ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

CHRISTIAN GÉRARD
ANDRÉ MARTINEZ

# Prolongement méromorphe de la matrice de scattering pour des problèmes à deux corps à longue portée

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 51, nº 1 (1989), p. 81-110
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1989__51_1_81_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*

Vol. 51, n° 1, 1989, p. 81-110. *Physique théorique*

# Prolongement méromorphe de la matrice de scattering pour des problèmes à deux corps à longue portée

par

**Christian GÉRARD**

Centre de Mathématiques, École Polytechnique,
91128 Palaiseau Cedex, France, Unité Associée au C.N.R.S. n° 169

et

**André MARTINEZ**

Département de Mathématiques, Université de Paris-Sud,
Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France

RÉSUMÉ. — On montre l'existence d'un prolongement méromorphe de la matrice de scattering pour un potentiel à longue portée analytique à l'infini. Ce prolongement existe comme opérateur continu sur des espaces de Gevrey sur $S^{n-1}$ dont l'indice critique dépend du taux de décroissance à l'infini du potentiel. On utilise une définition semi stationnaire de l'opérateur de scattering due à Isozaki et Kitada, à l'aide de modificateurs indépendants du temps. On montre que les pôles de la matrice de scattering coïncident avec les résonances de l'opérateur.

ABSTRACT. — We prove the existence of a meromorphic extension of the scattering matrix for long range potentials analytic at infinity. This extension exists as a bounded operator on some Gevrey spaces on $S^{n-1}$, with critical depending on the rate of decay of the potential at infinity. We use a semi-stationary definition of the scattering operator due to Isozaki-Kitada, using time independent modifiers. We show that the poles of the scattering matrix coincide with the resonances of the Hamiltonian.

*Annales de l'Institut Henri Poincaré* - Physique théorique - 0246-0211
Vol. 51/89/01/81/30/$5,00/© Gauthier-Villars

# 0. INTRODUCTION

On s'intéresse dans ce travail à l'étude des propriétés analytiques de la matrice de scattering $S(\lambda)(\lambda>0)$, pour des opérateurs de Schrödinger à deux corps $P=-h^2\Delta+V(x)$, où V est un potentiel à longue portée.

Les physiciens associent les résonances quantiques, *i. e.* des particules de durée de vie finie qui sont observées sous forme de pics sur la section totale de diffusion d'une réaction (pics de Breit-Wigner), à des pôles (appelés aussi résonances) pour des valeurs complexes de $\lambda$ de la matrice de scattering $S(\lambda)$.

Cette correspondance est justifiée dans la théorie physique (indépendante du temps) du scattering (*voir* par exemple [La-Li]), par l'existence d'un prolongement méromorphe en $\lambda$ des amplitudes partielles de diffusion dans le cas d'un potentiel radial.

Mathématiquement, on n'a pas, jusqu'à présent, de définition intrinsèque des pôles de la matrice S, sauf pour un potentiel à support compact via la théorie de Lax-Phillips. (*Voir* [L-P] et [Re-Si]).

Par contre, depuis les travaux fondamentaux de Aguilar-Combes [Ag-Co] et Balslev-Combes [Ba-Co], étendus ensuite et généralisés par beaucoup d'auteurs (*cf.* par exemple Simon [Sim 1], Hunziker [Hu], Cycon [Cy], Helffer-Sjöstrand [He-Sj], etc.), on sait définir des résonances comme pôles d'un prolongement méromorphe de la résolvante $(P-\lambda)^{-1}$ à partir de $\Im\lambda>0$, à condition que le potentiel V vérifie des hypothèses d'analyticité à l'infini.

On sait aussi, d'après Helffer-Martinez ([He-Ma]) qu'une large classe de définitions de résonances donne lieu en fait aux mêmes résonances (*cf.* aussi [Ge-Ma] pour une correspondance avec les pics de Breit-Wigner). Le problème naturel qui se pose alors et qui a été énoncé par B. Simon dans [Sim 2] est de montrer l'existence d'un prolongement méromorphe de $S(\lambda)$ et ensuite d'identifier les pôles de $S(\lambda)$ avec ceux de $(P-\lambda)^{-1}$, c'est-à-dire de montrer qu'ils coïncident et ont même multiplicité algébrique.

Pour une classe de potentiels essentiellement à décroissance exponentielle à l'infini, le problème du prolongement a été résolu par Shenk-Thoe [S-T], Simon [Sim 2], Babbit-Balslev [B-B], celui de l'identification par Jensen [Je].

Pour des potentiels à courte portée dilatables analytiquement, et pour des sommes de potentiels à courte portée, dilatables analytiquement, et de potentiels exponentiellement décroissants, les deux problèmes ont été traités par Balslev ([B 1], [B 2]).

Enfin, pour des potentiels à courte portée, dilatables analytiquement en dehors d'un compact, Agmon a également traité les deux problèmes [Ag].

Pour des systèmes à N corps, il n'y a que des résultats très partiels. Citons les travaux de Balslev [B 3] (prolongement et identification pour des problèmes à 3 corps à courte portée), [B 4] (prolongement pour des problèmes à N corps à courte portée sous le seuil des décompositions à 3 corps), Hagedorn [Ha] (prolongement pour des problèmes à 4 corps à décroissance exponentielle dans le cas de décompositions 2 corps $\to$ 2 corps).

Sigal dans [Si 1] a obtenu le prolongement de $S(\lambda)$ pour des systèmes à N corps à courte portée n'ayant qu'un seul canal de réaction. Ce résultat est étendu dans [Si 2] à des schémas de réaction plus généraux.

Enfin, Derezinski [De] a étudié les singularités de $S(\lambda)$ au voisinage des seuils et montré qu'elles sont du type $\lambda^{1/2}$ ou Log $\lambda$.

Pour des problèmes à deux corps à longue portée, la principale difficulté est qu'il faut introduire des opérateurs d'onde modifiés pour définir la matrice de scattering.

A notre connaissance, le problème n'a été abordé que par Agmon et Klein [Ag-Kl] pour un potentiel radial à longue portée. (Voir la remarque suivant le théorème 1.1). Nous avons été motivés par leur travail qui indique en particulier que la matrice de scattering d'un problème à longue portée ne peut se prolonger à des énergies complexes qu'en remplaçant $L^2(S^{n-1})$ par un espace de Gevrey $G^s(S^{n-1})$. Agmon et Klein obtiennent d'ailleurs exactement l'indice critique $s=(1-\rho)^{-1}$.

Dans un travail particulièrement intéressant, Isozaki et Kitada [I-K 1] ont introduit des modificateurs indépendants du temps pour définir la matrice $S(\lambda)$ dans le cas à longue portée, en utilisant des idées géométriques déjà présentes dans les travaux de Enss et de Mourre.

Ils utilisent ces modificateurs dans [I-K 2] pour étudier les singularités de $S(\lambda)$ sur la diagonale de $S^{n-1}\times S^{n-1}$ et pour résoudre le problème de scattering inverse. En particulier, ils donnent une formule de représentation de $S(\lambda)$ pour $\lambda\in\mathbf{R}^+$ en fonction des valeurs au bord $R(\lambda+i0)$, qui ressemble beaucoup à la formule usuelle dans le cas à courte portée.

Un autre avantage de cette formule est que l'on peut obtenir le prolongement méromorphe de $S(\lambda)$ sans avoir à démontrer un principe d'absorption limite pour les opérateurs dilatés, ce qui est l'ingrédient essentiel des démonstrations précédentes dans le cas à courte portée.

Grâce à cette formule de représentation, nous montrons dans cet article que pour un potentiel à longue portée, décroissant à l'infini comme $\langle x\rangle^{-\rho}$, pour $0<\rho<1$, et analytique à l'infini, la matrice de scattering $S(\lambda)$ se prolonge méromorphiquement en $\lambda$ dans un voisinage conique du réel, comme opérateur continu de l'espace de Gevrey $G^s(S^{n-1})$ dans lui-même pour $1<s<(1-\rho)^{-1}$, avec des pôles exactement égaux aux résonances de P (*voir* théorème 1.1). Dans le cas coulombien où $\rho=1$, on peut remplacer $G^s(S^{n-1})$ par $C^\infty(S^{n-1})$. Notre résultat dans ce cas s'applique par exemple à l'hamiltonien d'un électron dans une molécule avec des noyaux de masse infinie.

Le plan de l'article est le suivant :

– Dans la section I, on introduit les hypothèses et on énonce le résultat de ce travail (théorème 1.1 et Corollaire 1.2). On rapelle aussi quelques résultats obtenus par Isozaki et Kitada qui seront utiles dans la suite.

– Dans les sections II et III, on construit dans des voisinages complexes de $\mathbf{R}^{2n}$ des fonctions de phase et des amplitudes solutions des équations eiconales et de transport. On montre des estimations du type « symbole analytique » sur les amplitudes.

– Dans la section IV, on démontre le Théorème 1.1, en utilisant une caractérisation à la Hunziker des résonances, et des résultats de continuité Gevrey des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre infini.

– Dans la section V, on démontre le Corollaire 1.2, à l'aide d'identités classiques de la théorie stationnaire du scattering.

Nous tenons particulièrement à remercier J. Sjöstrand pour de nombreuses et intéressantes discussions. Nous remercions aussi J.-M. Bony, E. Balslev, S. Agmon et M. Klein pour des conversations fructueuses.

## I. Notations et résultats. Formule d'Isozaki-Kitada

Dans cette section, on énonce le résultat de ce travail et on fait quelques rappels sur la formule de représentation d'Isozaki-Kitada. On commence par fixer les hypothèses :

– On considère l'opérateur de Schrödinger $P=-h^2\Delta+V$ sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ où $h\in ]0, 1]$ est un paramètre et V est une fonction réelle qui s'écrit sous la forme suivante :

$$V(x)=V_s(x)+V_L(x) \qquad \text{avec} \quad V_L\in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$$

et

(1.1) $\exists\, \rho\in ]0, 1[$, $\varepsilon_0>0$, $R_0>0$ tels que $V_L$ se prolonge holomorphiquement dans $D=\{x\in\mathbf{C}^n;\ \langle \Re x\rangle \geqq R_0,\ |\Im x|\leqq \varepsilon_0\langle \Re x\rangle\}$ et vérifie :

$$V_L(x)=0(\langle x\rangle^{-\rho}) \quad \text{dans D.}$$

Ici on a noté $\langle x\rangle=(1+|x|^2)^{1/2}$ pour $x\in\mathbf{C}^n$.

(1.2) $V_s(x)$ est un potentiel à support compact tel que $V_s(\Delta+i)^{-1}$ est compact.

Sous ces hypothèses, on peut définir pour $\lambda>0$ la matrice de scattering $S(\lambda)$ : $L^2(S^{n-1})\to L^2(S^{n-1})$ à l'aide de modificateurs indépendants du temps. On rappelle plus bas les résultats de [I-K 1] et [I-K 2].

On notera $G^s(S^{n-1})$ l'espace des fonctions Gevrey d'indice $s$ sur $S^{n-1}$ défini par : $u\in C^\infty(S^{n-1})$ est dans $G^s(S^{n-1})$ si $\exists\, C>0$ t.q. :

$$|D_\omega^\alpha u|\leqq C^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s, \qquad \forall\,\alpha\in\mathbf{N}^{n+1},$$

où $D_\omega$ désigne les dérivées sur $S^{n-1}$. On notera $G^s(S^{n-1})'$ le dual topologique de $G^s(S^{n-1})$, qui est un espace d'ultradistributions.

On dira qu'un opérateur $M(\lambda)$ défini pour $\lambda \in \mathbf{R}_*^+$ de $G^s(S^{n-1})$ dans $G^s(S^{n-1})$ se prolonge méromorphiquement dans un ouvert complexe $\mathscr{U}$ si $M(\lambda)$ a une extension comme opérateur continu de $G^s(S^{n-1})$ dans $G^s(S^{n-1})$ holomorphe en $\lambda$ en dehors d'un ensemble discret $\Gamma \subset \mathscr{U}$, et si $\forall \lambda_0 \in \Gamma$, $M(\lambda)$ s'écrit au voisinage de $\lambda_0$ sous la forme :

$$M(\lambda) = M_0(\lambda) + \sum_{1}^{n(\lambda_0)} \frac{E_i}{(\lambda - \lambda_0)^i},$$

où $M_0(\lambda)$ est holomorphe continu de $G^s(S^{n-1})$ dans $G^s(S^{n-1})$ et $E_i$ est un opérateur de rang fini pour $1 \leqq i \leqq n(\lambda_0)$. $n(\lambda_0)$ est appelé l'ordre du pôle $\lambda_0$.

On utilisera les définitions analogues obtenues en remplaçant $G^s(S^{n-1})$ par $C^\infty(S^{n-1})$, $G^s(S^{n-1})'$ et $D'(S^{n-1})$.

Le résultat de ce travail est alors le suivant :

THÉORÈME 1.1. — *(i) Sous les hypothèses* (1.1), (1.2), *il existe un voisinage complexe $\mathscr{U}$ de $\mathbf{R}_+^*$ conique à l'infini* (i. e. *contenant* $\{\lambda \in \mathbf{C} \mid \Re \lambda \geqq 1, |\Im \lambda| < \delta \Re \lambda\}$ *pour un certain* $\delta > 0$) *tel que la matrice de scattering* $S(\lambda)$ *se prolonge méromorphiquement en $\lambda$ dans $\mathscr{U}$ comme opérateur de* $G^s(S^{n-1})$ *dans* $G^s(S^{n-1})$ *et de* $G^s(S^{n-1})'$ *dans* $G^s(S^{n-1})'$ *pour tout* $s \in ]1, (1-\rho)^{-1}[$.

*Si* $\rho = 1$, $S(\lambda)$ *se prolonge méromorphiquement en $\lambda$ de* $C^\infty(S^{n-1})$ *dans* $C^\infty(S^{n-1})$ *et de* $D'(S^{n-1})$ *dans* $D'(S^{n-1})$.

(ii) *$\mathscr{U}$ peut être choisi indépendant de $h \in ]0, 1]$ et de $s \in ]1, (1-\rho)^{-1}[$.*

(iii) *Les résidus de* $S(\lambda)$ *en un pôle* $\lambda_0$ *ont des noyaux analytiques sur* $S^{n-1} \times S^{n-1}$.

(iv) *Le noyau* $S(\lambda, \omega, \omega')$ *de* $S(\lambda)$ *est analytique en* $(\omega, \omega')$ *dans* $\{\omega \neq \omega'\}$.

COROLLAIRE 1.2. — *Sous les hypothèses* (1,1), (1,2), *les pôles de* $S(\lambda)$ *dans $\mathscr{U}$ sont exactement les résonances de* P *dans $\mathscr{U}$ avec même ordre.*

Faisons maintenant quelques remarques sur ce résultat :

— Les hypothèses (1.1), (1.2) entraînent que P n'a pas de valeurs propres plongées dans le spectre continu, sauf éventuellement 0, c'est-à-dire pas de résonances dans $\mathbf{R}_*^+$. (*Voir* [Re-Si] Section XIII-13).

— Comme annoncé dans l'introduction, Agmon et Klein ont étudié ce problème pour un potentiel V à symétrie sphérique. Dans ce cas, la matrice $S(\lambda)$ se diagonalise sur les harmoniques sphériques $Y_l^m$. Agmon et Klein obtiennent une croissance des valeurs propres de $S(\lambda)$ sur la base des $Y_l^m$ en $\exp(l^{1-\rho})$, ce qui correspond exactement à l'indice critique $s = (1-\rho)^{-1}$ dans notre théorème.

– On remarque aussi que si l'on ne peut plus faire agir $S(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathbf{C}$ sur des fonctions de $L^2(S^{n-1})$, on peut tout de même appliquer $S(\lambda)$ à des « paquets d'onde » car $G^s(S^{n-1})$ pour $1<s<(1-\rho)^{-1}$ contient des fonctions $C_0^\infty$.

– La notion de résonance utilisée dans ce théorème est celle obtenue par la méthode des distorsions analytiques de Hunziker [Hu].

D'après [He-Ma], ces résonances coïncident avec celles définies par Helffer et Sjöstrand dans le cadre semi-classique (*voir* [He-Sj]).

On décrit maintenant brièvement la formule de représentation de $S(\lambda)$ d'Isozaki-Kitada et les constructions qui l'accompagnent.

Dans toute la suite, on supposera que $V=V_L$. La présence de $V_s$ n'intervient pas dans la construction des modificateurs. Suivant [I-K 1], on définit les opérateurs d'onde de la manière suivante :

On se donne $0<d$ et $-1<\sigma^- <\sigma^+ <1$ et on construit une fonction de phase $\sigma(x, \eta)$ et un symbole

$$a(x, \eta, h)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x, \eta)\, h^j \qquad \text{avec} \quad |a_j(x, \eta)| \leqq C_j \langle x \rangle^{-j} \langle \eta \rangle^{-j}$$

tels que [en notant $\cos(x, \eta)=x.\eta\,|x|^{-1}|\eta|^{-1}$] :

1.3. (i) Il existe $R>0$ tel que $\varphi$ soit $C^\infty$ et réelle dans

$$\{(x, \eta)\in \mathbf{R}^{2n};\ |x|\geqq R,\ |\eta|\geqq d, \qquad \cos(x, \eta)\in[-1, \sigma^-]\cup[\sigma^+, 1]\},$$

et y vérifie : $(\nabla_x \varphi)^2+V(x)=\eta^2$, ainsi que :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{N}^n : |\partial_x^\alpha \partial_\eta^\beta(\varphi(x, \eta)-x.\eta)| \leqq C_{\alpha, \beta} \langle x \rangle^{1-\rho-|\alpha|}.$$

1.3. (ii) $a_j(x, \eta)\in C^\infty(\mathbf{R}^{2n}, \mathbf{C})$, $a_j(x, \eta)=0$ si $\cos(x, \eta)\in[\sigma^-, \sigma^+]$ ou $|x|\leqq R$ ou $|\eta|\leqq d$ et : $|\partial_x^\alpha \partial_\eta^\beta a_j(x, \eta)| \leqq C_{\alpha, \beta, j} \langle x \rangle^{-j-|\alpha|} \langle \eta \rangle^{-j}$.

1.3. (iii) Il existe $\delta>0$ tel que $-1<\sigma^- -\delta<\sigma^+ +\delta<1$ et :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\eta^\beta(a_0(x, \eta)-1)| \leqq C_{\alpha, \beta} \langle x \rangle^{-|\alpha|-\rho} \langle \eta \rangle^{-1}$$

pour

$$\cos(x, \eta)\in[1, \sigma^- -\delta]\cup[\sigma^+ +\delta, 1],$$
$$|x|>2R,\ |\eta|>2d.$$

1.3. (iv) Le symbole

$$t(x, \eta, h)=e^{-i\varphi(x, \eta)/h}(P-\eta^2)\,(a(., \eta, h)\,e^{i\varphi(., \eta)/h})$$

vérifie :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\eta^\beta t(x, \eta, h)| \leqq C_{\alpha, \beta, N} h^N \langle x \rangle^{-N}$$

pour tout $N \in \mathbf{N}$ dans $\cos(x, \eta)\in[-1, \sigma^- -\delta]\cup[\sigma^+ +\delta, 1]$. ■

*Remarque* 1.2. – Dans [I-K 1], seul le cas $h=1$ est traité. Pour pouvoir utiliser aussi notre résultat dans le cadre semi-classique, on modifie de façon standard les constructions de Isozaki-Kitada pour contrôler l'uniformité en $h$.

On note ensuite $\mathscr{J}$ l'opérateur intégral de Fourier suivant :

$$(1.4)\qquad \mathscr{J} u(x, h)=(2\pi h)^{-n}\int e^{i(\varphi(x,\eta)-y\cdot\eta)/h} a(x, \eta, h)\, u(y, h)\, dy\, d\eta.$$

[on note ici encore $a$ une réalisation de $a(x, \eta, h)$].

Si $I \subset ]2d^2, +\infty[$, on définit les opérateurs d'onde modifiés par :

$$(1.5)\qquad W^{\pm}(I)=s.\lim_{t\to\pm\infty} e^{itP/h}\mathscr{J} e^{-itP_0/h} E_{P_0}(I)$$

où $P_0=-h^2\Delta$ et $E_{P_0}(I)$ désigne le projecteur spectral de $P_0$ sur I. Dans [I-K 2], Isozaki et Kitada montrent que, sous les conditions 1.3 (i) à 1.3 (iv), $W^{\pm}(I)$ existent, sont complets [au sens que si $\mathscr{H}_c(P)$ est le sous-espace continu de P, on a : $\operatorname{Im}(W^{\pm}(I))=E_P(I)\,\mathscr{H}_c(P)$], et sont isométriques sur $\operatorname{Im} E_{P_0}(I)$.

De plus, $W^{\pm}(I)$ ne change pas si on change les constantes $\sigma^-$, $\sigma^+$ qui définissent les domaines intervenant dans 1.3 (i), ... 1.3 (iv), et les réalisations de $a$.

En particulier, dans le cas à courte portée $\rho>1$, les opérateurs $W^{\pm}(I)$ sont égaux aux opérateurs d'onde usuels.

L'opérateur de scattering associé est :

$$(1.6)\qquad S(I)=W^{+}(I)^{*}\,W^{-}(I),$$

et on pose, pour $f\in L_s^2(\mathbf{R}^n)=\{f\in L^2(\mathbf{R}^n);\ \langle x\rangle^s f\in L^2(\mathbf{R}^n)\}$ avec $s>1/2$ :

$$\mathscr{F}_0(\lambda)\, f(\omega, h)=2^{-1/2}\lambda^{(n-2)/4}\hat{f}(\sqrt{\lambda}\,\omega, h)\qquad \text{pour}\quad \omega\in S^{n-1},$$

où

$$\hat{f}(\xi, h)=(2\pi h)^{-n/2}\int e^{-ix\cdot\xi/h} f(x)\, dx.$$

$\mathscr{F}_0(\lambda)$ est alors borné de $L_s^2(\mathbf{R}^n)$ dans $L^2(S^{n-1})$ et admet pour adjoint

$$\mathscr{F}_0^{*}(\lambda)\, g(x, h)=2^{-1/2}(2\pi h)^{(-n/2)}\lambda^{(n-2)/4}\int e^{i\sqrt{\lambda}\,x,\ \omega/h} g(\omega)\, dS_\omega$$

$dS_\omega$ étant la mesure de volume sur $S^{n-1}$. La matrice de scattering se définit pour $\lambda\in I$ par :

$$(1.7)\qquad S(\lambda)\,\mathscr{F}_0(\lambda)=\mathscr{F}_0(\lambda)\, S(I).$$

Pour obtenir leur formule de représentation de $S(\lambda)$, Isozaki et Kitada considèrent deux choix possibles pour le couple $(\varphi, a)$, notés $(\varphi_1, a_1)$ et $(\varphi_2, a_2)$. Ils sont associés à un choix de $\sigma_j^{\pm}$, $j=1, 2$ tel que :

$-1<\sigma_1^-<\sigma_1^+<0<\sigma_2^-<\sigma_2^+<1$. On a aussi par construction : $\varphi_1=\varphi_2$ pour $\cos(x, \eta)$ proche de $\pm 1$.

On notera $J_j$ $(j=1, 2)$ les opérateurs de la forme (1.4) associés à $(\varphi_j, a_j)$, ainsi que $t_j(x, \eta, h)$ la fonction introduite dans 1.3 (iv).

$T_j$ désigne l'opérateur suivant :

$$(1.8)\qquad T_j u(x, h)=(2\pi h)^{-n}\int e^{i(\varphi_j(x,\eta)-y\cdot\eta)/h}\, t_j(x, \eta, h)\, u(y, h)\, dy\, d\eta$$

et on a : $T_j=PJ_j-J_j P_0$.

La matrice de scattering vérifie alors (*cf.* [I-K 2], Théorème 3.3) :

$$(1.9)\qquad S(\lambda)=\mathbf{1}-2i\pi\,\mathscr{F}_0(\lambda)\,J_1^*T_2\,\mathscr{F}_0(\lambda)^* \\ +2i\pi\,\mathscr{F}_0(\lambda)\,T_1^*\,R(\lambda+i0)\,T_2\mathscr{F}_0(\lambda)^*,$$

où $R(\lambda+i0)$ désigne la valeur au bord usuelle de la résolvante de P.

On remarque ici que si $\rho>1$, on peut prendre $J_1=J_2=\mathbf{1}$ et on retrouve la formule de représentation habituelle. (*Voir* [Ku]).

Un des intérêts de la formule (1.9) est l'apparition de l'opérateur $T_1^*R(\lambda+i0)\,T_2$, où $T_2$ microlocalise dans la région sortante *cos* $(x, \eta)\geqq\sigma_2^- -\delta>0$, alors que $T_1$ microlocalise dans la région entrante $\cos(x, \eta)\leqq\sigma_1^+ +\delta<0$.

D'autre part, seul le deuxième terme du membre de droite dans (1.9) porte les singularités du noyau de $S(\lambda)$, alors qu'il paraît clair que c'est le dernier terme qui portera les pôles de $S(\lambda)$.

La preuve du Théorème 1.1 va maintenant consister à construire sous les hypothèses (1.1), (1.2) des fonctions $\varphi_j$ et des symboles $a_j$ de telle sorte que l'expression (1.9) garde un sens pour des valeurs complexes de $\lambda$.

## II. Construction des fonctions de phase

Pour $R>0$ assez grand, $d>0$, $\varepsilon>0$, *et* $\sigma\in]0, 1[$, on note :

$$\Gamma^{\pm}(R, d, \varepsilon, \sigma)=\{(x, \eta)\in\mathbf{C}^{2n};\ |\Re x|>R,\ d<|\Re\eta|, \\ \pm\cos(\Re x, \Re\eta)\geqq-\sigma,\ |\Im x|\leqq\varepsilon\langle\Re x\rangle,\ |\Im\eta|<\varepsilon\langle\Re\eta\rangle\}$$

(les intersections de $\Gamma^{\pm}(R, d, \varepsilon, \sigma)$ avec $\mathbf{R}^{2n}$ sont exactement les régions sortante et entrante considérées dans [I-K 1]).

On notera aussi, pour $x\in\mathbf{C}^n$ :

$$\Gamma_x^{\pm}(R, d, \varepsilon, \sigma)=\{\eta\in\mathbf{C}^n;\ (x, \eta)\in\Gamma^{\pm}(R, d, \varepsilon, \sigma)\}.$$

Le but de cette section est d'établir :

PROPOSITION 2.1. – *Pour tout* $d>0$, $\sigma\in]0, 1[$ *et* $\varepsilon>0$ *assez petit, il existe* $R>0$ *et deux fonctions* $\Phi\pm(x, \eta)$ *holomorphes dans* $\Gamma^{\pm}(R, d, \varepsilon, \sigma)$, *réelles sur* $\Gamma^{\pm}\cap \mathbf{R}^{2n}$, *telles que :*

$$\left(\frac{\partial\Phi_{\pm}}{\partial x}(x,\eta)\right)^2+\mathrm{V}(x)=\eta^2$$

$$\Phi_{\pm}(x,\eta)-x.\eta=\mathcal{O}((\langle x\rangle+\langle\eta\rangle)^{1-\rho}\langle\eta\rangle^{-1})$$

*uniformément dans* $\Gamma^{\pm}(\mathrm{R}, d, \varepsilon, \sigma)$.

*Remarque* 2.2. — Par des inégalités de Cauchy, il est clair que l'estimation ci-dessus implique que $\Phi_{\pm}-x.\eta$ vérifie aussi les estimations de 1.3 (i) sur le réel.

On note $\mathrm{U}_t(x,\eta)=(z(t;x,\eta),\zeta(t;x,\eta))$ le flot $(x,\eta)\mapsto \exp t\mathrm{H}_p(x,\eta)$ où $p(x,\eta)=\eta^2+\mathrm{V}(x)$, et on commence par établir des estimations sur $\mathrm{U}_t$, $t>0$. (L'étude pour $t<0$ se fait de même).

LEMME 2.2. — $\forall d>0$, $\forall\sigma\in]0,1[$, $\forall\varepsilon>0$ *assez petit et* $\delta\in]0,\min(d,\sigma,1-\sigma,\varepsilon)[$, *il existe* $\mathrm{C}_1>0$ *telle que pour* $R>0$ *assez grand, on ait :*

$$\mathrm{U}_t(\Gamma^+(\mathrm{R},d,\varepsilon,\sigma))\subset\Gamma^+\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{C}_1}, d-\delta, \varepsilon+\delta, \sigma+\delta\right)$$

*et*

$$|z(t;x,\eta)|\geqq\frac{1}{\mathrm{C}_1}(|x|+t|\eta|)$$

*uniformément pour* $t>0$ *et* $(x,\eta)\in\Gamma^+(\mathrm{R},d,\varepsilon,\sigma)$.

*Démonstration.* — $\varepsilon>0$ et $\sigma\in]0,1[$ étant donnés, commençons par fixer $\varepsilon_0>0$ assez petit et $\mathrm{C}_0>0$ assez grand pour que :

$$4(1-\varepsilon_0)^2|\eta|^2t^2+4\,\mathfrak{R}(x.\bar{\eta})\,t+|x|^2\geqq\frac{1}{C_0^2}(|x|+t|\eta|)^2 \tag{2.1}$$

uniformément pour $t>0$ et $\cos(\mathfrak{R}x,\mathfrak{R}\eta)\geqq-\sigma$,

$$|\mathfrak{I}x|\leqq\varepsilon\langle\mathfrak{R}x\rangle,\ |\mathfrak{I}\eta|<\varepsilon.$$

On a par définition, pour $(x,\eta)\in\Gamma^+(\mathrm{R},d,\varepsilon,\sigma)$ :

$$\begin{aligned} z(t;x,\eta)&=x+2\int_0^t\zeta(s;x,\eta)\,ds\\ \zeta((t;x,\eta)&=\eta-\int_0^t\nabla\mathrm{V}(z(s;x,\eta))\,ds\end{aligned} \tag{2.2}$$

et donc :

$$\frac{\partial}{\partial t}|z((t;x,\eta)|^2=4\,\mathfrak{R}(z(t;x,\eta)\,\bar{\zeta}(t;x,\eta)) \tag{2.3}$$

ainsi que :

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\Re\,(z(t;\,x,\,\eta)\,\bar{\zeta}(t;\,x,\,\eta))$$

$$=2\,|\,\zeta(t;\,x,\,\eta)\,|^2-\Re\,(\bar{z}(t;\,x,\,\eta)\,\nabla\,V(z(t;\,x,\,\eta)))$$

$$\geqq 2\,|\,\zeta(t;\,x,\,\eta)\,|^2-C_2\,|\,z(t;\,x,\,\eta)\,|^{-\rho} \quad (2.4)$$

où $C_2>0$ est définie par $|\,\nabla\,V(x)\,|\leqq C_2\,|\,x\,|^{-1-\rho}$ pour tout $x$ dans D.

Posons alors :

$$T(x,\,\eta)=\sup\,\{\,t\geqq 0 \text{ t. q } \forall\, s\in[0,\,t],\ z(s;\,x,\,\eta)\in D$$

$$\text{et} \quad 2\,|\,\zeta(s;\,x,\,\eta)\,|^2-C_2\,|\,z(s;\,x,\,\eta\,|)\,|^{-\rho}\geqq 2\,(1-\varepsilon_0)^2\,|\,\eta\,|^2\,\}.$$

On a donc $T(x,\,\eta)>0$, et on va montrer que pour $R>0$ assez grand, et $(x,\,\eta)\in\Gamma^+\,(R,\,d,\,\varepsilon,\,\sigma)$, on a $T(x,\,\eta)=+\infty$.

D'après (2.4), on a sur $[0,\,T(x,\,\eta)[$:

$$\Re\,(z(t;\,x,\,\eta)\,.\,\bar{\zeta}(t;\,x,\,\eta))\geqq 2\,(1-\varepsilon_0)^2\,|\,\eta\,|^2\,t+\Re\,(x\,.\,\bar{\eta})$$

et donc, en reportant dans (2.3) et en intégrant :

$$|\,z(t;\,x,\,\eta)\,|^2\geqq 4\,(1-\varepsilon_0)^2\,|\,\eta\,|^2\,t^2+4\,\Re\,(x\,.\,\bar{\eta})\,t+|\,x\,|^2$$

$$\geqq \frac{1}{C_0^2}(\,|\,x\,|+t\,|\,\eta\,|\,)^2 \quad \text{d'après (2.1)} \quad (t\in[0,\,T(x,\,\eta)[). \quad (2.5)$$

On en déduit à l'aide de (2.2) :

$$|\,\zeta(t;\,x,\,\eta)-\eta\,|\leqq \frac{1}{\rho}\,C_2\,C_0^{1+\rho}\,|\,x\,|^{-\rho} \quad \text{sur } [0,\,T(x,\,\eta)[ \qquad (2.6)$$

$$\leqq \frac{\varepsilon_0}{3}\,|\,\eta\,|$$

si on a pris R assez grand (en fonction de $C_0$, $C_2$, $\varepsilon_0$, $d$ et $\rho$).

D'où, toujours d'après (2.2) :

$$|\,z(t;\,x,\,\eta)-x-2\,t\,\eta\,|\leqq \frac{t}{\rho}\,C_2\,C_0^{1+\rho}\,R^{-\rho} \quad \text{sur } [0,\,T(x,\,\eta)[ \qquad (2.7)$$

ce qui montre, par un calcul élémentaire, que $z(t;\,x,\,\eta)$ reste à l'intérieur d'un compact de D pour $t\in[0,\,T(x,\,\eta)[$, et donc $z((t;\,x,\,\eta)\in\bar{D}$ pour $t\in[0,\,T(x,\,\eta)+\delta\,[$ avec $\delta>0$ assez petit.

D'autre part, à l'aide de (2.5) et (2.6), on a pour $t\in[0,\,T(x,\,\eta)[$ :

$$2\,\zeta(t;\,x,\,\eta)\,|^2-C_2\,|\,z(t;\,x,\,\eta)\,|^{-\rho}\geqq 2\left(1-\frac{\varepsilon_0}{3}\right)^2|\,\eta\,|^2-C_2\,C_0^{\rho}\,|\,x\,|^{-\rho}$$

$$\geqq 2\left(1-\frac{\varepsilon_0}{2}\right)|\,\eta\,|^2$$

si $R>0$ est assez grand.

On en déduit que $2|\zeta(t;\, x,\, \eta)|^2 - C_2|z(t;\, x,\, \eta)|^2$ reste plus grand que $2(1-\varepsilon_0)|\eta|^2$ sur $[0, T(x, \eta)+\delta[$ pour $\delta>0$ assez petit, et donc que $T(x, \eta) = +\infty$.

Le lemme résulte alors facilement de (2.6) et (2.7). □

LEMME 2.3. — *Quitte à augmenter* $C_1$, *on a aussi pour* $R>0$ *assez grand, et pour tout* $x \in \{|\Re x| \geqq R,\ |\Im x| \leqq \varepsilon\langle \Re x\rangle\}$ :

(i)

$$\pi_\zeta U_t\left(\{x\}\times\Gamma_x^+\left(\frac{1}{C_1}R,\, d,\, \varepsilon,\, \sigma\right)\right) \supset \Gamma_x^+(R,\, d+\delta,\, \varepsilon-\delta,\, \sigma-\delta)$$

(*où* $\pi_\zeta$ *est la projection* $(z, \zeta) \mapsto \zeta$).

(ii) *De plus, l'application*

$$\Gamma_x^+\left(\frac{1}{C_1}R,\, d,\, \varepsilon,\, \sigma\right) \ni \eta \mapsto \zeta(t;\, x,\, \eta)$$

*est un difféomorphisme global sur son image.*

*Démonstration.* — Du fait que $\zeta(t;\, x,\, \eta)$ est holomorphe en $\eta$, on déduit de (2.6), par une inégalité de Cauchy, que l'on a :

$$\nabla_\eta \zeta(t;\, x,\, \eta) = \mathbf{1} + \mathcal{O}(R^{-\rho})$$

ce qui montre que $\eta \mapsto \zeta(t;\, x,\, \eta)$ est un difféomorphisme local. Utilisant ensuite la formule de Taylor à l'ordre 2, on voit facilement [toujours à l'aide de (2.6)] que pour R assez grand $\eta \mapsto \zeta(t;\, x,\, \eta)$ est injectif sur $\Gamma_x^+(R, d, \varepsilon, \sigma)$. C'est donc un difféomorphisme global sur son image, et qui diffère de l'identité par un $\mathcal{O}(R^{-\rho})$. On en déduit le (ii), puis le (i) en considérant l'image du bord de $\Gamma_x^+(R, d, \varepsilon, \sigma)$ par ce difféomorphisme. □

On note maintenant $\xi(t;\, x,\, \eta)$ la restriction à $\Gamma_x^+(R,\, d+\delta,\, \varepsilon-\delta,\, \sigma-\delta)$ du difféomorphisme réciproque de $\Gamma_x^+\left(\frac{1}{C_1}R,\, d,\, \varepsilon,\, \sigma\right) \ni \eta \mapsto \zeta(t;\, x,\, \eta)$.

On a donc $\zeta(t;\, x,\, \xi(t;\, x,\, \eta)) = \eta$ pour tout $t>0$, $(x, \eta) \in \Gamma_x^+(R,\, d+\delta,\, \varepsilon-\delta,\, \sigma-\delta)$,

et, d'après (2.6) :

$$\xi(t;\, x,\, \eta) = \eta + \mathcal{O}(\langle x\rangle^{-\rho}). \tag{2.7}$$

Comme dans [I-K 1], on pose aussi :

$$y(t;\, x,\, \eta) = z(t;\, \xi(t;\, x,\, \eta))$$

de telle sorte que l'on a :

$$(y(t;\, x,\, \eta),\, \eta) = U_t(x,\, \xi(t;\, x,\, \eta)).$$

(On a ici simplement paramétré la relation canonique $U_{-t}$ par les variables qui apparaissent naturellement lorsqu'on la représente à l'aide d'une phase $\varphi(t;\, x,\, \eta) - y.\eta$).

D'après les lemmes 2.2 et 2.3, on a en particulier

$$(y(t;\,x,\,\eta),\,\eta)\in\Gamma^+\left(\frac{1}{C_1^2}\,R,\,d-\delta,\,\varepsilon+\delta,\,\sigma+\delta\right).$$

LEMME 2.4. — *$\nabla_x y(t;\,x,\,\eta)$ est borné uniformément pour $t>0$ et $(x,\,\eta)$ dans $\Gamma^+(2R,\,d+\delta,\,\varepsilon-\delta,\,\sigma-\delta)$.*

*Démonstration.* — On écrit pour $0\leqq s\leqq t$ :

$$\begin{aligned} z(s;\,x,\,\xi(t;\,x,\,\eta)) &= x+2\int_0^s \zeta(u;\,x,\,\xi(t;\,x,\,\eta))\,du \\ \zeta(s;\,x,\,\xi(t;\,x,\,\eta)) &= \eta+\int_s^t \nabla V(z(u;\,x,\,\xi(t;\,x,\,\eta)))\,du \end{aligned} \qquad (2.8)$$

Comme dans le Lemme 2.2, et grâce à (2.7), on voit que :

$$|z(u;\,x,\,\xi(t;\,x,\,\eta))|\geqq\frac{1}{C}(|x|+u|\eta|)$$

avec $C>0$, d'où l'on déduit, d'après (2.8) :

$$\zeta(s;\,x,\,\xi(t;\,x,\,\eta))=\eta+\mathcal{O}(\langle|x|+s|\eta|\rangle^{-\rho})$$

et donc :

$$z(s;\,x,\,\xi(t;\,x,\,\eta))=x+2\eta s+\mathcal{O}(\langle|x|+s|\eta|\rangle^{1-\rho}). \qquad (2.9)$$

On utilise maintenant les inégalités de Cauchy dans le secteur $\Im x\leqq\varepsilon\langle\Re x\rangle$, ce qui donne :

$$\nabla_x[z(s;\,x,\,\xi(t;\,x,\,\eta))]=\mathbf{1}+\mathcal{O}(\langle x\rangle^{-1}\langle|x|+s|\eta|\rangle^{1-\rho}) \qquad (2.10)$$

pour $(x,\,\eta)\in\Gamma^+(2R,\,d+\delta,\,\varepsilon-\delta,\,\sigma-\delta)$.
On a aussi :

$$\begin{aligned} &\nabla_x[\zeta(s;\,x,\,\xi(t;\,x,\,\eta))] \\ &\quad=\int_s^t ({}^t\nabla\nabla V)(z(u;\,x,\,\xi(t;\,x,\,\eta)))\,\nabla_x[z(u;\,x,\,\xi(t;\,x,\,\eta))]\,du \end{aligned} \qquad (2.11)$$

d'où, d'après (2.10) :

$$\begin{aligned} &\nabla_x(\zeta(s;\,x,\,\xi(t;\,x,\,\eta))) \\ &\quad=\int_s^t \mathcal{O}\left(\frac{\langle|x|+u|\eta|\rangle^{-1-2\rho}}{\langle x\rangle}+\langle|x|+u|\eta|\rangle^{-2-\rho}\right)du \\ &\quad=\mathcal{O}\left(\frac{\langle|x|+s|\eta|\rangle^{-2\rho}}{\langle x\rangle}+\langle|x|+s|\eta|\rangle^{-1-\rho}\right). \end{aligned}$$

En réutilisant cette estimation dans l'expression de $\nabla_x[z(s;\,x,\,\xi(t;\,x,\,\eta))]$ obtenue à partir de (2.8), on obtient $\Big($pourvu que $\rho\neq\frac{1}{2}$, ce que l'on peut toujours supposer$\Big)$ :

$$\nabla_x[z(s;\ x,\ \xi(t;\ x,\ \eta))]=\mathbf{1}+\mathcal{O}\left(\frac{\langle |x|+s|\eta|\rangle^{1-2\rho}}{\langle x\rangle}+\langle x\rangle^{-\rho}\right). \quad (2.12)$$

ce qui améliore (2.10). En reportant à nouveau (2.12) dans (2.11), et en itérant le processus, on obtient finalement (quitte à diminuer un peu $\rho$ pour que $\rho^{-1}\notin\mathbf{N}$, ce qui est loisible eu égard aux hypothèses et aux conclusions du théorème 1.1) :

$$\nabla_x[z(s;\ x,\ \xi(t;\ x,\ \eta))]=\mathbf{1}+\mathcal{O}(\langle x\rangle^{-\rho})$$

d'où le résultat en prenant $s=t$. $\square$

On peut maintenant terminer la construction des fonctions $\Phi\pm$ solutions de l'équation eiconale.

En suivant toujours [I–K 1], on pose :

$$\Phi(t;\ x,\ \eta)=u(t,\ x,\ \xi(t;\ x,\ \eta))$$

avec

$$u(t,\ x,\ \xi)=x.\xi+\int_0^t(p-x\nabla V)(U_s(x,\ \xi))\,ds.$$

Par la théorie d'Hamilton-Jacobi, $\Phi$ est alors solution de :

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t;\ x,\ \eta)=\eta^2+V(\nabla_\eta\Phi)=(\nabla_x\Phi)^2+V(x)\\ \Phi|_{t=0}=x.\eta\\ \nabla_x\Phi=\xi(t;\ x,\ \eta)\\ \nabla_\eta\Phi=y(t;\ x,\ \eta)\end{gathered}\quad (2.13)$$

$[\Phi(t,\ x,\ \eta)-y.\eta$ paramètre donc la relation canonique $U_{-t}]$.

Soit $F(t;\ x,\ \eta)=\Phi(t;\ x,\ \eta)-\Phi(t,\ 2R\eta)$. Un calcul simple donne :

$$\frac{\partial F}{\partial t}=(y(t;\ x,\ \eta)-y(t,\ 2R\eta,\ \eta))\times a(t;\ x,\ \eta) \quad (2.14)$$

avec

$$a(t;\ x,\ \eta)=\int_0^1\nabla V((1-\theta)y(t,\ 2R\eta,\ \eta)+\theta y(t,\ x,\ \eta))\,d\theta$$

Utilisant ensuite (2.9) avec $s=t$, on voit que

$$\begin{aligned}(1-\theta)y(t,\ 2R\eta,\ \eta)+\theta y(t;\ x,\ \eta)&=2t\eta+\theta x\\ &+(1-\theta)2R\eta+\mathcal{O}[(1+\theta|x|+t|\eta|+(1-\theta)R|\eta|)^{1-\rho}] \quad (2.15)\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $a(t;\, x,\, \eta)=\mathcal{O}(\langle t\rangle^{-1-\rho})$; puis, grâce au lemme 2.4 :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t;\, x,\, \eta)=\mathcal{O}(\langle t\rangle)^{-1-\rho})$$

uniformément pour $t>0$, et localement uniformément en $(x,\, \eta)$.

En particulier, $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t;\, x,\, \eta)$ existe dans $\Gamma^+(2\,R,\, d+\delta,\, \varepsilon-\delta,\, \sigma-\delta)$, et en posant $\Phi_+(x,\, \eta)=2\,R\,\eta^2+\lim\limits_{t\to+\infty} F(t;\, x,\, \eta)$ on a, grâce à (2.13) et (2.9) :

$$\begin{aligned}(\nabla_x\Phi_+)^2+V(x) &= \lim_{t\to+\infty}(\nabla_x\Phi(t;\, x,\, \eta))^2+V(x)\\ &=\eta^2+\lim_{t\to+\infty} V(\nabla_\eta\Phi(t;\, x,\, \eta))\\ &=\eta^2.\end{aligned}$$

De plus :

$$\Phi_+(x,\, \eta)=x\,.\,\eta+\int_0^{+\infty}\frac{\partial F}{\partial t}(t;\, x,\, \eta)\,dt$$

ce qui donne, en utilisant (2.14), (2.15), et le lemme 2.4 :

$$\begin{aligned}&|\Phi_+(x,\, \eta)-x\,.\,\eta|\\ &\quad\leqq C\,|x-2\,R\,\eta|\int_0^1\int_0^{+\infty}(1+\theta\,|x|+t\,|\eta|+(1-\theta)\,R\,|\eta|)^{-1-\rho}\,dt\,d\theta\\ &\qquad\qquad=\mathcal{O}((\langle x\rangle+\langle\eta\rangle)^{1-\rho}\langle\eta\rangle^{-1}).\end{aligned}$$

Ceci, et la construction analogue faite pour $t<0$ dans $\Gamma^-(R,\, d,\, \varepsilon,\, \sigma)$, termine la preuve de la proposition 2.1 □

## III. Construction des symboles

On se donne maintenant $d>0$, $\varepsilon>0$ assez petits et $-1<\sigma_1^-<\sigma_1^+<0<\sigma_2^-<\sigma_2^+<1$. Fixant aussi $\sigma\in]\max(\sigma_2^+,\, -\sigma_1^-),\, 1[$, on note $\Phi_\pm$ les fonctions définies par la proposition 2.1 dans $\Gamma^\pm(R,\, d,\, \varepsilon,\, \sigma)$ pour $R>0$ assez grand.

Pour $j=1, 2$, on pose alors :

$$\varphi_j(x,\, \eta)=\left\{\begin{matrix}\Phi_+(x,\, \eta) & \text{dans } \Gamma^+(R,\, d,\, \varepsilon,\, -\sigma_j^+)\\ \Phi_-(x,\, \eta) & \text{dans } \Gamma^-(R,\, d,\, \varepsilon,\, \sigma_j^-)\end{matrix}\right\} \tag{3.1}$$

Les fonctions $\varphi_j$ vérifient donc 1.3 (i) et sont holomorphes sur leur domaine de définition. On a aussi $\varphi_1=\varphi_2$ pour $\cos(x,\, \eta)$ proche de $\pm 1$.

On va maintenant établir

PROPOSITION 3.1. — *Pour* R *assez grand,* $\varepsilon$ *assez petit, il existe pour* $j=1,2$ *des fonctions* $b_j^{\pm}(x, \eta, h)=1+\mathcal{O}(\langle x\rangle^{-\rho})$ *(uniformément pour* $h\in\,]0, 1]$ *et* $(x, \eta)\in\Gamma^{\pm}(\mathrm{R}, d, \varepsilon, \mp\sigma_j^{\pm})$ *holomorphes en* $(x, \eta)$ *dans* $\Gamma^{\pm}(\mathrm{R}, d, \varepsilon, \mp\sigma_j^{\pm})$ *telles que :*

$$e^{-i\varphi_j(x,\eta)/h}(\mathrm{P}-\eta^2)(e^{i\varphi_j(.,\eta)/h}b_j^{\pm}(., \eta, h))=\mathcal{O}(e^{-\varepsilon_0\langle x\rangle\langle\eta\rangle/h})$$

*avec* $\varepsilon_0>0$, *uniformément pour* $h\in]0, 1]$ *et* $(x, \eta)\in\Gamma^{\pm}(\mathrm{R}, d, \varepsilon, \mp\sigma_j^{\pm})$.

*Démonstration.* — On cherche $b_j^{\pm}(x, \eta, h)$ sous forme de réalisations de symboles formels : $b_j^{\pm}(x, \eta, h)\sim\sum_{k\geqq 0} b_{j,k}^{\pm}(x, \eta)h^k$, où le sens du signe « $\sim$ » sera précisé plus loin.

On obtient de façon classique le système d'équations de transport :

$$\begin{aligned}&2\nabla_x\varphi_j\nabla_x b_{j,0}^{\pm}+b_{j,0}^{\pm}\Delta_x\varphi_j=0\\&2\nabla_x\varphi_j\nabla_x b_{j,k}^{\pm}+b_{j,k}^{\pm}\Delta_x\varphi_j=i\Delta_x b_{j,k-1}^{\pm},\qquad k\geqq 1.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Ici on cherche $b_{j,0}^{\pm}$ de la forme $1+O(\langle x\rangle^{-\rho})$.

On va traiter seulement le cas de $\Gamma^{+}(\mathrm{R}, d, \varepsilon, -\sigma_j^{+})$ (le cas de $\Gamma^{-}(\mathrm{R}, d, \varepsilon, \sigma_j^{-})$ étant analogue), aussi on va oublier dorénavant les indices $\pm$ et $j$.

Remarquons également que dans (3.2), on a adopté un schéma de résolution « semi-classique », différent de celui utilisé dans [I—K 2].

Posons $\Gamma_\eta^{+}(\mathrm{R}, d, \varepsilon, \sigma)=\{x\in\mathbf{C}^n\,|\,(x, \eta)\in\Gamma^{+}(\mathrm{R}, d, \varepsilon, \sigma)\}$.

Notons $\rho(t; x, \eta)$ le flot de $2\nabla_x\varphi(x, \eta).\nabla_x$ tel que $\rho(0, x, \eta)=x$.

En utilisant la même méthode que dans la preuve du lemme 2.2, on montre que si $x\in\Gamma_\eta^{+}(\mathrm{R}, d, \varepsilon, \sigma)$, on a :

$$|\rho(t; x, \eta)|\geqq\frac{1}{\mathrm{C}}(\langle\Re x\rangle+|\eta|t)\qquad\text{pour}\quad t\geqq 0.\tag{3.3}$$

Pour résoudre (3.2), on commence par une réduction classique :
Soit :

$$b_0(x, \eta)=\exp\left(-\int_0^{+\infty}\Delta_x\varphi(\rho(t; x, \eta))\,dt\right).$$

Comme $\Delta_x\varphi=\mathcal{O}(\langle x\rangle^{-1-\rho})$, et en utilisant (3.3), on voit que $b_0(x, \eta)=1+\mathcal{O}(\langle x\rangle^{-\rho})$ dans $\Gamma_\eta^{+}(\mathrm{R}, d, \varepsilon, \sigma)$. $b_0(x, \eta)$ est alors une solution holomorphe dans $\Gamma_\eta^{+}(\mathrm{R}, d, \varepsilon, \sigma)$ de la 1[re] équation de (3.2). On pose ensuite, pour $k\geqq 0$ : $u_k=b_0^{-1}\times b_k$, et obtient les équations :

$$\begin{aligned}2\nabla_x\varphi.\nabla_x.u_k=ib_0^{-1}&(2(\nabla_x b_0).\nabla_x u_{k-1}\\&+u_{k-1}(\Delta_x b_0)+b_0(\Delta_x u_{k-1}))\qquad\text{pour}\quad k\geqq 1.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Les nouvelles équations de transport peuvent s'écrire de façon condensée en posant $u(x, h)=\sum_{k\geqq 0}u_k(x)h^k$ :

$$2\nabla_x\varphi.\nabla_x u=h^{-1}\mathrm{A}\,u\tag{3.5}$$

où A est de la forme :

$$A = \sum_{\alpha_1 + |\alpha_2| = 2} f_\alpha(x) \left( \frac{h}{\langle x \rangle} \right)^{\alpha_1} (h D_x)^{\alpha_2}$$

et les $f_\alpha$ sont des fonctions holomorphes et bornées dans $\Gamma_\eta^+(\mathrm{R}, d, \varepsilon, \sigma)$, uniformément par rapport à $\eta \in \mathrm{D} = \{ |\Re \eta| \geqq d, |\Im \eta| \leqq \varepsilon \langle \Re \eta \rangle \}$.

Pour résoudre le système (3.5), on introduit la fonction suivante :

$$m(x) = \Re x . \Re \eta - \mathrm{R}_1 |\Re \eta| + s |\Re x| . |\Re \eta| - \mathrm{R}_0 |\Im x| . |\Re \eta|,$$

où on va choisir les paramètres $\mathrm{R}_1, s, \mathrm{R}_0$ plus bas. On pose $\Omega = \{ x \in \mathbf{C}^n | m(x) \geqq 0 \}$.

Notons que pour $\mathrm{R}_1$, $\mathrm{R}_0$ assez grands, $|s| < 1$, et $\Im \eta$ assez petit en fonction de $\mathrm{R}_0$, $\partial\Omega$ est non caractéristique pour le champ de vecteurs sur $\mathbf{C}^n \simeq \mathbf{R}^{2n}$ :

$$\frac{\partial \Re \varphi}{\partial \Re x} \frac{\partial}{\partial \Re x} - \frac{\partial \Re \varphi}{\partial \Im x} \frac{\partial}{\partial \Im x}.$$

On vérifie d'abord que $\Omega$ contient et est contenu dans des domaines du type $\Gamma_\eta^+(\mathrm{R}, d, \varepsilon, \sigma)$. Si $x \in \Omega$, on a :

$$\Re x . \Re \eta \geqq -s |\Re x| |\Re \eta|,$$

$$|\Re x| \geqq \frac{\mathrm{R}_1}{(1+s)}, \qquad |\Im x| \leqq (1+s) \mathrm{R}_0^{-1} |\Re x|.$$

En choisissant $\mathrm{R}_1$, $\mathrm{R}_0$ assez grands, et $s$ proche de $\sigma$, on est sûr que pour tout $\eta \in \mathrm{D}$, $\Omega \subset \Gamma_\eta^+(\mathrm{R}, d - \varepsilon_0, \varepsilon + \varepsilon_0, \sigma + \varepsilon_0)$ pour $\varepsilon_0 > 0$ assez petit, et donc que $\varphi(x, \eta)$ est définie et holomorphe dans $\Omega$.

D'autre part, si $x \in \Gamma_\eta^+(\mathrm{R}, d, \varepsilon, \sigma)$, on a :

$$\begin{aligned} &\Re x . \Re \eta - \mathrm{R}_1 |\Re \eta| + s |\Re x| . |\Re \eta| - \mathrm{R}_0 |\Im x| . |\Re \eta| \\ &\qquad \geqq (s - \sigma) |\Re x| . |\Re \eta| - \frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}} |\Re x| . |\Re \eta| - \mathrm{R}_0 \varepsilon \langle \Re x \rangle . |\Re \eta| \\ &\qquad \geqq 0 \quad \text{si} \quad s > \sigma + \frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}} + 2 \mathrm{R}_0 \varepsilon. \end{aligned}$$

En prenant R assez grand et $\varepsilon$ assez petit, on peut donc trouver un $s < s_0 < 1$ tel que $\Gamma_\eta^+(\mathrm{R}, d, \varepsilon, \sigma) \subset \Omega$.

La fonction $m(x)$ a les propriétés suivantes :

LEMME 3.2. — *Pour* $\mathrm{R}_1$, $\mathrm{R}_0$ *assez grands,* $s < s_0 < 1$ *et* $\varepsilon$ *assez petit,* $\exists\, \mathrm{C}_0 > 0$ *t.q.* :

$$\frac{\partial \Re \varphi}{\partial \Re x} . \frac{\partial m}{\partial \Re x} - \frac{\partial \Re \varphi}{\partial \Im x} \frac{\partial m}{\partial \Im x} \geqq \mathrm{C}_0^{-1} |\Re \eta|^2 \tag{3.6}$$

*uniformément en* $x \in \Omega$, *et* $\eta \in \mathrm{D}$.

*Dans* $\Gamma_\eta^+(\mathrm{R}, d, \varepsilon, \sigma)$ pour $\sigma<s$, R *assez grand*, $\varepsilon$ *assez petit, on a :*

$$\frac{1}{\mathrm{C}_0}\langle x\rangle\langle\eta\rangle\leqq m(x)\leqq \mathrm{C}_0\langle x\rangle\langle\eta\rangle. \tag{3.7}$$

$$\frac{1}{\mathrm{C}_0}d(x, \partial\Omega)\langle\eta\rangle\leqq m(x)\leqq \mathrm{C}_0 d(x, \partial\Omega)\langle\eta\rangle \tag{3.8}$$

*Démonstration.* — Prenant $\mathrm{R}_1$ assez grand, et grâce au fait que $\nabla_x\varphi=\eta+\mathcal{O}(\langle x\rangle^{-\rho})$, il suffit de vérifier (3.6) pour $\varphi=x.\eta$. On a alors $\mathfrak{R}\eta.\dfrac{\partial m}{\partial\mathfrak{R}x}+\mathfrak{I}\eta.\dfrac{\partial m}{\partial\mathfrak{I}x}\geqq(1-s_0)|\mathfrak{R}\eta|^2/2$, en prenant $\mathrm{R}_0$ assez grand, et $\varepsilon$ assez petit.

— (3.7) est immédiat et laissé au lecteur. Montrons maintenant (3.8) :

Il est clair que $m(x)\leqq\mathrm{C}_0 d(x, \partial\Omega)\langle\eta\rangle$. Il suffit de noter que $m=0$ sur $\partial\Omega$ et que $\langle\eta\rangle^{-1}\nabla_x m$ est uniformément borné. Soit maintenant $x\in\Omega$ et $x_0\in\partial\Omega$ tels que $x=\rho(t, x_0, \eta)$. On utilise ici le fait que $\partial\Omega$ est non caractéristique pour $2\nabla_x\varphi.\nabla_x$.

D'après (3.6) on a :

$$m(x)\geqq\mathrm{C}_0 t|\mathfrak{R}\eta|^2 \qquad \text{et} \qquad d(x, \partial\Omega)\leqq|x-x_0|\leqq\mathrm{C}_1 t|\mathfrak{R}\eta|,$$

ce qui termine la démonstration du lemme. □

En s'inspirant des techniques introduites par Sjöstrand pour l'étude des singularités analytiques [Sj], on introduit l'espace de symboles formels suivant : $u=\sum_{k\geqq 0}u_k(x)h^k$ est dans $\mathscr{A}(\Omega)$ si les $u_k$ sont holomorphes dans $\Omega$ et vérifient : $|u_k(x)|\leqq\dfrac{f(u, k)}{m(x)^k}k^k$ dans $\Omega$. (Nous devons à J. Sjöstrand cette définition de symboles analytiques à l'aide de la fonction $m(x)$ qui est particulièrement agréable à utiliser).

Si $f(u, k)$ est la meilleure constante pour $x\in\Omega$, on dira que $u$ est un symbole formel analytique si

$\exists\mu>0$ tel que : $\|u\|_\mu=\sum_{k\geqq 0}f(u, k)\mu^k<+\infty$, i.e. la suite $f(u, k)$ est à croissance au plus exponentielle.

On note $(2\nabla_x\varphi.\nabla_x)^{-1}$ l'opérateur de primitive (défini sur les $u=\sum_{k\geqq 2}u_k(x)h^k$) :

$$(2\nabla_x\varphi.\nabla_x)^{-1}u(x)=-\int_0^{+\infty}u(\rho(t, x, \eta))\,dt.$$

On va maintenant montrer le lemme suivant, qui est fondamental pour la démonstration de la Proposition 3.1 :

LEMME 3.3. — *Il existe* $C_1>0$ *tel que pour tout* $u\in\mathscr{A}(\Omega)$ *et pour tout* $\mu>0$, $\eta\in D$, *on a :*

(i) $\|h\langle x\rangle^{-1}u\|_\mu\leqq C_1\,\mu\,\|u\|_\mu.\langle\eta\rangle$

(ii) $\|h\,D_{x_i}u\|_\mu\leqq C_1\,\mu\,\|u\|_\mu.\langle\eta\rangle$

(iii) $\|(2h\nabla_x\varphi.\nabla_x)^{-1}u\|_\mu\leqq C_1\,\mu^{-1}\|u\|_\mu.\langle\eta\rangle^{-2}$ (*si* $u_0=u_1=0$).

*Démonstration.* — (i) Si $v=h\langle x\rangle^{-1}u$, on a : $v_k(x)=\langle x\rangle^{-1}u_{k-1}(x)$ et $m(x)\leqq C_0\langle x\rangle\langle\eta\rangle$ dans $\Omega$, ce qui donne :

$$|v_k(x)|\leqq\frac{C_0 f(u,\,k-1)(k-1)^{k-1}\langle\eta\rangle}{(m(x))^k}\leqq\frac{C_0 f(u,\,k-1)\,k^k}{(m(x))^k}\langle\eta\rangle.$$

On a donc $f(v,\,k)\leqq C_0\,f(u,\,k-1)\langle\eta\rangle$, ce qui entraîne (i).

(ii) Si $v=\dfrac{h\,\partial u}{\partial x_i}$, on a : $v_k(x)=\dfrac{\partial u_{k-1}}{\partial x_i}(x)$ et grâce à (3.8), on peut trouver un cercle $\Gamma$ de rayon $\varepsilon m(x)\langle\eta\rangle^{-1}$ de centre $x\in\Omega$, et qui est inclus dans $\Omega$.

Par la formule de Cauchy, on a :

$$v_k(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma\frac{u_{k-1}(y)}{(x_i-y_i)^2}\,dy_i.$$

Comme $\langle\eta\rangle^{-1}\nabla_x m$ est uniformément borné, on a sur $\Gamma: m(y)\geqq(1-C\varepsilon)\,m(x)$ pour une certaine constante $C>0$.

On obtient :

$$|v_k(x)|\leqq\frac{C_1 f(u,\,k-1)(k-1)^{k-1}}{\varepsilon(m(x))^k(1-C\varepsilon)^{k-1}}\langle\eta\rangle.$$

Si on prend $\varepsilon=\dfrac{1}{Ck}$, on a $\dfrac{k-1}{1-C\varepsilon}\doteq k$, et

$$|v_k(x)|\leqq\frac{C_1 C f(u,\,k-1)\,k^k}{(m(x))^k}\langle\eta\rangle.$$

On en déduit $f(v,\,k)\leqq C_2 f(u,\,k-1)\langle\eta\rangle$, ce qui démontre (ii).

(iii) Si $v=(2h\nabla_x\varphi.\nabla_x)^{-1}u$, on a :

$$v_k(x)=-\int_0^{+\infty}u_{k+1}(\rho(t,\,x,\,\eta))\,dt.$$

D'où :

$$|v_k(x)|\leqq\int_0^{+\infty}\frac{f(u,\,k+1)(k+1)^{k+1}}{(m(\rho(t,\,x,\,\eta)))^{k+1}}dt\leqq\int_0^{+\infty}\frac{f(u,\,k+1)(k+1)^{k+1}}{(m(x)+(t/C_0)\langle\eta\rangle^2)^{k+1}}dt.$$

d'après (3.6). On a donc :

$$|v_k(x)| \leqq \frac{C_1 f(u, k+1)(k+1)^{k+1}}{k(m(x))^k \langle \eta \rangle^2} \leqq \frac{C_2 f(u, k+1) k^k}{(m(x))^k \langle \eta \rangle^2}.$$

On en déduit : $f(v, k) \leqq C_2 f(u, k+1) \langle \eta \rangle^{-2}$, ce qui démontre (iii).

*Fin de la démonstration de la proposition* 3.1. — Montrons d'abord qu'on peut résoudre (3.5) dans $\mathscr{A}_\mu(\Omega) = \{ u \in \mathscr{A}(\Omega) \mid \| u \|_\mu < +\infty \}$ si $\mu$ est assez petit.

On cherche $u$ sous la forme $u = 1 + v$ et $v$ doit vérifier l'équation :

$$v - (2h\nabla_x \varphi . \nabla_x)^{-1} \mathrm{A}\, v = (2h\nabla_x \varphi . \nabla_x)^{-1} \mathrm{A}\, 1 \qquad (3.9)$$

On remarque ici que si $r = \mathrm{A}\,1$, alors $r_0 = r_1 = 0$, ce qui donne un sens à $(2h\nabla_x \varphi . \nabla_x)^{-1} r$. D'après la forme de A et le lemme 3.3, on a :

$$\| (2h\nabla_x \varphi . \nabla_x)^{-1} \mathrm{A}\, u \|_\mu \leqq C_1^3 \mu \| u \|_\mu \leqq \frac{1}{2} \| u \|_\mu \quad \text{si} \quad \mu \text{ est assez petit.}$$

On peut donc inverser $1 - (2h\nabla_x \varphi . \nabla_x)^{-1} \mathrm{A}$ dans $\mathscr{A}_\mu(\Omega)$ par une série de Neumann, ce qui donne une solution de (3.9).

Il s'agit maintenant de ressommer le symbole formel $b(x, \eta, h) = \sum_{k \geqq 0} b_k(x, \eta) h^k$ solution du système (3.2), de telle sorte que la somme soit holomorphe en $(x, \eta)$. Rappelons que grâce à (3.7), les $b_k(x, \eta)$ vérifient :

$$|b_k(x, \eta)| \leqq \frac{C^{k+1} k^k}{\langle x \rangle^k \langle \eta \rangle^k} \quad \text{dans } \Gamma^+(\mathrm{R}, d, \varepsilon, \sigma), \qquad (3.10)$$

où C est une constante.

On commence par se donner $\chi_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^+)$, $\chi_0 \equiv 1$ près de 0.

Alors, pour $C_1 > 0$, la somme

$$\tilde{b}(x, \eta, h) = \sum_{k \geqq 0} b_k(x, \eta) h^k \left( 1 - \chi_0 \left( \frac{\langle x \rangle \langle \eta \rangle}{C_1 h k} \right) \right)$$

est localement finie, et définit une fonction $C^\infty$ en $(x, \eta)$ dans $\Gamma^+(\mathrm{R}, d, \varepsilon, \sigma)$. De plus, grâce à (3.10), on voit comme dans [Sj] paragraphe 1, que si $C_1$ est pris assez grand, on a :

$$\left| \frac{\partial \tilde{b}}{\partial \bar{x}} \right| + \left| \frac{\partial \tilde{b}}{\partial \bar{\eta}} \right| + \left| \frac{\partial^2 \tilde{b}}{\partial \bar{x} \partial \bar{\eta}} \right| = \mathcal{O}(e^{-\varepsilon_0 \langle x \rangle \langle \eta \rangle / h})$$

avec $\varepsilon_0 > 0$, uniformément dans $\Gamma^+(\mathrm{R}, d, \varepsilon, \sigma)$.

Quitte à agrandir $\Gamma^+(\mathrm{R}, d, \varepsilon, \sigma)$ près de l'origine pour obtenir un domaine pseudoconvexe et à étendre $\tilde{b}$ par 0 de façon $C^\infty$ dans un voisinage de l'origine, on voit qu'on est exactement dans le cadre du théorème 3.2 de [La] (*voir* aussi [Hö]). On sait donc qu'il existe une fonction $g(x, \eta, h)$, $C^\infty$ sur $\Gamma^+(R', d, \varepsilon', \sigma)$ pour $R' > R$, $\varepsilon' < \varepsilon$, telle que :

$$g(x, \eta) = \mathcal{O}(e^{-\varepsilon_1 \langle x \rangle \langle \eta \rangle / h}) \qquad \text{avec} \quad \varepsilon_1 > 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \tilde{b}}{\partial \bar{x}}.$$

Il résulte aussi des constructions de [Hö] que l'on a alors

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{\eta}} = \mathcal{O}(e^{-\varepsilon_2 \langle x \rangle \langle \eta \rangle / h}) \qquad \text{avec} \quad \varepsilon_2 > 0,$$

ce qui permet de résoudre le système en $g_1$ :

$$\frac{\partial g_1}{\partial \bar{\eta}} = \frac{\partial (\tilde{b} - g)}{\partial \bar{\eta}}$$

avec $g_1 = \mathcal{O}(e^{-\varepsilon_3 \langle x \rangle \langle \eta \rangle / h})$, $\varepsilon_3 > 0$, $g_1$ $C^\infty$ sur $\Gamma^+(R'', d'', \varepsilon'', \sigma)$ et holomorphe en $x$.

En posant ensuite $b(x, \eta, h) = \tilde{b} - g - g_1$, on obtient bien une fonction vérifiant la proposition 3.1. La construction analogue dans $\Gamma^-(R, d, \varepsilon, \sigma)$ termine alors la démonstration. □

## IV. Fin de la preuve du théorème 1.1

A partir des fonctions $b_j^\pm$ construites dans la section III, on définit maintenant pour $(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n}$ :

$$a_j(x, \xi, h) = [b_j^+(x, \xi, h)\chi_j^+(\cos(x, \xi)) + b_j^-(x, \xi, h)\chi_j^-(\cos(x, \xi))]\chi_1(|\xi|)\chi\left(\frac{|x|}{R}\right) \quad (4.1)$$

où $\chi_j^\pm$, $\chi_1$, $\chi$ sont des fonctions $C^\infty$ telles que :

(i) Supp $\chi \subset [1, +\infty[$, $\chi = 1$ sur $[2, +\infty[$;
(ii) Supp $\chi_1 \subset [d, +\infty[$, $\chi_1 = 1$ sur $[2d, +\infty[$;
(iii) Supp $\chi_j^+ \subset [\sigma_j^+, 1]$, $\chi_j^+ = 1$ sur $[\sigma_j^+ + \delta, 1]$;
(iv) Supp $\chi_j^- \subset [-1, \sigma_j^-]$, $\chi_j^- = 1$ sur $[-1, \sigma_j^- - \delta]$.

Fixant $s$ dans $\left]1, \dfrac{1}{1-\rho}\right[$, on impose aussi que $\chi_j^\pm$, $\chi_1$, $\chi$ soient toutes Gevrey d'indice $s$.

D'après la section III, $a_j$ vérifie les propriétés 1.3 (ii) à 1.3 (iv) avec $\sigma^\pm = \sigma_j^\pm$, $\varphi = \varphi_j$. On peut donc appliquer la formule (1.9) de représentation d'Isozaki-Kitada, et on voit que l'amplitude de scattering s'écrit formellement sous la forme (pour $\omega, \omega' \in S^{n-1}$) :

$$S(\lambda; \omega, \omega') = \delta(\omega - \omega') - i\pi\lambda^{(n-2)/2} f(\lambda, h, \omega, \omega') + i\pi\lambda^{(n-2)/2} g(\lambda, h, \omega, \omega') \quad (4.2)$$

avec :

$$f(\lambda, h, \omega, \omega') = \int e^{i[\varphi_2(x, \sqrt{\lambda}\omega') - \varphi_1(x, \sqrt{\lambda}\omega)]/h} \bar{a}_1(x, \sqrt{\lambda}\omega)\, t_2(x, \sqrt{\lambda}\omega')\, dx$$

$$g(\lambda, h, \omega, \omega') = \langle R(\lambda + i0)\, e^{i\varphi_2(x, \sqrt{\lambda}\omega')/h}\, t_2(x, \sqrt{\lambda}\omega'),\ e^{i\varphi_1(x, \sqrt{\lambda}\omega)/h}\, t_1(x, \sqrt{\lambda}\omega) \rangle_{L^2(\mathbf{R}^n_x)}$$

où $j = 1, 2$, et $t_j$ est défini à partir de $a_j$ par 1.3 (iv).

D'après [I–K 1], on sait que pour $\lambda > 0$, $f$ et $g$ sont les noyaux d'opérateurs bornés sur $L^2(S^{n-1})$.

## IV.1. Cas de $g(\lambda, h, \omega, \omega')$

On va employer ici une méthode due à Hunziker [Hu], qui consiste à conjuguer $R(\lambda + i0)$ par une distorsion analytique :

Pour $\mu$ réel, $|\mu|$ assez petit, on note $U_\mu$ l'opérateur défini par :

$$(U_\mu \varphi)(x) \overset{\text{def}}{=} J_\mu(x)^{1/2}\, \varphi(x + \mu v(x)) \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

*où* $v(x) = x\chi_2(|x|)$, $\chi_2 \in C^\infty(\mathbf{R}^n; \mathbf{R})$, $\chi_2 = 0$ pour $|x| \leqq 3R$, $\chi_2 = 1$ pour $|x| \geqq 4R$, et où $J_\mu(x) = \det\left(\delta_{i,j} + \mu \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$ est le jacobien de l'application $x \to x + \mu v(x)$.

$U_\mu$ est donc un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbf{R}^n)$, et on sait d'après [Hu] (*cf.* aussi [Ag-Co]) que $U_\mu P U_\mu^{-1}$ se prolonge analytiquement comme opérateur sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ pour $\mu$ complexe, $|\mu|$ assez petit. On note $R_\mu(\lambda) = (U_\mu P U_\mu^{-1} - \lambda)^{-1}$ sa résolvante, qui est définie et méromorphe pour $\lambda$ complexe, $|\Im\lambda| \ll |\Im\mu|$.

D'autre part, on voit sur l'expression (4.1) que, après passage en coordonnées polaires pour $x$ et pour $\xi$, les symboles $a_j$ et $\bar{a}_j$ se prolongent holomorphiquement en les variables $r = |x|$ et $\sigma = |\xi|$ pour $\sigma$ dans $\{\Re\sigma > 2d, |\Im\sigma| < \varepsilon\langle\Re\sigma\rangle\}$ et $r$ dans $\{\Re r > 2R, |\Im r| < \varepsilon\langle\Re r\rangle\}$ ($\varepsilon > 0$ assez petit).

En particulier on peut appliquer $U_\mu (0 < |\Im\mu| \ll \varepsilon)$ aux fonctions $e^{i\varphi_j(x, \sqrt{\lambda}\omega)/h}\, t_j(x, \sqrt{\lambda}\omega, h)$ y compris avec $\lambda$ complexe. Par construction, on a aussi pour un certain $\varepsilon_1 > 0$ :

$$t_j(x, \xi, h) = \mathcal{O}(e^{-\varepsilon_1\langle x\rangle\langle\xi\rangle/h})$$
$$\text{dans } \cos(x, \xi) \in [-1, \sigma_j^- - \delta] \cup [\sigma_j^+ + \delta, 1], \quad |x| \geqq 2R, \tag{4.3}$$

et uniformément pour $h \in ]0, 1]$.

En particulier $t_2(x, \xi, h)$ est exponentiellement petit pour $|x| \geqq 2R$ en dehors de $\cos(x, \xi) \geqq \sigma_2^- - \delta > 0$, et grâce aux propriétés de $\varphi_2$, on en déduit facilement que pour $\Im\mu>0$ on a :

$$U_\mu(e^{i\varphi_2(x,\sqrt{\lambda}\omega)/h}t_2(x,\sqrt{\lambda}\omega,h))=\mathcal{O}(e^{-\varepsilon_2\langle x\rangle/h}) \tag{4.4}$$

avec $\varepsilon_2>0$, uniformément pour $|x|\geqq 2R$, $\omega\in S^{n-1}$, $h\in]0,1]$, et $|\Im\lambda|\ll(\Im\mu)\langle\Re\lambda\rangle$.

On a aussi une estimation analogue à (4.4) pour $U_{\bar\mu}(e^{i\varphi_1(x,\sqrt{\lambda}\omega)/h}t_1(x,\sqrt{\lambda}\omega,h))$, ce qui permet d'écrire :

$$g(\lambda,h,\omega,\omega')=\langle R_\mu(\lambda)\,U_\mu(e^{i\varphi_2(x,\sqrt{\lambda}\omega')/h}t_2(x,\sqrt{\lambda}\omega',h)),\; U_{\bar\mu}(e^{i\varphi_1/h}t_1(x,\sqrt{\lambda}\omega,h))\rangle \tag{4.5}$$

expression qui garde un sens pour $\Im\mu>0$, $|\Im\lambda|\ll(\Im\mu)\langle\Re\lambda\rangle$, et donne une fonction méromorphe en $\lambda$, Gevrey $s$ en $(\omega,\omega')$, et dont les pôles en $\lambda$ sont nécessairement des pôles de $R_\mu(\lambda)$ (au sens de [Hu]), *i.e.* des résonances de P.

## IV.2. Cas de $f(\lambda, h, \omega, \omega')$

D'après les propriétés des $\varphi_j$, on peut écrire :

$$f(\lambda,h,\omega,\omega')=\int e^{i[\sqrt{\lambda}(\omega'-\omega)x+\mathcal{O}(\langle x\rangle^{1-\rho}\langle\sqrt{\lambda}\rangle^{1-\rho})]/h}\,\bar a_1(x,\sqrt{\lambda}\omega)\,t_2(x,\sqrt{\lambda}\omega')\,dx$$

où le $\mathcal{O}(\langle x\rangle^{1-\rho})$ dépend aussi (quoique de manière uniforme) de $\lambda,\omega,\omega'$.

On décompose cette intégrale sous la forme $f_1+f_2$ avec :

$$f_1(\lambda,h,\omega,\omega')=\int_{|x|\leqq 2R} e^{i[\sqrt{\lambda}(\omega'-\omega)x+\mathcal{O}(\langle x\rangle^{1-\rho}\langle\sqrt{\lambda}\rangle^{1-\rho})]/h}\times\bar a_1(x,\sqrt{\lambda}\omega)\,t_2(x,\sqrt{\lambda}\omega')\,dx$$

expression qui se prolonge holomorphiquement en $\lambda$ comme fonction de $G^s(S^{n-1}\times S^{n-1})$.

Posant ensuite, pour tout $\nu\in\mathbf{N}^*$ :

$$\Gamma_\nu=\{\lambda\in\mathbf{C}\,|\,\max(2d,\nu-1)<\Re\lambda<\nu,\ |\Im\lambda|\leqq\varepsilon\langle\Re\lambda\rangle\}$$

on décompose $f_2=f_3+f_4$ pour $\lambda\in\Gamma_\nu\cap\mathbf{R}$ avec :

$$\begin{aligned}f_3(\lambda,h,\omega,\omega')&=\int_{2R\leqq|x|\leqq 3R\sqrt{\nu/\lambda}} e^{i[\sqrt{\lambda}(\omega'-\omega)x+\mathcal{O}(\langle x\rangle^{1-\rho}\langle\sqrt{\lambda}\rangle^{1-\rho})]/h}\times\bar a_1(x,\sqrt{\lambda}\omega)\,t_2(x,\sqrt{\lambda}\omega')\,dx\\ &=\lambda^{-n/2}\int_{2R\sqrt{\lambda}\leqq|y|\leqq 3R\sqrt{\nu}} e^{i[(\omega'-\omega)y+\mathcal{O}(\langle y\rangle^{1-\rho})]/h}\times\bar a_1(\lambda^{-1/2}y,\lambda^{1/2}\omega)\,t_2(\lambda^{-1/2}y,\lambda^{1/2}\omega')\,dy\end{aligned}$$

expression qui se prolonge comme $f_1$, pour $\lambda\in\Gamma_\nu$ du fait que $\bar a_1$ et $t_2$ sont des fonctions holomorphes de $|x|$ près de $\{|x|\geqq 2R\}$.

Il reste donc à examiner :

$$f_4(\lambda, h, \omega, \omega') = \lambda^{-n/2} \int_{|y| \geqq R_\nu} e^{i[(\omega-\omega')y + \mathcal{O}(\langle y \rangle^{1-\rho})]/h} \times \bar{a}_1(\lambda^{-1/2}y, \lambda^{1/2}\omega)\, t_2(\lambda^{-1/2}y, \lambda^{1/2}\omega')\, dy$$

(où $R_\nu = 3R\sqrt{\nu}$).

Soit $v \in G^s(S^{n-1})$). Il s'agit de donner un sens à

$$I(\lambda, h, \omega) = \int_{S^{n-1}} f_4(\lambda, h, \omega, \omega')\, v(\omega')\, d\omega'.$$

On écrit la phase intervenant dans $f_4$ sous la forme $(\omega-\omega')y + r(\lambda, y, \omega, \omega')$ (avec $r(\lambda, y, \omega, \omega') = \mathcal{O}(\langle y \rangle^{1-\rho})$ uniformément).

Du fait que $r$ est une fonction analytique de $(y, \omega, \omega')$ et que $\bar{a}_1$, $t_2$ sont Gevrey $s$, on voit facilement que pour tout $\alpha, \alpha' \in \mathbf{N}^{n-1}$ on a :

$$\begin{aligned} &\left| D_\omega^\alpha D_{\omega'}^{\alpha'} e^{ir(\lambda, y, \omega, \omega')/h} \bar{a}_1(\lambda^{-1/2}y, \lambda^{1/2}\omega)\, t_2(\lambda^{-1/2}y, \lambda^{1/2}\omega') \right| \\ &\quad \leqq h^{-|\alpha|-|\alpha'|} e^{C\langle y \rangle^{1-\rho}/h} \times C^{|\alpha|+|\alpha'|+1} |\alpha|^{|\alpha| s} |\alpha'|^{|\alpha'| s} \\ &\qquad \times \nu^{(|\alpha|+|\alpha'|)/2} \end{aligned} \tag{4.6}$$

avec $C>0$, et uniformément pour $\lambda \in \Gamma_\nu$, $\nu \in \mathbf{N}^*$.

On remarque ensuite que si $\partial_{\omega'}$ désigne le gradient en $\omega'$ sur $S^{n-1}$, on a :

$$\begin{aligned} \partial_{\omega'}[(\omega-\omega')y] &= y - (\omega'.y)\omega' \\ &\neq 0 \quad \text{si} \quad \cos(y, \omega') \neq \pm 1. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Comme de plus $t_2(\lambda^{-1/2}y, \lambda^{1/2}\omega', h)$ est $\mathcal{O}(e^{-\varepsilon\langle y \rangle/h})$ avec $\varepsilon > 0$ dans $\cos(y, \omega') \in [-1, \sigma_2^- - \delta] \cup [\sigma_2^+ + \delta, 1]$, on peut écrire $f_4$ sous la forme $f_5 + f_6$ avec $f_5$ holomorphe en $\lambda$, Gevrey $s$ en $(\omega, \omega')$, et :

$$f_6(\lambda, h, \omega, \omega') = \lambda^{-n/2} \int \chi_\nu(y, \omega')\, e^{i(\omega-\omega')y/h}\, u(\lambda, h, y, \omega, \omega')\, dy$$

où

$$\chi_\nu \in G^s(\mathbf{R}^n \times S^{n-1}),$$

$$\operatorname{Supp} \chi_\nu \subset \{ |y| \geqq R_\nu,\ \cos(y, \omega') \in [\sigma_2^- - 2\delta,\ \sigma_2^+ + 2\delta] \}$$

$\chi_\nu = 1$ dans $\{ |y| \geqq 2R_\nu,\ \cos(y, \omega') \in [\sigma_2^- - \delta,\ \sigma_2^+ + \delta] \}$ et où

$$u(\lambda, h, \omega, \omega') = e^{ir(\lambda, y, \omega, \omega')/h} \bar{a}_1(\lambda^{-1/2}y, \lambda^{1/2}\omega, h)\, t_2(\lambda^{-1/2}y, \lambda^{1/2}\omega', h).$$

Grâce à (4.6) et (4.7), on peut alors appliquer à $f_6(\lambda, h, \omega, \omega')$ les résultats de Cattabriga-Zanghirati sur les opérateurs Fourier- intégraux d'ordre infini (*cf.* [Ca-Za, théorème 1.2.2), qui donnent ici que $f_6(\lambda, h, \omega, \omega')$ se prolonge pour $\lambda \in \Gamma_\nu$ comme le noyau d'un opérateur borné $G^s(S^{n-1}) \to G^s(S^{n-1})$ et $G^s(S^{n-1})' \to G^s(S^{n-1})'$.

## IV.3. Démonstration de (iii) et (iv) du théorème 1.1

Introduisons, pour un intervalle ouvert $\mathscr{I} \subset\subset \mathbf{R}$, et une suite $(M_k)_{k \geqq 0}$ de réels strictement positifs, la classe de Denjoy-Carleman $C_M(\mathscr{I})$ constituée par les fonctions $\chi \in C^\infty(\mathscr{I})$ telles qu'il existe $C>0$ vérifiant : $\forall k \in \mathbf{N}$, $|\chi^{(k)}(x)| \leqq C^{k+1} M_k$, $\forall x \in \mathscr{I}$.

On considèrera dans la suite uniquement des suites $M_k$ logarithmiquement convexes et telles que :

$$\sum_{k \geqq 0} M_k/M_{k+1} < +\infty. \tag{4.8}$$

La classe $C_M(\mathscr{I})$ correspondante est appelée alors une classe non quasi analytique, et on sait qu'elle contient des fonctions de troncature (*cf.* par exemple [Ro], prop. 2, § 1.2). On voit aussi immédiatement qu'il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $\varepsilon_1 (k+1) M_k \leqq M_{k+1}$, ce qui veut dire que $C_M(\mathscr{I})$ contient les fonctions analytiques sur $\mathscr{I}$.

On considère maintenant la formule de représentation (4.2) où, pour définir $a_j(x, \xi, h)$, on a pris cette fois $\chi_1$ et $\chi_j^\pm$ dans une telle classe $C_M(\mathscr{I})$ avec $(M_k)$ vérifiant (4.8). Du fait que $\varphi_2$ est holomorphe, on voit alors par la formule de Leibniz que, pour $\Im \mu > 0$ fixé assez petit, on a :

$$\forall \alpha \in \mathbf{N}^{n-1}, \quad |D^\alpha_{\omega'} U_\mu (e^{i \varphi_2 (x, \sqrt{\lambda}\omega')/h} t_2 (x, \sqrt{\lambda}\omega', h))| \\ \leqq C_1 (h, \lambda)^{|\alpha|+1} e^{-\varepsilon_2 \langle x \rangle \sqrt{\lambda}/h} \sum_{\beta \leqq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} \langle x \rangle^{|\beta|} M_{|\alpha-\beta|}$$

uniformément pour $x \in \mathbf{R}^n$, $\omega' \in S^{n-1}$ et $\lambda$ dans l'ensemble $\mathscr{U}$ du théorème. On en déduit de manière élémentaire, grâce à (4.8) :

$$\forall \alpha \in \mathbf{N}^{n-1}, \quad \| D^\alpha_{\omega'} U_\mu (e^{i \varphi_2 (x, \sqrt{\lambda}\omega')/h} t_2 (x, \sqrt{\lambda}\omega', h)) \|_{L^2 \mathbf{R}^n_x} \\ \leqq C_2 (h, \lambda)^{|\alpha|+1} M_{|\alpha|}$$

avec $C_2(h, \lambda) > 0$.

Une estimation analogue étant vérifiée par $U_{\bar{\mu}}(e^{i\varphi_1} t_1)$, on en conclut, d'après (4.5), que $g(\lambda, h, \omega, \omega')$ est (avec ce nouveau choix de fonctions de troncature) dans la classe non quasi-analytique $\mathscr{C}_M(S^{n-1}_\omega \times S^{n-1}_{\omega'})$ (définie de manière évidente).

Toujours avec choix de troncatures, le noyau $f(\lambda, h, \omega, \omega')$ ne sera plus nécessairement celui d'un opérateur continu sur $G^s(S^{n-1})$. Néanmoins, on sait déjà que $S(\lambda)$ est continu sur $G^s(S^{n-1})$, de sorte que l'on a de toute façon, près d'un pôle $\lambda_1 \in \Gamma$ :

$$S(\lambda) = S_1(\lambda) + \sum_{1}^{n(\lambda_1)} \frac{E_j}{(\lambda - \lambda_1)^j}$$

où $S_1(\lambda)$ est continu sur $G^s(S^{n-1})$, et les $E_j$ sont de rang fini, indépendants du choix de $\chi_1$, $\chi_j^\pm$, et, d'après ce qui précède, sont nécessairement les résidus de l'opérateur de noyau $g(\lambda, h, \omega, \omega')$ ainsi construit (agissant par exemple sur l'espace des fonctions analytiques sur $S^{n-1}$).

On en déduit que le noyau de $E_j$ est dans toutes les classes $\mathscr{C}_M(S^{n-1}\times S^{n-1})$ où M vérifie (4.8).

D'après un théorème de Bang [Ba] (dont on trouvera une démonstration dans [Ro] théorème 1, § 2.2), on en conclut que le noyau de $E_j$ est analytique sur $S^{n-1}\times S^{n-1}$.

Pour démontrer (iv), plaçons-nous près d'un point $(\omega_0, \omega'_0)\in S^{n-1}\times S^{n-1}$ avec $\omega_0\neq\omega'_0$. On choisit alors les paramètres $\sigma_2^\pm$ et $\delta$, dans la formule de représentation de $S(\lambda)$, de telle sorte que $\sigma_2^- -2\delta$ soit assez proche de 1 pour que $(\omega-\omega')y<0$ pour $\cos(y, \omega')\geqq\sigma_2^- -2\delta$ et $(\omega, \omega')$ assez voisin de $(\omega_0, \omega'_0)$.

On voit alors que dans l'intégrale définissant $f_6(\lambda, h; \omega, \omega')$ (*cf.* IV.2) on intègre sur un domaine où :

$$\frac{y}{|y|}(\omega-\omega')\leqq-\alpha<0$$

pour $(\omega, \omega')$ assez voisin de $(\omega_0, \omega'_0)$.

On peut alors faire un changement de contour d'intégration (du type $y\mapsto(1+i\varepsilon\chi_4(|y|))y$ avec $\operatorname{Supp}\chi_4(|y|)\subset\{|y|\geqq 2R'\}$, $\chi_4(|y|)=1$ pour $|y|\geqq 3R'$, et $\varepsilon>0$ assez petit), le long duquel on a :

$$\Im(y.(\omega-\omega'))\leqq-\frac{1}{C}|y|$$

avec $C>0$. Ce changement donne donc une intégrale absolument convergente, dont l'intégrande est dans une classe non quasi-analytique $\mathscr{C}_M$ près de $(\omega_0, \omega'_0)$.

Du fait que les autres intégrales intervenant ($f_1$ à $f_5$ et $g$) n'ont pas de singularités sur $\omega=\omega'$ (*i. e.* sont dans $\mathscr{C}_M(S^{n-1}\times S^{n-1})$), on en déduit que $S(\lambda; \omega, \omega')$ est dans toute classe non quasi-analytique $\mathscr{C}_M$ vérifiant (4.8), et donc est analytique près de $(\omega_0, \omega'_0)$ par une nouvelle application du théorème de Bang. $\square$

## V. DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 2.2

On utilise une formule de représentation pour la transformée de Fourier généralisée associée à P, due à Isozaki. (*Voir* [I] Définition 2.4).

On a d'abord les relations suivantes, qui se démontrent comme le théorème 3.3 dans [I-K2] :

$$W_2^-(\mathrm{I}) = \mathrm{J}_2 \mathrm{E}_{\mathrm{P}_0} - \int_{\mathrm{I}} \mathrm{R}(\lambda + i0) \mathrm{T}_2 \mathscr{F}_0^*(\lambda) \mathscr{F}_0(\lambda)\, d\lambda \tag{5.1}$$

$$W_1^+(\mathrm{I}) = \mathrm{J}_1 \mathrm{E}_{\mathrm{P}_0} - \int_{\mathrm{I}} \mathrm{R}(\lambda - i0) \mathrm{T}_1 \mathscr{F}_0^*(\lambda) \mathscr{F}_0(\lambda)\, d\lambda. \tag{5.2}$$

Dans la suite, on oubliera de mentionner la dépendance en I des opérateurs d'onde.

On déduit de (5.1), (5.2) que, pour $\lambda \in \mathrm{I}$ :

$$W_2^- \mathscr{F}_0^*(\lambda) = \mathrm{J}_2 \mathscr{F}_0^*(\lambda) - \mathrm{R}(\lambda + i0) \mathrm{T}_2 \mathscr{F}_0^*(\lambda), \tag{5.3}$$

$$W_1^+ \mathscr{F}_0^*(\lambda) = \mathrm{J}_1 \mathscr{F}_0^*(\lambda) - \mathrm{R}(\lambda - i0) \mathrm{T}_1 \mathscr{F}_0^*(\lambda). \tag{5.4}$$

Pour $f \in \mathrm{L}_s^2 = \{ f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n) \,|\, (1 + \langle x \rangle^2)^{s/2} f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n) \}$ et $s > 1/2$, la transformée de Fourier généralisée de $f$ est définie par :

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(\lambda) f(\omega) = (2\pi h)^{-n/2} \int e^{-i\varphi_2(x, \sqrt{\lambda}\omega)/h}\, \bar{a}_2(x, \sqrt{\lambda}\omega, h) f(x)\, dx \\ - (2\pi h)^{-n/2} \int e^{-i\varphi_2(x, \sqrt{\lambda}\omega)/h}\, \bar{t}_2(x, \sqrt{\lambda}\omega, h) \mathrm{R}(\lambda - i0) f(x)\, dx. \end{aligned}$$

Les fonctions propres généralisées associées à $\mathscr{F}$ sont donc données par

$$\begin{aligned} e_2(x, \omega, \lambda, h) = (2\pi h)^{-n/2} e^{i\varphi_2(x, \sqrt{\lambda}\omega)/h} a_2(x, \sqrt{\lambda}\omega, h) \\ - (2\pi h)^{-n/2} \mathrm{R}(\lambda + i0)(e^{i\varphi_2(\cdot, \sqrt{\lambda}\omega)/h} t_2(\cdot, \sqrt{\lambda}\omega, h)). \end{aligned}$$

Si on pose aussi :

$$\begin{aligned} e_1(x, \omega, \lambda, h) = (2\pi h)^{-n/2} e^{i\varphi_1(x, \sqrt{\lambda}\omega)/h} a_1(x, \sqrt{\lambda}\omega, h) \\ - (2\pi h)^{-n/2} \mathrm{R}(\lambda - i0)(e^{i\varphi_1(\cdot, \sqrt{\lambda}\omega)/h} t_1(\cdot, \sqrt{\lambda}\omega, h)), \end{aligned}$$

on voit qu'à une constante multiplicative près (dépendant de $\lambda$ et de $h$) $e_2$ est le noyau de $W_2^- \mathscr{F}_0^*(\lambda)$ et $e_1$ celui de $W_1^+ \mathscr{F}_0^*(\lambda)$.

On a aussi le lemme suivant :

LEMME 5.1 :

$$W_i^+ W_i^{+*} = \mathbf{1} \quad \textit{sur } \operatorname{Im} \mathrm{E}_{\mathrm{P}}(\mathrm{I}) \quad \textit{pour } i = 1, 2.$$

*Démonstration.* — Il est facile de vérifier grâce à la phase stationnaire, qu'on obtient les mêmes opérateurs d'onde en prenant un modificateur $\mathscr{I}$ avec une amplitude $a$ dans (1.4) identiquement égale à 1. On voit alors facilement comme dans [I-K1] que $\mathscr{I}^* \mathscr{I} - \mathbf{1}$ est compact. (5.5) se déduit alors du théorème de R.A.G.E. (*voir* [Re-Si]). □

Grâce au lemme 5.1, on obtient les relations suivantes :

$$W_1^+ \mathrm{S}(\mathrm{I}) = W_2^- \quad \text{sur } \operatorname{Im} \mathrm{E}_{\mathrm{P}_0}(\mathrm{I}). \tag{5.6}$$

En composant les deux membres de (5.6) à gauche par la mesure spectrale de P, $dE_\lambda$, on obtient (pour $\lambda>0$) :

$$dE_\lambda W_1^+ S(I) = dE_\lambda W_2^-. \tag{5.7}$$

Comme $W_i^\pm$ entrelacent P et $P_0$ sur leurs sous-espaces spectraux absolument continus, on a :

$$W_1^+ dE_{0_\lambda} S(I) = W_2^- dE_{0_\lambda}. \tag{5.8}$$

D'autre part, comme $dE_{0_\lambda} = \mathscr{F}_0^*(\lambda)\mathscr{F}_0(\lambda)\, d\lambda$, on en tire :

$$W_1^+ F_0^*(\lambda) S(\lambda) = W_2^- F_0^*(\lambda)$$

en utilisant (1.7).

Compte tenu des remarques faites plus haut, on en déduit donc :

$$\int_{S^{n-1}} e_1(x, \omega, \lambda, h) S(\lambda, \omega, \omega', h)\, d\omega = e_2(x, \omega', \lambda, h). \tag{5.9}$$

D'autre part, d'après les résultats de [I], on a, en notant $\frac{\partial e}{\partial\lambda}(x, y, \lambda, h)$ le noyau de la fonction spectrale $\frac{\partial E}{\partial\lambda}$ de P : pour $\lambda>0$ :

$$\frac{\partial e}{\partial\lambda}(x, y, \lambda, h) = c(\lambda, h)\int_{S^{n-1}} e_2(x, \omega, \lambda, h)\, \bar{e}_2(y, \omega, \lambda, h)\, d\omega. \tag{5.10}$$

Ici $c(\lambda, h)$ est une constante non nulle, holomorphe en $\lambda$.

On peut maintenant démontrer le corollaire 1.2.

D'après la formule de représentation (4.2), il est clair que les pôles de $S(\lambda)$ sont des résonances de P.

On appellera vecteur analytique pour $U_\mu$ une fonction de la forme $\varphi(x) = q(x) e^{-x^2}$, où $q$ est un polynôme.

En définissant

$$\langle R(\lambda)(e^{i\varphi_2(\,.\,,\sqrt{\lambda}\omega)/h} t_2(\,.\,, \sqrt{\lambda}\omega, h)), \varphi\rangle$$
$$= \langle R_\mu(\lambda)(U_\mu e^{i\varphi_2(\,.\,,\sqrt{\lambda}\omega)/h} t_2(\,.\,, \sqrt{\lambda}\omega, h)), U_{\bar{\mu}}\varphi\rangle$$

pour $\Im\mu>0$, $|\mu|$ assez petit, on voit que $\langle e_2(\,.\,, \omega, \lambda, h), \varphi\rangle$ a un prolongement méromorphe dans $\Im\lambda<0$, à valeurs dans $G^s(S^{n-1})$.

Enfin

$$\bar{e}_2(x, \omega, \lambda, h) = (2\pi h)^{-n/2} e^{-i\varphi_2(x, \sqrt{\lambda}\omega)/h}\, \bar{a}_2(x, \sqrt{\lambda}\omega, h)$$
$$- (2\pi h)^{-n/2} R(\lambda - i0)(e^{-i\varphi_2(\,.\,, \sqrt{\lambda}\omega)/h} t_2(\,.\,, \sqrt{\lambda}\omega, h)),$$

donc $\langle \bar{e}_2(x, \omega, \lambda, h), \varphi\rangle$ admet aussi un prolongement holomorphe dans $\Im\lambda<0$ à valeurs dans $G^s(S^{n-1})$, (avec comme $\langle e_1, \varphi\rangle$ des pôles de rang fini dans $\Im\lambda>0$).

Soit maintenant $\lambda_1 \in \mathcal{U}$, $\Im \lambda_1 < 0$, une résonance de P. Ceci signifie exactement qu'il existe $\varphi$ et $\psi$, vecteurs analytiques pour $U_\mu$ tels que $\langle (P-\lambda)^{-1} \psi, \varphi \rangle$ a un pôle en $\lambda = \lambda_1$. (*voir* [Hu]).

En utilisant la formule de Stone :

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = (2 i \pi)^{-1} (R(\lambda + i 0) - R(\lambda - i 0)),$$

et la formule (5.10) qui garde un sens pour $\lambda$ complexe d'après ce qu'on vient de voir, on en déduit que $\langle e_2(., \omega, \lambda, h), \varphi \rangle$ a un pôle en $\lambda_1$.

Notons $\tilde{\varphi}_2(\omega, \lambda, h)$ cette fonction qui est méromorphe dans $\Im \lambda < 0$, à valeurs dans $G^s(S^{n-1})$, et $\tilde{\varphi}_1 = \langle e_1(., \omega, \lambda, h), \varphi \rangle$.

Grâce à (5.9), on a, pour $\lambda > 0$ :

${}^t S(\lambda) \tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2$, et cette identité se prolonge méromorphiquement dans $\Im \lambda < 0$, grâce au théorème 1.1, et au fait que $\tilde{\varphi}_1$ appartient à $G^s(S^{n-1})$ pour $s \in ]1, (1-\rho)^{-1}[$. On en déduit que $S(\lambda)$ a un pôle en $\lambda_1$ comme opérateur de $G^s(S^{n-1})$ dans $G^s(S^{n-1})$, ce qui démontre la première partie du corollaire.

On termine la démonstration en suivant la même méthode en remplaçant $R_\mu(\lambda)$ et $S(\lambda)$ par

$$(\lambda - \lambda_1)^k R_\mu(\lambda) \quad \text{et} \quad (\lambda - \lambda_1)^k S(\lambda) \quad \text{pour } 1 \leqq k \leqq n(\lambda_1). \quad \square$$

## RÉFÉRENCES

[Ag] S. AGMON, Spectral Theory Schrödinger Operators on Euclidean and non-Euclidean Spaces, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. **39**, 1986, p. 53-516.

[Ag-Co] J. AGUILAR et J.-M. COMBES, A class of Analytic perturbations for One-Body Schrödinger Hamiltonians, *Comm. Math. Phys.*, vol. **22**, 1971, p. 269-279.

[Ag-Kl] S. AGMON et M. KLEIN, *Exposé au colloque d'analyse microlocale d'Oberwolfach*, 1987.

[B-B] D. BABBIT et E. BALSLEV, Local Distorsion Techniques and the Unitary of the S-Matrix for the Two-Body Problem, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. **54**, 1976, p. 316-349.

[B1] E. BALSLEV, Analytic Scattering Theory for Two-Body Schrödinger Operators, *J. Funt. Anal.*, vol. **29**, 1978, p. 375-396.

[B2] E. BALSLEV, Local Spectral Deformation Techniques for Schrödinger Operators, *J. Funt. Anal.*, vol. **58**, 1984, p. 79-105.

[B3] E. BALSLEV, Analytic Scattering Theory of Quantum Mechanical Three-Body Systems, *Ann. I.H.P.*, section A, vol. **23**, 1980, p. 125-160.

[B4] E. BALSLEV, Analytic Scattering Theory for Many-Body Systems Below the Smallest Three-Body Threshold, *Comm. Math. Phys.*, vol. **77**, 1980, p. 173-210.

[Ba-Co] E. BALSLEV et J.-M. COMBES, Spectral Properties of Many-Body Schrödinger Operators with Dilation-Analytic Interactions, *Comm. Math. Phys.*, vol. **22**, 1971, p. 280-294.

[Ba] T. BANG, *On Quasi-analytische Funktionen, Thèse*, Univ. de Copenhague, 1946.

[Ca-Za] L. CATTABRIGA et L. ZANGHIRATI, *Fourier Integral Operators of Infinite Order on Gevrey Spaces. Applications to the Cauchy Problem for Hyperbolic Operators*, in *Advances in Microlocal Analysis*, série C, vol. **168**, Nato ASI Series, 1985.

[Cy] H. L. CYCON, Resonances Defined by Modified Dilations, *Helv. Phys. Acta*, vol. **58**, 1985, p. 969-981.

[De] J. DEREZINSKI, Existence and Analyticity of Many-Body Scattering Amplitudes at low Energies, *J. Math. Phys.*, vol. **28**, 1987, p. 1080-1088.

[Ge-Ma] C. GÉRARD et A. MARTINEZ, Semiclassical Asymptotics for the Spectral Function of Long range Schrödinger Operators, *J. Funct. Anal.*, vol. **84**, n° 1, 1989, p. 226-254. (Voir aussi exposé des Actes du colloque E.D.P. de Saint-Jean-de-Monts, 1987).

[Ha] G. HAGEDORN, A Link Between Scattering Resonances and Dilation Analytic Resonances in Few-Body Quantum Mechanics, *Comm. Math. Phys.*, vol. **65**, 1979, p. 181-188.

[He-Ma] B. HELFFER et A. MARTINEZ, Comparaison entre les diverses notions de résonances, *Helv. Phys. Acta*, vol. **60**, 1987, p. 992-1003.

[He-Sj] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, Resonances en limite semiclassique, *Bull. S.M.F.*, mémoires n° **24/25**, 114, 1986.

[Hö] L. HORMANDER, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North-Holland, 1973.

[Hu] W. HUNZIKER, Distorsion Analycicity and Molecular Resonances Curves, *Ann. I.H.P.*, Section A, 1986.

[I] H. ISOZAKI, Differentiability of Generalized Fourier Transform Associated with Schrödinger Operators, *J. Math. Kyoto Univ.*, vol. **25**, 1985, p. 789-806.

[I-K1] H. ISOZAKI et H. KITADA, Modified wave operators with time independent modifiers, *J. Fac. Sci. Tokyo Univ.*, Sect. 1A, **32**, 1985, p. 77-104.

[I-K2] H. ISOZAKI et H. KITADA, Scattering Matrices for Two-Body Schrödinger Operators. Scientific Papers of the College of Arts and Sciences, Tokyo Univ., vol. **35**, 1985, p. 81-107.

[Je] A. JENSEN, Local Distorsion Techniques, Resonances and Poles of the S-Matrix, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. **59**, 1977, p. 505-513.

[Ku] S. T. KURODA, *An Introduction to Scattering Theory, Aarhus Univ. Lecture Notes*, n° **51**, 1978.

[La-Li] L. LANDAU et E. LIFCHITZ, *Mécanique quantique, théorie non relativiste*, Mir éd., 1967.

[La] P. LAUBIN, Analyse microlocale des singularités analytiques, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, vol. **52**, 1983, p. 103-212.

[L-P] P. D. LAX et R. S. PHILLIPS, *Scattering Theory*, Academic Press, 1967.

[Re-Si] M. REED et B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. III et IV, Academic Press, 1978.

[Ro] C. ROUMIEU, Sur quelques extensions de distributions, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 3[e] série, t. **77**, 1960, p. 41-121.

[S-T] N. SHENK et D. THOE, Resonant states and poles of the scattering matrix for perturbations of $-\Delta$, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. **54**, 1976, p. 316-349.

[Si1] I. M. SIGAL, Scattering Theory for Many-Body Systems-Rigorous Results, *Lect. Notes in Math.*, n° 1011, Springer, 1983.

[Si2] I. M. SIGAL, Analytic Properties of the Scattering Matrix of Many Particle Systems, *Integral Equations and Operator Theory*, vol. **9**, 1986, p. 134-153.

[Sim1] B. SIMON, The Definition of Molecular Resonances Curves by the Method of Exterior Complex Scaling, *Phys. Lett.*, vol. **71A**, 1979, p. 211-214.

Sim2] B. SIMON, Resonances in N-Body Quantum Systems with Dilation-Analytic Potentials and the Foundation of Time-Dependent Perturbation Theory, *Ann. Math.*, vol. **97**, 1973, p. 247-272.

[Sj] J. SJÖSTRAND, Singularités analytiques microlocales, *Astérisque*, vol. **95**, 1982.

(*Manuscrit reçu le* 16 *août* 1988)
(*Version révisée reçue le* 23 *mars* 1989.)