^s(t)} \leqq N \tag{14.1}$$

Compte tenu du fait que $E_2^s(t)$ est une algèbre si $s>\frac{n}{2}$ et de la majoration du courant paragraphe 11 on voit que

$$\|d_\nu\|_{E_2^s(t)} \leqq C\{\|A_\nu\|_{E_2^s(t)} \|F_\nu\|_{E_2^s(t)} + \|f_\nu\|_{E_2^s(t)}\} \tag{14.2}$$

On déduit donc de la majoration (12.16) et de l'hypothèse (14.1) que l'on a, pour tout $t \leqq T$

$$\|F_{\nu+1}\|_{E_2^s(t)} \leqq C_1\{M_0 + t(MM'+N)\} \tag{14.3}$$

alors que le paragraphe 13 implique une inégalité de la forme

$$\|A_{\nu+1}\|_{E_2^s(t)} \leqq C_2\{M'_0 + tM\} \tag{14.4}$$

La majoration (10.2) donne d'autre part

$$\|f_{\nu+1}\|_{E_2^s(t)} \leqq C_3 N_0 e^{t\{c_{\partial g}+c_4(M+M')\}}. \tag{14.5}$$

Il suffit de choisir M, M′, N assez grands et t assez petit pour que $F_{\nu+1}$, $A_{\nu+1}$, $f_{\nu+1}$ vérifient à leur tour la majoration (14.1).

2° Convergence des itérées. En utilisant les bornes précédentes et les inégalités (12.16) on trouve, en désignant par C_0 une constance qui dépend des bornes M_0, M'_0, N_0

$$\begin{aligned}\|F_{\nu+1}-F_\nu\|_{E_2^s(t)} &\leqq C\|d_{\nu+1}-d_\nu\|_{E_2^s(t)}\\ &\leqq C_0 t\{\|F_\nu-F_{\nu-1}\|_{E_2^s(t)}+\|A_\nu-A_{\nu-1}\|_{E_2^s(t)}+\|f_\nu-f_{\nu-1}\|_{E_{2,k}^s(t)}\}\end{aligned} \tag{14.6}$$

et une inégalité encore plus simple pour $A_{\nu+1}-A_\nu$. L'inégalité pour $f_{\nu+1}-f_\nu$ se déduit de (10.2), où l'on fait $b=\mathscr{L}_{Y_\nu-Y_{\nu-1}}f_\nu$. En utilisant l'expression de Y_ν et des calculs analogues à ceux du paragraphe 10 on voit que pour $t\leqq T$, $s>n+1$

$$\begin{aligned}\|\mathscr{L}_{Y_\nu-Y_{\nu-1}}f_\nu\|_{E_2^s(t)} &= \|(Y^I_\nu-Y^I_{\nu-1})\,\partial_I f_\nu\|_{E_2^s(t)}\\ &\leqq C\{\|F_\nu-F_{\nu-1}\|_{E_2^s(t)}+\|A_\nu-A_{\nu-1}\|_{E_2^s(t)}\}\,\|f_\nu\|_{E_2^s(t)}\end{aligned} \tag{14.7}$$

la norme de f_ν dans $E_{2,k}^{s+1}(t)$ est bornée si $t<t_1$, par un nombre qui dépend des bornes M_1, M'_1, N_1 définies comme M_0, M'_0, N_0, mais pour $s+1$.

En regroupant les inégalités on voit que $u_\nu=(F_\nu, A_\nu, f_\nu)$ est tel que

$$\|u_\nu-u_{\nu-1}\|_{\mathscr{E}_k^s(t)} \leqq C_1 t\|u_\nu-u_{\nu-1}\|_{\mathscr{E}_k^s(t)}. \tag{14.8}$$

Il suffit de prendre $t<C_1^{-1}$ pour que la suite u_ν soit une suite de Cauchy.

15. DONNÉES DE CAUCHY DANS DES ESPACES H^s

Posons $\mathscr{H}_k^s \equiv H^s(\omega_0)\times H^s(\omega_0)\times H_k^s(\hat\omega_0)$. Désignons par $\tilde E_2^s$ [resp. $\tilde E_{2,k}^s$] des espaces définis comme E_2^s [resp. $E_{2,k}^s$] mais avec une norme L_∞ en t au lieu d'une norme C^0 pour les dérivées d'ordre s : ces espaces sont des duals d'espaces de Banach (*cf.* [10]), par conséquent leurs ensembles bornés sont faiblement compacts.

THÉORÈME. — *Le système en jauge temporelle* (3.4), (5.3), (5.4) *admet une solution et une seule* $(F, A, f)\in\mathscr{E}_k^s(t)\equiv\tilde E_2^s(\Omega_t)\times\tilde E_2^s(\Omega_t)\times\tilde E_{2,k}^s(\hat\Omega_t)$ *prenant les données de Cauchy* $(\Phi, a, \varphi)\in\mathscr{H}_k^s$ *si t est suffisamment petit,* $s>n+1$ *et* $k>\frac{n}{2}$.

Preuve. — Approchons les données de Cauchy par

$$\Phi_\nu, A_\nu, f_\nu \in C_0^\infty(\omega_0)\times C_0^\infty(\omega_0)\times C_0^\infty(\hat\omega_0)$$

(rappelons que les éléments de C_0^∞ ne sont à support compact que dans V, ou $\mathscr{P}$). Construisons la suite $u_\nu=(F_\nu, A_\nu, f_\nu)$ comme au paragraphe précédent, mais avec ces nouvelles données initiales. Les majorations des itérés restent valables, dépendant de la norme $\mathscr{H}_k^s$ de (Φ, a, φ), si $s>n+1$, $k>\frac{n}{2}$. Pour étudier la convergence de la suite u_ν on remplace (14.6) par l'inégalité valable pour tout $s'>\frac{n}{2}$, avec $s'\leqq s$

$$\| F_{\nu+1}-F_\nu \|_{E_2^{s'}(t)} \leqq C \{ \| F_{\nu+1}-F_\nu \|_{s'}^0 + t C_0 \| u_\nu - u_{\nu-1} \|_{\mathscr{E}_k^{s'}(t)} \quad (15.1)$$

En utilisant (10.2) et (14.7) on a, pour s donné supérieur à $n+1$, avec seulement $s'\leqq s-1$, puisque f_ν n'est borné que dans $E_{2,k}^s(t)$

$$\| f_{\nu+1}-f_\nu \|_{E_2^s(t)} \leqq C \{ \| f_{\nu+1}-f_\nu \|_{2,k}^0 + C_0 t (\| u_\nu - u_{\nu-1} \|_{\mathscr{E}_k^{s'}(t)} \} \quad (15.2)$$

On déduit de (15.1), (15.2) la convergence de la suite u_ν, pour t assez petit, dans $\mathscr{E}_k^{s'}(t)$, $s'\leqq s-1$, vers $u\in\mathscr{E}_k^{s'}(t)$. Cette suite est d'autre part bornée dans $\mathscr{E}_k^s(t)\subset\tilde{\mathscr{E}}_k^s(t)$, on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement dans cet espace, donc $u\in\tilde{\mathscr{E}}_k^s(t)$.

16. EXISTENCE D'UNE SOLUTION DU SYSTÈME DE YANG-MILLS-VLASOV

THÉORÈME. — *Le système de Yang-Mills-Vlasov, avec* $m>0$, *admet une solution sur* Ω_t, *prenant des données initiales*

$$a,\ E,\ \varphi\in H^{s+1}(\omega_0)\times H^s(\omega_0)\times H_k^s(\hat{\omega}_0),$$

avec $s>n+1$, $k>\frac{n}{2}$, *si ces données satisfont la contrainte et si* $t<\varepsilon$, *où* $\varepsilon>0$ *ne dépend que de* $(V, g, \mathscr{S})$ *et des normes des données de Cauchy.*

Preuve. — On déduit des données initiales $(a, \Phi, \varphi)\in\mathscr{H}_k^s$ en posant

$$\Phi_{ij}=\partial_i a_j-\partial_j a_i+[a_i, a_j], \qquad \Phi_{0i}=\alpha^{-1}E_i. \quad (16.1)$$

on résout le système en jauge temporelle avec des données de Cauchy. On montre en utilisant le lemme 2, § 5, que cette solution vérifie le système complet

Remarque 1. — On peut déduire du précédent un théorème d'existence pour $t<\varepsilon'$, global dans l'espace, avec des données initiales dont la restriction à chaque boule géodésique B_δ (chaque $\hat{B}_\delta$ pour φ) est dans $\mathscr{H}_k^s$, avec des normes uniformément bornées.

Remarque 2. — On peut démontrer par des méthodes standard (*cf*. [20]) un théorème d'unicité, à un changement de jauge près.

17. CAS $m=0$

En utilisant les méthodes précédentes et l'expression (6.7) de f on voit que le théorème d'existence du paragraphe 16 s'étend au cas $m=0$, ainsi que les remarques 1 et 2, à condition d'ajouter aux hypothèses la suivante

$$\text{Support}\,\varphi \cap \{p^0=0\} \equiv \varnothing \tag{17.1}$$

Ce théoréme local et les propriétés d'invariance conforme du système de Yang-Mills-Vlasov avec $m\simeq 0$ (*cf*. [21]) permettent de montrer un théorème d'existence globale d'une solution du problème de Cauchy pour ce système sur l'espace temps de Minkovski, en utilisant la méthode donnée dans [8].

RÉFÉRENCES

[1] A. ALVES, Équation de Liouville pour les particules de masse nulle, *C. R. Acad. Sci. Paris*, *t.* **278**, série A, 1975, p. 1151-1154.

[2] D. BANCEL et Y. CHOQUET-BRUHAT, Existence, Uniqueness and Local Stability for the Einstein-Maxwell-Boltzman System, *Comm. Math. Phys.*, *vol.* **33**, Springer Verlag, 1973, p. 83-96.

[3] D. BANCEL, Problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann en relativité générale, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. **XVIII**, n° 3, 1973, p. 263-284.

[4] F. CAGNAC et Y. CHOQUET-BRUHAT, Solution globale d'une équation d'ondes non-linéaires sur une variété hyperbolique, *J. Maths Pures Appl.*, t. **63**, p. 377-390.

[5] Y. CHOQUET-BRUHAT, Problème de Cauchy pour le système intégrodifférentiel d'Einstein-Liouville, *Ann. Inst. Fourier*, Université de Grenoble, vol. **XXI**, fasc. 3, 1971.

[6] Y. CHOQUET-BRUHAT, *Existene and Uniqueness for the Einstein-Maxwell-Liouville System Gravitation*, volume dédié à A. Petrov, Nankova Dumka, Kiev, 1972.

[7] Y. CHOQUET-BRUHAT, D. CHRISTODOULOU et M. FRANCAVICLIA, Cauchy Data on a Manifold, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. **XXIX**, n° 3, 1978, p. 241-255.

[8] Y. CHOQUET-BRUHAT et D. CHRISTODOULOU, Existence of Global Solutions od the Yang-Mills, Higgs and Spinor Field Equations in 3+1 Dimensions, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, t. **14**, 1981, p. 481-500.

[9] Y. CHOQUET-BRUHAT, S. M. PANEITZ et I. E. SEGAL, The Yang-Mills Equations of the Universal Cosmos, *J. Funct. Anal.*, vol. **53**, n° 2, 1983, p. 112-150.

[10] R. J. DIPERNA et P. L. LIONS, Global Weak Solutions of Vlasov-Maxwell Systems, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. **XLII**, 1989, p. 729-757.

[11] M. DOSSA, Solutions globales d'équations non linéaires sur des variétés hyperboliques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **309**, série I, 1989, p. 601-604.

[12] D. EARDLEY et V. MONCRIEF, The Global Existence et Yang-Mills Fields in 4-Dimensional Minkovski Space, *Comm. Math. Phys.*, vol. **83**, 1982, p. 171-212.

[13] J. GINIBRE et G. VELO, The Cauchy Problem for Coupled Yang-Mills and Scalar Fields in the Temporal Gauge, *Comm. Math. Phys.*, vol. **82**, 1981, p. 1-28.

[14] R. T. GLASSEY et W. A. STRAUSS, Singularity Formation in Collisionless Plasma Could Only at High Velocities, *Archive for rational mechanics and analysis*, vol. **92**, n° 1, 1986.

[15] R. T. GLASSEY et W. A. STRAUSS, Absence of Shocks in an Initial Dilute Collision-less Plasma, *Comm. Math. Phys.*, vol. **113**, 1987, p. 191-208.

[16] D. HOLM, Hamilton Techniques for Relativistic Fluid Dynamics and Stability Theory, *Relativistic Fluid Dynamics*, A. ANILE, Y. CHOQUET-BRUHAT, eds. Springer Verlag, 1987.

[17] R. KERNER, On the Cauchy Problem for the Yang-Mills Field Equations, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. **XX**, n° 3, 1974, p. 279-283.

[18] J. LERAY, *Hyperbolic differential equations*, Mimographie, Princeton, 1953.

[19] N. NOUTCHEGUEME, Solutions globales de systèmes quasi linéaires du second ordre, *J. Math. Pures Appl.*, t. **66**, 1987, p. 385-405, *cf.* aussi : Solutions des Équations d'Einstein avec données minkowskiennes à l'infini passé, *Thèse d'État*, Yaoundé, 1986.

I. E. SEGAL, The Cauchy Problem for Yang-Mills Equations, *J. Funct. Anal.*, vol. **33**, n° 2, 1979, p. 175-194.

[21] Y. CHOQUET-BRUHAT et N. NOUTCHEGUEME, Solutions globales des équations de Yang-Mills-Vlasov (masse nulle), *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **311**, série I, 1990, p. 785-789.

(*Manuscrit reçu le* 21 *janvier* 1991.)