ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

B. HELFFER
J. SJÖSTRAND

Puits multiples en mécanique semi-classique VI. (Cas des puits sous-variétés)

Annales de l'I. H. P., section A, tome 46, nº 4 (1987), p. 353-372
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1987__46_4_353_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 46, n° 4, 1987, p. 353-372. *Physique théorique*

Puits multiples en mécanique semi-classique VI (Cas des puits sous-variétés)

par

B. HELFFER
Département de Mathématiques,
Université de Nantes, 44072 Nantes Cedex, France
et Centre de Mathématiques,
École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France

et

J. SJÖSTRAND
Département de Mathématiques,
Université de Paris Sud, 91405 Orsay Cedex, France

RÉSUMÉ. — Dans ce travail, on poursuit l'étude de l'effet tunnel entre des puits sous-variétés. On fournit en particulier les outils nécessaires pour justifier la démonstration de Witten des inégalités de Morse dégénérées dues à Bott.

ABSTRACT. — In this paper, we continue the study of the tunneling effect between submanifold wells. In particular, we give the necessary technics to justify Witten's proof of Bott's degenerate Morse Inequalities.

§ 0. INTRODUCTION

Ce travail fait suite au travail sur les minipuits [HE-SJ]$_5$ et est motivé par les travaux de Witten sur les inégalités de Morse dégénérées (cf. [WI] [BI]). On considère, sur une variété M riemannienne C^∞ compacte (ou bien $M = \mathbf{R}^n$), l'opérateur de Schrödinger

(0.1) $$-h^2\Delta + V_0 + hV_1$$

où V_0 et V_1 sont des potentiels C^∞ et où Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M.

Si $M = \mathbf{R}^n$, on suppose de plus que :

$$\varliminf_{|x|\to\infty} V_0 > \min V_0$$

et qu'il existe $C > 0$ t. q.

$$|V_1| \leqslant C(V_0 + C).$$

On reprend les hypothèses de [HE-SJ]$_5$ (avec quelques changements de notation). On pose :

$$E_0 = \min V_0 \tag{0.2}$$

et on suppose que :

$$V_0^{-1}(E_0) = \bigcup_i \Gamma_i \tag{0.3}$$

où les Γ_i sont des sous-variétés C^∞ compactes, connexes, disjointes de codimension : $n - \nu'_i = \nu''_i$ telles que : $(V_0 - E_0)$ s'annule exactement à l'ordre 2 sur Γ_i.

Comme dans les articles précédents ([HE-SJ]$_1$, [SI]$_2$), on introduit la distance d'Agmon $d_{V_0}(x, y)$ associée à la métrique $(V_0 - E_0)dx^2$ (où dx^2 est la métrique sur M) et on rappelle de [HE-SJ]$_5$ qu'au voisinage de Γ_i la fonction $\varphi_0^i = d_{V_0}(x, \Gamma_i)$ (distance d'Agmon à Γ_i) est C^∞ et vérifie :

$$\left\{\begin{array}{l} |\nabla\varphi_0^i|^2 = (V_0 - E_0) \\ \varphi_0^i \geqslant 0, \quad \varphi^i_{0/\Gamma_i} = 0 \\ \varphi_0^i \text{ s'annule exactement à l'ordre 2 sur } \Gamma_i. \end{array}\right. \tag{0.4}$$

Introduisons sur Γ_i le potentiel « sous-principal » :

$$W_1^i(x) = (\Delta\varphi_0^i + V_1)(x), \quad x \in \Gamma_i. \tag{0.5}$$

[HE-SJ]$_5$ traitait du cas où ces potentiels $W_1^i(x)$ avaient des puits non-dégénérés qu'on avait appelés mini-puits.

On étudie ici le cas où les puits Γ_i sont uniformément dégénérés, c'est-à-dire le cas où les potentiels « sous-principaux » sont constants, on a alors :

$$E_1^i \equiv W_1^i(x), \quad x \in \Gamma_i \tag{0.6}$$

(UD)

Notons que lorsque les Γ_i sont des points et que $V_1 \equiv 0$, on est dans la situation décrite dans [HE-SJ]$_1$.

On se propose d'étudier la nature du spectre près de E_0 lorsque $h \to 0$. Comme l'étude faite dans [HE-SJ]$_1$ sur l'interaction est générale, le problème essentiel qui nous préoccupera dans cet article est l'étude du spectre du problème de Dirichlet dans un voisinage tubulaire d'un puits que l'on notera Γ.

B. Simon [SI]$_3$ nous a signalé qu'il avait des résultats du même type.

Ce travail comportera 2 parties. La première concerne la construction d'une solution B. K. W. donnant l'existence d'une valeur propre proche de $E_0 + E_1 h + E_2 h^2$ (Modulo $O(h^3)$) où E_0, E_1 sont définis en (0.2), (0.6) et où E_2 est la première valeur propre d'un opérateur elliptique sur Γ.

La deuxième partie est plus délicate, on montre, par une technique de déformation sur un modèle, qu'il n'y a effectivement qu'une seule valeur propre de ce problème de Dirichlet voisine de $E_0 + E_1 h + E_2 h^2$ (Modulo $O(h^3)$). Comme exemples d'application, on peut certes produire des exemples où il y a action d'un groupe compact comme :

$$- h^2 \Delta_{x,y} + (x^2 + y^2 - 1)^2 \tag{0.7}$$

(qui se traiterait sans doute également par des techniques de réduction à des équations différentielles ordinaires) ou comme :

$$- h^2 \Delta_{x,y} + (x^2 + y^2 - 1)^2 (1 + x^2) - 2h\sqrt{1 + x^2} \tag{0.8}$$

mais une autre motivation, suite aux travaux de Witten [WI] et à un travail plus récent de J. M. Bismut [BI], était de donner *dans l'esprit de Witten* une démonstration purement analytique des inégalités de Morse dégénérées de Bott [BO] (dans la continuation de notre travail [HE-SJ]$_4$). Les techniques développées ici permettent effectivement de l'obtenir mais s'il est finalement possible de justifier complètement les suggestions de Witten, sa « démonstration » est plus délicate qu'il n'y paraît, comme J. M. Bismut l'avait d'ailleurs remarqué. Ceci ne sera pas détaillé ici. Ce travail fait suite de manière naturelle à [HE-SJ]$_4$ et à [HE-SJ]$_5$ et a été partiellement annoncé dans [HE-SJ]$_6$. Le premier auteur voudrait remercier B. Simon qui lui a transmis le chapitre 12 d'un livre en préparation [C.F.K.S].

§ 1. CONSTRUCTION B. K. W.

Comme indiqué dans l'introduction, on travaille au voisinage d'un puits uniformément dégénéré Γ de codimension v''. On se propose dans ce paragraphe de montrer le :

THÉORÈME 1.1. — *Sous les hypothèses (0.1) à (0.6), il existe dans un voisinage tubulaire de* Γ $\mathscr{V}(\Gamma, \varepsilon) = \{ x \in M, d(x, \Gamma) < \varepsilon \}$ (avec $\varepsilon > 0$ assez petit), une solution B. K. W. u_h et une valeur propre formelle

$$E(h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^j E_j$$

telle que :

$$(1.1)\quad (-h^2\Delta + V_0 + hV_1)u_h \equiv E(h)u_h \qquad (\text{modulo } O(h^\infty)e^{-\varphi_0/h})$$

$$(1.2)\quad u_h = h^{-\nu''/4}a(x,h)e^{-\varphi_0/h}$$

$$(1.3)\quad a(x,h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)h^j \qquad \textit{avec } a_0 > 0 \quad \textit{dans} \quad \mathscr{V}(\Gamma, \varepsilon)$$

où E_0, E_1 *sont définis en (0.2) et (0.6) et où* E_2 *est la première valeur propre d'un opérateur différentiel sur* Γ P_Γ, *dont le symbole principal est le même que l'opérateur de Laplace-Beltrami sur* Γ.

De plus, P_Γ *est essentiellement autoadjoint comme opérateur non borné sur* $L^2(\Gamma, d\tilde{v}_\Gamma)$ *où*

$$(1.4)\quad d\tilde{v}_\Gamma = (\det \mathrm{Hess}_{\mathrm{tr}}^\Gamma \varphi_0)^{-1/2} dv_\Gamma$$

où $\mathrm{Hess}_{\mathrm{tr}}^\Gamma \varphi_0$ *est le hessien transverse de la distance d'Agmon à* $\Gamma\varphi_0$ *et* dv_Γ *est la mesure induite sur* Γ.

De plus, on peut écrire que :

$$(1.5)\quad P_\Gamma = \nabla_\Gamma^{(\tilde{*})}\nabla_\Gamma + \mathscr{S}_\Gamma$$

où $\nabla_\Gamma^{(\tilde{*})}$ *est l'adjoint de* ∇_Γ *en prenant les produits scalaires relativement à* $L^2(\Gamma, d\tilde{v}_\Gamma)$ *et* $\mathscr{S}_\Gamma$ *sera défini intrinsèquement plus loin.*

REMARQUE 1.2. — *Si* $\operatorname{Codim}\Gamma = 1$, $V_1 \equiv 0$, *alors :*

$$(\det \mathrm{Hess}_{\mathrm{Tr}}^\Gamma \varphi_0)^{-1/2} = (\Delta\varphi_0)^{-1/2} = (E_1)^{-1/2}.$$

Par conséquent, $P_\Gamma = -\Delta_\Gamma + \mathscr{S}_\Gamma$ *où* Δ_Γ *est le Laplace-Beltrami usuel sur* Γ.

REMARQUE 1.3. — *On peut retrouver* $\mathscr{S}_\Gamma$ *par la formule :*

$$(1.6)\quad \mathscr{S}_\Gamma = P_\Gamma 1.$$

On montrera que :

$$(1.7)\quad \mathscr{S}_\Gamma = -|\nabla c|^2 + (\Delta c)_{/\Gamma}$$

où c est solution de :

$$(1.8)\quad \begin{cases} 2\nabla\varphi_0 \cdot \nabla c - (\tilde{W}_1 - E_1) = 0 \\ c_{/\Gamma} = 0 \end{cases}$$

où

$$(1.9)\quad \tilde{W}_1 \overset{\text{def}}{=} (\Delta\varphi_0) + V_1.$$

Démonstration du théorème. — La démonstration est en partie voisine de celle développée dans le cas des minipuits. L'équation eiconale (cf. 0.4) est vérifiée et la première équation de transport s'écrit

$$\begin{array}{ll}(1.10) & \left\{\begin{array}{l}(2\nabla\varphi_0\cdot\nabla+\tilde{W}_1-E_1)a_0=0\\ a_{0/\Gamma}=f_0\end{array}\right.\\ (\tilde{T}_1) & \end{array}$$

D'après le lemme (1.1) de [HE-SJ]$_5$, on peut résoudre (1.10) dans $\mathscr{V}(\Gamma, \varepsilon)$ pour tout f_0 dans $C^\infty(\Gamma)$. On note Θ l'application qui à f_0 associe a_0 dans $\mathscr{V}(\Gamma, \varepsilon)$.

REMARQUE 1.4. — *Notons que si on pose :*

$$(1.11) \qquad b = \Theta(1)$$

on a :

$$(1.12) \qquad c = -\log b\,, \quad \Theta f_0 = \tilde{f}_0\cdot b\,, \quad \mathscr{S}_\Gamma = -r_\Gamma \Delta b$$

où $\tilde{f}_0$ est le prolongement de f_0 dans $\mathscr{V}(\Gamma, \varepsilon)$ tel que

$$\nabla\varphi_0\cdot\nabla\tilde{f}_0 = 0$$

et r_Γ désigne l'opérateur de restriction à Γ. ■

Les équations de transport suivantes $\tilde{T}_l$ ($l \geqslant 2$) (attention $\tilde{T}_l = T_{2l}$ dans les notations de [HE-SJ]$_5$), sont de la forme

$$\begin{array}{ll}(1.13) & (2\nabla\varphi_0\cdot\nabla+\tilde{W}_1-E_1))a_{l-1}\\ (\tilde{T}_l) & \qquad + (-\Delta-E_2)a_{l-2}+\displaystyle\sum_{l\geqslant m>2}E_m a_{l-m}=0\,.\end{array}$$

Considérons tout d'abord l'équation $(\tilde{T}_2)$

$$(2\nabla\varphi_0\cdot\nabla+(\tilde{W}_1-E_1))a_1+(-\Delta-E_2)a_0=0\,.$$

Comme vu dans [HE-SJ]$_5$, on peut résoudre cette équation si et seulement si

$$(1.14) \qquad (-\Delta-E_2)a_{0/\Gamma}=0\,.$$

Compte tenu de (1.10) et de la définition de Θ, on réécrit (1.14) sous la forme :

$$(1.15) \qquad (-r_\Gamma\Delta\Theta)f_0 = E_2 f_0$$

où r_Γ est l'opérateur de restriction à Γ.

On définit ainsi, au départ sur $C^\infty(\Gamma)$, l'opérateur :

$$(1.16) \qquad P_\Gamma = -r_\Gamma\Delta\Theta\,.$$

Supposons un instant que nous ayons démontré les propriétés de P_Γ indiquées dans le théorème. On choisit alors :

(1.17) E_2 première valeur propre de P_Γ (qui est de multiplicité 1)

(1.18) f_0 vecteur propre normalisé de P_Γ correspondant à la valeur propre E_2.

L'ellipticité de P_Γ assure que $f_0 \in C^\infty(\Gamma)$.

La résolution des autres équations de transport se fait alors par récurrence.

Supposons déterminés a_{l-m} ($l \geqslant m > 2$), a_{l-2} modulo la connaissance de sa restriction f_{l-2} à Γ et E_j pour $j \leqslant l-1$ et montrons comment déterminer complètement a_{l-2}, E_l et a_{l-1} modulo la connaissance de sa restriction à Γ.

La résolution de $(\tilde{T}_l)$ est possible, si on impose la condition :

$$(1.19) \qquad (-\Delta - E_2)a_{l-2/\Gamma} - \sum_{l \geqslant m > 2} E_m \,.\, a_{l-m/\Gamma} = 0\,.$$

Si on se rappelle que a_{l-2} était solution de :

$$(1.20) \quad Xa_{l-2} \overset{\text{def}}{\equiv} (2\nabla\varphi_0\nabla + (\tilde{W}_1 - E_1))a_{l-2} = g_{l-2} \qquad a_{l-2/\Gamma} = f_{l-2}$$

avec $\qquad g_{l-2/\Gamma} = 0$

et si on désigne par R l'opérateur défini, pour $g \in C^\infty(\mathscr{V}(\Gamma, \varepsilon))$ vérifiant $g_{/\Gamma} = 0$, par :

$$(1.21) \qquad \begin{cases} X(Rg) = g \\ (Rg)_{/\Gamma} = 0\,. \end{cases}$$

Alors la solution de (1.20) s'écrit :

$$(1.22) \qquad a_{l-2} = Rg_{l-2} + \Theta f_{l-2}\,.$$

On peut alors résoudre (1.19) en écrivant :

$$(1.23) \quad (P_\Gamma - E_2)f_{l-2} = r_\Gamma(\Delta + E_2)Rg_{l-2} + \sum_{l > m > 2} E_m f_{l-m} + E_l \,.\, f_0\,.$$

Si on choisit E_l de sorte que le second membre soit orthogonal à f_0 dans $L^2(\Gamma, d\tilde{v}_\Gamma)$, il existe un unique f_{l-2} orthogonal à f_0 et solution de (1.23). La démonstration du théorème est donc complète sous réserve de vérifier les propriétés de P_Γ.

Étude des propriétés de P_Γ.

LEMME 1.5. — P_Γ est formellement autoadjoint dans $L^2(\Gamma, d\tilde{v}_\Gamma)$.

Démonstration. — Une preuve directe est sans doute possible mais nous préférons une preuve indirecte utilisant le théorème de la phase stationnaire.

Pour cela, soit χ une fonction égale à 1 sur $[0, 1/2]$ et à support dans $]-1, 1[$ et posons $\Theta^\varepsilon = \chi\left(\frac{\varphi_0}{\varepsilon}\right).\Theta$.

Θ^ε opère alors de $C^\infty(\Gamma)$ dans $C^\infty(M)$ de manière naturelle.

Considérons l'opérateur :

$$Q(h) = (-h^2\Delta + V_0 + hV_1 - E_0 - hE_1) \tag{1.24}$$

et considérons, pour $f, g \in C^\infty(\Gamma)$, l'identité suivante qui se déduit du caractère autoadjoint de $Q(h)$.

$$(Q(h)[\Theta^\varepsilon(f)e^{-\varphi_0/h}], \Theta^\varepsilon(g)e^{-\varphi_0/h}) = (\Theta^\varepsilon(f)e^{-\varphi_0/h}, Q(h)(\Theta^\varepsilon(g)e^{-\varphi_0/h})). \tag{1.25}$$

Utilisant la définition de Θ^ε, nous remarquons que :

$$Q(h)[\Theta^\varepsilon(f)e^{-\varphi_0/h}] = -h^2\Delta(\Theta^\varepsilon(f))e^{-\varphi_0/h} + \mathcal{O}(e^{-\varepsilon/3h}).$$

On déduit alors de (1.25) que :

$$\int \Delta(\Theta^\varepsilon(f)).\Theta^\varepsilon(g)e^{-2\varphi_0/h}dv_M = \int \Theta^\varepsilon(f).\Delta(\Theta^\varepsilon(g)).e^{-2\varphi_0/h}dv_M + \mathcal{O}(e^{-\varepsilon/3h}). \tag{1.26}$$

Appliquant le théorème de la phase stationnaire de Colin de Verdière (cf. [CHA]), on obtient en identifiant les premiers termes du développement :

$$\int_\Gamma P_\Gamma f.g d\tilde{v}_\Gamma = \int_\Gamma f.P_\Gamma g d\tilde{v}_\Gamma \tag{1.27}$$

où $d\tilde{v}_\Gamma$ est introduit au théorème 1.1. ∎

LEMME 1.6. — $\forall f \in C^\infty(\Gamma)$, $\forall g \in C^\infty(\Gamma)$, *on a :*

$$(P_\Gamma f/g) = \int \nabla_\Gamma f.\nabla_\Gamma g d\tilde{v}_\Gamma + \int \mathcal{S}_\Gamma f.g d\tilde{v}_\Gamma \tag{1.28}$$

où $\mathcal{S}_\Gamma$ est défini en (1.7).

Démonstration. — On part de la formule (cf. 1.25) :

$$\langle Q(h)[\Theta^\varepsilon(f)e^{-\varphi_0/h}]/\Theta^\varepsilon(g)e^{-\varphi_0/h}\rangle = h^2(\nabla(\Theta^\varepsilon(f)e^{-\varphi_0/h})/\nabla(\Theta^\varepsilon(g)e^{-\varphi_0/h}))_{\Omega^1} + \int (V_0 + hV_1 - E_0 - hE_1)\Theta^\varepsilon(f).\Theta^\varepsilon(g)e^{-2\varphi_0/h}dv_M.$$

On remarque maintenant que l'on a :

$$\nabla(\Theta^\varepsilon(f)e^{-\varphi_0/h}) = \left[\nabla(\Theta^\varepsilon(f)) - \frac{1}{h}\nabla\varphi_0.\Theta^\varepsilon(f)\right]e^{-\varphi_0/h}.$$

On obtient ainsi :

$$h^2 \langle \nabla(\Theta^\varepsilon(f)e^{-\varphi_0/h})/(\nabla(\Theta^\varepsilon(g)e^{-\varphi_0/h})\rangle = h^2 \int \nabla(\Theta^\varepsilon(f)) . \nabla(\Theta^\varepsilon(g)) . e^{-2\varphi_0/h} dv_M$$

$$+ \int |\nabla\varphi_0|^2 \Theta^\varepsilon(f) . \Theta^\varepsilon(g) e^{-2\varphi_0/h} dv_M - h \int \nabla\varphi_0 . \nabla(\Theta^\varepsilon(f) . \Theta^\varepsilon(g)) . e^{-2\varphi_0/h} dv_M$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} .$$

Remarquons que, par intégration par parties :

$$(\mathrm{II}) = \frac{h}{2} \int \nabla\varphi_0 . \nabla(\Theta^\varepsilon(f) . \Theta^\varepsilon(g)) e^{-2\varphi_0/h} dv_M$$

$$+ \frac{h}{2} \int e^{-2\varphi_0/h} \Delta\varphi_0 . \Theta^\varepsilon(f) . \Theta^\varepsilon(g) dv_M .$$

Utilisant (0.4), on obtient finalement :

$$\langle Q(h)[\Theta^\varepsilon(f)e^{-\varphi_0/h}]/\Theta^\varepsilon(g)e^{-\varphi_0/h} \rangle_{L^2(M)} = h^2 \int \nabla(\Theta^\varepsilon(f)) . \nabla(\Theta^\varepsilon(g)) e^{-2\varphi_0/h} dv_M$$

$$+ h \int [(V_1 - E_1) + \Delta\varphi_0] \Theta^\varepsilon(f) . \Theta^\varepsilon(g) e^{-2\varphi_0/h} dv_M$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{I} + \mathrm{II} .$$

Compte tenu de (1.8) et (1.9), on obtient que :

$$(\mathrm{IV}) = h \int 2\nabla\varphi_0 \nabla c . \Theta^\varepsilon(f) . \Theta^\varepsilon(g) e^{-2\varphi_0/h} dv_M$$

$$= h^2 \int \Delta c . \Theta^\varepsilon(f) . \Theta^\varepsilon(g) e^{-2\varphi_0/h} dv_M$$

$$+ h^2 \int e^{-2\varphi_0/h} \nabla c . \nabla(\Theta^\varepsilon(f) . \Theta^\varepsilon(g)) e^{-2\varphi_0/h} dv_M .$$

On peut réécrire (I) + (IV) sous la forme :

$$(1.29) \quad (\mathrm{I}) + (\mathrm{IV}) = h^2 \int (\nabla + \nabla c)(\Theta^\varepsilon(f)) . (\nabla + \nabla c)(\Theta^\varepsilon(g)) e^{-2\varphi_0/h} dv_M$$

$$+ h^2 \int (\Delta c - |\nabla c|^2) \Theta^\varepsilon(f) . \Theta^\varepsilon(g) e^{-2\varphi_0/h} dv_M .$$

Observons maintenant que :

$$2\nabla\varphi(\nabla + \nabla c)(\Theta^\varepsilon(f)) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathscr{V}(\Gamma, \varepsilon/2) \qquad (\text{cf. } (1.8) \text{ et } (1.10))$$

de sorte que les composantes normales sur Γ de $(\nabla + \nabla c)\Theta^\varepsilon(f)$ sont nulles.

On conclut alors par le théorème de la phase stationnaire. ∎

Il résulte classiquement du théorème (1.1) le :

COROLLAIRE 1.7. — *Le spectre de la réalisation de Dirichlet de*

$-h^2\Delta + V_0 + hV_1$ *dans* $\mathscr{V}(\Gamma, \varepsilon)$ *contient une valeur propre* $\lambda(h)$ *de développement asymptomatique* $E(h)$.

L'objet du paragraphe suivant sera de montrer que dans un intervalle de la forme $[E_0 + E_1 h + E_2 h^2 - \eta h^2, E_0 + E_1 h + E_2 h^2 + \eta h^2]$ avec $\eta > 0$ assez petit, il n'y a qu'une valeur propre de l'opérateur ci-dessus pour $h \leqslant h_0$.

§ 2. LOCALISATION DU SPECTRE POUR LE PROBLÈME DE DIRICHLET A UN PUITS Γ ET APPLICATIONS

On sait (cf. Hirsch [HI], ou toute démonstration du lemme de Morse généralisé, cf. par exemple Chazarain-Piriou [C-P]) qu'il existe un fibré vectoriel euclidien $\mathscr{F}$ au-dessus de Γ tel qu'un voisinage de la section nulle de ce fibré soit difféomorphe à un voisinage de Γ dans M (On notera i ce difféomorphisme). Concrètement cela signifie que l'on peut choisir une famille finie d'ouverts U_j recouvrant Γ, et pour chaque U_j un système de coordonnées $(x'^{(j)}, x''^{(j)})$ définies sur $U_j \times \mathbf{R}^{\nu''}$ tels que :

(2.1) $$\varphi_0 \circ i = \frac{1}{2} \sum_{\nu'+1}^{n} (x_l''^{(j)})^2 \qquad \text{pour} \quad |x''| < \varepsilon .$$

(On omet parfois i dans la suite),

(2.2) $x'^{(j)} = x_0'^{(j)}$ (pour $x_0'^{(j)}$ fixé) définit la variété sortante pour $\nabla\varphi_0$ partant du point de Γ : $x'^{(j)} = x_0'^{(j)}, x''^{(j)} = 0$.

(2.3) Au-dessus de $U_j \cap U_k$ qu'on peut supposer connexe, le changement de variables est de la forme :

$$x'^{(j)} = \varphi_{j,k}(x'^{(k)})$$
$$x_i''^{(j)} = \sum_l{}'' B_{i,l}^{j,k}(x'^{(k)}) x_l''^{(k)}, \; i = \nu' + 1, \ldots, n,$$

(2.4) $B^{j,k}(x'^{(k)}) \in \mathcal{O}(\nu'')$ (l'espace des matrices orthogonales),

(2.5) $x'^{(j)}|_{U_j}$ est une carte de Γ.

On n'utilise dans la suite, que des coordonnées de ce type. Il s'agit donc d'étudier $Q(h)$ (cf. (1.24)) dont on a donné au cours de la démonstration du lemme 1.6 (cf. (1.29)), l'expression suivante :

(2.6) $$Q(h) = (h\nabla^* + h\nabla c + \nabla\varphi_0)(h\nabla + h\nabla c + \nabla\varphi_0) + h^2((\Delta c) - |\nabla c|^2).$$

On va chercher, dans le même esprit que dans [HE-SJ]$_5$ à déformer Q (et simultanément la densité d'intégration) par une famille d'opérateurs autoadjoints en un modèle simple. Par rapport à [HE-SJ]$_5$ deux difficultés apparaissent ; d'une part il faut un contrôle beaucoup plus fin des restes et d'autre part apparaissent des problèmes globaux liés au fait que $\mathcal{F}$ n'est pas un fibré trivial, ni même plat en général.

Pour ce deuxième point, on peut remarquer que sont bien définis indépendamment des coordonnées :

en chaque point l'espace vectoriel engendré par les $\partial_{x''_j}$, l'espace des opérateurs différentiels d'ordre 1 engendré par les $h\partial_{x''_j} + x''_j$.

Par contre, sauf si dans (2.3) on peut s'arranger pour que les $B^{j,k}$ soient indépendants de x', l'espace engendré par les $\partial_{x'_j}$ n'est pas invariant. On va donc tout d'abord définir un espace horizontal naturel dans notre fibré qui soit défini globalement.

Soit $U \times \mathbf{R}^{\nu''}$ un ouvert de carte de notre fibré, et transportons sur $\mathcal{F}$ (au voisinage de $x'' = 0$) la métrique donnée sur M. Dans cette carte, notre espace horizontal sera engendré par des champs

$$X'_i = \partial_{x'_i} + \sum_k{}'' \sum_l{}'' b_i^{l,k}(x')x''_l \partial_{x''_k}, \tag{2.7}$$

$i = 1, \ldots, \nu'$, vérifiant la condition que

$$\langle X'_i \mid \partial_{x''_j} \rangle_{(x',x'')} = \mathcal{O}(|x''|^2). \tag{2.8}$$

On vérifiera que cette condition détermine les $b_i^{l,k}(x')$ et que l'espace engendré par les X'_i est bien défini sur le fibré.

Puisque $\nabla_{\varphi_0} = \mathcal{O}(x'')\left(\dfrac{\partial}{\partial x''}\right)$, on déduit de (2.8) que

$$\langle X'_i \mid \nabla\varphi_0 \rangle_{(x',x'')} = \mathcal{O}(|x''|^3),$$

c'est-à-dire

$$X'_i(\varphi_0) = \mathcal{O}(|x''|^3),$$

ou bien

$$\sum_k{}'' \sum_l{}'' b_i^{l,k}(x')x''_l x''_k = \mathcal{O}(|x''|^3) \quad \text{et donc} = 0.$$

La matrice $b_i\,((b_i^{l,k})$ est donc antisymétrique et on a :

$$b_i^{l,k}(x') = -\, b_i^{k,l}(x'), \tag{2.9}$$

$$X'_i\varphi_0 = 0 \tag{2.10}$$

$$X'_i = \partial_{x'_i} + \sum_{k,l} b_i^{k,l} x''_k(\partial_{x''_l} + x''_l). \tag{2.11}$$

Explicitons la condition (2.8). Dans nos coordonnées la métrique est donnée par la matrice $G = (g^{i,j})$, d'inverse $H = G^{-1} = (g_{i,j})$. Il résulte de (2.2) que l'on a

$$\sum_j{}'' g_{i,j}(x)x_j = 0\,, \quad i = 1, \ldots, \nu'\,, \tag{2.12}$$

et par conséquent :

$$g_{i,j}(x', 0) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, \nu'\,, \quad j = \nu' + 1, \ldots, n\,, \tag{2.13}$$

et si on pose

$$g_{i,j}^{l} = \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x_l''}\,, \qquad g^{i,j;l} = \frac{\partial g^{i,j}}{\partial x_l''}\,, \tag{2.14}$$

pour $i = 1, \ldots, \nu'$, $j = \nu' + 1, \ldots, n$, $l = \nu' + 1, \ldots, n$, alors

$$g_{i,j}^{l}(x', 0) = - g_{i,l}^{j}(x', 0)\,. \tag{2.15}$$

De (2.8) on obtient

$$g^{i,j}(x) + \sum_l{}'' \sum_k{}'' b_i^{l,k}(x')x_l'' g^{k,j}(x) = \mathcal{O}(|\, x'' \,|^2)\,, \tag{2.16}$$

pour $i = 1, \ldots, \nu'$, $j = \nu' + 1, \ldots, n$. De (2.13) on obtient

$$g^{i,j}(x', 0) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, \nu'\,, \quad j = \nu' + 1, \ldots, n\,, \tag{2.17}$$

donc si on décompose G et H en blocs de manière naturelle

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix},$$

on a $G_{j,k}$, $H_{j,k} = 0$ pour $x'' = 0$ si $j \neq k$, $G_{jj}^{-1} = H_{jj}$ si $x'' = 0$. On obtient également que

$$\frac{\partial H_{1,2}}{\partial x_l''}(x', 0) = - H_{1,1}(x', 0)\frac{\partial G_{1,2}}{\partial x_l''}(x', 0)H_{2,2}(x', 0) \tag{2.18}$$

ce qui permet d'exprimer les $g_{i,j}^{l}(x', 0)$ en fonction des $g^{i,j,l}(x', 0)$. On déduit de (2.16) la relation :

$$g^{i,j;l}(x', 0) + \sum_k{}'' b_i^{l,k}(x', 0)g^{k,j}(x', 0) = 0\,, \tag{2.19}$$

que, compte tenu de (2.18), on peut réécrire :

$$b_i^{l,m} = \sum_k{}' g^{i,k}(x', 0)g_{k,m}^{l}(x', 0)\,. \tag{2.20}$$

On va maintenant définir une norme assez faible adaptée à notre opérateur. D'abord, pour $u \in C_0^\infty(U_m \times \mathbf{R}^{\nu''})$, on pose :

$$|||\, u \,|||_{h,m} = h^2 \,\|\, u \,\|_{L^2} + \sum_{l+|\alpha|+|\beta|\leq 2} h^{2-(|\alpha|+|\beta|)/2} \,\|\, x''^\alpha \tilde{\partial}_{x''}^\beta X'_{\gamma_1} \dots X'_{\gamma_l} u \,\|$$
$$+ \sum_i{}'' \sum_j{}'' \|\tilde{\partial}_{x_j}(\tilde{\partial}_{x_i} + x_i)u\| + \|x''_j(\tilde{\partial}_{x_i} + x_i)u\|$$
$$h \sum_k{}' \sum_i{}'' \|X'_k(\tilde{\partial}_{x_i} + x_i)u\| + h^{1/2} \sum_i{}'' \|(\tilde{\partial}_{x_i} + x_i)u\|.$$

Comme on s'intéressera en général seulement aux ordres de grandeur uniformément en h, on utilisera souvent la notation abrégée :

$$|||\, u \,|||_{h,m} = h^2 \,\|\, u \,\| + \sum_{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|\leq 2} h^{2-(|\alpha|+|\beta|)/2} \,\|\, x''^\alpha \tilde{\partial}_{x''}^\beta X'^\gamma u \,\|$$
$$+ \|\tilde{\partial}_{x''}(\tilde{\partial}_{x''} + x'')u\| + \|x''(\tilde{\partial}_{x''} + x'')u\|$$
$$+ h\|X'(\tilde{\partial}_{x''} + x'')u\| + h^{1/2}\|(\tilde{\partial}_{x''} + x'')u\|.$$

La multiplication par $\chi(x) \in C_0^\infty(U \times \mathbf{R}^{\nu''})$ est uniformément $\mathcal{O}(1)$ pour cette norme si χ est indépendant de x'' près de $x'' = 0$. On remarque que sur $U_j \cap U_k$, $|||\, u \,|||_{h,j}$ et $|||\, u \,|||_{h,k}$ sont uniformément du même ordre de grandeur. On définit alors pour $u \in C_0^\infty(\mathscr{F})$:

$$|||\, u \,|||_h = \Sigma \,|||\, \chi_j u \,|||_{h,j}, \tag{2.21}$$

avec $\Sigma\chi_j = 1$, $\operatorname{supp}\chi_j \subset U_j \times \mathbf{R}^{\nu''}$, $\chi_j(x) = \chi_j(x')$. Alors à équivalence uniforme près (pour des fonctions u à support dans un compact fixé) $|||\, u \,|||_h$ est intrinsèquement défini.

On pose

$$Z_j = \begin{cases} X'_j\,, & 1 \leqslant j \leqslant \nu'' \\ \dfrac{\partial}{\partial x''_j}\,, & \nu' + 1 \leqslant j \leqslant n\,. \end{cases} \tag{2.22}$$

Alors pour la métrique g :

$$-\,\Delta = \Sigma\Sigma Z_j^* m_{j,k}^g Z_k\,, \tag{2.23}$$

où

$$(m_{j,k}^g) = (\langle Z_j \,|\, Z_k \rangle_g)^{-1}\,,$$

et on peut écrire l'opérateur (2.6) sous la forme

$$Q = \Sigma\Sigma(\tilde{Z}_j^* + Z_j(\varphi_0 + hc))m_{j,k}^g(\tilde{Z}_k + Z_k(\varphi_0 + hc)) + h^2(\Delta c - (\nabla c)^2) \tag{2.24}$$

où on rappelle que $c|_\Gamma = 0$. Ici $\tilde{Z} = hZ$ et Z^* est l'adjoint de Z pour la densité associée à g, qui est $(\det G)^{1/2}dx_1 \ldots dx_n$. Conjuguant Q avec e^{-c}, on obtient

$$(2.25) \quad \tilde{Q} = \Sigma\Sigma(\tilde{Z}_j^* + Z_j(\varphi_0 + 2hc))m_{j,k}^g(\tilde{Z}_k + Z_k(\varphi_0)) + h^2(\Delta c - (\nabla c)^2),$$

qui est formellement autoadjoint pour la densité $e^{-2c}(\det G)^{1/2}dx$.

Par des déformations, nous allons remplacer cette densité par :

$$(2.26) \quad (\det G)^{1/2}|_{x''=0}dx = (\det G_{22})^{1/2}(\det G_{11})^{1/2}dx'dx'' = d\tilde{v}_\Gamma \otimes dx''$$

où $d\tilde{v}_\Gamma$ est la densité sur Γ, définie par (1.4).

$\tilde{Q}$ sera déformé en

$$(2.27) \quad \tilde{Q}^{(1)}(h) = \sum_j{}'' \sum_k{}'' (-\tilde{\partial}_{x_j} + x_j)g_{j,k}(x',0)(\tilde{\partial}_{x_k} + x_k) + h^2\Sigma'\Sigma' X_j^{(*)t}g_{j,k}(x',0)X_k + h^2\mathscr{S}_\Gamma(x')$$

où $X_j^{(*)t}$ désigne l'adjoint pour la mesure (2.26) et $\mathscr{S}_\Gamma(x')$ est introduit au § 1. Plus précisément nous allons établir le :

LEMME 2.1. — *Il existe une famille* C^∞ *par morceaux :* $[0,1]\ni t \to \tilde{Q}^{(t)}$ *avec* $\tilde{Q}^{(0)} = \tilde{Q}$, *d'opérateurs différentiels d'ordre 2, et une famille* C^∞ *par morceaux* $[0,1]\ni t \to \omega_t$ *de densités* C^∞, > 0, *avec* $\omega_0 = e^{-2c}(\det G)^{1/2}dx$, $\omega_1 = d\tilde{v}_\Gamma \otimes dx''$, *telles que* $\tilde{Q}^{(t)}$ *est formellement autoadjoint par rapport à* ω_t *et telles qu'il existe* $C > 0$, $h_0 > 0$, $\tau_0 > 0$, *tels que*

$$(2.28) \qquad \|(\tilde{Q}^{(t)}(h) - \tilde{Q}^{(t')}(h))u\| \leqslant C(\tau + h^{1/2})|||u|||_h,$$

pour tous $t, t' \in [0,1]$, $h \in]0,h_0]$, $\tau \in]0,\tau_0]$, $u \in C_0^\infty(\mathscr{V}(\Gamma,\tau))$.

Démonstration. — On va obtenir notre déformation comme la composition de plusieurs déformations C^∞. On ne pourra pas toujours définir ces déformations directement de manière globalement invariante et on commence par décomposer l'opérateur (2.25) par une partition d'unité $1 = \Sigma\chi_\nu(x')$, $\chi_\nu \in C_0^\infty(U_\nu)$; puisque

$$(\tilde{Q}u|v)_{L^2(e^{-2c}(\deg G)^{1/2}dx)} = \int [\Sigma\Sigma m_{j,k}^g(\tilde{Z}_k + Z_k(\varphi_0))u.\overline{(\tilde{Z}_j + Z_j(\varphi_0))v} + h^2(\Delta c - (\nabla c)^2)u\bar{v}]e^{-2c}(\det G)^{1/2}dx$$

où la fonction intégrée est intrinsèquement définie, on a la décomposition « en cartes locales »

$$(\tilde{2}.25) \quad \tilde{Q} = h^2(\Delta c - (\nabla c)^2) + \sum_\nu \sum \sum (\tilde{Z}_{j,\nu}^* - Z_{i,\nu}(\varphi_0 + 2hc))\chi_\nu(x')m_{j,k,\nu}^g(x)(\tilde{Z}_{k,\nu} + Z_{k,\nu}(\varphi_0)).$$

C'est donc sur cette expression que l'on va faire nos déformations, mais pour éviter des notations trop lourdes on travaillera avec (2.25). A la fin on trouvera un opérateur avec une écriture invariante.

A. La première opération est de déformer $\Delta c - (\nabla c)^2$ linéairement en sa restriction $\tilde{\mathscr{S}}_\Gamma(x') = \Delta c - (\nabla c)^2|_{x''=0}$, et ceci sans changer la densité $e^{-2c}(\det G)^{1/2}dx$. Cela donne lieu à une différence $h^2\mathcal{O}(x'')u$ dont la norme L^2 se majore facilement par le second membre de (2.28).

B. On déforme ensuite linéairement $Z_j(\varphi_0 + 2hc)$ en $Z_j(\varphi_0)$ dans (2.25). On remarque que la différence vérifie :

$$2hZ_j(c) = \begin{cases} \mathcal{O}(hx'') & \text{si} \quad 1 \leqslant j \leqslant v' \\ \mathcal{O}(h) & \text{si} \quad v'+1 \leqslant j \leqslant n. \end{cases}$$

On observe ici que

$$(2.29) \qquad m^g_{j,k}(x) = \mathcal{O}(x''^2) \qquad \text{si} \quad j \leqslant v' < k \quad \text{ou} \quad \text{si} \quad k \leqslant v' < j$$

et que $Z_j(\varphi) = X_0(\varphi) = 0$ si $j \leqslant v'$, $Z_j(\varphi_0) = x_j$ si $j \geqslant v'+1$. $\tilde{Q}u$ se modifie alors par quatre types de termes :

1° $\mathcal{O}(hx'')\tilde{X}'_k u$
2° $\mathcal{O}(hx'')(\tilde{\partial}_{x''} + x'')u$
3° $\mathcal{O}(h)x''^2\tilde{X}'_k u$
4° $\mathcal{O}(h)(\tilde{\partial}_{x''} + x'')u.$

La norme L^2 de chacun de ces termes se majore par le second membre de (2.28). Si on déforme en même temps $e^{-2c}(\det G)^{1/2}dx$ convenablement en $(\det G)^{1/2}dx$, les opérateurs intermédiaires restent autoadjoints.

On est donc arrivé à

$$(2.30) \qquad \hat{Q} = h^2\tilde{\mathscr{S}}_\Gamma(x') + \Sigma\Sigma(\tilde{Z}^*_j + Z_j(\varphi_0))m^g_{j,k}(\tilde{Z}_k + Z_k(\varphi_0))$$

qui est autoadjoint pour $(\det G)^{1/2}dx$.

C. On déforme maintenant $(\det G)^{1/2}dx$ en $(\det G)^{1/2}(x',0)dx$ par une famille $t \to f_t(x)dx$ avec $f_t(x',0) = (\det H)^{1/2}(x',0)$. Bien entendu, dans (2.30), on remplace alors $\tilde{Z}^*_j$ pour $\tilde{Z}^{*,t}_j$ qui est l'adjoint pour $f_t dx$. On a $\tilde{Z}^*_j - \tilde{Z}^{*,t}_j = \mathcal{O}(x''h)$ si $1 \leqslant j \leqslant v'$ et $= \mathcal{O}(h)$ si $v'+1 \leqslant j \leqslant n$ et on trouve exactement les mêmes modifications que dans l'étape B.

On est donc arrivé à un nouvel opérateur (2.30), où $\tilde{Z}^*_j$ désigne maintenant l'adjoint pour $d\tilde{v}_\Gamma \otimes dx''$.

D. La dernière étape est maintenant de figer $m^g_{j,k}$ en $x'' = 0$. Cela revient à modifier $m^g_{j,k}$ par $\mathcal{O}(x'')$ si $j, k \geqslant v'+1$ ou si $j, k \leqslant v'$, et par $\mathcal{O}(x''^2)$ dans les deux autres cas. Il y a donc quatre cas à vérifier ·

1° $\nu' + 1 \leqslant j, k \leqslant n$. On obtient des modifications de $\hat{Q}u$ de la forme

$$(-\tilde{\partial}_{x_j''} + x_j'')\mathcal{O}(x'')(\tilde{\partial}_{x_k''} + x_k'')u,$$

ce qui donne des termes :

$$\mathcal{O}(h)(\tilde{\partial}_{x_k''} + x_k'')u,\ \mathcal{O}(x''^2)(\tilde{\partial}_{x_k''} + x_k'')u,\ \mathcal{O}(x'')\tilde{\partial}_{x_j''}(\tilde{\partial}_{x_k''} + x_k'')u$$

dont les normes L^2 se majorent bien par le second membre de (2.28).

2° $j \leqslant \nu' < k$. On obtient

$$(-\tilde{X}_j' + \mathcal{O}(h))\mathcal{O}(x'')(\tilde{\partial}_{x_k''} + x_k'')u$$

ce qui donne

$$\mathcal{O}(hx'')(\tilde{\partial}_{x_k''} + x_k'')u,\ \mathcal{O}(x'')\tilde{X}_j'(\tilde{\partial}_{x_k''} + x_k'')u$$

dont les normes L^2 se majorent bien par le second membre de (2.28).

3° $k \leqslant \nu' < j$. Remarquons d'abord, que si f est une fonction, alors

$$\nabla f = \Sigma m_{j,k}^g Z_k(f) Z_j .$$

Pour $f = x''^2$ on sait que les composantes X'_j de ∇f s'annulent et donc

$$\sum_j{}'' x_j'' m_{j,k}^g = 0, \qquad \text{si} \quad k \leqslant \nu' . \tag{2.31}$$

La modification de $\hat{Q}$ est maintenant de la forme

$$\sum_k{}' \sum_j{}'' (-\tilde{\partial}_{x_j''} + x_j'' + \mathcal{O}(h)) m_{j,k}(x)\tilde{X}_k'$$

et utilisant (2.31) on peut remplacer x_j'' par $-x_j''$. Il suffit alors de majorer la norme L^2 des termes

$$(\tilde{\partial}_{x_j''} + x_j'')\mathcal{O}(x''^2)\tilde{X}_k'u, \quad \mathcal{O}(h)\mathcal{O}(x''^2)\tilde{X}_k'u .$$

Ici le deuxième terme se majore sans problèmes et le premier se décompose en une somme de termes du type

$$\mathcal{O}(x''^2)\tilde{X}_k'(\tilde{\partial}_{x_j''} + x_j'')u, \quad \mathcal{O}(h)\mathcal{O}(x'')\tilde{X}_k'u, \quad \mathcal{O}(x''^2)\,[(\tilde{\partial}_{x_j''} + x_j''), \tilde{X}_k']u .$$

Ici les deux premiers termes sont OK. Pour analyser le troisième on exprime X_k' comme dans (2.11). Ce terme devient alors une somme de termes du type :

$$\mathcal{O}(hx''^3)u, \quad \mathcal{O}(hx''^2)\tilde{\partial}_{x''}u$$

qui se majorent dans L^2 par le second membre de (2.28).

4° $j, k \leqslant \nu'$. On obtient alors des modifications

$$\tilde{X}_j'\mathcal{O}(x'')\tilde{X}_k'u, \quad \mathcal{O}(hx'')\tilde{X}_k'u ,$$

Le premier terme ici se décompose en

$$\mathcal{O}(x'')\tilde{X}_j'\tilde{X}_k' \quad \text{et} \quad \mathcal{O}(hx'')\tilde{X}_k'u$$

et ces termes se majorent sans problèmes.

Ceci termine la démonstration du lemme 2.1. #

Nous allons maintenant étudier $\tilde{Q}^{(1)}$ donné par (2.27) et dont l'action sur des fonctions sur $\mathcal{F}$ est bien définie. Rappelons d'abord quelques propriétés des fonctions d'Hermite sur $\mathbf{R}^n$. Pour $\alpha \in \mathbf{N}^n$, on pose :

$$h_\alpha = (Z^*)^\alpha h_0,$$

où $h_0(x) = e^{-x^2/2}$, $Z_j = (\partial_{x_j} + x_j)$, $Z_j^* = (-\partial_{x_j} + x_j)$.

Soit H_k l'espace vectoriel engendré par les fonctions h_α avec $|\alpha| = k$. On sait alors que :

(2.32) H_k est invariant sous l'action de $Z_\nu Z^*{}_\mu$.

(2.33) H_k est invariant par rotations et donc aussi sous l'action de $L = \Sigma\Sigma x_\nu a_{\nu,\mu}\partial_{x_\mu}$ si $a_{\nu,\mu} = -a_{\mu,\nu} \in \mathbf{R}$. (Une autre manière de le voir est d'écrire $L = 1/2\Sigma\Sigma(-\partial_{x_\nu} + x_\nu)a_{\nu,\mu}(\partial_{x_\mu} + x_\mu)$.)

(2.34) Soit $(g_{\nu,\mu})$ une matrice symétrique définie positive, et posons

$$Q = \Sigma\Sigma Z_\nu^* g_{\nu,\mu} Z_\mu .$$

Alors le spectre de $Q|_{H_k}$ est contenu dans un intervalle $[k/C_0, C_0 k]$.

Soit maintenant $k \geqslant 1$. De (2.34) on obtient facilement

$$k\|u\|^2 + \Sigma\|Z_j u\|^2 + \Sigma\|Z_j^* u\|^2 \leqslant C(Qu\,|\,u), \tag{2.35}$$

$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Soit $\mathcal{H}^{(1)} \subset L^2(\mathbf{R}^n)$ l'espace des $u \in L^2(\mathbf{R}^n)$ tels que Zu, $Z^*u \in L^2(\mathbf{R}^n)$ (en notation abrégée), muni de la norme naturelle. Soit $\mathcal{H}^{(-1)}$ l'espace dual pour le produit scalaire L^2. Puisque Z_j, Z_j^* sont bornés $\mathcal{H}^{(1)} \to L^2$, ils sont aussi bornés $L^2 \to \mathcal{H}^{(-1)}$. De (2.35) on obtient facilement :

$$\|u\|_1 \leqslant C\|Qu\|_{-1}. \tag{2.36}$$

Ici on remplace u par $Z_j u$ et $Z_j^* u$.

Puisque $[Q, Z_j]$ et $[Q, Z_j^*]$ sont des combinaisons linéaires des Z_ν^* et Z_ν on trouve

$$\|Zu\|_1 + \|Z^*u\|_1 \leqslant C\|Qu\|.$$

Avec (2.36), on trouve :

$$\|u\| + \|Zu\| + \|Z^*u\| + \|Z^2u\| + \|ZZ^*u\| + \|Z^{*2}u\| \leqslant C\|Qu\|. \tag{2.37}$$

D'autre part $k\|u\| \leqslant C\|Qu\|$ et par une interpolation simple, on arrive à améliorer (2.37) en :

$$k\|u\| + k^{1/2}(\|Zu\| + \|Z^*u\|) + \|Z^2u\| + \|ZZ^*u\| + \|Z^{*2}u\| \leqslant \leqslant C\|Qu\|, \quad u \in H_k. \tag{2.37}$$

Puisque $H_0^\perp = \overset{\infty}{\underset{1}{\oplus}} H_k$, on voit que (2.37) reste valable pour tout $u \in \mathscr{H}^{(2)} \cap H_0^\perp$. (Ici $\mathscr{H}^{(2)}$ est défini par la norme du premier membre de (2.37)). De (2.37) et (2.34) on obtient aussi :

$$\|Zu\| + \|Z^*u\| \leqslant Ck^{1/2}\|u\|, \quad \forall u \in H_k \tag{2.38}$$

$$\|Z^2u\| + \|ZZ^*u\| + \|Z^{*2}u\| \leqslant Ck\|u\|, \quad \forall u \in H_k. \tag{2.39}$$

Introduisons maintenant la « constante » de Planck : h. On pose

$$h_0(x) = h^{-n/4}e^{-x^2/2h}, \quad \tilde{Z}_j = (\tilde{\partial}_{x_j} + x_j), \quad \tilde{Z}_j^* = -\tilde{\partial}_{x_j} + x_j,$$

$h_\alpha = (\tilde{Z}^*)^\alpha h_0$. On étend de manière évidente la définition de H_k et on pose

$$\tilde{Q} = \Sigma\Sigma\tilde{Z}_\nu^* g_{\nu,\mu}\tilde{Z}_\mu.$$

Par la dilatation habituelle $x = h^{1/2}y$, on trouve alors que H_k est invariant sous l'action de $\tilde{Z}_\nu\tilde{Z}_\mu^*$, que (2.33) reste vrai et que le spectre de $\tilde{Q}|_{H_k}$ est contenu dans un intervalle $[kh/C_0, C_0kh]$. On trouve aussi

$$\begin{aligned} kh\|u\| + (kh)^{1/2}(\|\tilde{Z}u\| + \|\tilde{Z}^*u\|) &+ \\ + \|\tilde{Z}^2u\| + \|\tilde{Z}\tilde{Z}^*u\| \, Z^{*2}u\| &\leqslant C\|\tilde{Q}u\| \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\|\tilde{Z}u\| + \|\tilde{Z}^*u\| \leqslant C(kh)^{1/2}\|u\| \tag{2.41}$$

$$\|Z^2u\| + \|ZZ^*u\| + \|Z^{*2}u\| \leqslant Ckh\|u\| \tag{2.42}$$

pour $u \in H_k$, $k \geqslant 1$.

Dans ces considérations, nous n'avons utilisé que la structure euclidienne de $\mathbf{R}^n$. Revenons maintenant à $\tilde{Q}^{(1)}$ donné pour des coordonnées convenables par (2.27). Sur chaque fibre de $\mathscr{F}$ nous pouvons introduire les espaces H_k, et on peut considérer $\mathscr{H}_k = C^\infty(\Gamma; H_k)$ comme un sous-espace de $\mathscr{S}(\mathscr{F}) \subseteq C^\infty(\mathscr{F})$. $\tilde{Q}^{(1)}$ (et même chaque terme de (2.27) (cf. (2.33))) laisse $\mathscr{H}_k$ invariant. Soit $k \geqslant 1$. Pour $u \in \mathscr{H}_k$, on obtient

$$kh\|u\|^2 \leqslant C(\tilde{Q}^{(1)}u \,|\, u), \quad \text{donc} \quad kh\|u\| \leqslant C\|\tilde{Q}^{(1)}u\|.$$

Utilisant aussi (2.41), (2.42), on obtient

$$\begin{aligned} kh\|u\| + (kh)^{1/2}(\|\tilde{Z}''u\| + \|\tilde{Z}''^*u\|) + \|\tilde{Z}''^2u\| & \\ + \|\tilde{Z}''\tilde{Z}''^*u\| + \|\tilde{Z}''^{*2}u\| &\leqslant C\|\tilde{Q}^{(1)}u\|. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Ici $\tilde{Z}_j'' = -\tilde{\partial}_{x_{j''}} + x_j''$ est défini localement en x', mais (2.43) a un sens global évident. Cette inégalité permet de contrôler les contributions à $\tilde{Q}^{(1)}u$ venant de la première somme double de (2.27), et on obtient

$$h^2\|\Sigma\Sigma Z_j^* g_{j,k}(x', 0)Z_k u\| \leqslant C\|\tilde{Q}^{(1)}u\|. \tag{2.44}$$

Ici on est retourné à la notation initiale, avec

$$Z_j = \partial_{x_j'}, \quad j \geqslant \nu' + 1, \quad Z_j = X_j', \quad 1 \leqslant j \leqslant \nu'.$$

A gauche apparaît un opérateur elliptique auquel on peut appliquer des inégalités *a priori* standards pour obtenir avec (2.43) :

$$(2.45)\quad kh\|u\|+(kh)^{1/2}\sum_{\nu+\mu\leqslant 1}\|x''_\nu\tilde{\partial}_{x''_\mu}u\|+\sum_{|\alpha+\beta|=2}|x''^\alpha\tilde{\partial}^\beta_{x''}u\| \\ +h\sum_\nu{}''\sum_\mu{}'\|\tilde{\partial}_{x''_\mu}X'_\nu u\|+h^2\sum{}'\sum_{\nu+\mu\leqslant 2}{}'\|X'_\nu X'_\mu u\|_\tau \\ +h\sum_\nu{}''\sum_\mu{}'\|x''_\nu X'_\mu u\|_\tau\leqslant C\|\tilde{Q}^{(1)}u\|$$

pour $\forall u\in\mathscr{H}_k$, $k\geqslant 1$. Ici $\|\ \ \|_\tau$ désigne la norme dans $L^2(\mathscr{V}(\Gamma,\tau))$, la constante C dépend ici de τ. Le dernier terme à gauche dans (2.45) s'obtient par interpolation :

$$\|x''_\nu X'_\mu u\|^2=(X'^*_\mu x''^2_\nu X'_\mu u\mid u).$$

Ici $[X'^*_\mu, x''^2_\nu]=\mathcal{O}(x''^2)$, donc

$$h^2\|x''_\nu X'_\mu u\|_2\leqslant C\|x''^2u\|h^2\big(\|X'^2_\mu u\|+\|X'_\mu u\|\big) \\ \leqslant\tilde{C}\big(\|x''^2u\|^2+h^4\|X'^2_\mu u\|^2+h^4\|X'_\mu u\|^2\big).$$

On observe que si $u\in C^\infty(\Gamma;\mathscr{S})$ et si $u(x',.)\perp H_0$ pour tout x', alors on a (2.45) avec $k=1$. Le premier membre de (2.45) est alors $\geqslant$ Const. $|||u|||_h$ (si dans cette dernière norme on prend les normes L^2 sur $\mathscr{V}(\Gamma,\tau)$).

Toutes les inégalités ci-dessus restent valables si on remplace $\tilde{Q}^{(1)}$ par $\tilde{Q}^{(1)}+\varepsilon h$ pour $\varepsilon\in\mathbb{C}$ avec $|\varepsilon|$ assez petit.

PROPOSITION 2.2. —*Si $\eta>0$ est assez petit, il existe $h_0>0$, $\tau>0$, $C>0$ tels que pour tout $E\in[E_2+\eta, E_2+2\eta]$ et tout $u\in C_0^\infty(\mathscr{V}(\Gamma,\tau))$ on a :*

$$(2.46)\qquad |||u|||_h\leqslant C\|(\tilde{Q}^{(t)}(h)-Eh^2)u\|_{L^2},$$

pour $0<h\leqslant h_0$, $0\leqslant t\leqslant 1$. Ici C est indépendant de t et de h.

Démonstration. — D'après le lemme 2.1, il suffit de traiter le cas $t=1$. Si $u\in C_0^\infty(\mathscr{V}(\Gamma,\tau))$, on décompose $u=u_0+u''$, où $u_0\in\mathscr{H}_0$, $u''(x',.)\perp H_0$ pour tout $x'\in\Gamma$. On a déjà établi (2.46) pour u''. Écrivons $u_0=\tilde{u}(x')e^{-x''^2/2h}$, $v_0=\tilde{v}(x')e^{-x''^2/2h}$. Alors $(Q^{(1)}-Eh^2)u_0$ devient

$$(P_\Gamma-Eh^2)\tilde{u}=\tilde{v}.$$

On en déduit

$$h^2\|\tilde{u}\|_{H^2(\Gamma)}\leqslant C\|\tilde{v}\|_{L^2(\Gamma)},$$

où $H^2(\Gamma)$ est l'espace de Sobolev standard d'ordre 2, et vu la forme particulière de u_0 et v_0 on trouve bien (2.46). #

L'inégalité (2.46), combinée avec des estimations plus grossières (cf.

[HE-SJ]$_5$, § 4), montre que le nombre de valeurs propres de $\tilde{Q}_\Omega^{(t)}$ (c'est-à-dire l'opérateur $\tilde{Q}^{(t)}$ dans $L^2(\Omega)$ avec condition de Dirichlet, $\Omega = \mathscr{V}(\Gamma, \tau)$) contenues dans l'intervalle $]-\infty, (E_2 + \eta)h^2]$, reste constant lorsque t varie à h fixé dans $]0, h_0]$ (et $\eta > 0$ est assez petit). On est donc ramené à étudier le spectre de la réalisation de Dirichlet de $\tilde{Q}_\Omega^{(1)}(h)$ dans l'intervalle $]-\infty, (E_2 + \eta)h^2]$. Combinant l'analyse ci-dessus avec celle de [HE-SJ]$_2$, § 2 on montre assez facilement que ce spectre est exponentiellement proche de celui de $\tilde{Q}^{(1)}(h)|_{\mathscr{H}^0}$. On obtient ainsi qu'il y a une unique valeur propre simple pour $\tilde{Q}_\Omega^{(1)}(h)$ et $\tilde{Q}_\Omega^{(0)}(h)$ dans cet intervalle ; cette dernière est donc donnée par les constructions BKW au § 1. On obtient ainsi le :

THÉORÈME 2.3. — *Pour $\varepsilon > 0$, $\eta_0 > 0$ assez petit, $0 < h \leqslant h_0$ assez petit, le spectre de la réalisation de Dirichlet de $-h^2\Delta + V_0 + hV_1$ dans $\mathscr{V}(\Gamma, \varepsilon)$ dans l'intervalle $]-\infty, E_0 + E_1 h + (E_2 + \eta)h^2]$ est réduit à une seule valeur propre simple $\lambda(h)$. Cette valeur propre admet* $E(h)$ *comme développement asymptotique.*

REMARQUE 2.4. — *Comparaison entre la solution B. K. W. et la fonction propre du problème de Dirichlet.*

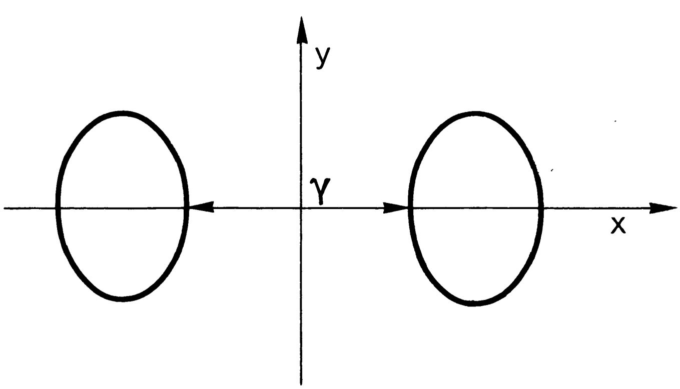
On peut prolonger la solution B. K. W. dans tout bon ouvert (au sens de [HE-SJ]$_1$, cf. 5.11 à 5.14) et dans un ouvert Ω de ce type, si u_h désigne un vecteur propre normalisé associé à la valeur propre $\lambda(h)$ de la réalisation de Dirichlet dans un domaine régulier contenant un seul puits Γ et Ω, on a :

$$u_h - h^{-v''/4} a(x, h) e^{-\varphi_0(x)/h} = \mathcal{O}(h^\infty) e^{-\varphi_0(x)/h}. \quad \# \tag{2.47}$$

REMARQUE 2.5. — *Interaction.*

Compte tenu de la remarque (2.4), le problème de l'interaction ne diffère pas de celui étudié dans [HE-SJ]$_1$.

Si on considère le cas de 2 puits compacts dans $\mathbf{R}^2_{x,y}$ de dimension 1 obtenus comme les minimas d'un potentiel symétrique par rapport à l'axe des y



et si on suppose qu'il n'y a qu'une géodésique minimale entre les 2 puits portée par l'axe des x, on obtient alors, sous une hypothèse de non-dégénérescence de la géodésique, un splitting des 2 premières valeurs de l'ordre de $h^{-\mu} . \sigma(h) . e^{-S_0/h}$ où $\sigma(h)$ est un symbole elliptique, μ est calculable et S_0 est la distance d'Agmon entre les 2 puits.

Nous omettons les détails qui n'introduisent aucune difficulté nouvelle.

RÉFÉRENCES

[BI] J. M. Bismut, The Witten complex and the degenerate Morse Inequalities. *Journal of differential Geometry*, t. **23**, nº 3, 1986, p. 207-241.

[BO] R. Bott, Lectures on Morse theory, old and new. *B. A. M. S.*, t. **7**, nº 2, 1982.

[CHA] J. Chazarain, Formule de Poisson pour les variétés Riemanniennes. *Inv. Math.*, t. **24**, 1974, p. 65-82.

[C.P] J. Chazarain, A. Piriou, *Introduction à la théorie des E. D. P. Linéaires*, Gauthier-Villars.

[C.F.K.S] H. Cycon, R. Froese, W. Kirsch, B. Simon, *Topics in the theory of Schrödinger operators.* Livre en préparation (à paraître chez Springer).

[EL-WA] A. El Soufi, X. P. Wang, *Quelques remarques sur la méthode de Witten ; cas du théorème de Poincaré Hopf et d'une formule d'Atiyah-Bott.* Publications de l'institut Fourier, 1986.

[HE-SJ] B. Helffer, J. Sjöstrand

[*1*] Multiple wells in the semi-classical limit. I. *Comm. in P. D. E.*, t. **9**, (4), 1984, p. 337-408.

[*2*] Puits multiples en limite semi-classique. II. Interaction moléculaire — symétries — perturbations. *Annales de l'I. H. P. (Section Physique théorique)*, t. **42**, nº 2, 1985, p. 127-212.

[*3*] Multiple wells in the semi-classical limit. III. Non resonant wells. *Math. Nachrichte*, t. **124**, 1985, p. 263-313.

[*4*] Puits multiples en limite semi-classique. IV. Étude du complexe de Witten. *Comm. in P.D.E.*, t. **10**, (3), 1985, p. 245-340.

[*5*] Puits multiples en limite semi-classique. V. Étude des mini-puits. *Current Topics in Partial Differential Equations.* Kinokuniya Company Ltd., Tokyo, p. 133-186. (Volume en l'honneur de S. Mizohata).

[*6*] Exposé à l'X (Janvier 1986) Séminaire d'équations aux dérivées partielles.

[HI] M. Hirsh, *Differential topology. Graduate texts in Math.*, nº 33, Berlin-Springer, 1976.

[SI] B. Simon,

[*1*] Semi-classical analysis of low lying eigenvalues. I. Non degenerate minima: Asymptotic expansions. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **38**, 1983, p. 295-307.

[*2*] Semi-classical analysis of low lying eigenvalues. II. Tunneling. *Annals of Math.*, t. **120**, 1984, p. 89-118.

[*3*] Communication personnelle (Mars 1984).

[WI] E. Witten, Supersymmetry and Morse theory. *J. of differential geometry*, t. **17**, 1982, p. 661-692.

(Manuscrit reçu le 27 octobre 1986)