Annales de l'I. H. P., section A

Norbert Noutchegueme

Solutions semi-globales asymptotiquement minkowskiennes pour les équations d'Einstein

Annales de l'I. H. P., section A, tome 46, nº 1 (1987), p. 77-96

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1987__46_1_77_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 46, n° 1, 1987, p. 77-96. *Physique théorique*

Solutions semi-globales asymptotiquement minkowskiennes pour les équations d'Einstein

par

Norbert NOUTCHEGUEME
Faculté des Sciences, Département de Mathématiques,
B. P. 812, Yaoundé, Cameroun

RÉSUMÉ. — On démontre l'existence globale des solutions pour les Équations d'Einstein avec données minkowskiennes à l'infini passé sur $V_4^T = (-\infty, T) \times \mathbb{R}^3, T < +\infty$. On montre notamment que, si on note (t, x^i), $i = 1, 2, 3$ un point de V_4^T, alors, des sources suffisamment faibles sur V_4^T et tendant vers 0 quand t tend vers $-\infty$ définissent un espace-temps courbe, solution des Équations d'Einstein et qui, pour t tendant vers $-\infty$, tend vers l'espace-temps plat de Minkowski.

ABSTRACT. — We prove the global existence of solutions of Einstein's equations with data which are Minkowskian at infinity in the past on $V_4^T = (-\infty, T) \times \mathbb{R}^3$, $T < \infty$. We prove in particular that (with (t, x^i), $i = 1, 2, 3$ denoting a generic point in V_4^T) sufficiently weak sources on V_4^T, tending to zero when t tends to $-\infty$, define a curved space time which solves Einstein's equations and tends to the flat Minkowski space time when t tends to $-\infty$.

INTRODUCTION

Les Équations d'Einstein s'écrivent, dans un système de coordonnées spatio-temporelles (x^α), $\alpha = 0, 1, 2, 3$, avec les notations habituelles :

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R &= T_{\alpha\beta} \\ \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} &= 0. \end{aligned}$$

Lorsque l'on pose :

(1) $$\rho_{\alpha\beta} = -2T_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}T^{\lambda}_{\lambda}.$$

Le système (I) s'écrit :

(2) $$R_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\rho_{\alpha\beta}$$

(3) $$\nabla_{\alpha}\rho^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\nabla^{\beta}\rho^{\lambda}_{\lambda}.$$

Nous allons démontrer que sur toute variété $V_4^T = (-\infty, T) \times \mathbb{R}^3$ où T est un nombre fini arbitraire, il existe une infinité de solutions (g, ρ) de ces équations, où $g = (g_{\alpha\beta})$ tend vers la métrique de Minkowski $\eta = (\eta_{\alpha\beta})$ et $\rho = (\rho_{\alpha\beta})$ tend vers zéro quand la variable temporelle $x^0 = t$ tend vers $-\infty$; nous nous donnerons arbitrairement les ρ^{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, dans un espace fonctionnel approprié, et nous montrerons pour chaque T donné l'existence globale sur V_4^T d'une solution du système aux inconnues $g_{\alpha\beta}$, $\rho^{0\alpha}$ si les « sources » ρ^{ij} sont suffisamment petites en norme. Le temps propre d'existence sera effectivement infini. Pour la démonstration nous utiliserons des coordonnées harmoniques où les équations (2) s'écrivent sous forme d'un système quasi-linéaire, quasi-diagonal de la forme

(II) $$g^{\lambda\mu}(u)\partial^2_{\lambda\mu}u_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}(u) . Du \otimes Du = \rho_{\alpha\beta}$$

où on a posé $g = \eta + u$; $h_{\alpha\beta}(u)$ est une fonction analytique de u au voisinage de $u = 0$, $Du = (\partial_{\lambda}u_{\sigma\rho})$, et le point est le produit scalaire dans g. Nous avons démontré dans [0] un théorème d'existence sur V_4^T de solutions de (II) pour des sources $\rho_{\alpha\beta}$ données, tendant vers zéro ainsi que la solution u quand t tend vers $-\infty$, la métrique $g = \eta + u$ est globalement hyperbolique sur V_4^T.

Dans cet article nous démontrerons l'existence d'une solution du système couplé (I) c'est-à-dire (2), (3) comme suit :

— Nous reprenons, en les précisant, les résultats de [0] pour le système (II), en considérant les $\rho_{\alpha\beta}$ comme donnés.

— Nous étudions le système (3) en $\rho^{0\beta}$ en considérant les ρ^{ij} et u comme donnés :

(III) $$\nabla_{\alpha}\rho^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\nabla^{\beta}\rho^{\lambda}_{\lambda};$$

On pose $v = (\rho^{0\beta})$, $\beta = 0, 1, 2, 3$. On montre que, pour u petit, si on pose $(\rho^{ij}) = \sigma$ le système (III) en v peut s'écrire, avec $x = (x^i)$, $i = 1, 2, 3$:

(IV) $$\frac{dv}{dt} = A\left(u, \frac{\partial}{\partial x}\right)v + B(u, \nabla u)v + f(u, \nabla u, \sigma, \nabla\sigma)$$

où :

A est un opérateur différentiel matriciel, diagonalisable au voisinage de $u = 0$. B est une matrice dont les éléments sont des combinaisons linéaires des dérivées de u, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de u. f est une fonction vectorielle dont les composantes sont des combinaisons linéaires des ρ^{ij} et des dérivées de u et des ρ^{ij}, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de u. On utilise alors les résultats de S. Mizohata [*7*], portant sur les opérateurs intégraux singuliers, les symboles, les systèmes hyperboliques linéaires du 1^{er} ordre, pour montrer que, pour u fixé, petit, pour (ρ^{ij}) donné, petit, dans un espace de Banach convenable, formé de fonctions sur V_4^T tendant vers 0 quand t tend vers $-\infty$, le système (IV) admet une solution globale v, dans un espace de Banach de fonctions sur V_4^T, tendant vers 0 quand t tend vers $-\infty$. On utilise le théorème du point fixe pour déduire de ce qui précède, l'existence d'une solution globale $(u_{\alpha\beta}, \rho^{0\beta})$ de (2)-(3) sur V_4^T, en prenant les ρ^{ij} suffisamment petits dans un espace de Banach convenable, formé de fonctions tendant vers 0 quand t tend vers $-\infty$.

Cette solution $(u_{\alpha\beta}, \rho^{0\beta})$ tend vers 0 quand t tend vers $-\infty$. Nous démontrons ensuite que la solution obtenue $(u_{\alpha\beta}, \rho_{\alpha\beta})$ fournit une solution $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta}$, $\quad T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left[\rho_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\rho_\lambda^\lambda\right]$ des équations tensorielles d'Einstein sur V_4^T

Pour les espaces-temps que nous construisons la « masse » A. D. M. n'est pas forcément définie puisque les sources ne sont pas nécessairement intégrables sur l'espace (elles sont seulement de carré intégrable). Si elle est définie elle n'est pas nécessairement nulle, car la norme L^2 des sources tend vers zéro quand t tend vers $-\infty$, mais pas forcément leur norme L^1. Cependant nous ne pouvons pas obtenir, dans l'état actuel de nos travaux, d'espaces-temps avec un comportement asymptotique usuel à l'infini spatial $g_{ij} - \delta_{ij} = \frac{2m}{r}\delta_{ij} + o\left(\frac{1}{r}\right)$ avec $m \neq 0$, puisque $u = g - \eta$ a été supposé de carré intégrable. Cette première difficulté pourrait sans doute être levée en remplaçant les espaces fonctionnels que nous utilisons par des espaces plus généraux où les dérivées de u sont de carré spatialement intégrable, mais u est seulement supposé borné, comme dans le théorème local dans le temps de [*13*]. Il restera cependant plusieurs problèmes ouverts pour l'application des résultats de cet article à des situations physiques réalistes : l'obtention d'espace-temps où la « masse » est non nulle reste délicate ; elle est impossible si les sources restent confinées (spatialement) dans un compact fixe puisque leur norme L^1 tend vers zéro, quand t tend vers $-\infty$, en même temps que leur norme L^2. Il faudrait aussi, dans un modèle classique, pouvoir assurer la positivité de la densité locale d'énergie des sources. Une situation physiquement réaliste utilisée dans l'étude des équations du mouvement et de la radiation gravitationnelle (cf. [*11*] [*12*] et leurs références) est celle d'espaces-temps qui deviennent à l'infini temporel passé stationnaires et asymptotiquement plats dans l'espace, mais non dans le temps : nous espérons qu'une extension de nos méthodes permettra d'aborder ce cas.

Nous remercions le rapporteur. Ses commentaires et ses questions ont aidé à mieux situer notre travail et nous ont ouvert la voie vers des améliorations — nous l'espérons — de nos résultats.

§ I. NOTATIONS ET RAPPEL DES PRINCIPAUX RÉSULTATS DE LA NOTE |0|

I.1. Notations.

On pose :

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 ; \; S_t = \{ t \} \times \mathbb{R}^3, \; V_4^T =]-\infty, T[\times \mathbb{R}^3 = \bigcup_{t<T} S_t, \; T < +\infty$$

$$u^I = u_{\alpha\beta} ; \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3 ; I = 1, \ldots, 10 ; u = (u^I) ; \nabla^k u = (\nabla^k u^I) = (D^\beta u^I), |\beta| = k \in \mathrm{N} ;$$

$$|\nabla^k u|^2 = \sum_I |\nabla^k u^I|^2 = \sum_I \sum_{|\beta|=k} |D^\beta u^I|^2 ; \qquad k \in \mathbb{N} .$$

$$\| \nabla^k u \|^2_{L^2(S_t)} = \sum_I \sum_{|\beta|=k} \| D^\beta u^I \|^2_{L^2(S_t)} ; \qquad k \in \mathbb{N} .$$

$\eta = \mathrm{Diag}\,(1, -1, -1, -1)$, métrique de Minkowski sur $\mathbb{R}^4$.

$\varepsilon_0 \in]0, 1[$ est un nombre réel fixé tel que, pour tout u vérifiant sur V_4^T :

$$|u| \leq \varepsilon_0 \quad (*)$$

$g = \eta + u$ définit un champ de métriques globalement hyperbolique sur V_4^T, [1].

On dira que u vérifie l'hypothèse $\mathscr{H}_{\varepsilon_0}$ si u vérifie $(*)$.

I.2. Espaces fonctionnels.

On pose :

1° C_0^∞ = espace de restrictions à V_4^T des éléments de l'espace $\mathscr{D}(\mathbb{R}^4)$ des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^4$, à support compact.

2° $G_3 = \{ u : V_4^T \to \mathbb{R}, \nabla^k u$ (distributions) sont des (classes de) fonctions mesurables, éléments de $L^2(S_t)$, $\forall k = 0, \ldots, 3$, $\forall t \in]-\infty, T[. \}$.

3° $G_{3,\infty} = \{ u \in G_3, t \mapsto \tilde{y}^{1/2}_{3,u}(t) = \left(\sum_{k=0}^{3} \| \nabla^k u \|^2_{L^2(S_t)} \right)^{\frac{1}{2}}$ est bornée sur $]-\infty, T[. \}$.

Muni de la norme : $\| u \|_{G_{3,\infty}} = \sup_{t<T} \tilde{y}^{1/2}_{3,u}(t)$, $G_{3,\infty}$ est de Banach.

4° E_3 = Fermeture de C_0^∞ dans $G_{3,\infty}$. On note $\| . \|_{E_3}$ la norme induite sur E_3 par $\| . \|_{G_{3,\infty}}$. $(E_3, \| . \|_{E_3})$ est de Banach.

5° $E_3^* = \{ u \in E_3, t \mapsto (T - t + 1) \sup_{\tau \le t} \tilde{y}^{1/2}_{3,u}(\tau)$, est intégrable (Lebesgue) sur $]-\infty, T[. \}$.

On munit E_3^* de la norme $\| u \|_{E_3^*} = \| u \|_{E_3} + \int_{-\infty}^{T} (T-t+1) \operatorname{Sup}_{\tau \le t} \tilde{y}^{1/2}_{3,u}(\tau) dt$.

6° $E_4^* = \{ u \in E_3^* \mid \nabla^4 u$ (distributions) est, pour presque tout $t < T$, élément de $L^2(S_t)$ et $t \mapsto \| \nabla^4 u \|_{L^2(S_t)}$ est essentiellement bornée sur $]-\infty, T[. \}$.

On munit E_4^* de la norme : $\| u \|_{E_4^*} = \| u \|_{E_3^*} + \operatorname{Ess} \sup_{t<T} \| \nabla^4 u \|_{L^2(S_t)}$.

7° $\mathscr{L}_T^{3*} = \{ \rho \in G_3, t \mapsto (T-t+1)^j \| \nabla^k \rho \|_{L^2(S_t)}$ est intégrable (Lebesgue) sur $]-\infty, T[$, $\forall (j, k) \in S = \{ (3, 0); (3, 1); (2, 2); (1, 3) \}$.

On pose $S' = \{ (3, 0); (3, 1); (2, 2) \}$ et on munit $\mathscr{L}_T^{3*}$ des 2 normes :

$$\| \rho \|_{\mathscr{L}_T^{3*}} = \sum_{(j,k) \in S} \int_{-\infty}^{T} (T - t + 1)^j \| \nabla^k \rho \|_{L^2(S_t)} dt ;$$

$$\| \rho \|^1_{\mathscr{L}_T^{3*}} = \sum_{(j,k) \in S'} \int_{-\infty}^{T} (T - t + 1)^j \| \nabla^k \rho \|_{L^2(S_t)} dt .$$

I.3. **Rappel des principaux résultats de** [0].

PROPOSITION 1. — 1° *L'espace* $(E_3^* ; \| . \|_{E_3^*})$ *est de Banach.*

2° $\forall r_1 > 0, \forall r_2 > 0, B_{E_4^*}(r_1) \cap B_{E_3^*}(r_2)$ *est un sous-espace métrique complet de* $(E_3^*, \| . \|_{E_3^*})$. $(B_E(\delta) = \{ u \in E, \| u \|_E \le \delta, \delta > 0 \})$.

PROPOSITION 2. — 1° *Il existe un nombre* $r > 0$ *tel que,*

$$\forall \rho = (\rho^I) \in B_{\mathscr{L}_T^{3*}}(r) = \{ \rho \in \mathscr{L}_T^{3*}, \| \rho \|_{\mathscr{L}_T^{3*}} \le r \},$$

il existe une fonction unique $u = (u^I)$ *dans* E_4^* *vérifiant l'hypothèse* $\mathscr{H}_{\varepsilon_0}$ *et solution du système :*

$$g^{\alpha\beta}(u) \partial^2_{\alpha\beta} u = \rho \qquad (\mathscr{E})$$

où $g = \eta + u$ *et* $(g^{\alpha\beta}(u))$ *est la matrice inverse de* $(g_{\alpha\beta}(u))$.

2° *Cette fonction* u *vérifie les propriétés suivantes :*

$\| u \|_{E_3^*} \le K_0 \| \rho \|^1_{\mathscr{L}_T^{3*}}$; $\quad \operatorname{Ess} \sup_{t<T} y^{1/2}_{4,u}(t) \le K_0 \| \rho \|_{\mathscr{L}_T^{3*}}$. ($K_0$=constante).

3° *Si* $\rho_1, \rho_2 \in B_{\mathscr{L}^{3*}_T}(r)$, *les solutions correspondantes* u_1 *et* u_2 *de* $(\mathscr{E})$ *vérifient :*

$$\| u_1 - u_2 \|_{E_3^*} \leq C_0 \| \rho_1 - \rho_2 \|^1_{\mathscr{L}^{3*}_T} \qquad (C_0 = \text{constante}).$$

PROPOSITION 3. — *Soit* $R > 0$ *et* $B(0, R) = \{ x \in \mathbb{R}^{10}, | x | \leq R \}$. *Soit* $h(u)$ *une fonction vectorielle analytique dans* $B(0, R)$. *Soit* $C > 0$ *une constante de Sobolev telle que l'on ait sur* $V_4^T : | u | \leq C \| u \|_{E_3^*}$, $\forall u \in E_3^*$. *On pose* $f(u, \nabla u) = h(u) . \nabla u \otimes \nabla u$ *et* $\bar{r}'' = \dfrac{\operatorname{Inf}(\varepsilon_0, R)}{C}$, *où* ε_0 *est le nombre défini au* § I.1. *Alors :*

1° $[u \in E_4^*, u \in B(0, R)] \Rightarrow f(u, \nabla u) \in \mathscr{L}^{3*}_T$.

2° $\forall r'' \in]0, \bar{r}''[$, $\forall r_0 > 0$, $\forall i = 1, 2$:

$$[u_i \in B_{E_4^*}(r_0) \cap B_{E_3^*}(r'')] \Rightarrow \begin{cases} \| f(u_i, \nabla u_i) \|_{\mathscr{L}^{T}_{3*}} \leq C_1(r_0) \| u_i \|_{E_3^*} & (I.1) \\ \| f(u_1, \nabla u_1) - f(u_2, \nabla u_2) \|^1_{\mathscr{L}^{3*}_T} \leq C_2(r_0) \| u_1 - u_2 \|_{E_3^*} & (I.2) \end{cases}$$

où, $\forall k = 1, 2$, $C_k(r_0) \to 0$ *quand* $r_0 \to 0$.

En utilisant ces résultats on démontre, en utilisant le théorème du point fixe que :

THÉORÈME 1. — *Si* $h(u)$ *est une fonction vectorielle analytique au voisinage de* $u = 0$, *alors, il existe des constantes* $r_0 > 0, r_1 > 0$ *et* $r'' > 0, (r'' < \bar{r}'')$, *telles que :* $\forall \rho = (\rho^I) \in B_{\mathscr{L}^{3*}_T}(r_1) = \{ \rho \in \mathscr{L}^{3*}_T, \| \rho \|_{\mathscr{L}^{3*}_T} \leq r_1 \}$, *il existe une fonction unique* $u = (u^I)$ *dans* $B_{E_4^*}(r_0) \cap B_{E_3^*}(r'')$, *vérifiant le système*

$$g^{\alpha\beta}(u)\partial^2_{\alpha\beta} u + h(u) . \nabla u \otimes \nabla u = \rho . \qquad \text{(II)}$$

$g = \eta + u$ *est une métrique globalement hyperbolique sur* V_4^T.

ÉTUDE DU SYSTÈME COUPLÉ, NON LINÉAIRE EN $(u_{\alpha\beta}, \rho^{0\beta})$

$$\begin{cases} g^{\lambda\mu}(u)\partial^2_{\lambda\mu} u_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}(u) . \nabla u \otimes \nabla u = \rho_{\alpha\beta} & \text{(II)} \\ \nabla_\alpha \rho^{\alpha\beta} = \dfrac{1}{2} \nabla^\beta \rho^\lambda_\lambda & \text{(III)} \\ \alpha, \beta, \lambda = 0, \ldots, 3 \end{cases}$$

$\rho = (\rho^{ij})$ DONNE, $i, j = 1, 2, 3$.

§ II. ÉCRITURE DU SYSTÈME (III) EN $V = (\rho^{0\beta})$ SOUS LA FORME MATRICIELLE

$$\frac{dV}{dt} = A\left(u, \frac{\partial}{\partial x}\right)V + B(u, \nabla u)V + f(u, \nabla u, \rho, \nabla\rho) . \qquad \text{(IV)}$$

DIAGONALISATION DE L'OPÉRATEUR A AU VOISINAGE DE $u = 0$.

Note. Dans tout ce qui suit, on suppose que u vérifie l'hypothèse $\mathscr{H}_{\varepsilon_0}$. Tout indice grec varie de 0 à 3 et tout indice latin de 1 à 3.

II.1. Écriture de (III) sous la forme (IV).

PROPOSITION 4. — *Le système* (III) *peut s'écrire :*

$$\left\{\begin{aligned} \partial_t \rho^{00} &= -2\partial_i \rho^{0i} + \phi^0_\beta(u)\nabla u \rho^{0\beta} + \psi^0(u)\nabla\rho + h^0(u)\nabla u\rho \\ \partial_t \rho^{0l} &= \frac{1}{2} g_{00}\bar{g}^{lk}\partial_k \rho^{00} + g_{0i}\bar{g}^{lk}\partial_k\rho^{0i} - \frac{g^{l0}}{g^{00}}\partial_i\rho^{0i} \\ &\qquad + \phi^l_\beta(u)\nabla u\rho^{0\beta} + \psi^l(u)\nabla\rho + h^l(u)\nabla u\rho \end{aligned}\right. \tag{II.1}$$

où :

. $(\bar{g}^{lk})$ *est la matrice inverse de* (g_{lk})
. ϕ^λ_β, ψ^λ, h^λ *sont des fonctions vectorielles analytiques au voisinage de* $u=0$
. $\phi^\lambda_\beta(u)\nabla u$, $\psi^\lambda(u)\nabla\rho$, $h^\lambda(u)\nabla u\rho$ *désignent des sommes de produits formés d'une composante de chaque terme.*

Preuve. — (III) s'écrit : $\nabla_0\rho^{0\beta} = -\nabla_i\rho^{i\beta} + \frac{1}{2}\nabla^\beta\rho^\lambda_\lambda$. La multiplication contractée de cette relation par $g_{0\beta}$ donne, compte tenu de $\rho^\lambda_\lambda = g_{\lambda\mu}\rho^{\lambda\mu}$ et pour $\beta = 0, l\ (l = 1, 2, 3)$:

$$\nabla_0\rho^{00} = -2\nabla_i\rho^{0i} + \frac{1}{g^{00}}[-2g_{j0}\nabla_i\rho^{ij} + g_{ij}\nabla_0\rho^{ij}]$$

$$\begin{aligned}\nabla_0\rho^{0l} &= \left[g^{lk} - \frac{g^{l0}g^{0k}}{g^{00}}\right]\left[\frac{1}{2}g_{00}\nabla_k\rho^{00} + g_{0i}\nabla_k\rho^{0i} + \frac{1}{2}g_{ij}\nabla_k\rho^{ij}\right] - \frac{g^{l0}}{g^{00}}\nabla_i\rho^{0i} \\ &\qquad - \nabla_i\rho^{il} + \frac{g^{l0}}{g^{00}g_{00}}[-2g_{j0}\nabla_i\rho^{ij} + g_{ij}\nabla_0\rho^{ij}].\end{aligned} \tag{II.1'}$$

Remarquer que l'on utilise le fait que g est transparente par différentiation covariante. En observant que $\left(g^{lk} - \frac{g^{l0}g^{0k}}{g^{00}}\right)$ est la matrice inverse de (g_{lk}), on déduit (II.1) de (II.1') en exprimant les dérivées covariantes en fonction des dérivées partielles, suivant la formule :

$$\nabla_\lambda\rho^{\alpha\beta} = \partial_\lambda\rho^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\lambda\mu}\rho^{\mu\beta} + \Gamma^\beta_{\lambda\mu}\rho^{\alpha\mu}$$

où les $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ sont les symboles de Christoffel de $g = \eta + u$, et enfin, compte tenu de $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} + \phi^{\alpha\beta}(u)$, où $\phi^{\alpha\beta}$ est une fonction analytique au voisinage de $u = 0$.

Maintenant (I.1) donne la forme matricielle (IV) de (III). De façon précise :

PROPOSITION 5. — *Le système* (III) *en* $V = (\rho^{0\beta})$ *s'écrit sous la forme* (IV) *avec, en substituant* $(\xi) = (\xi_i)$ *à* $\dfrac{\partial}{\partial x}$ *dans* A :

$$* \quad A(u, \xi) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -2\xi_i \\ \hline \frac{1}{2} g_{00}\bar{g}^{jk}\xi_k & g_{0i}\bar{g}^{jk}\xi_k - \frac{g^{j0}\xi_i}{g^{00}} \end{array}\right]_{i,j=1,2,E} . \tag{II.2}$$

$$* \quad B = (b^\lambda_\mu) \quad \text{où} \quad b^\lambda_\mu = \phi^\lambda_\mu(u)\nabla u. \tag{II.3}$$

$$* \quad f = (f^\lambda) \quad \text{où} \quad f^\lambda = \psi^\lambda(u)\nabla\rho + h^\lambda(u)\nabla u\rho. \tag{II.4}$$

* $V = (\rho^{0\beta})$; $\rho = (\rho^{ij})$; ϕ^λ_μ, ψ^λ, h^λ, *fonctions vectorielles analytiques au voisinage de* $u = 0$.

II.2. **Diagonalisation de l'Opérateur A au voisinage de** $u = 0$.

On a d'abord :

LEMME 1. — *Le polynôme caractéristique de* A *s'écrit au voisinage de* $u=0$:

$$P_A(\lambda) = \lambda^4 + \left(\sum_{k=1}^{3} h_k(u)\xi_k\right)\lambda^3 - \left[(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2) + \sum_{j,k=1}^{3} H_{jk}(u)\xi_j\xi_k\right]\lambda^2 . \tag{II.5}$$

où : h_k, $H_{j,k}$ *sont des fonctions analytiques de u, nulles pour* $u = 0$.

Preuve. — On a det A = 0 et les sous-matrices carrées d'ordre 3 de A ont un déterminant nul. Donc $P_A(\lambda)$ n'a pas de termes constant et en λ. Pour montrer que les autres coefficients de $P_A(\lambda)$ ont la forme indiquée dans (II.5) on développe au 1^er^ ordre au voisinage de $u=0$, $g^{\alpha\beta}(u)$, $\bar{g}^{lk}(u)$ en utilisant les formules :

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma ; \qquad \bar{g}^{lk}g_{k_i} = \delta^l_i \quad \text{(symboles de Kronecker)}.$$

Nous pouvons alors énoncer :

PROPOSITION 6. — *(Diagonalisation de* A*).*

Soit A *donné par* (II.2) *et u vérifiant l'hypothèse* $\mathscr{H}_{\varepsilon_0}$. *Il existe* $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_0[$ *tel que, pour* $|u| \le \varepsilon_1$:

Il existe 2 matrices N_1 *et* N_2 *et une matrice diagonale réelle* $\mathscr{D}$, *définies sur* $V_4^T \times \mathbb{R}^{3*}$, *dont les éléments sont des fonctions analytiques bornées de u et* ξ, N_1 *et* N_2 *homogènes de degré* 0 *en* $\xi \in \mathbb{R}^{3*}$, $\mathscr{D}$ *homogène de degré 1 en* $\xi \in \mathbb{R}^{3*}$ *et telles que :*

$$1° \quad N_k(u, \xi)A\left(u, \frac{\xi}{|\xi|}\right) = \mathscr{D}\left(u, \frac{\xi}{|\xi|}\right)N_k(u, \xi); \; k = 1, 2.$$

2° *Il existe un recouvrement de* $\mathbb{R}^{3*}$ *formé de 2 ouverts* U_1 *et* U_2 *tels que :*

i) $|\det N_1| > \frac{1}{2}$ *sur* $V_4^T \times U_1$; ii) $|\det N_2| > \frac{1}{2}$ *sur* $V_4^T \times U_2$.

Preuve. — D'après (II.5), $\lambda_0 = 0$ est valeur propre double de A. Les déterminants d'ordre 3 de A étant nuls, le sous-espace propre associé à $\lambda_0 = 0$ est de dimension 2. Toujours d'après (II.5) pour u petit, A admet 2 autres valeurs propres réelles et distinctes que l'on peut écrire :

$$\lambda_1(u, \xi) = -|\xi| + \phi_1(u, \xi); \lambda_2(u, \xi) = |\xi| + \phi_2(u, \xi) \tag{II.6}$$

où ϕ_1, ϕ_2 sont des fonctions réelles analytiques de u et ξ, homogènes de de degré 1 en ξ et nulles pour $u = 0$.

On en déduit que, pour u petit, A est diagonalisable.

Soit maintenant (x^λ) un vecteur propre associé à $\lambda_0 = 0$. (x^λ) vérifie un système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ll} \left(-\dfrac{\xi_i}{2} + a_{i0}\right)x^0 + \displaystyle\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x^j = 0 & \text{(II.7)} \\ \xi_1 x^1 + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3 = 0 & \text{(II.7')} \end{array}\right.$$

où les $a_{\lambda j}$ sont des combinaisons linéaires des ξ_k, dont les coefficients sont des fonctions analytiques de u, nulles pour $u = 0$.

Mais on ne peut pas trouver un couple $(x_1^\lambda(\xi), x_2^\lambda(\xi))$ de solutions linéairement indépendantes et continues de (II.7') sur $\mathbb{R}^{3*}$, puisque cela reviendrait à trouver un champ continu de repères dans les plans tangents à la sphère S^2.

Mais on peut choisir 2 tels couples qui s'annulent sur 2 « droites » différentes de $\mathbb{R}^{3*}$. Prenons par exemple les couples :

$$\left\{\begin{array}{l} \left[v_1 = \left(-\dfrac{\xi_2}{|\xi|}; \dfrac{\xi_1}{|\xi|}; 0\right); v_2 = \left(-\dfrac{\xi_1\xi_3}{|\xi|^2}; -\dfrac{\xi_2\xi_3}{|\xi|^2}; \dfrac{\xi_1^2+\xi_2^2}{|\xi|^2}\right)\right] \\ \left[w_1 = \left(0; -\dfrac{\xi_3}{|\xi|}; \dfrac{\xi_2}{|\xi|}\right); w_2 = \left(\dfrac{\xi_2^2+\xi_3^2}{|\xi|^2}; -\dfrac{\xi_1\xi_2}{|\xi|^2}; -\dfrac{\xi_1\xi_3}{|\xi|^2}\right)\right] \end{array}\right. \tag{II.8}$$

On peut alors prendre, vu (II.7) comme couples de vecteurs propres associés à $\lambda_0 = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} [V_1 = (H_1(u, \xi), v_1^i); \ V_2 = (H_2(u, \xi), v_2^i)] \\ [W_1 = (G_1(u, \xi), w_1^i); W_2 = (G_2(u, \xi), w_2^i)] \end{array}\right. \tag{II.9}$$

où H_1, H_2, G_1, G_2 sont des fonctions analytiques bornées de u et ξ, homogènes de degré 0 en ξ, et tendant vers 0 quand $u \to 0$, uniformément par rapport à ξ. Maintenant, vues les expressions (II.6) de λ_1 et λ_2 pour u petit, on peut prendre comme vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 respectivement :

$$\begin{aligned} V_3 &= \left(2; \frac{\xi_1}{|\xi|} + F_1(u, \xi); \frac{\xi_2}{|\xi|} + F_2(u, \xi); \frac{\xi_3}{|\xi|} + F_3(u, \xi)\right) \\ V_4 &= \left(-2, \frac{\xi_1}{|\xi|} + F_1'(u, \xi); \frac{\xi_2}{|\xi|} + F_2'(u, \xi); \frac{\xi_3}{|\xi|} + F_3'(u, \xi)\right) \end{aligned} \tag{II.10}$$

où, pour $i = 1, 2$, F_i et F_i' ont les mêmes propriétés que H_1, H_2, G_1, G_2 dans (II.9). Les matrices N_1 et N_2 sont alors les matrices dont les lignes sont formées par les composantes de V_1, V_2, V_3, V_4 et W_1, W_2, V_3, V_4 respectivement. On a $N_k A = \mathscr{D} N_k$, $k = 1, 2$, relations vraies partout (par continuité), $\mathscr{D}$ étant la matrice diagonale réelle des valeurs propres. Quant aux ouverts U_1 et U_2, on les obtient à partir de la construction (II.8) de (v_1, v_2) et (w_1, w_2). On prend par exemple :

$$\begin{cases} U_1 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^{3*}, \, |\xi_3| < 2\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \} \\ U_2 = \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^{3*}, \, |\xi_1| < 2\sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2} \} \end{cases}$$

et on déduit de ce qui précède les relations 2° *i*) et *ii*). D'où la proposition 6.

En vue de montrer l'existence globale des solutions V pour (IV), nous faisons une étude des systèmes ayant cette forme. C'est l'objet du paragraphe suivant.

§ III. ÉTUDE DU SYSTÈME LINÉAIRE EN V

$$\frac{dV}{dt} = A\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)V + B(t, x)V + f(t, x) \tag{V}$$

Nous utilisons les résultats de S. Mizohata [7].

III.1. Symboles ; opérateurs matriciels intégraux singuliers [7].

DÉFINITION 1. — 1° *On pose :*

a) $\mathscr{E}_\xi(\mathbb{R}^{3*}) = \{ h : \mathbb{R}^{3*} \to \mathbb{R}, hC^\infty,$ *homogène de degré* $0 \}$.

On munit $\mathscr{E}_\xi(\mathbb{R}^{3*})$ de la topologie définie par la famille des semi-normes :

$$p_s(h) = \sum_{|\nu| \leq s} \sup_{|\xi| \leq 1} \left| \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\nu h(\xi) \right|, \qquad s \in \mathbb{N}.$$

b) $\mathscr{C}(\mathbb{R}^3, \mathscr{E}_\xi(\mathbb{R}^{3*})) = \{ h : \mathbb{R}^3 \to \mathscr{E}_\xi(\mathbb{R}^{3*}),$ *h continue et bornée* $\}$.

2° *Pour* $\beta \in \mathbb{N}$, $\tilde{C}^\infty_\beta$ *désigne l'espace des fonctions* $h(x, \xi)$ *sur* $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3*}$ *telles que :*

$$D^\alpha_x h \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^3, \mathscr{E}_\xi(\mathbb{R}^{3*})), \qquad |\alpha| \leq \beta.$$

On munit $\tilde{C}^\infty_\beta$ *de la topologie définie par la famille des semi-normes :*

$$p_{s,\beta}(h) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^3 \\ |\alpha| \leq \beta}} p_s[D^\alpha_x h(x, .)]. \tag{III.1}$$

DÉFINITION 2. — *On désigne par $\hat{u}$ la transformée de Fourier de u.*

1° *On appellera ici symbole, toute fonction* $h(x, \xi)$ *sur* $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3*}$, *homogène de degré* 0 *en* ξ, *et telle qu'il existe* $\beta \in \mathbb{N}$ *tel que* $h \in \tilde{C}^\infty_\beta$ *(Déf. 1, 2°).*

2° *Soit h un symbole. On désigne par* $\tilde{h}$ *l'opérateur intégral singulier de symbole h.* $\tilde{h}$ *est défini sur* $L^2(\mathbb{R}^3)$ *par :*

$$(\tilde{h}u)(x) = \int_\xi e^{ix.\xi} h(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi. \tag{III.2}$$

3° *Si* $\mathscr{H} = (h^j_k)$, $j, k = 1, \ldots, N$, *est une matrice de symboles (ou un symbole matriciel) on définit l'opérateur matriciel intégral singulier* $\tilde{\mathscr{H}}$ *de symbole* $\mathscr{H}$, *sur* $(L^2(\mathbb{R}^3))^N$ *par :*

$$(\tilde{\mathscr{H}}u)^j(x) = (\tilde{h}^j_k u^k)(x) = \int_\xi e^{ix.\xi} h^j_k(x, \xi) \hat{u}^k(\xi) d\xi. \tag{III.3}$$

Note 1. Si $\forall j, k = 1, \ldots, N$, $h^j_k \in \tilde{C}^\infty_\beta$, alors, si $\mathscr{H} = (h^j_k)$ on note $\mathscr{H} \in \tilde{C}^\infty_\beta$ et on pose :

$$P_{s,\beta}(\mathscr{H}) = \sum_{j,k=1}^{N} p_{s,\beta}(h^j_k) \qquad (p_{s,h} \text{ étant défini par III.1}).$$

Note 2. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et E un espace normé (ou semi-normé). On désigne par $\mathscr{B}(U, E)$ l'espace des (classes d') applications mesurables bornées de U dans E. Si $B = (B^\lambda_\mu)$ est une matrice de fonctions définies sur U, on pose $\nabla^i B = (D^\alpha B^\lambda_\mu)$, $|\alpha| = i \in \mathbb{N}$.

III.2. Inégalités énergétiques *a priori* pour le système (V).

PROPOSITION 7. — *On pose* $I = [t_0, T[$; $\Omega' = I \times \mathbb{R}^3$; $\Omega = I \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3*}$.

1° Soit $A = \sum_{k=1}^{3} A_k(t, x) \frac{\partial}{\partial x^k}$ *un opérateur différentiel matriciel tel que :*

$$A_k, \nabla A_k, \nabla^2 A_k \in \mathscr{B}(\Omega', \mathbb{R}); \qquad \nabla^3 A_k \in \mathscr{B}(I, L^2(\mathbb{R}^3)), \qquad k = 1, 2, 3.$$

2° *Soient* $N_1, N_2, \mathscr{D}$, *des matrices définies sur* Ω, $\mathscr{D}$ *diagonale réelle, éléments de* $\mathscr{B}(I, \tilde{C}_2)$, *telles que :*

a) $N_k(t, x, \xi) A\left(t, x, \frac{\xi}{|\xi|}\right) = \mathscr{D}(t, x, \xi) N_k(t, x, \xi)$; $k = 1, 2$.

b) Il existe un recouvrement de $\mathbb{R}^{3*}$ *formé de 2 ouverts* U_1, U_2, *tels que :*

$$|\det N_1| > \delta \textit{ sur } I \times \mathbb{R}^3 \times U_1 \,;\ |\det N_2| > \delta \textit{ sur } I \times \mathbb{R}^3 \times U_2 \,;\ \delta > 0 \textit{ fixé}.$$

c) $\frac{\partial N_k}{\partial t} = N'_{k,t} \in \mathscr{B}(I, \tilde{C}_0^\infty)$; $k = 1, 2$.

3° *Soit* $B = (b_\mu^\lambda)$ *une matrice définie sur* Ω' *telle que* $B \in \mathscr{B}(\Omega', \mathbb{R})$ *et :*

$$\nabla B \in \mathscr{B}(I, L^4(\mathbb{R}^2)); \qquad \nabla^2 B, \quad \nabla^3 B \in \mathscr{B}(I, L^2(\mathbb{R}^3)).$$

4° *Soit* $f = (f^\lambda)$ *une fonction vectorielle définie sur* Ω' *telle que :*

$$\nabla^i f \in \mathscr{B}(I, L^2(\mathbb{R}^3)), \qquad i = 0, 1, 2, 3.$$

Alors, il existe une constante $\gamma_0 > 0$ *telle que, pour tout* V *vérifiant* (V) *avec* A, B, f *définis ci-dessus, on a,* $\forall t \in [t_0, T[$, *les inégalités :*

$$\sum_{i=0}^{m} \| \nabla^i V \|_{L^2(S_\tau)} \leq \gamma_0 \left[e^{\gamma_0(t-t_0)} \sum_{i=0}^{m} \| \nabla^i V \|_{L^2(S_{t_0})} + \int_{t_0}^{t} e^{\gamma_0(t-\tau)} \sum_{i=0}^{m} \| \nabla^i f \|_{L^2(S_\tau)} d\tau \right] \qquad m = 0, 1, 2, 3. \quad \text{(III.4)}$$

Preuve.

LEMME 2. — *Si* $\tilde{N}_1, \tilde{N}_2$ *sont les opérateurs matriciels intégraux singuliers de symboles* N_1, N_2 *et* Λ *l'opérateur non borné défini sur* $\bigcup_{m \in Z} H^{-m}(\mathbb{R}^3)$ *par :* $\Lambda u(\xi) = |\xi| \hat{u}(\xi)$, *alors :*

$$\| \tilde{N}_1 \Lambda v \|_{(L^2(\mathbb{R}^3))^4} + \| \tilde{N}_2 \Lambda v \|_{(L^2(\mathbb{R}^3))^4} \geqq \gamma_1 \| \Lambda v \|_{(L^2(\mathbb{R}^3))^4} - \gamma_2 \| v \|_{(L^2(\mathbb{R}^3))^4}. \quad \text{(III.5)}$$

avec γ_1, $\gamma_2 > 0$, indépendants de t, ne dépendant que des semi-normes de N_1, N_2 *et de* δ.

Ce lemme est une adaptation de [7], th. 6.6.

Les hypothèses sur A entraînent que l'on a, $\forall t \in I$, $A\left(t, x, \frac{\xi}{|\xi|}\right) \in \tilde{C}_2^\beta$.

On montre par ailleurs que l'on a, sur $(L^2(\mathbb{R}^3))^4$: $A = i\tilde{A}(t)\Lambda$, $(i^2 = -1)$. En faisant alors opérer à gauche $\tilde{N}_k$ sur (V), on obtient :

$$\frac{d}{dt}\tilde{N}_k V = i\tilde{N}_k\tilde{A}(t)\Lambda V + (\tilde{N}'_{k,t} + \tilde{N}_k B)V + \tilde{N}_k f . \tag{III.6}$$

En prenant $\nabla^i V \in \mathscr{B}(I, L^2(\mathbb{R}^3))$, $i = 0, 1$, et en utilisant les propriétés des opérateurs intégraux singuliers ($\tilde{\mathscr{H}}_1\tilde{\mathscr{H}}_2\Lambda \equiv \tilde{\mathscr{H}}_2\tilde{\mathscr{H}}_1\Lambda$, $\tilde{\mathscr{H}}\Lambda \equiv \Lambda\tilde{\mathscr{H}}$, modulo opérateurs bornés de L^2 [7]), on déduit de (III.6) en utilisant :

$$\frac{d}{dt}(\tilde{N}_k V, \tilde{N}_k V) = \left(\frac{d}{dt}\tilde{N}_k V, \tilde{N}_k V\right) + \left(\tilde{N}_k V, \frac{d}{dt}\tilde{N}_k V\right),$$

que l'on a, en posant $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(s_\tau)}$:

$$\frac{d}{dt}\|\tilde{N}_k V\| \leq K\|\tilde{N}_k V\| + C_k\|V\| + \|\tilde{N}_k f\| . \tag{III.7}$$

où K, C_k = constantes. On observe que $\|V\|$ figure dans (III.7). On utilise alors le Lemme 2 pour montrer qu'il existe $\theta > 0$ tel que la norme :

$$\begin{cases} |||V||| = \|\tilde{N}_1 V\| + \|\tilde{N}_2 V\| + \theta\|(\Lambda + 1)^{-1}V\| & \text{(III.8)} \\ \text{avec :} \quad \widehat{(\Lambda + 1)^{-1}V}(\xi) = (|\xi| + 1)^{-1}\hat{v}(\xi) & \text{(III.8)} \end{cases}$$

soit, sur $L^2(s_t)$, uniformément équivalente à $\|\cdot\|$. On déduit par ailleurs, en faisant opérer à gauche $(\Lambda + 1)^{-1}$ sur (V) que l'on a :

$$\frac{d}{dt}\|(\Lambda + 1)^{-1}V\| \leq C\|V\| + \|(\Lambda + 1)^{-1}f\| \tag{III.9}$$

où C = constante. (III.7) et (III.9) donnent alors, compte tenu de l'équivalence des normes $|||\cdot|||$ et $\|\cdot\|$;

$$\frac{d}{dt}|||V||| \leq \gamma|||V||| + |||f||| \tag{III.10}$$

où γ = constante. D'où l'on déduit, vue encore l'équivalence de $|||\cdot|||$ et de $\|\cdot\|$:

$$\|V\|_{L^2(s_t)} \leq \gamma_0\left[e^{\gamma(t-t_0)}\|V\|_{L^2(s_{\tau 0})} + \int_{t_0}^t e^{\gamma_0(t-\tau)}\|f\|_{L^2(s_\tau)}d\tau\right] \tag{III.11}$$

où γ_0 = constante. On déduit alors l'inégalité (III.4) pour $m = 0$ de (III.11), en procédant par régularisation.

On obtient les autres inégalités (III.4), $m = 1, 2, 3$, en procédant de même sur les équations dérivées successives de (V) jusqu'à l'ordre 3 et on utilise les hypothèses.

Note. La preuve est parallèle à celle de Mizohata [7]. La différence est que les coefficients de (V) ne sont pas à dérivées bornées, mais des applications de I dans les espaces de Sobolev.

III.3. Théorème d'existence pour (V) sur $[t_0, T[\times \mathbb{R}^3$.

PROPOSITION 8. — $I = [t_0, T[; \Omega' = I \times \mathbb{R}^3$.
On suppose que l'opérateur A, *les symboles* $N_1, N_2, \mathscr{D}$, *la matrice* B, *et le vecteur* f, *vérifient les hypothèses de la Proposition 7. Alors,* $\forall m = 0, 1, 2, 3$:

1° *Le système* (V) *admet une solution unique* V, *définie sur* Ω', *telle que :*

a) $V|_{s_{t_0}} = w$, *où* $w \in H^m(\mathbb{R}^3)$, *w donné.*

b) $V \in \mathscr{B}(I, H^m(\mathbb{R}^3))$ *et* $\dfrac{dV}{dt} \in \mathscr{B}(I, H^{m-1}(\mathbb{R}^3))$.

2°

a) $\dfrac{\partial^i V}{\partial t^i} \in \mathscr{B}(I, H^{m-i}(\mathbb{R}^3))$, $i = 2, 3$

b) V *vérifie les inégalités* (III.4) *de la Proposition 7.*

Preuve. — Le 1° provient de Mizohata [7], th. 6.9. Le 2° provient de la proposition 7.

III.4. Le théorème d'existence globale pour (V) sur $]-\infty, T[\times \mathbb{R}^3$.

Dans toute la suite, $\gamma_0 > 0$ désigne la constante qui figure dans les inégalités (III.4).

$$I =]-\infty, T[; \qquad V_4^T = I \times \mathbb{R}^3 ; \qquad m \in \mathbb{N}.$$

III.4.1. *Espaces fonctionnels.*

On pose :

1° $\tilde{F}_T^m = \{ f : V_4^T \to \mathbb{R}$, $\nabla^i f$ (distributions) est élément de $L^2(s_t)$, pour presque tout $t \in I$,
$i = 0, \ldots, m$, et $t \mapsto e^{\gamma_0(T-t)} \sum_{i=0}^{m} \| \nabla^i f \|_{L^2(s_t)}$ est intégrable sur $]-\infty, T[\}$.

Muni de la norme $\| f \|_{\tilde{F}_T^m} = \int_{-\infty}^{T} e^{\gamma_0(T-t)} \sum_{i=0}^{m} \| \nabla^i f \|_{L^2(s_t)} dt$, $\tilde{F}_T^m$ est de Banach.

2° $F_T^m = \{ f \in \tilde{F}_T^m, \exists t_f \in I, f = 0 \text{ pour } t \leq t_f \}$.

3° $\tilde{E}_T^m = \{ V : V_4^T \to \mathbb{R}, \nabla^i V$ (distributions) est élément de $L^2(s_t)$, $\forall t \in I$,

$\forall i = 0, \ldots, m$, et $t \mapsto e^{-\gamma_0 t} \sum_{i=0}^{m} \| \nabla^i V \|_{L^2(s_t)}$ est bornée sur I $\}$.

Muni de la norme : $\| V \|_{\tilde{E}_T^m} = \sup_{t<T} e^{-\gamma_0 t} \sum_{i=0}^{m} \| \nabla^i V \|_{L^2(s_t)}$, $\tilde{E}_T^m$ est de Banach.

$$4^\circ \quad E_T^m = \left\{ v \in \tilde{E}_T^m, e^{-\gamma_0 t} \sum_{i=0}^{m} \| \nabla^i v \|_{L^2(s_t)} \to 0 \text{ quand } t \to -\infty \right\}.$$

III.4.2. *Le théorème d'existence globale.*

Énonçons d'abord :

LEMME 3. — 1° *Muni de la norme induite par* $\tilde{E}_T^m$, E_T^m *est un espace de Banach. On le note :*

$$(E_T^m, \| \cdot \|_{E_T^m}).$$

2° F_T^m *est dense dans* $(\tilde{F}_T^m, \| \cdot \|_{\tilde{F}_T^m})$.

3° $\mathscr{L}_T^{3*}$ *étant l'espace défini au* § I, I.2, *on a l'inclusion algébrique et topologique :*

$$(E_T^3, \| \cdot \|_{E_T^3}) \hookrightarrow (\mathscr{L}_T^{3*}, \| \cdot \|_{\mathscr{L}_T^{3*}}) ;$$

i. e., $\exists C > 0$ *tel que* :

$$\| v \|_{\mathscr{L}_T^{3*}} \leqq C \| v \|_{E_T^3}, \qquad \forall v \in E_T^3 .$$

Preuve. — 1° On montre que E_T^m est fermé dans $(\tilde{E}_T^m, \| \cdot \|_{\tilde{E}_T^m})$.

2° On le démontre par troncature.

3° Il provient du fait que, $(\gamma_0 > 0) \Rightarrow \int_{-\infty}^{T} (T - t + 1)^3 e^{\gamma_0 t} dt < +\infty$.

Nous pouvons alors énoncer :

PROPOSITION 9. — *(Théorème d'existence globale)*, $m = 0, 1, 2, 3$. *On suppose que, l'opérateur*

$$A = \sum_{k=1}^{3} A_k(t, x) \frac{\partial}{\partial x^k},$$

les symboles N_1, N_2, $\mathscr{D}$, *la matrice* B, *vérifient les hypothèses de la Proposition 7 avec* $I =]-\infty, T[$. *Alors :*

1° $\forall f \in \tilde{F}_T^m$, *le système* (V) *admet une solution unique* V *dans* E_T^m.

2° *Cette solution* V *vérifie*, $\forall t < T$ *les inégalités* :

$$\sum_{i=0}^{m} \| \nabla^i V \|_{L^2(s_t)} \leq \gamma_0 \int_{-\infty}^{t} e^{\gamma_0(t-\tau)} \sum_{i=0}^{m} \| \nabla^i f \|_{L^2(s_\tau)} d\tau . \qquad m=0, 1, 2, 3 . \tag{III.12}$$

Preuve. — Vu le Lemme 3, 2° on approche f dans $(\tilde{F}_T^m, \| . \|_{\tilde{F}_T^m})$ par une suite $(f_n) \subset F_T^m$. $\forall n, \exists t_n \in I$, $f_n = 0$ pour $t \leq t_n$. La proposition 8 donne l'existence d'une solution unique v_n de (V) avec $f = f_n$, sur $[t_n - 1, T[\times \mathbb{R}^3$, telle que $v_n = 0$ sur $s_{t_n - 1}$, et v_n vérifie les propriétés citées à la Proposition 8. La prolongée par 0 de v_n pour $t \leq t_n - 1$, soit $\tilde{v}_n$, vérifie (V) sur V_4^T. On montre, en utilisant les propriétés de v_n, que $\tilde{v}_n \in E_T^m$ et que $(\tilde{v}_n)$ est de Cauchy dans cet espace de Banach. $(\tilde{v}_n)$ converge donc vers $v \in E_T^m$. On montre alors, en utilisant les hypothèses sur A et B, que v vérifie (V) au sens des distributions.

La structure de E_T^m donne l'unicité de v. Enfin, on obtient (III.12) en passant à la limite dans des inégalités analogues vérifiées par $\tilde{v}_n$ et f_n. D'où la proposition 9.

§ IV. SOLUTIONS GLOBALES POUR LE SYSTÈME COUPLÉ, EN $(u_{\alpha\beta}, \tilde{\rho}^{0\beta})$:

$$\begin{cases} g^{\lambda\mu}(u)\partial^2_{\lambda\mu}u_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}(u).\nabla u \otimes \nabla u = \tilde{\rho}_{\alpha\beta} & \text{(II)} \\ \nabla_\alpha \tilde{\rho}^{\alpha\beta} = \dfrac{1}{2} \nabla^\beta \tilde{\rho}^\lambda_\lambda & \text{(III)} \end{cases}$$

$\rho = (\tilde{\rho}^{ij})$ DONNÉ $i, j = 1, 2, 3.$

IV.1. **Introduction.**

Nous savons, d'après § II, que pour u petit, (III) s'écrit sous la forme matricielle (IV). Comme $\tilde{\rho}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\lambda}g_{\beta\mu}\tilde{\rho}^{\lambda\mu}$, $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta}$, si on pose $v = (\tilde{\rho}^{0\beta})$, $\rho = (\tilde{\rho}^{ij})$, le système (II)-(III) en $(u_{\alpha\beta}, \tilde{\rho}^{0\beta})$ est équivalent au système suivant, en (u, v) :

$$\begin{cases} g^{\alpha\beta}(u)\partial^2_{\alpha\beta}u + h(u).\nabla u \otimes \nabla u = P(u).v + Q(u).\rho & \text{(II')} \\ \dfrac{dv}{dt} = A\left(u, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)v + B(u, \nabla u)v + f(u, \nabla u, \rho, \nabla\rho) & \text{(IV)} \end{cases}$$

où $P = (p_{\lambda\mu})Q = (Q_{\lambda\mu})$, $P_{\lambda\mu}$ et $Q_{\lambda\mu}$ étant des polynômes du 2ᵉ degré en u, à coefficients constants, et où A, B, f sont définis au § II. Nous montrons l'existence des solutions (u, v) de (II')-(IV), en étudiant le système suivant pour $\bar{u}$ fixé :

$$\begin{cases} g^{\alpha\beta}(u)\partial^2_{\alpha\beta}u = -\,h(\bar{u})\nabla\bar{u} \otimes \nabla\bar{u} + \mathrm{P}(\bar{u}).v + \mathrm{Q}(\bar{u}).\rho & \text{(IV.1)} \\ \dfrac{dv}{dt} = \mathrm{A}\left(\bar{u}, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)v + \mathrm{B}(\bar{u}, \nabla\bar{u})v + f(\bar{u}, \nabla\bar{u}, \rho, \nabla\rho) & \text{(IV.2)} \end{cases}$$

et en utilisant le théorème du point fixe. Nous commençons par étudier (IV.2) en utilisant les résultats du § III.

IV.2. Existence globale de solutions $v \in \mathrm{E}^3_{\mathrm{T}}$ pour (IV.2), $\bar{u}$ fixé et ρ donné.

DÉFINITION. — *On pose* $\mathrm{F}^*_4 = \left\{ \rho \in \tilde{\mathrm{F}}^4_{\mathrm{T}},\ t \mapsto (\mathrm{T}-t+1)e^{\gamma_0(\mathrm{T}-t)} \sum_{i=0}^{4} \| \nabla^i\rho \|_{\mathrm{L}^2(s_t)} \right.$ *est intégrable sur* $\left.]-\infty, \mathrm{T}[\right\}$ *et :*

$$\| \rho \|_{\mathrm{F}^*_4} = \int_{-\infty}^{\mathrm{T}} (\mathrm{T} - t + 1)e^{\gamma_0(\mathrm{T}-t)} \sum_{i=0}^{4} \| \nabla^i\rho \|_{\mathrm{L}^2(s_t)} dt\,.$$

PROPOSITION 10. — *Soit* ε_1 *le nombre défini à la Proposition 6,* § II *(Diagonalisation de* A*).*

Soit $\mathrm{C}_0 > 0$ *une constante de Sobolev,* $|\bar{u}| \le \mathrm{C}_0 \|\bar{u}\|_{\mathrm{E}^*_4}$, $\forall \bar{u} \in \mathrm{E}^*_4$ *et* $\bar{r}_1 = \dfrac{\varepsilon_1}{c_0}$.
(E^*_4 *défini au* § I, I.2, 6°*).*
Soient $\bar{u} \in \mathrm{B}_{\mathrm{E}^*_4}(\bar{r}_1)$ *et* $\rho \in \mathrm{F}^*_4$ *:*

Alors, A, B *et* f *étant définis au* § II, *Prop. 5,* (IV.2) *admet une solution unique* $v \in \mathrm{E}^3_{\mathrm{T}}$ *et :*

$$1^\circ \quad \sum_{i=0}^{3} \| \nabla^i v \|_{\mathrm{L}^2(s_t)} \le \mathrm{C} \int_{-\infty}^{t} e^{\gamma_0(t-\tau)} \sum_{i=0}^{4} \| \nabla^i\rho \|_{\mathrm{L}^2(s_\tau)} d\tau\,; \quad (\mathrm{C} > 0,\ t < \mathrm{T}). \tag{IV.3}$$

$$2^\circ \quad \| v \|_{\mathscr{L}^{3*}_{\mathrm{T}}} \le \mathrm{C} \| \rho \|_{\mathrm{F}^*_4}\,; \qquad (\mathrm{C} > 0). \tag{IV.4}$$

Preuve. — A donné par (II.2) § II s'écrit : $\mathrm{A}\left(\bar{u}, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{k=1}^{3} \mathrm{A}_k(t, x)\dfrac{\partial}{\partial x^k}$, avec $\forall k = 1, 2, 3$, A_k la matrice 4×4 d'éléments :

$$\mathrm{A}_{k'}{}^{0}_{0} = 0\,;\ \mathrm{A}_{k'}{}^{0}_{i} = -2\delta^k_i\,;\ \mathrm{A}_{k'}{}^{i}_{0} = \frac{1}{2}g_{00}\bar{g}^{ik}\,;\ \mathrm{A}_{k'}{}^{i}_{j} = g_{0j}\bar{g}^{ik} - \frac{g^{i0}}{g^{00}}\delta^k_j\,;\ i, j = 1, 2, 3\,.$$

On vérifie alors, puisque $\bar{u} \in \mathrm{B}_{\mathrm{E}^*_4}(\bar{r}_1)$ et $g = \eta + \bar{u}$, que A vérifie les propriétés de la Proposition 6 (Diagonalisation de A), et les propriétés de la Proposition 9, et que, la matrice $B(\bar{u}, \nabla\bar{u})$ donnée par (II.3), § II, vérifie les propriétés de la Proposition 9.

On montre ensuite que, puisque $\rho \in F_4^*$, $f(\bar{u}, \nabla\bar{u}, \rho, \nabla\rho)$ défini par (II.4), § II, est dans $\tilde{F}_T^3$ et que l'on a :

$$\sum_{i=0}^{3} \| \nabla^i f(\bar{u}, \nabla\bar{u}, \rho, \nabla\rho) \|_{L^2(s_t)} \leq C \sum_{i=0}^{4} \| \nabla^i \rho \|_{L^2(s_t)} ; \quad (C > 0, t < T). \qquad (IV.5)$$

D'après la Proposition 9, (IV.2) admet une solution unique v dans E_T^3. Quant à (IV.3), il découle de (IV.5) et de l'inégalité (III.12), Prop. 9, avec $m = 3$. Enfin, (IV.4) provient du Lemme 3, 3° et de (IV.3).

IV.3. **Le théorème d'existence globale des solutions** (u, v) **pour** (II')-(IV).

THÉORÈME 2. — *Il existe des nombres* $\bar{r} > 0$, $r'' > 0$ *et* $r^* > 0$ *tels que,*

$$\forall \rho \in B_{F_4^*}(r^*) = \{ \rho \in F_4^*, \| \rho \|_{F_4^*} \leq r^* \},$$

Le système (II')-(IV) *admet une solution unique* (u, v) *dans* $B_{E_4^*}(r) \cap B_{E_3^*}(r'') \times E_T^3$.

Preuve. — On étudie le système (IV.1)-(IV.2) en (u, v) pour $\bar{u}$ fixé et ρ donné. D'après Proposition 10, si $\bar{r} \in]0, \bar{r}_1[$, $\bar{u} \in B_{E_4^*}(\bar{r})$ et $\rho \in F_4^*$, alors (IV.2) admet une solution unique v dans E_T^3. Maintenant, les définitions de F_4^* et $\mathscr{S}_T^{3*}$ entraînent que l'on a :

$$(F_4^*, \| . \|_{F_4^*}) \hookrightarrow (\mathscr{S}_T^{3*}, \| . \|_{\mathscr{S}_T^{3*}}).$$

L'inégalité (IV.4), Proposition 10, la Proposition 2, 1° et 2°, la Proposition 3, 1° et 2°, (I.1), permettent alors de construire, à partir de $\bar{r}$, des nombres, $r'' > 0$, $r^* > 0$, tels que, si $\bar{u} \in B_{E_4^*}(\bar{r}) \cap B_{E_3^*}(r'')$ et si $\rho \in B_{F_4^*}(r^*)$, le système (IV.1) admet une solution unique u dans $B_{E_4^*}(\bar{r}) \cap B_{E_3^*}(r'')$.

On montre par ailleurs, en utilisant les inégalités de Sobolev, que si $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2 \in B_{E_4^*}(\bar{r})$, si $\rho \in F_4^*$ et si v_1 et v_2 sont les solutions de (IV.2), correspondantes à $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ et fournies par Proposition 10, alors, il existe $C > 0$ tel que :

$$\| v_1 - v_2 \|_{\mathscr{S}_T^{3*}} \leq C \| \bar{u}_1 - \bar{u}_2 \|_{E_3^*} \| \rho \|_{F_4^*}. \qquad (IV.6)$$

Considérons, dans le raisonnement précédent, pour ρ fixé dans F_4^*, l'application :

$\bar{u} \mapsto u$. En utilisant (IV.6), 1 Proposition 2, 3°, la proposition 3, 2°, (I.2), on montre que l'on peut choisir les nombres $\bar{r}$, r'' et r^* ci-dessus, de manière que cette application soit une contraction sur $B_{E_4^*}(\bar{r}) \cap B_{E_3^*}(r'')$ pour la norme $\|\,.\,\|_{E_3^*}$, $\forall \rho \in B_{F_4^*}(r^*)$. Enfin, la Proposition 1, 1° et 2° permet de déduire du théorème du point fixe, le résultat annoncé. D'où le théorème 2.

§ V. EXISTENCE GLOBALE DES SOLUTIONS POUR LES ÉQUATIONS D'EINSTEIN POUR DES SOURCES SUFFISAMMENT FAIBLES

Nous allons montrer que la solution $(u_{\alpha\beta}, \rho^{\alpha\beta})$ de II, IV, que nous avons obtenue vérifie le système original des équations d'Einstein (2) (3) : il suffit pour cela de montrer que $g = \eta + u$ vérifie les conditions d'harmonicité

$$F^{\mu}(g) = \frac{1}{|\det g|^{1/2}} \partial_\lambda [\,|\det g|^{1/2} g^{\lambda\mu}] = 0.$$

Il est bien connu | 2 | que II, III implique, à cause des identités de Bianchi que les $F^{\mu}(g)$ vérifient un système quasi-diagonal linéaire et homogène du second ordre. Un tel système n'a que la solution nulle qui tende vers 0 quand t tend vers $-\infty$, en un sens fonctionnel approprié : on peut le démontrer comme suit dans le cas de notre solution $g = \eta + u$:

Soient, vu théorème 2, $\rho = (\tilde{\rho}^{ij})$, $(\tilde{\rho}^{0\beta})$ et $u = (u_{\alpha\beta})$ vérifiant (II')-(IV) où $v = (\tilde{\rho}^{0\beta})$.

On démontre par troncature que le sous-espace G_4^* de F_4^*, formé de fonctions à support compact vers le passé est dense dans F_4^*. Mais l'inclusion $(F_4^*, \|\,.\,\|_{F_4^*}) \to (\mathscr{L}_T^{3^*}, \|\,.\,\|^1_{\mathscr{L}_T^{3^*}})$ permet alors de construire une suite $(\rho_n) = (\tilde{\rho}_n^{ij})$ de G_4^*, tendant vers $\rho = (\tilde{\rho}^{ij})$ dans $(\mathscr{L}_T^{3^*}, \|\ \|^1_{\mathscr{L}_T^{3^*}})$ et telle que, vu théorème 2, il existe $\forall n$, $(u_n, \tilde{\rho}_n^{0\beta}, \tilde{\rho}_n^{ij})$ vérifiant (II')-(IV).

Le théorème 2 d'unicité entraîne que, comme $\tilde{\rho}_n^{ij}$, $\tilde{\rho}_n^{0\beta}$ est à support compact vers le passé, ainsi que u_n.

Maintenant, l'inégalité (IV.4); Proposition 10, montre que l'application $(\tilde{\rho}^{ij}) \mapsto (\tilde{\rho}^{0\beta})$ est continue de $(F_4^*, \|\ \|_{F_4^*})$ dans $(\mathscr{L}_T^{3^*}, \|\ \|^1_{\mathscr{L}_T^{3^*}})$.

D'où $(\tilde{\rho}_n^{0\beta})$ tend vers $(\tilde{\rho}^{0\beta})$ dans $(\mathscr{L}_T^{3^*}, \|\,.\,\|^1_{\mathscr{L}_T^{3^*}})$, u_n tend vers u dans E_3^*.

On a $F^{\mu}(g_n) = 0$ d'après le théorème d'unicité classique, puisque $F^{\mu}(g_n)$ est à support compact vers le passé.

D'où aussi $F^{\mu}(g) = 0$.

D'après ce résultat et compte tenu des structures des espaces fonctionnels utilisés, on a la conclusion générale suivante :

THÉORÈME 3. — *Soit* $T \in \mathbb{R}$ *et* $V_4^T =]-\infty, T[\times \mathbb{R}^3$. *Des* ρ^{ij} *suffisamment petits dans* F_4^* *déterminent un espace-temps courbe* $(V_4^T, g_{\alpha\beta}, T_{\alpha\beta})$, *solution des équations d'Einstein, de la Relativité Générale, et tendant, à l'infini passé, vers l'espace-temps plat de Minkowski.*

RÉFÉRENCES

[0] N. NOUTCHEGUEME, Solutions Globales de Systèmes quasi-linéaires du second ordre *(A paraître au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées).*

[1] J. LERAY, *Hyperbolic Differential Equations*, Princeton, I. A. S., 1952.

[2] Y. CHOQUET-BRUHAT, Système d'E. P. D., *Acta Matematica*, t. **88**, 1952, p. 141-225.

[3] Y. CHOQUET-BRUHAT, D. CHRISTODOULOU, M. FRANCAVIGLIA, Wave Equations on Curved Space-Times, *Ann. I. H. P.*, Vol. XXXI, n° 4, 1979, p. 399-414.

[4] Y. CHOQUET-BRUHAT, D. CHRISTODOULOU, Non linear wave equations on curved space-times, *Advances in Math.*, t. **8**, 1983, p. 73-91.

[5] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la Gravitation et de l'Électromagnétisme*, Masson et Cie, 1955.

[6] P. A. DIONNE, Sur les problèmes de Cauchy hyperboliques bien posés, *Thèse, Journ. d'Analyse Mathématique*, Jèrusalem, 1963.

[7] S. MIZOHATA, *The theory of Partial Differential Equations*, Cambridge, University Press, 1973.

[8] Y. CHOQUET-BRUHAT, *Hyperbolic Partial Differential Equations on a manifold, Battelle rencontres*, J. Wheeler and C. DeWitt eds., Benjamin, 1967.

[9] K. YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1978.

[10] N. NOUTCHEGUEME, Solutions des Équations d'Einstein avec données minkowskiennes à l'infini passé, *Thèse d'État*, Yaoundé, mars 1986.

[11] T. DAMOUR et N. DERUELLE, General relativistic celestial mechanics of binary systems. I. The post-Newtonian motion, *Ann. I. H. P.*, t. **43**, 1985, p. 107-132.

[12] T. DAMOUR, Analytical Calculation of Gravitational Radiation To appear in *Proceedings of the Fourth Marcel Grossmann meeting*, ed. R. Ruffini, North-Holland.

[13] Y. CHOQUET-BRUHAT, D. CHRISTODOULOU, M. FRANCAVIGLIA, Cauchy problem data on a manifold, *Ann. I. H. P.*, t. **29**, n° 3, 1978, p. 241.

(Manuscrit reçu le 10 avril 1986)

(Version révisée reçue le 25 juillet 1986)