

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

D. GUTKIN

## **A-cohomologie et opérateurs de récursion**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 47, n° 4 (1987), p. 355-366

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1987\\_\\_47\\_4\\_355\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1987__47_4_355_0)

© Gauthier-Villars, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## A-Cohomologie et opérateurs de récursion

par

**D. GUTKIN**

U. F. R. de Mathématiques  
Université de Lille 1,  
B. P. 36, 59650 Villeneuve-d'Asq

**RÉSUMÉ.** — Après avoir rappelé dans le cadre des variétés banachiques, la définition des opérateurs de récursion d'un système dynamique, et montré leur intérêt dans la recherche d'intégrales premières, on donne des interprétations géométriques, sous certaines conditions spectrales, d'un objet important : la torsion de Nijenhuis d'un opérateur. On est alors conduit à la notion d'opérateurs de Nijenhuis, dans la théorie des variétés bi-structurées, et à leur lien avec la compatibilité des structures de Poisson. Enfin, on applique le formalisme de la cohomologie des variétés de Poisson, à la recherche de structures de Poisson compatibles, sur une variété symplectique.

**ABSTRACT.** — We recall, in the context of Banach manifolds, the definition of the recursion operators of a dynamical system, and we show their importance in the search for first integrals. Then we offer geometrical interpretations, under certain spectral conditions, of an important tool, the Nijenhuis torsion of an operator, which leads to the notion of Nijenhuis operators in the context of bi-structured manifolds, and to their relations with the compatibility of Poisson structures. Finally, the formalism of Poisson cohomology is applied to determine compatible Poisson structures on a symplectic manifold.

On suppose dans ce qui suit, que tous les objets géométriques considérés sont de classe  $C^\infty$ . Soit  $M$  une variété modélée sur un espace de Banach  $E$ . On note  $TM$  son fibré tangent et  $\mathcal{X}(M)$  le fibré de sections associé. Soit  $R : TM \rightarrow TM$  un endomorphisme de fibré linéaire, préservant les fibres.  $R$  sera dit *opérateur sur les champs de vecteurs*.

On note  $C^\infty(M)$  l'ensemble des fonctions sur  $M$ , et  $\Lambda^p(T^*M)$  l'espace des  $p$ -formes différentielles de  $M$ . Pour  $X \in \mathcal{X}(M)$ , on note  $L_X$  la dérivation de Lie par rapport à  $X$ .

## 1. SPECTRE DES OPÉRATEURS DE NIJENHUIS EN DIMENSION INFINIE

1.1. DÉFINITION. — Un opérateur  $R$  sur les champs de vecteurs est un *opérateur de récursion* pour le champ de vecteurs  $X$  si  $L_X R = 0$ .

En conséquence si  $Z \in \mathcal{X}(M)$  est une symétrie infinitésimale de  $X$ , il en est de même de  $RZ$  puisque par définition

$$(L_X R)Z = L_X(RZ) - R(L_X Z) = [X, RZ] - R[X, Z].$$

L'existence d'un opérateur de récursion pour  $X$ , permet donc, en partant de  $Z = X$ , de construire une algèbre de Lie de symétries de  $X$ , de famille génératrice  $\{R^k X, k \in \mathbb{N}\}$ .

La considération d'opérateurs de récursion construits à partir de systèmes bi-hamiltoniens [3] [4a] [6], conduit au rappel suivant :

1.2. DÉFINITION. — Soit  $R$  un opérateur sur les champs de vecteurs. La *torsion de Nijenhuis* de  $R$  est l'application bilinéaire antisymétrique  $[R, R]: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  définie par :

$$[R, R](X, Y) = [RX, RY] + R^2[X, Y] - R[RX, Y] - R[X, RY], \\ \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

$R$  est un *opérateur de Nijenhuis* si sa torsion de Nijenhuis est nulle.

1.3. REMARQUES. — 1) On a immédiatement

$$[R, R](X, Y) = (L_{RX} R - R \circ L_X R)Y.$$

2) Si  $h: M \rightarrow E$  est une carte locale sur  $M$ , alors localement  $R: E \rightarrow L(E, E)$ , et avec l'identification naturelle  $DR(X, Y) = DR(X)(Y)$  il est facile de voir que  $[R, R] = 0$  si et seulement si l'application bilinéaire  $DR \circ R - R \circ DR$  est symétrique.

1.4. PROPOSITION. — Soit  $R$  un opérateur de Nijenhuis, de récursion pour  $X$ ; alors l'algèbre de Lie de symétries de  $X$ , de famille génératrice  $\{R^k X, k \in \mathbb{N}\}$ , est abélienne.

En effet  $L_X R = 0$  implique  $L_X(R^i) = 0 \forall i \geq 0$  et donc

$$[X, R^i X] = L_X R^i(X) + R^i L_X X = 0, \quad \forall i \geq 0.$$

Or  $[R, R] = 0$  implique  $L_{RY} R = R L_Y R, \forall Y \in \mathcal{X}(M)$ , et en particulier pour  $Y = R^{i-1}(X), \forall i \geq 1$  on obtient  $L_{R^i X} R = R L_{R^{i-1} X} R$ , d'où  $L_{R^i X} R = R^i L_X R = 0$ ,

$\forall i \geq 0$  et donc  $L_{R^i X} R = 0, \forall i, j \geq 0$ , soit  $[R^i X, R^j X] = L_{R^i X} R^j(X) + R^j L_{R^i X} X = 0, \forall i, j \geq 0$ .

Sous certaines conditions spectrales (triviales en dimension finie), la condition  $L_X R = 0$  fournit des intégrales premières du champ de vecteurs  $X$  :

1.5. PROPOSITION. — Si  $R$  est un opérateur de récursion pour  $X$ , alors toute valeur propre de  $R$ , d'indice fini et localement constant, est une intégrale première de  $X$ .

De plus, le sous-espace spectral associé à cette valeur propre est invariant par  $L_X$ .

*Démonstration.* —  $L_X R = 0$  implique  $L_X(R - \lambda I)^r = -r(L_X \lambda)(R - \lambda I)^{r-1}$ , pour tout entier positif  $r$  et toute fonction  $\lambda$ ,  $I$  désignant l'opérateur identité sur les vecteurs.

Soit  $U$  un ouvert de  $M$  sur lequel  $\lambda$  est une valeur propre d'indice fini  $r > 0$ , ce qui signifie que  $r$  est le plus petit entier positif vérifiant

$$\ker(R - \lambda I)^r(x) = \ker(R - \lambda I)^{r+1}(x), \quad \forall x \in U.$$

Soit  $Z$  un champ de vecteurs sur  $U$  tel que :

$$\forall x \in U, \quad Z(x) \in \ker(R - \lambda I)^r(x) \quad \text{et} \quad Z(x) \notin \ker(R - \lambda I)^{r-1}(x).$$

On a :

$$\begin{aligned} 0 = L_X((R - \lambda I)^r Z) &= (R - \lambda I)^r L_X Z + L_X(R - \lambda I)^r(Z) \\ &= (R - \lambda I)^r L_X Z - r(L_X \lambda)(R - \lambda I)^{r-1}(Z), \end{aligned}$$

et donc :  $(R - \lambda I)^{r+1} L_X Z - r(L_X \lambda)(R - \lambda I)^r(Z) = 0$ .

L'égalité précédente entraîne alors  $(R - \lambda I)^r L_X Z = 0$ . Puisque  $(R - \lambda I)^{r-1}(Z) \neq 0$ , on en déduit donc  $L_X \lambda(x) = 0, \forall x \in U$ . Enfin, tout champ de vecteurs  $Y$  sur  $U$  tel que  $Y(x) \in \ker(R - \lambda I)^r(x), \forall x \in U$ , vérifie bien  $L_X((R - \lambda I)^r Y) = (R - \lambda I)^r L_X Y = 0$ , soit  $L_X Y(x) \in \ker(R - \lambda I)^r(x)$ .

1.6. COROLLAIRE. — En dimension finie, les valeurs propres d'indice localement constant d'un opérateur  $R$  de récursion pour  $X$  sont des intégrales premières de  $X$ .

Nous donnons ci-dessous la version banachique d'un résultat de Nijenhuis [2], conduisant à une interprétation géométrique de la torsion de Nijenhuis d'un opérateur, dans un cas simple.

1.7. PROPOSITION. — Soit  $R : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ , un opérateur sur les champs de vecteurs, diagonalisable sur un ouvert  $U$  de  $M$ , de sous-espaces propres  $E_{\lambda(x)}, x \in U, \lambda \in \text{spec}(R)$ .

Alors pour toute partie finie  $S$  de  $\text{spec}(R)$ , la distribution définie par  $\bigoplus_{\lambda \in S} E_{\lambda(x)}, x \in U$ , est involutive si et seulement si

$$(R - \lambda I)(R - \mu I)[R, R](u_\lambda, u_\mu) = 0, \quad \forall \lambda, \mu \in S, \forall u_\lambda \in E_\lambda, \forall u_\mu \in E_\mu.$$

En particulier si  $R$  est de Nijenhuis,  $\bigoplus_{\lambda \in S} E_{\lambda(x)}$ ,  $x \in U$ , est intégrable pour toute partie finie  $S$  de  $\text{spec}(R)$ , et l'on a :  $u_\mu \cdot \lambda = 0$ ,  $\forall \lambda, \mu \in S$ ,  $\lambda \neq \mu$ ,  $\forall u_\mu \in E_\mu$ .

*Démonstration.* — On a par hypothèse  $T_x M = \bigoplus_{\lambda \in \text{spec}(R)} E_{\lambda(x)}$  où

$$E_{\lambda(x)} = \ker(R - \lambda I)(x), \quad \forall x \in U.$$

Or

$$[R, R] (u_\lambda, u_\mu) = (R - \lambda I)(R - \mu I)[u_\lambda, u_\mu] + (\lambda - \mu)[(u_\mu \cdot \lambda)u_\lambda + (u_\lambda \cdot \mu)u_\mu],$$

$$\forall u_\lambda \in E_\lambda, \quad \forall u_\mu \in E_\mu,$$

soit  $(R - \lambda I)(R - \mu I)[R, R] (u_\lambda, u_\mu) = (R - \lambda I)^2(R - \mu I)^2[u_\lambda, u_\mu]$ ,

et cette quantité est nulle si et seulement si  $[u_\lambda, u_\mu] \in \ker(R - \lambda I)^2(R - \mu I)^2$  avec  $\ker(R - \lambda I)^2(R - \mu I)^2 = \ker(R - \lambda I)^2 \oplus \ker(R - \mu I)^2$  puisque  $(R - \lambda I)^2$  et  $(R - \mu I)^2$  sont des polynômes en  $R$  premiers entre eux si  $\lambda \neq \mu$ .

Comme  $\ker(R - \lambda I)^2 = \ker(R - \lambda I)$ ,  $\forall \lambda \in \text{spec}(R)$ , la condition énoncée dans la proposition est bien équivalente à  $[u_\lambda, u_\mu] \in E_\lambda \oplus E_\mu$ .

Dans le cas où la distribution est de dimension (localement) constante, la condition précédente est encore équivalente à l'intégrabilité de cette distribution.

On a également le résultat suivant, sans doute plus réaliste du point de vue des systèmes dynamiques, qui généralise une situation étudiée dans [1] :

**1.8. PROPOSITION.** — Soit  $R : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  un opérateur sur les champs de vecteurs, localement scindé sur un ouvert  $U$  de  $M$ . On suppose que ses sous-espaces spectraux  $E_{\lambda(x)}$ ,  $x \in U$ ,  $\lambda \in \text{spec}(R)$ , sont de dimension 2, et d'indices localement constants 1 ou 2. Alors si  $R$  est de Nijenhuis, la distribution définie par  $\bigoplus_{\lambda \in S} E_{\lambda(x)}$ ,  $x \in U$ , pour toute partie finie  $S$  de  $\text{spec}(R)$ , est intégrable.

De plus, en introduisant sur chaque  $E_{\lambda(x)}$  un repère noté  $(u_\lambda(x), v_\lambda(x))$ ,  $x \in U$ , adapté à son indice (i. e. repère de vecteurs propres pour l'indice 1, et repère de Jordan vérifiant  $R(x)u_\lambda(x) = \lambda(x)u_\lambda(x)$  et  $R(x)v_\lambda(x) = \lambda(x)v_\lambda(x) + u_\lambda(x)$  pour l'indice 2), on a :

$u \cdot \lambda = 0$ , pour tout  $\lambda \in \text{spec}(R)$ , d'indice 1 (resp. 2), et pour tout champ de vecteurs  $u$  défini sur  $U$ , de projection nulle sur  $E_\lambda$  (resp.  $\mathbb{R}v_\lambda$ ).

*Démonstration.* — Notons  $(u_\lambda, v_\lambda)$ ,  $\lambda \in \text{spec}(R)$ , les champs de repères locaux adaptés à l'indice de  $\lambda$ . On a par définition :

si  $\lambda$  est d'indice 1 :

$$(R - \lambda I)E_\lambda = 0, \quad \text{et} \quad (R - \mu I)E_\lambda = E_\lambda, \quad \forall \mu \neq \lambda;$$

si  $\lambda$  est d'indice 2 :

$$(R - \lambda I)E_\lambda = \mathbb{R}u_\lambda, \quad (R - \lambda I)^2 E_\lambda = 0, \quad \text{et} \quad (R - \mu I)E_\lambda = E_\lambda, \quad \forall \mu \neq \lambda.$$

Soit  $S_1$  (resp.  $S_2$ ) le sous-ensemble de  $\text{spec}(\mathbb{R})$  constitué des valeurs propres d'indice 1 (resp. 2).

a) Si  $R_1$  désigne la restriction de  $R$  à la distribution  $\bigoplus_{\lambda \in S_1} E_{\lambda(x)}$ ,  $x \in U$ , alors la proposition précédente appliquée à  $R_1$  assure l'involutivité de la distribution  $E_{\lambda(x)}$ , pour tout  $\lambda \in S_1$ , ainsi que de toutes les distributions  $\bigoplus_{\lambda \in S'_1} E_{\lambda(x)}$ , pour toute partie finie  $S'_1 \subset S_1$ , et l'on a :

$$u_\mu \cdot \lambda = v_\mu \cdot \lambda = 0, \quad \forall \lambda, \mu \in S_1, \quad \lambda \neq \mu.$$

b) Montrons l'involutivité de toute distribution  $\bigoplus_{\lambda \in S'_2} E_{\lambda(x)}$ , pour toute partie finie  $S'_2 \subset S_2$ . On a, quels que soient  $\lambda$  et  $\mu$  appartenant à  $S_2$  :

$$[\mathbb{R}, \mathbb{R}](u_\lambda, u_\mu) = (\mathbb{R} - \lambda I)(\mathbb{R} - \mu I)[u_\lambda, u_\mu] + (\lambda - \mu)[(u_\mu \cdot \lambda)u_\lambda + (u_\lambda \cdot \mu)u_\mu] = 0 \quad (1)$$

$$[\mathbb{R}, \mathbb{R}](u_\lambda, v_\mu) = (\mathbb{R} - \lambda I)(\mathbb{R} - \mu I)[u_\lambda, v_\mu] + (\lambda - \mu)[(v_\mu \cdot \lambda)u_\lambda + (u_\lambda \cdot \mu)v_\mu] - (u_\mu \cdot \lambda)u_\lambda - (u_\lambda \cdot \mu)u_\mu - (\mathbb{R} - \lambda I)[u_\lambda, u_\mu] = 0 \quad (2)$$

$$[\mathbb{R}, \mathbb{R}](v_\lambda, v_\mu) = (\mathbb{R} - \lambda I)(\mathbb{R} - \mu I)[v_\lambda, v_\mu] - (\mathbb{R} - \lambda I)[v_\lambda, u_\mu] - (\mathbb{R} - \mu I)[u_\lambda, v_\mu] + (\lambda - \mu)[(v_\mu \cdot \lambda)v_\lambda + (v_\lambda \cdot \mu)v_\mu] + (u_\lambda \cdot \mu)v_\mu - (u_\mu \cdot \lambda)v_\lambda + (v_\mu \cdot \lambda)u_\lambda - (v_\lambda \cdot \mu)u_\mu + [u_\lambda, u_\mu] = 0 \quad (3)$$

Calculons alors à partir de (2), compte tenu de (1) :

$$(\mathbb{R} - \mu I)[\mathbb{R}, \mathbb{R}](u_\lambda, v_\mu) = (\mathbb{R} - \lambda I)(\mathbb{R} - \mu I)^2[u_\lambda, v_\mu] + (v_\mu \cdot \lambda)(\lambda - \mu)^2 u_\lambda + 2(\lambda - \mu)(u_\lambda \cdot \mu)u_\mu = 0. \quad (2')$$

En remarquant alors que  $\forall X \in \mathcal{X}(U)$ ,  $(\mathbb{R} - \lambda I)(\mathbb{R} - \mu I)^2 X$  a une projection nulle sur  $\mathbb{R}v_\lambda$  et  $E_\mu$ , on déduit de (2') :

$$u_\mu \cdot \lambda = 0, \quad \forall \lambda, \mu \in S_2, \quad \lambda \neq \mu,$$

et (1) montre alors que :

$$[u_\lambda, u_\mu] \in \ker(\mathbb{R} - \lambda I)(\mathbb{R} - \mu I) = \ker(\mathbb{R} - \lambda I) \oplus \ker(\mathbb{R} - \mu I) = \mathbb{R}u_\lambda \oplus \mathbb{R}u_\mu.$$

Calculons alors à partir de (3) :

$$\begin{aligned} (\mathbb{R} - \lambda I)(\mathbb{R} - \mu I)[\mathbb{R}, \mathbb{R}](v_\lambda, v_\mu) &= (\mathbb{R} - \lambda I)^2(\mathbb{R} - \mu I)^2[v_\lambda, v_\mu] - (\mathbb{R} - \lambda I)^2(\mathbb{R} - \mu I)[v_\lambda, u_\mu] - (\mathbb{R} - \lambda I)(\mathbb{R} - \mu I)^2[u_\lambda, v_\mu] \\ &\quad + (\lambda - \mu)^2(v_\mu \cdot \lambda)u_\lambda - (\mu - \lambda)^2(v_\lambda \cdot \mu)u_\mu \\ &= (\mathbb{R} - \lambda I)^2(\mathbb{R} - \mu I)^2[v_\lambda, v_\mu] - 2(\lambda - \mu)^2(v_\lambda \cdot \mu)u_\mu + 2(\lambda - \mu)^2(v_\mu \cdot \lambda)u_\lambda \end{aligned} \quad (3')$$

compte tenu de (2') qui s'écrit maintenant :

$$(\mathbb{R} - \lambda I)(\mathbb{R} - \mu I)^2[u_\lambda, v_\mu] = -(\lambda - \mu)^2(v_\mu \cdot \lambda)u_\lambda.$$

Comme  $\forall X \in \mathcal{X}(U)$ ,  $(\mathbb{R} - \lambda I)^2(\mathbb{R} - \mu I)^2 X$  a une projection nulle sur  $E_\lambda$  et  $E_\mu$ , on déduit de (3') :

$$v_\mu \cdot \lambda = 0, \quad \forall \lambda, \mu \in S_2, \quad \lambda \neq \mu,$$

et  $[v_\lambda, v_\mu] \in \ker(\mathbb{R} - \lambda I)^2 \oplus \ker(\mathbb{R} - \mu I)^2 = E_\lambda \oplus E_\mu.$

(2') montre alors que :

$$[u_\lambda, v_\mu] \in \ker(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I}) \oplus \ker(\mathbf{R} - \mu\mathbf{I})^2 = \mathbb{R}u_\lambda \oplus E_\mu.$$

De plus, pour  $\lambda = \mu$ , (2) s'écrit :

$$(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I})^2 [u_\lambda, v_\lambda] - 2(u_\lambda \cdot \lambda)u_\lambda = 0,$$

d'où :

$$u_\lambda \cdot \lambda = 0, \quad \forall \lambda \in S_2,$$

et

$$[u_\lambda, v_\lambda] \in \ker(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I})^2 = E_\lambda.$$

c) Montrons enfin l'involutivité de toute distribution  $\bigoplus_{\lambda \in S_1} E_{\lambda(x)} \oplus \bigoplus_{\mu \in S_2} E_{\mu(x)}$ , pour toutes parties finies  $S'_1 \subset S_1$  et  $S'_2 \subset S_2$ . Soient  $\lambda \in S_1$  et  $\mu \in S_2$ ; les quantités  $[\mathbf{R}, \mathbf{R}](u_\lambda, u_\mu)$  et  $(\mathbf{R} - \mu\mathbf{I})[\mathbf{R}, \mathbf{R}](u_\lambda, v_\mu)$  sont encore données par les expressions (1) et (2').

Comme cette fois  $\forall X \in \mathcal{X}(U)$ ,  $(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I})(\mathbf{R} - \mu\mathbf{I})^2 X$  a une projection nulle sur  $E_\lambda$  et  $E_\mu$ , on déduit de (2') :

$$v_\mu \cdot \lambda = 0 \quad \text{et} \quad u_\lambda \cdot \mu = 0, \quad \forall \lambda \in S_1, \quad \forall \mu \in S_2,$$

et

$$[u_\lambda, v_\mu] \in \ker(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I}) \oplus \ker(\mathbf{R} - \mu\mathbf{I})^2 = E_\lambda \oplus E_\mu.$$

Enfin (1) montre que :

$$u_\mu \cdot \lambda = 0, \quad \forall \lambda \in S_1, \quad \forall \mu \in S_2,$$

et

$$[u_\lambda, u_\mu] \in \ker(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I}) \oplus \ker(\mathbf{R} - \mu\mathbf{I}) = E_\lambda \oplus \mathbb{R}u_\mu.$$

Les distributions considérées sont donc bien involutives, ainsi que leurs sommes deux à deux; il en est donc de même pour toutes leurs sommes finies. Ces distributions étant de dimensions constantes, leur intégrabilité au sens de Frobenius est donc assurée.

## 2. BI-STRUCTURES, COMPATIBILITÉ DES STRUCTURES DE POISSON ET $\Lambda$ -COHOMOLOGIE

La notion de bi-structure permet sous certaines conditions, de construire des opérateurs de récursion qui sont de Nijenhuis.

Rappelons la terminologie suivante :

2.1. DÉFINITION ET NOTATION. — Pour tout  $x \in M$ , on note  $\Lambda^p(T_x M)$  l'ensemble des applications  $\mathbb{R}$ - $p$ -linéaires alternées sur  $T_x^* M \times T_x^* M \times \dots \times T_x^* M$  ( $p$  facteurs), à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et soit  $\Lambda^p(TM) = \bigcup_{x \in M} \Lambda^p(T_x M)$ , espace fibré sur  $M$ . Un *champ de  $p$ -vecteurs* sur  $M$  est une section du fibré  $\Lambda^p(TM)$ . On dira pour simplifier «  $p$ -vecteur » et on notera  $\mathcal{X}^p(M)$  l'espace vectoriel des  $p$ -vecteurs de  $M$ . Quels que soient

$x \in M$ ,  $P \in \mathcal{X}^p(M)$  et  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  des 1-formes différentielles, on note  $P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)(x) = P(x)(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_p(x))$ .

En dimension finie les  $p$ -vecteurs sont les (champs de)  $p$ -tenseurs contravariants antisymétriques.

Enfin, l'ensemble des multivecteurs de  $M$  est muni d'une structure d'algèbre extérieure notée  $\wedge$  et définie par  $P \wedge Q = \mathcal{A}(P \otimes Q)$ ,  $\forall P \in \mathcal{X}^p(M)$ ,  $\forall Q \in \mathcal{X}^q(M)$ , où  $\mathcal{A}$  représente l'opérateur usuel d'antisymétrisation, et  $\otimes$  le produit tensoriel sur les multivecteurs donné par

$$P \otimes Q(\alpha, \beta) = P(\alpha)Q(\beta), \quad \forall \alpha \in \Lambda^p(M), \quad \forall \beta \in \Lambda^q(M).$$

Nous rappelons ici, en les étendant au cas des variétés banachiques réflexives, la définition et quelques propriétés du crochet de Schouten-Nijenhuis [7] [8].

2.2. DÉFINITION. — Soient  $P$  un  $q$ -vecteur et  $Q$  un  $q$ -vecteur,  $p, q \geq 1$ . Le crochet de Schouten-Nijenhuis de  $P$  et  $Q$  est le  $(p + q - 1)$ -vecteur noté  $[P, Q]$  défini par :

$$\omega([P, Q]) = (-1)^{qp+q} i_P di_Q \omega + (-1)^p i_Q di_P \omega - d\omega(P \wedge Q), \text{ pour toute } (p + q - 1)\text{-forme } \omega.$$

De plus on pose  $[f, g] = 0$  pour tout couple  $(f, g)$  de fonctions sur  $M$  (0-vecteurs), et  $[P, f] = i_P df$  pour tout  $p$ -vecteur  $P$  et toute fonction  $f$  sur  $M$ .

2.3. PROPRIÉTÉS. — Soient  $P$  un  $p$ -vecteur,  $Q$  un  $p$ -vecteur,  $R$  un  $r$ -vecteur,  $p, q, r \geq 0$ ; on a :

- i)  $[P, Q] = (-1)^{pq}[Q, P]$
- ii)  $(-1)^{pr}[[P, Q], R] + (-1)^{qp}[[Q, R], P] + (-1)^{rq}[[R, P], Q] = 0$   
(identité de Jacobi graduée).
- iii)  $[X, Y] = L_X Y$  si  $X$  et  $Y$  sont des champs de vecteurs (i. e. 1-vecteurs)  
 $[X, P] = L_X P$  si  $X$  est un champ de vecteurs
- iv)  $[P, Q \wedge R] = [P, Q] \wedge R + (-1)^{pq+q} Q \wedge [P, R]$ .

2.4. NOTATIONS. — Si  $\Lambda$  est un bivecteur sur  $M$  on lui associe le morphisme de fibrés noté  $\# : \Lambda^1(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ , défini par  $\Lambda(\alpha, \beta) = \langle \# \alpha, \beta \rangle$  pour tout couple  $(\alpha, \beta)$  de 1-formes, où  $\langle, \rangle$  désigne la dualité entre 1-formes et vecteurs.

2.5. DÉFINITION ET NOTATIONS. — On dit qu'un bivecteur  $\Lambda$  sur  $M$  est de Poisson s'il vérifie  $[\Lambda, \Lambda] = 0$ . Le crochet défini par  $\{f, g\} = \Lambda(df, dg)$ , pour tout couple  $(f, g)$  de fonctions de  $M$ , vérifie alors l'identité de Jacobi :

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0, \quad \forall f, g, h \in C^\infty(M).$$

On dit que  $(M, \Lambda)$  est une variété de Poisson, et que  $\{, \}$  est son crochet de Poisson.

En effet on a :

$$[\Lambda, \Lambda'](\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1/2)\Sigma(\Lambda'(L_{\# \alpha_2} \alpha_3, \alpha_1) + \Lambda(L_{\# \alpha_2} \alpha_3, \alpha_1))$$



où  $\Sigma$  représente la somme sur les permutations circulaires de  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , pour tout couple  $(\Lambda, \Lambda')$  de bivecteurs et pour tout triplet  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  de 1-formes différentielles,  $\#$  et  $\#'$  représentant les morphismes de fibrés associés à  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  [6];

il est immédiat que

$$[\Lambda, \Lambda](df, dg, dh) = \{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\}, \forall f, g, h \in C^\infty(M).$$

L'identité de Jacobi est bien vérifiée si  $[\Lambda, \Lambda] = 0$  (et réciproquement en dimension finie).

2.6. DÉFINITION. —  $(M, \tilde{\Lambda}, \omega)$  est une variété *bi-structurée* si :

- i)  $\tilde{\Lambda}$  est un bivecteur de Poisson.
- ii)  $\omega$  est une 2-forme fermée (*forme présymplectique*).

On note  $b : \mathcal{X}(M) \rightarrow \Lambda^1(M)$  le morphisme de fibrés défini par  $bX = -i_X\omega$ , pour tout champ de vecteurs  $X$ .

En posant alors  $R = \tilde{\#} \circ b$ , on obtient un endomorphisme de fibré  $\mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  qui vérifie  $L_X R = 0$ , pour tout champ de vecteurs  $X$  satisfaisant :

- 1)  $L_X \tilde{\Lambda} = 0$  (*automorphisme de Poisson infinitésimal*)
- 2)  $L_X \omega = 0$  (*automorphisme présymplectique infinitésimal*)

ou de façon équivalente :

- 1)  $L_X \tilde{\#} = \tilde{\#} L_X$
- 2)  $L_X b = b L_X$ .

Un tel champ de vecteurs est dit *bi-automorphisme infinitésimal*.

On supposera dans la suite que  $R \neq k \cdot I$ ,  $k$  constante.

Soient  $(M, \omega)$  une variété symplectique de bivecteur  $\Lambda$  associé à  $\# = b^{-1}$ . On sait alors que  $\Lambda$  est un bivecteur de Poisson (condition équivalente à  $d\omega = 0$ ).

La proposition suivante montre le rôle des opérateurs de Nijenhuis dans la théorie des variétés bi-structurées :

2.7. PROPOSITION [6]. — Soit  $(M, \tilde{\Lambda}, \omega)$  une variété bi-structurée de dimension  $2n$ , telle que  $\omega$  soit symplectique, de bivecteur de Poisson associé  $\Lambda$ . Si le bivecteur  $\Lambda + \tilde{\Lambda}$  est de Poisson, alors  $R = \tilde{\#} \circ b$  est un opérateur de Nijenhuis, où  $\tilde{\#}$  et  $b$  représentent les morphismes de fibrés respectivement associés à  $\tilde{\Lambda}$  et  $\omega$ .

La réciproque est encore vraie si  $\tilde{\#}$  est inversible (*variété bi-symplectique*).

*Démonstration.* — Rappelons qu'un bivecteur  $\Lambda'$  est de Poisson si et seulement si  $L_{\#'\alpha}\Lambda' = 0$  (ou encore  $L_{\#'\alpha}\#' = \#'L_{\#'\alpha}$ ) pour toute 1-forme fermée  $\alpha$ .

Soient  $\Lambda' = \Lambda + \tilde{\Lambda}$  et  $R = \tilde{\#} \#^{-1}$ . On a, pour toute 1-forme  $\alpha$  fermée et pour toute 1-forme  $\beta$  :

$$\begin{aligned} R(\#L_{\#'\alpha}\beta - L_{\#'\alpha}\#\beta) &= R(\#L_{\tilde{\#}\alpha}\beta + \tilde{\#}L_{\#\alpha}\beta - L_{\tilde{\#}\alpha}\#\beta - L_{\#\alpha}\tilde{\#}\beta) \\ &= \tilde{\#}L_{\tilde{\#}\alpha}\beta + R^2\#L_{\#\alpha}\beta - [\tilde{\#}\alpha, \#\beta] - [\#\alpha, \tilde{\#}\beta] \\ &= [R\#\alpha, R\#\beta] + R^2[\#\alpha, \#\beta] - [R\#\alpha, \#\beta] - [\#\alpha, R\#\beta] \\ &= [R, R](\#\alpha, \#\beta). \end{aligned}$$

Puisque localement, tout champ de vecteurs X peut s'écrire

$$X = \sum_{i=1}^n (X^i \# dx_i + X^{i+n} \# dy_i),$$

on voit que si  $\Lambda'$  est un bivecteur de Poisson, alors R est un opérateur de Nijenhuis.

La réciproque est vraie si R est inversible, c'est-à-dire si  $\tilde{\#}$  est inversible.

2.8. DÉFINITION. — Si sur une variété M, deux bivecteurs de Poisson  $\Lambda$  et  $\tilde{\Lambda}$  sont tels que  $\Lambda + \tilde{\Lambda}$  est aussi un bivecteur de Poisson, on dit que  $\Lambda$  et  $\tilde{\Lambda}$  (ou que les structures de Poisson correspondantes) sont compatibles.

La recherche, sur une variété symplectique ou de Poisson donnée par un bivecteur de Poisson  $\Lambda$ , d'une structure de Poisson  $\tilde{\Lambda}$  compatible avec  $\Lambda$  et linéairement indépendante de  $\Lambda$ , est en général un problème compliqué.

2.9. Λ-COHOMOLOGIE. — A. Lichnerowicz [5] a étudié en dimension finie la  $\Lambda$ -cohomologie 1-différentiable d'une variété de Poisson (M,  $\Lambda$ ). On peut la définir comme suit : si  $\Lambda$  est un bivecteur de Poisson sur la variété M, il résulte de 2.3 ii) et de  $[\Lambda, \Lambda] = 0$  que l'application  $D : \mathcal{X}^p(M) \rightarrow \mathcal{X}^{p+1}(M)$  définie sur tout  $p$ -vecteur P,  $p \geq 0$ , par  $DP = -[\Lambda, P]$  vérifie  $D^2 = 0$ . Donc D est un opérateur de cobord sur l'algèbre extérieure des multivecteurs de la variété de Poisson (M,  $\Lambda$ ) et on a  $D\Lambda = 0$ .

On a en particulier les formules suivantes :

- i)  $D([P, Q]) = -[DP, Q] - (-1)^p [P, DQ]$
- ii)  $D(P \wedge Q) = DP \wedge Q + (-1)^p P \wedge DQ \quad \forall P \in \mathcal{X}^p(M), \quad \forall Q \in \mathcal{X}^q(M).$

La première montre que le crochet de Schouten est défini sur les classes de  $\Lambda$ -cohomologie car le crochet de deux multivecteurs fermés (resp. exacts) est fermé (resp. exact); la seconde signifie que l'opérateur de cobord est une dérivation d'algèbre graduée sur les multivecteurs.

2.10. CAS SYMPLECTIQUE. — Si la structure de Poisson (M,  $\Lambda$ ) provient d'une 2-forme symplectique  $\omega$ , l'isomorphisme de fibrés associé  $b : \mathcal{X}(M) \rightarrow \Lambda^1(M)$  s'étend de façon naturelle aux fibrés  $\mathcal{X}^p(M)$  et  $\Lambda^p(M)$ , et on notera  $\mu : \mathcal{X}^p(M) \rightarrow \Lambda^p(M)$  cette extension, pour tout  $p \geq 1$ . En

particulier  $\Lambda = \mu^{-1}(\omega)$  et on a la formule fondamentale, en dimension finie :

$$\mu([\Lambda, P]) = d\mu(P), \quad \forall P \in \mathcal{X}^p(M), \text{ soit } \mu D = -d\mu,$$

qui permet d'identifier sur une variété symplectique de dimension finie, la  $\Lambda$ -cohomologie et la cohomologie de de Rham.

On peut alors reformuler la notion de compatibilité de structures de Poisson de la façon suivante :

2.11. PROPOSITION. — Un bivecteur de Poisson  $\tilde{\Lambda}$  définit une structure de Poisson compatible avec la structure de Poisson  $(M, \Lambda)$  si et seulement si  $D\tilde{\Lambda} = 0$ .

En effet :  $[\Lambda + \tilde{\Lambda}, \Lambda + \tilde{\Lambda}] = [\Lambda, \Lambda] + [\tilde{\Lambda}, \tilde{\Lambda}] + 2[\Lambda, \tilde{\Lambda}]$ .

On est ainsi conduit à rechercher des 2-cocycles  $\tilde{\Lambda} \neq 0$ , non proportionnels à  $\Lambda$ , vérifiant  $[\tilde{\Lambda}, \tilde{\Lambda}] = 0$ ; ou plus particulièrement des 2-cobords non nuls  $\tilde{\Lambda} = [\Lambda, X] = -DX$  tels que  $[\tilde{\Lambda}, \tilde{\Lambda}] = 0$ , c'est-à-dire des champs de vecteurs  $X$  vérifiant  $[DX, DX] = 0$  ou encore  $D[X, DX] = 0$ , avec  $DX \neq 0$ , soit  $L_X\Lambda \neq 0$  c'est-à-dire  $X$  non automorphisme de Poisson infinitésimal pour  $\Lambda$ .

Dans le cas symplectique de dimension finie ce sont les seuls — au moins localement — puisque la  $\Lambda$ -cohomologie est la cohomologie de de Rham, localement exacte ; dans le cas général de dimension finie, ce sont les seuls à un 2-tenseur près, constant sur les feuilles du feuilletage caractéristique [5].

2.12. EXEMPLE 1 : « OSCILLATEUR HARMONIQUE ». — Soit  $M$  une variété symplectique de dimension  $2n$ , sur laquelle on a choisi des coordonnées

locales  $(x_i, y_i), 1 \leq i \leq n$ , telles que  $\omega = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i$ . En notant  $\partial x_i = \partial/\partial x_i$  et  $\partial y_i = \partial/\partial y_i$  on a  $\mu(\partial x_i) = dy_i, \mu(\partial y_i) = -dx_i$ , et  $\Lambda = \mu^{-1}(\omega) = \sum_{i=1}^n \partial y_i \wedge \partial x_i$ .

Posons  $Z = \sum_{i=1}^{n-1} y_i \partial y_{i+1} + y_n \partial y_1$ . Alors  $\tilde{\Lambda} = DZ = \sum_{i=1}^{n-1} \partial y_{i+1} \wedge \partial x_i + \partial y_1 \wedge \partial x_n$

et

$$[Z, DZ] = \sum_{i=1}^{n-2} \partial y_{i+2} \wedge \partial x_i + \partial y_1 \wedge \partial x_{n-1} + \partial y_2 \wedge \partial x_n$$

$$= D\left(\sum_{i=1}^{n-2} x_{i+2} \partial x_i + x_1 \partial x_{n-1} + x_2 \partial x_n\right)$$

soit  $D([Z, DZ]) = 0$ .

On sait que si  $M = T^*R^n - \{0\}$ , on peut trouver des coordonnées (globales) comme ci-dessus, dans lesquelles l'oscillateur harmonique à  $n$

degrés de libertés admet pour hamiltonien la fonction  $y_1$ . Ainsi le champ de vecteurs  $X = \# dy_1 = \partial x_1$  vérifie  $L_X \omega = 0$  et  $L_X \tilde{\Lambda} = 0$ , et est un bi-auto-morphisme infinitésimal de la bi-structure, pour lequel l'opérateur  $R = \# \circ b$  est de récursion et de Nijenhuis.

2.13. EXEMPLE 2. — Dans les mêmes coordonnées locales que précédemment cherchons un champ de vecteurs  $Z = f(x, y)\partial x_1$ , en sorte que  $\tilde{\Lambda} = DZ$  soit compatible avec  $\Lambda$ .

On a  $\tilde{\Lambda} = -\mu^{-1}(df) \wedge \partial x_1$  et

$$[Z, DZ] = -[f\partial x_1, \mu^{-1}(df) \wedge \partial x_1]$$

$$= -[f\partial x_1, \mu^{-1}(df)] \wedge \partial x_1 - \mu^{-1}(df) \wedge [f\partial x_1, \partial x_1]$$

soit  $[Z, DZ] = -d((Z \cdot f)dy_1) + 2(\partial f / \partial x_1)df \wedge dy_1$

compte tenu de la formule

$$\mu[X, Y] = L_X \mu(Y) - i_Y d\mu(X) \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Alors  $D([Z, DZ]) = 0$  pour  $d\mu[Z, DZ] = 0$  c'est-à-dire  $d(\partial f / \partial x_1) \wedge df \wedge dy_1 = 0$ . Par exemple, toute fonction  $f = \Psi e^{\alpha x_1}$ , où  $\Psi$  est une fonction quelconque ne dépendant pas de  $x_1$  et  $\alpha$  une fonction quelconque de  $y_1$ , convient.

En particulier la condition  $\tilde{\Lambda} \neq 0$  équivalente à  $df \wedge dy_1 \neq 0$  est assurée car on a :

$$df \wedge dy_1 = (d\Psi + \Psi\alpha dx_1) \wedge dy_1 = \Psi\alpha dx_1 \wedge dy_1$$

$$= \sum_{i>1} (\partial\Psi/\partial x_i) dx_i \wedge dy_1 + \sum_{i>1} (\partial\Psi/\partial y_i) dy_i \wedge dy_1$$

et

$$\tilde{\Lambda} = \Psi\alpha \partial y_1 \wedge \partial x_1 + \sum_{i>1} (\partial\Psi/\partial x_i) \partial y_i \wedge \partial x_1 - \sum_{i>1} (\partial\Psi/\partial y_i) \partial x_i \wedge \partial x_1.$$

### RÉFÉRENCES

- [1] S. DE FILIPPO, M. SALERNO, G. VILASI, A geometrical approach to the integrability of soliton equations. *Lett. in Math. Phys.*, t. 9, 1985, p. 85-91.
- [2] A. FROLICHER, A. NIJENHUIS, Theory of vector-valued differential forms. *Indag. Math.*, t. 23, 1956, p. 338-359.
- [3] B. FUCHSSTEINER, A. S. FOKAS, Symplectic structures, their Backlund transformations and hereditary symmetries, *Physica*, t. 4D, 1981, p. 47-66.
- [4] D. GUTKIN, a) Variétés bi-structurées et opérateurs de récursion. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. 43, 1985, p. 349-357.  
b) Spectres des opérateurs de récursion et séparabilité des systèmes dynamiques, Publ. IRMA, Univ. de Lille 1, t. 1, 1986.
- [5] A. LICHNEROWICZ, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées. *J. Diff. Geom.*, t. 12, 1977, p. 253-300.

- [6] F. MAGRI, C. MOROSI, *A geometrical characterization of integrable Hamiltonian systems through the theory of Poisson-Nijenhuis manifolds*, Quaderno S 19/1984, Univ. di Milano.
- [7] A. NIJENHUIS, Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields. *Proc. Kon. Ned. Ak. Wet.*, t. A **58**, 1955, p. 390-403.
- [8] R. OUZILOU, Hamiltonian actions on Poisson manifolds, in « Symplectic geometry », Crumeyrolle and Grifone Ed., Pitman. *Research Notes in Mathematics*, t. **80**, 1983, p. 172-183.

(Manuscrit reçu le 5 mai 1987)