ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ALAIN BACHELOT

Équipartition de l'énergie pour les systèmes hyperboliques et formes compatibles

Annales de l'I. H. P., section A, tome 46, nº 1 (1987), p. 45-76
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1987__46_1_45_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 46, n° 1, 1987, p. 45-76. *Physique théorique*

Équipartition de l'énergie pour les systèmes hyperboliques et formes compatibles

par

Alain BACHELOT

Université de Bordeaux I, U. E. R. de Mathématique et Informatique,
Laboratoire associé au C. N. R. S. n° 226,
351, Cours de la Libération, 33405 Talence Cedex

RÉSUMÉ. — Étant donné un système hyperbolique $\mathrm{I}\partial_t\psi - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i\partial_{x_i}\psi$ et une forme sesquilinéaire f, une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{I}(t) = \int f(\psi(t, x), \psi(t, x))dx$ tende vers 0 quand $|t| \to \infty$ pour toute solution ψ d'énergie finie est que f soit compatible avec le système au sens de B. Hanouzet et J. L. Joly [*29* à *33*]. Si la dimension de l'espace est impaire et que le système est à multiplicité constante, $\mathrm{I}(t)$ s'annule en temps fini pour les données à support compact. On étudie aussi les systèmes hermitiens $\mathrm{I}\partial_t\psi - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i\partial_{x_i}\psi + i\mathrm{B}\psi$. On retrouve les résultats d'équipartitions de l'énergie pour les équations hyperboliques du type $\partial_{tt}^2\psi - \mathrm{A}^2(d)\psi + \mathrm{B}^2\psi = 0$, les équations des ondes, des ondes élastiques en milieu inhomogène, des ondes magnétoélastiques, de Klein-Gordon, les systèmes de Maxwell et de Dirac et l'équation des neutrinos.

ABSTRACT. — Given an hyperbolic system $\mathrm{I}\partial_t\psi - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i\partial_{x_i}\psi$ and a sesqui-

linear form f, $\mathrm{I}(t) = \int f(\psi(t,x), \psi(t,x))dx$ tends to zero when $|t| \to \infty$ for any finite energy solution ψ if and only if f is compatible with the system in the sense of B. Hanouzet and J. L. Joly [*29* to *33*]. If n is odd and the multiplicity of the system is constant, $\mathrm{I}(t) = 0$ after a finite time for solutions having initial data with compact support. We study also the hermitian systems $\mathrm{I}\partial_t\psi - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i\partial_{x_i}\psi + i\mathrm{B}\psi$. We prove the equipartition of energy for the hyperbolic equations $\partial_{tt}^2\psi - \mathrm{A}^2(d)\psi + \mathrm{B}^2\psi = 0$, the wave equation, the elastic waves in anisotropic media, the magneto-elastic waves, the Klein-Gordon equation, Maxwell's equations, the Dirac system and the Neutrino equation.

INTRODUCTION

Dans de nombreux modèles de la Physique, on considère une fonction d'onde $\psi(t,x) = (\psi_i(t,x), \ldots, \psi_{\mathrm{N}}(t,x))$ solution d'un système d'équations aux dérivées partielles hyperboliques, $\mathscr{L}\psi = 0$, dont l'énergie $|\psi(t,.)|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_x^n)}$ reste bornée. Un problème fondamental est de déterminer comment se propage l'énergie de ψ au cours du temps. En particulier, on peut s'intéresser à la façon dont se répartit l'énergie entre les diverses composantes $\psi_1, \ldots, \psi_{\mathrm{N}}$ et étudier le comportement asymptotique de cette répartition quand t tend vers l'infini. Par exemple, le champ électrique et le champ magnétique tendent à transporter chacun la moitié de l'énergie totale du champ électromagnétique solution des équations de Maxwell dans le vide [*10*] ; de même, l'énergie de la solution de l'équation des ondes $\square u = 0$, est asymptotiquement distribuée à parts égales entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle [*8*].

Plus précisément, on considère le système :

$$\mathscr{L}\psi = \partial_t\psi - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i\partial_{x_i}\psi \tag{1}$$

où les A_i sont des matrices $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ à coefficients constants. Pour $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ on note :

$$\mathrm{A}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathrm{A}_i .$$

On fait sur $\mathscr{L}$ l'hypothèse d'hyperbolicité suivante :

$$\text{(H)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } \xi \text{ les valeurs propres de } A(\xi) \text{ sont réelles et } A(\xi) \text{ est dia-} \\ \text{gonalisable. De plus, il existe une constante } M_0 > 0 \text{ telle que pour} \\ \text{tout } \xi \text{ et tout projecteur propre } P_j(\xi) \text{ de } A(\xi), \text{ on ait :} \end{array} \right.$$

$$| P_j(\xi) | \leqslant M_0 .$$

L'hypothèse (H) est vérifiée en particulier dans deux cas importants : si les matrices A_i sont hermitiennes, ou si les valeurs propres de $A(\xi)$ sont de multiplicité constante pour $\xi \neq 0$.

Une solution libre d'énergie finie ψ vérifie :

$$\mathscr{L}\psi = 0, \quad \psi(0, .) = \psi_0(.) \in (L^2(\mathbb{R}^n))^N$$

et (H) entraîne l'inégalité d'énergie :

$$| \psi(t) |_{L^2} \leqslant N \cdot M_0 | \psi_0 |_{L^2} .$$

Considérons une forme sesquilinéaire f sur $\mathbb{C}^N$; on pose :

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\psi(t, x), \psi(t, x))dx .$$

On dira que le système $\mathscr{L}$ admet une équipartition de l'énergie relativement à f, si, pour toute solution libre d'énergie finie ψ, $I(t)$ tend vers 0 quand $| t |$ tend vers l'infini. Le problème fondamental est de déterminer toutes les formes possibles d'équipartition de l'énergie. Revenons à l'exemple de l'équation des ondes ; soit u vérifiant $\square u = 0$, $u(0, x) = 0$, $u_t(0, x) = g(x)$; l'égalité de Parseval donne :

$$\int | u_t(t, x) |^2 dx = C \cdot \int \cos^2 (t | \xi |) | \hat{g}(\xi) |^2 d\xi ,$$

$$\int | \nabla_x u(t, x) |^2 dx = C \cdot \int \sin^2 (t | \xi |) | \hat{g}(\xi) |^2 d\xi .$$

On en déduit que :

$$I(t) = \int (| u_t(t, x) |^2 - | \nabla_x u(t, x) |^2) dx = C \cdot \int \cos(2t | \xi |) | \hat{g}(\xi) |^2 d\xi$$

et on applique le théorème de Riemann-Lebesgue. Notons la propriété que possède la forme $f(\nabla_{t,x}u, \nabla_{t,x}u) = | u_t |^2 - | \nabla_x u |^2$ de faire disparaître les termes en $\cos^2 t | \xi |$ et $\sin^2 t | \xi |$ en les transformant en terme oscillant $\cos 2t | \xi |$.

C'est cet aspect que nous allons développer dans ce travail en montrant qu'à l'origine de tous les résultats d'équipartition, se trouve une propriété algébrique commune : la notion de compatibilité de la forme f avec le système hyperbolique $I\partial_t - \sum_{i=1}^{n} A_i \partial_{x_i}$, notion introduite par B. Hanouzet et J. L. Joly [*29* à *33*].

DÉFINITION. — *Une forme sesquilinéaire f sur $\mathbb{C}^N$ sera dite (presque partout) compatible avec le système $\mathscr{L}$ si, pour (presque) tout ξ non nul de $\mathbb{R}^n$, les vecteurs propres de $A(\xi)$ sont isotropes pour f.*

De nombreux exemples sont donnés dans la deuxième partie. Une forme compatible est presque partout compatible mais la réciproque est fausse en général. Par exemple si $A(\xi) = \begin{bmatrix} \vec{C}_1 \cdot \vec{\xi} & 0 \\ 0 & \vec{C}_2 \cdot \vec{\xi} \end{bmatrix}$ où $\{ \vec{C}_1, \vec{C}_2 \}$ est un système libre de $\mathbb{R}^2$ il n'existe pas de forme compatible, par contre, les matrices $\begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$ définissent des formes presque partout compatibles. Une telle situation se présente pour le système de la cinétique des gaz étudié par Hamdache [*28*] où les opérateurs de collision sont des formes presque partout compatibles et non compatibles avec le système. Si la multiplicité des valeurs propres de $A(\xi)$ est constante pour $\xi \neq 0$, une forme presque partout compatible est compatible, et même régulièrement compatible au sens de Hanouzet et Joly. Dans ce cas, une caractérisation importante des formes compatibles est établie dans [*32* et *33*] mettant en évidence un phénomène de compensation : f est compatible si et seulement si pour toute solution ψ de (1) avec $\hat{\psi}(0, \xi) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, on a

$$| f(\psi(t), \psi(t)) |_{L^\infty(\mathbb{R}^n_x)} = 0(|t|^{-n}) ;$$

la décroissance est donc plus rapide que celle d'un produit qui est de l'ordre de $|t|^{-n+1}$. Le résultat principal que nous établissons ici est que f est presque partout compatible avec le système $\mathscr{L}$ si, et seulement si, $\mathscr{L}$ admet une équipartition de l'énergie relativement à f. De plus, si la dimension d'espace est impaire, et si le système est fortement hyperbolique, l'équipartition a lieu en temps fini pour les données initiales à support compact.

Ces résultats sont établis dans la première partie où l'on étudie également le système hermitien non homogène :

$$\mathscr{L}\psi = I\partial_t\psi - A(d)\psi + iB\psi . \tag{2}$$

Dans la deuxième partie on donne de nombreuses applications : équation des ondes, équations du second ordre du type :

$$\partial^2_{tt}\psi - A^2(d)\psi = 0$$

et

$$\partial^2_{tt}\psi - A^2(d)\psi + B^2\psi = 0 ,$$

équation des ondes élastiques en milieu anisotrope, équation des ondes magnétoélastiques dans un milieu conducteur, équations de Maxwell, système de Dirac massif ou non, équation de Klein-Gordon, équation des neutrinos. Beaucoup de ces résultats sont connus mais il nous semble intéressant de montrer qu'ils découlent tous directement de théorèmes généraux de démonstration simple ; chaque fois il suffit de vérifier la condition algébrique de compatibilité.

Dans l'appendice on montre que si $A(\xi)$ est à multiplicité constante pour $\xi \neq 0$, une forme presque partout compatible est compatible. Nous achevons cette introduction en donnant quelques références bibliographiques. Sur la notion de forme compatible on se reportera à [*3*] [*4*] [*29* à *33*]. L'équipartition de l'énergie pour les équations d'évolution abstraites dans un espace de Hilbert a été étudiée dans [*7*] [*23*] [*24*] [*25*] [*34*] [*35*]. L'équipartition de l'énergie pour l'équation des ondes a été établie par Lax et Phillips dans leur ouvrage « Scattering Theory » en utilisant la transformée de Radon et par Brodsky [*8*] par l'analyse de Fourier. Parmi les auteurs qui ont utilisé la transformée de Radon pour obtenir des résultats sur le comportement asymptotique des solutions et en déduire des théorèmes d'équipartition on peut citer : Avila et Costa [*1*] [*2*], Bardos et Costa [*6*], Costa [*9*], Costa et Strauss [*10*]. La transformée de Fourier a été employée par Dassios [*11* à *14*], Dassios et Galanis [*15*], Dassios et Grillakis [*16*], Duffin [*20*], Strichartz [*36*], Wilcox [*37*]. Des résultats d'équipartition ont été obtenus par Dassios et Grillakis [*18*] pour l'équation des ondes en domaine extérieur et pour l'équation des ondes thermoélastiques [*17*]. L'étude de l'équipartition de l'énergie pour les systèmes non linéaires a été abordée par Glassey [*21*], et Glassey et Strauss [*22*]. Les principaux résultats de ce travail ont été annoncés dans [*5*].

I. RÉSULTATS FONDAMENTAUX

THÉORÈME 1. — *On considère un système hyperbolique $\mathscr{L}$ vérifiant (1) et (H).*

Soient f une forme sesquilinéaire presque partout compatible avec le système $\mathscr{L}$ et ψ une solution libre d'énergie finie. On pose

$$I(t) = \int f(\psi(t,x), \psi(t,x))dx .$$

Alors $I(t)$ tend vers 0 quand $|t|$ tend vers l'infini.

Réciproquement, si $I(t)$ tend vers 0 quand $|t|$ tend vers l'infini, pour toute solution d'énergie finie de $\mathscr{L}$ alors f est presque partout compatible avec $\mathscr{L}$.

Dans le cas où $\mathscr{L}$ est fortement hyperbolique on peut préciser la rapidité de la décroissance de $I(t)$.

THÉORÈME 2. — *On suppose que pour tout $\xi \neq 0$, $A(\xi)$ admet p valeurs propres distinctes de multiplicité constante. On considère une forme sesquilinéaire f compatible avec le système $\mathscr{L}$ et une solution ψ de donnée initiale ψ_0 dans $(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n))^N$ $\left(\text{resp. dans } (C^l_{\text{compact}}(\mathbb{R}^n))^N, l > \frac{n}{2}\right)$. On pose :*

$$I(t) = \int f(\psi(t, x), \psi(t, x))dx .$$

a) *Alors* $I(t)$ *est une fonction* C^∞ *de t (resp.* C^L *de t,* $L < 2l - n$*) vérifiant pour tout entier k (resp. pour* $k \leqslant L$*) :*

$$\left| \frac{d^k I(t)}{dt^k} \right| \leqslant \frac{C_k}{|t|^{k+n}} .$$

b) *Pour tout entier h on définit le moment d'ordre h de* ψ_0 *par :*

$$\Phi_h(\omega) = \int (\omega \cdot x)^h \psi_0(x)dx . \qquad \omega \in S^{n-1} .$$

On suppose que pour $0 \leqslant h \leqslant K$, $\Phi_h \equiv 0$. *Alors,*

$$\left| \frac{d^k I}{dt^k} \right| \leqslant \frac{C_k}{|t|^{2(K+1)+k+n}} .$$

En particulier si ψ_0 *est une fonction à décroissance rapide dont tous les moments sont nuls,* $I(t)$ *est à décroissance rapide.*

Toujours dans le cas de forte hyperbolicité, et si l'espace est de dimension impaire, $I(t)$ s'annule en temps fini pour les données initiales à support compact, dès que l'on atteint la lacune.

THÉORÈME 3. — (Équipartition à temps fini).

On suppose que la dimension n de l'espace est impaire et que les p valeurs distinctes λ_j *de* $A(\xi)$ *sont de multiplicité constante pour* $\xi \neq 0$. *On note* $\delta = \operatorname*{Inf}_{\substack{|\xi|=1 \\ j\neq h}} |\lambda_j(\xi) - \lambda_h(\xi)|$. *On considère une forme sesquilinéaire f compatible avec le système* $\mathscr{L}$ *et une solution d'énergie finie* ψ, *de donnée initiale* ψ_0 *dans* $(L^2(\mathbb{R}^n))^N$ *dont le support soit inclus dans* $\{ |x| \leqslant R \}$. *On note :*

$$I(t) = \int f(\psi(t, x), \psi(t, x))dx .$$

Alors $I(t) = 0$ *pour* $|t| \geqslant \frac{2R}{\delta}$.

Si $\hat{\psi}_0(\xi)$ *admet des projections non nulles seulement sur les sous-espaces* *propres associés à* $\lambda_{j_1}(\xi), \ldots, \lambda_{j_r}(\xi)$, *alors* $\mathrm{I}(t) = 0$ *pour* $|t| \geqslant \dfrac{2\mathrm{R}}{\delta(j_1, \ldots, j_r)}$ *où* $\delta(j_1, \ldots, j_r) = \operatorname*{Inf}_{\substack{|\xi|=1 \\ 1 \leqslant \mu \neq \nu \leqslant r}} |\lambda_{j_\mu}(\xi) - \lambda_{j_\nu}(\xi)|$.

Pour établir le théorème 3 on utilise l'homogénéité de degrés 1 en ξ des valeurs propres $\lambda_j(\xi)$ pour exprimer $\mathrm{I}(t)$ comme transformée de Fourier par rapport à $|\xi| = \rho$:

$$\mathrm{I}(t) = \int_{\mathrm{S}^{n-1}} d\omega \sum_{j,h} \int_0^\infty e^{-it\rho(\lambda_j - \lambda_h)(\omega)} a_{j,h}(\rho, \omega) d\rho .$$

On applique alors le théorème de Paley-Wiener-Schwartz, la compatibilité de f assurant que l'amplitude $a_{j,h}$ s'annule si $\lambda_j = \lambda_h$. L'hypothèse de multiplicité constante apparaît donc naturellement pour minorer $|\lambda_j(\omega) - \lambda_h(\omega)|$. Néanmoins, si $\lambda_j(\xi)$ est linéaire en ξ, $\mathrm{I}(t)$ s'écrit sous forme de transformée de Fourier en ξ et il y a équipartition en temps fini sans que $\mathrm{A}(\xi)$ soit de multiplicité constante. Soit par exemple $\mathrm{A}(\xi)$ la matrice diagonale $(\delta_{ij}\vec{\mathrm{C}}_i \cdot \vec{\xi})$ et $f_k(\psi, \psi) = \Sigma a_{ij}^k \psi_i \psi_j$ où $a_{ij}^k = 0$ si $\vec{\mathrm{C}}_i = \vec{\mathrm{C}}_j$. Alors $\mathrm{A}(\xi)$ n'est pas à multiplicité constante pour $\xi \neq 0$ et f est presque partout compatible mais non compatible avec le système $\mathscr{L}\psi = \psi_t - \mathrm{A}(d)\psi$. Si $\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^{\mathrm{N}})$ est solution de $\mathscr{L}\psi = 0$, $\psi(0, .) = \psi_0(.)$ et si $\operatorname{supp} \psi_0 \subset \mathrm{B}(0, \mathrm{R})$ alors $\operatorname{supp} \psi^i(t) \subset \mathrm{B}(t\vec{\mathrm{C}}_i, \mathrm{R})$ et donc $f_k(\psi, \psi) = 0$ si $|t| \geqslant 2\mathrm{R}\,\delta$, $\delta = \operatorname{Inf}(|\vec{\mathrm{C}}_i - \vec{\mathrm{C}}_j|, \vec{\mathrm{C}}_i \neq \vec{\mathrm{C}}_j)$. Le système :

$$\psi_t - \mathrm{A}(d)\psi = \mathrm{Q}(\psi, \psi), \qquad \mathrm{Q}(\psi, \psi) = {}^t(f_1(\psi, \psi), \ldots, f_{\mathrm{N}}(\psi, \psi))$$

a été étudié par Hamdache [*28*].

On peut étendre le théorème 1 au cas des systèmes :

$$\partial_t \psi - \sum_{j=1}^n \mathrm{A}_j \partial_{x_j} \psi + i\mathrm{B}\psi = 0$$

où les matrices A_j et B sont des matrices hermitiennes $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$. On généralise la définition 1.

DÉFINITION 2. — *On dira qu'une forme sesquilinéaire f sur $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$ est presque partout compatible avec le système (2) si, pour presque tout ξ dans $\mathbb{R}^n$, les vecteurs propres v de :*

$$\mathrm{A}(\xi) + \mathrm{B} = \sum_{i=1}^n \xi_i \mathrm{A}_i + \mathrm{B}$$

vérifient :

$$f(v, v) = 0 .$$

Si $\xi = \rho \cdot \omega$ où ω est fixé dans S^{n-1}, les théorèmes classiques de perturbation assurent qu'il existe une matrice diagonale réelle $\Lambda_\omega(\rho)$ et une matrice unitaire $P_\omega(\rho)$, toutes deux analytiques par rapport à ρ dans $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\rho A(\omega) + B = P_\omega^{-1}(\rho)\Lambda_\omega(\rho)P_\omega(\rho).$$

On note :

$$\Lambda_\omega(\rho) = (\delta_{ij}\lambda_j^\omega(\rho))_{1 \leqslant i,j \leqslant N}.$$

On fait l'hypothèse suivante sur les λ_j^ω.

$$(\mathrm{H}_1)\quad \begin{cases} \text{Pour presque tout } \omega \text{ dans } S^{n-1}, \text{ les fonctions } \lambda_j^\omega(\rho) - \lambda_h^\omega(\rho) \\ (l \leqslant j,\ h \leqslant N) \text{ ne sont pas égales à une constante non nulle quand} \\ \rho \text{ parcourt } \mathbb{R}. \end{cases}$$

L'hypothèse (H_1) assure que si $\lambda_j^\omega \neq \lambda_h^\omega$ alors l'ensemble des points ρ où $\frac{d}{d\rho}(\lambda_j^\omega(\rho) - \lambda_h^\omega(\rho)) = 0$ est discret. Nous énonçons à présent le :

THÉORÈME 4. — *On suppose que le système (2) vérifie (H_1). Alors ψ étant une solution d'énergie finie de (2) et f une forme sesquilinéaire presque partout compatible avec (2) on a :*

$$I(t) = \int f(\psi(t,x), \psi(t,x))dx \to 0 \qquad |t| \to \infty.$$

Réciproquement, si $I(t) \to 0$, $|t| \to \infty$ pour toute solution ψ d'énergie finie de (2), alors f est presque partout compatible avec (2).

Remarque. — Dans les applications il arrive souvent que la valeur propre 0 de $A(\xi)$ ou $A(\xi) + B$ joue un rôle particulier vis-à-vis de la forme sesquilinéaire f étudiée et que celle-ci ne soit compatible que « pour les vitesses non nulles » c'est-à-dire que les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles soient isotropes pour f sans que le noyau soit dans le cône isotrope de f. Les théorèmes précédents demeurent valides en imposant une contrainte sur la donnée initiale : on supposera que la projection orthogonale de $\hat{\psi}_0(\xi)$ sur Ker $A(\xi)$ ou Ker $A(\xi) + B$ est nulle, ce qui revient à dire qu'on ne considère que la partie non stationnaire des solutions. Cette hypothèse est automatiquement vérifiée pour les solutions d'une équation hyperbolique du second ordre écrite sous forme de système ; de même dans le cas du système de Maxwell, la contrainte $\operatorname{div} E = \operatorname{div} H = 0$ exprime que le champ électromagnétique ne contient pas de champ stationnaire.

Preuve du théorème 1 :

1) Soit ψ_0 dans $(L^2(\mathbb{R}^n))^N$ et

$$\psi(t,x) = \mathscr{F}^{-1}(e^{-itA(\xi)}\hat{\psi}_0(\xi)).$$

L'égalité de Parseval donne :

$$I(t) = \int f(\psi(t,x), \psi(t,x))dx = C \cdot \int f(e^{-itA(\xi)}\hat{\psi}_0(\xi), e^{-itA(\xi)}\hat{\psi}_0(\xi))d\xi .$$

On note $\xi = \rho \cdot \omega$, $0 < \rho$ et $\omega \in S^{n-1}$. On désigne par $\lambda_j(\xi)$ les p valeurs propres distinctes de $A(\xi)$ avec la convention

$$\lambda_1(\xi) < \lambda_2(\xi) < \ldots < \lambda_p(\xi), \qquad p = p(\xi),$$

et on note $P_j(\xi)$ le projecteur associé à $\lambda_j(\xi)$. On remarque que :

$$A(\rho\omega) = \rho A(\omega), \qquad \lambda_j(\rho\omega) = \rho\lambda_j(\omega) \qquad \text{et} \qquad P_j(\rho\omega) = P_j(\omega).$$

$I(t)$ s'écrit :

$$I(t) = \int_{S^{n-1}} u(t\,;\omega)d\omega \tag{3}$$

où

$$u(t,\omega) = C \cdot \sum_{1 \leqslant j,h \leqslant p} \int_0^\infty e^{-it\rho(\lambda_j(\omega)-\lambda_h(\omega))} f(P_j(\omega)\hat{\psi}_0(\rho\omega), P_h(\omega)\hat{\psi}_0(\rho\omega))\rho^{n-1}d\rho .$$

A présent nous appliquons le théorème de convergence dominée à $I(t)$. Tout d'abord on a l'estimation :

$$| u(t,\omega) | \leqslant C \cdot \int_0^\infty | \hat{\psi}_0(\rho\omega) |^2 \rho^{n-1} d\rho = g(\omega)$$

où g appartient à $L^1(S^{n-1})$.

D'autre part, f étant presque partout compatible, pour presque tout ω on a :

$$\lambda_j(\omega) = \lambda_h(\omega) \Rightarrow f(P_j(\omega)\cdot, P_h(\omega)\cdot) = 0 .$$

Donc, pour presque tout ω dans S^{n-1},

$$u(t,\omega) = C \cdot \sum_{\lambda_j(\omega) \neq \lambda_h(\omega)} \int_0^\infty e^{-it\rho(\lambda_j(\omega)-\lambda_h(\omega))} f(P_j(\omega)\hat{\psi}_0(\rho\omega), P_h(\omega)\hat{\psi}_0(\rho\omega))\rho^{n-1}d\rho .$$

Le lemme de Riemann-Lebesgue assure alors que :

$$\text{p. p. } \omega, \qquad u(t,\omega) \to 0 \qquad | t | \to \infty .$$

Le théorème de convergence dominée appliqué à $I(t)$ achève d'établir la première partie du théorème 1.

2) On note $\lambda_j(\xi)$ les N valeurs propres réelles de $A(\xi)$ ordonnées de façon croissante :

$$\lambda_1(\xi) \leqslant \lambda_2(\xi) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_N(\xi).$$

Ce sont donc des fonctions continues de ξ en tant que racines du polynôme caractéristique dont les coefficients dépendent continuement de ξ. On en déduit en particulier que le projecteur $P_j(\xi)$ associé à $\lambda_j(\xi)$ dépend mesurablement de ξ, et, de plus, $| P_j(\xi) | \leqslant M_0$. Soit V_m une suite partout dense dans $\mathbb{C}^N$ et φ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$; j étant fixé, on pose :

$$\hat{\psi}_0(\xi) = \varphi(\xi) P_j(\xi) V_m .$$

Soit $\psi(t)$ la solution de (1) de donnée initiale ψ_0. Par hypothèse

$$I(t) = \int f(\psi(t, x), \psi(t, x)) dx \to 0, \qquad |t| \to \infty .$$

Or,

$$\begin{aligned} I(t) &= C \cdot \int f(e^{-itA(\xi)} \varphi(\xi) P_j(\xi) V_m , e^{-itA(\xi)} \varphi(\xi) P_j(\xi) V_m) d\xi \\ &= C \cdot \int | \varphi(\xi) |^2 f(P_j(\xi) V_m , P_j(\xi) V_m) d\xi . \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\int | \varphi(\xi) |^2 f(P_j(\xi) V_m , P_j(\xi) V_m) d\xi = 0 .$$

φ étant choisie arbitrairement, il existe donc un ensemble négligeable $\mathcal{N}_{j,m}$ tel que si $\xi \notin \mathcal{N}_{j,m}$, $f(P_j(\xi)V_m, P_j(\xi)V_m) = 0$. Soit $\mathcal{N} = \bigcup_{j=1}^{N} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_{j,m}$; alors si $\xi \notin \mathcal{N}$, $f(P_j(\xi)V_m, P_j(\xi)V_m) = 0$ pour tout j et tout m. Par densité de (V_m) dans $\mathbb{C}^N$ on en déduit que $f(P_j(\xi), P_j(\xi)) = 0$ pour tout j si $\xi \notin \mathcal{N}$ ce qui achève la preuve du théorème 1.

Preuve du théorème 2. — Supposons tout d'abord que ψ_0 appartient à $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))^N$. On note $\lambda_1(\xi) < \lambda_2(\xi) < \ldots < \lambda_p(\xi)$ les p valeurs propres distinctes de $A(\xi)$. f étant compatible avec le système $f(P_j(\xi), P_j(\xi)) = 0$. L'égalité (3) donne :

$$(4) \quad I(t) = \\ = C \cdot \sum_{1 \leqslant j \neq h \leqslant p} \int_{S^{n-1}} d\omega \int_0^\infty e^{-it\rho(\lambda_j(\omega) - \lambda_h(\omega))} f(P_j(\omega)\hat{\psi}_0(\rho\omega), P_h(\omega)\hat{\psi}_0(\rho\omega)) \rho^{n-1} d\rho .$$

On pose :

$$F_{j,h}(\omega, \rho) = f(P_j(\omega)\hat{\psi}_0(\rho\omega), P_h(\omega)\hat{\psi}_0(\rho\omega)) .$$

On a donc :

$$\frac{d^k I(t)}{dt^k} = C \cdot \sum_{1 \leqslant j \neq h \leqslant p} (-i)^k \int_{S^{n-1}} (\lambda_j(\omega) - \lambda_h(\omega))^k \cdot \int_0^\infty e^{-it\rho(\lambda_j(\omega) - \lambda_h(\omega))} \rho^{k+n-1} F_{j,h}(\omega, \rho) d\rho d\omega .$$

On intègre la seconde intégrale $k+n$ fois par parties en tenant compte du fait que $\rho^{n+k-1}F_{j,h}(\omega,\rho)$ est à décroissance rapide sur $[0,+\infty[$. On obtient :

$$\frac{d^k I(t)}{dt^k} = \frac{C}{t^{n+k}} \sum_{1\leqslant j\neq h\leqslant p} (-i)^{-n}\left\{ \overline{k+n-1}!(-1)^{k+n-1}\int_{S^{n-1}} (\lambda_j(\omega)-\lambda_h(\omega))^{-n}F_{j,h}(\omega,0)d\omega \right.$$
$$\left. + \int_{S^{n-1}} (\lambda_j(\omega)-\lambda_h(\omega))^{-n}\int_0^\infty e^{-it\rho(\lambda_j(\omega)-\lambda_h(\omega))}\frac{d^{n+k}}{d\rho^{n+k}}(\rho^{k+n-1}F_{j,h}(\omega,\rho))d\rho d\omega \right\}.$$

On remarque que $\inf\limits_{\substack{\omega\in S^{n-1}\\ j\neq h}} |\lambda_j(\omega)-\lambda_h(\omega)| > 0$ et donc

$$\left|\frac{d^k I(t)}{dt^k}\right| \leqslant \frac{C}{|t|^{n+k}}.$$

A présent, considérons le cas où $\psi_0 \in (C^l_{\text{compact}}(\mathbb{R}^n))^N$, $\frac{n}{2} < l$.
Les calculs précédents restent valables si

$$\left|\frac{d^{n+k}}{d\rho^{n+k}}\rho^{k+n-1}F_{j,h}(\omega,\rho)\right| \leqslant C(1+\rho)^{-2}.$$

Or, le théorème de Paley-Wiener assure que $\hat{\psi}_0(\rho\omega)$ et toutes ses dérivées sont majorés par $C(1+\rho)^{-l}$. Une condition suffisante sur k et l est donc que :

$$k+n-1-2l < -1,$$

c'est-à-dire

$$\frac{n}{2} < l \quad \text{et} \quad 0 \leqslant k \leqslant L < 2l-n.$$

Supposons à présent que les moments Φ_h de ψ_0 s'annulent pour $0\leqslant h\leqslant K$.
En intégrant par parties $2K+k+n+2$ fois l'intégrale en ρ de $\frac{d^k I}{dt^k}$ on obtient :

$$\left|\frac{d^k I}{dt^k}\right| \leqslant C \sum_{1\leqslant j\neq h\leqslant p} \left\{ \sum_{\nu=k+n}^{2K+k+n+2} \frac{1}{t^\nu}\int_{S^{n-1}} \left|\left.\frac{d^{\nu-k-n}}{d\rho^{\nu-k-n}}F_{j,h}(\omega,\rho)\right|_{\rho=0}\right| d\omega \right.$$
$$\left. + \frac{1}{t^{2K+k+n+2}}\int_{S^{n-1}}\int_0^\infty \left|\frac{d^{2K+k+n+2}}{d\rho^{2K+k+n+2}}(\rho^{k+n-1}\cdot F_{j,h}(\rho,\omega))\right| d\rho d\omega \right\}.$$

Or, on a :

$$\left.\frac{d^\mu}{d\rho^\mu}F_{j,h}(\omega,\rho)\right|_{\rho=0} = \sum_{\alpha=0}^{\mu} C^\alpha_\mu f(P_j(\omega)(-i)^\alpha\Phi_\alpha(\omega), P_h(\omega)(-i)^{\mu-\alpha}\Phi_{\mu-\alpha}(\omega)).$$

Donc, pour $0 \leqslant \mu \leqslant 2K + 1$, $\left.\dfrac{d^\mu}{d\rho^\mu} F_{j,h}(\omega, \rho)\right|_{\rho=0}$ s'annule et la majoration de $\dfrac{d^k I}{dt^k}$ devient :

$$\left|\frac{d^k I}{dt^k}\right| \leqslant \frac{C}{t^{2K+k+n+2}} \sum_{1 \leqslant j \neq h \leqslant p} \left\{ \int_{S^{n-1}} \left| \left| \frac{d^{2K+2}}{d\rho^{2K+2}} F_{j,h}(\omega, \rho) \right| \right|_{\rho=0} d\omega \right.$$
$$\left. + \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \left| \frac{d^{2K+k+n+2}}{d\rho^{2K+k+n+2}} (\rho^{k+n-1} \cdot F_{j,h}(\omega, \rho)) \right| d\rho d\omega \right\}.$$

Dans le cas où tous les moments sont nuls, $\dfrac{d^\mu}{d\rho^\mu} F_{j,h}(\omega, \rho)\,|_{\rho=0} = 0$ et il n'y a plus de terme de bord en $\rho = 0$ dans les intégrations par parties et pour tout N on a :

$$\int_0^\infty e^{-it\rho(\lambda_j(\omega) - \lambda_h(\omega))} \rho^{k+n-1} F_{j,h}(\omega, \rho) d\rho$$
$$= \frac{(-1)^N}{t^N(-i)^N(\lambda_j(\omega) - \lambda_h(\omega))^N} \int_0^\infty e^{-it\rho(\lambda_j(\omega) - \lambda_h(\omega))} \frac{d^N}{d\rho^N} (\rho^{k+n-1} F_{j,h}(\omega, \rho)) d\rho$$

et donc

$$\left|\frac{d^k I(t)}{dt^k}\right| \leqslant \frac{C_N}{|t|^N}$$

ce qui achève la preuve du théorème 2.

Preuve du théorème 3. — Soit ψ_0 dans $(L^2(\mathbb{R}^n))^N$ de support dans $B(0, R)$. Soit $\varepsilon > 0$ et ψ_1 dans $(C^{n+1}(\mathbb{R}^n))^N$ de support dans $B(0, R)$ et tel que :

$$|\psi_0 - \psi_1|_{L^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{N \cdot M_0 \| f \| (|\psi_0|_{L^2} + |\psi_1|_{L^2})}$$

Si
$$I(t) = \int f(\psi(t, x), \psi(t, x)) dx$$

et
$$J(t) = \int f(\Phi(t, x), \Phi(t, x)) dx$$

où ψ est solution de (1) à donnée initiale ψ_0 et Φ est la solution de (1) à donnée initiale ψ_1 on a :

$$|I(t) - J(t)| \leqslant \varepsilon.$$

On évalue $J(t)$ à l'aide de (4) :

$$J(t) = C \cdot \sum_{1 \leqslant j \neq h \leqslant p} \int_{S^{n-1}} d\omega \left(\int_0^\infty e^{-it\rho(\lambda_j(\omega) - \lambda_h(\omega))} \rho^{n-1} f(P_j(\omega)\hat{\psi}_1(\rho\omega), P_h(\omega)\hat{\psi}_1(\rho\omega)) d\rho \right). \tag{5}$$

En faisant le changement de variable $\omega \to -\omega$ on obtient :

$$J(t) = C \cdot \sum_{1 \leqslant j \neq h \leqslant p} \int_{S^{n-1}} d\omega$$
$$\left(\int_0^\infty e^{-it\rho(\lambda_j(-\omega)-\lambda_h(-\omega))} \rho^{n-1} f(P_j(-\omega)\hat{\psi}_1(-\rho\omega), P_h(-\omega)\hat{\psi}_1(-\rho\omega)) d\rho \right).$$

Or, $\qquad \lambda_j(-\omega) = -\lambda_{p+1-j}(\omega) \qquad$ et $\qquad P_j(-\omega) = P_{p+1-j}(\omega)$.

Donc,

$$J(t) = C \cdot \sum_{1 \leqslant j \neq h \leqslant p} \int_{S^{n-1}} d\omega$$
$$\left(\int_0^\infty e^{it\rho(\lambda_{p+1-j}(\omega)-\lambda_{p+1-h}(\omega))} \rho^{n-1} f(P_{p+1-j}(\omega)\hat{\psi}_1(-\rho\omega), P_{p+1-h}(\omega)\hat{\psi}_1(-\rho\omega)) d\rho \right)$$

et en changeant les indices $p+1-j$ et $p+1-h$:

$$J(t) = C \cdot \sum_{1 \leqslant j \neq h \leqslant p} \int_{S^{n-1}} d\omega$$
$$\left(\int_0^\infty e^{it\rho(\lambda_j(\omega)-\lambda_h(\omega))} \rho^{n-1} f(P_j(\omega)\hat{\psi}_1(-\rho\omega), P_h(\omega)\hat{\psi}_1(-\rho\omega)) d\rho \right).$$

A présent faisons le changement de variable $\rho \to -\rho$ en remarquant que $n-1$ est pair si bien que $(-\rho)^{n-1} = \rho^{n-1}$:

$$J(t) = C \cdot \sum_{1 \leqslant j \neq h \leqslant p} \int_{S^{n-1}} d\omega$$
$$\left(\int_{-\infty}^0 e^{-it\rho(\lambda_j(\omega)-\lambda_h(\omega))} \rho^{n-1} f(P_j(\omega)\hat{\psi}_1(\rho\omega), P_h(\omega)\hat{\psi}_1(\rho\omega)) d\rho \right).$$

Grâce à (5) on en déduit que :

$$J(t) = \frac{C}{2} \sum_{1 \leqslant j \neq h \leqslant p} \int_{S^{n-1}} d\omega$$
$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\rho(\lambda_j(\omega)-\lambda_h(\omega))} \rho^{n-1} f(P_j(\omega)\hat{\psi}_1(\rho\omega), P_h(\omega)\hat{\psi}_1(\rho\omega)) d\rho \right).$$

On note

$$u_\omega^{j,h}(\rho) = \rho^{n-1} f(P_j(\omega)\hat{\psi}_1(\rho\omega), P_h(\omega)\hat{\psi}_1(\rho\omega))$$

ψ_1 étant une fonction $C^{n+1}(\mathbb{R}^n)$ à support dans $B(0, R)$, d'après le théorème de Paley-Wiener $\hat{\psi}_1(\xi)$ admet un prolongement analytique en une fonction entière $\hat{\psi}_1(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$ vérifiant :

$$|\hat{\psi}_1(\zeta)| \leqslant \frac{C}{(1+|\zeta|)^{n+1}} e^{R|\operatorname{Im}\zeta|}.$$

En particulier en considérant $\zeta = \rho \cdot \omega$ avec $\rho \in \mathbb{C}$ et $\omega \in S^{n-1}$ on voit que $u_\omega^{j,h}$ est prolongeable en une fonction entière sur $\mathbb{C}_\rho$ et vérifie pour $\rho \in \mathbb{C}$:

$$|u_\omega^{j,h}(\rho)| \leqslant |\rho|^{n-1} \| f \| \frac{C^2}{(1+|\rho|)^{2n+1}} e^{2R|\operatorname{Im}\rho|}.$$

Le théorème de Paley-Wiener assure alors que la transformée de Fourier de $u_\omega^{j,h}$ par rapport à ρ est à support dans $[-2R, 2R]$. On en déduit que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\rho(\lambda_j(\omega)-\lambda_h(\omega))} u_\omega^{j,h}(\rho) = 0$$

si
$$|t(\lambda_j(\omega) - \lambda_h(\lambda))| \geqslant 2R.$$

Or
$$J(t) = \frac{C}{2} \sum_{1 \leqslant j \neq h \leqslant p} \int_{S^{n-1}} (\mathscr{F} u_\omega^{j,h})(t \cdot (\lambda_j(\omega) - \lambda_h(\omega))) d\omega.$$

Donc, si
$$|t| \geqslant \frac{2R}{\delta}, \qquad \delta = \inf_{\substack{j \neq h \\ \omega \in S^{n-1}}} |\lambda_j(\omega) - \lambda_h(\omega)|$$

alors $J(t) = 0$ et $|I(t)| < \varepsilon$ si bien que $I(t) = 0$. Enfin, on remarque que si

$$\hat{\psi}_0(\xi) = (P_{j_1}(\xi) + P_{j_2}(\xi) + \ldots + P_{j_r}(\xi))\hat{\psi}_0(\xi)$$

alors
$$I(t) = 0 \qquad \text{pour} \qquad |t| \geqslant \frac{2R}{\delta(j_1, \ldots, j_r)}$$

où
$$\delta(j_1, \ldots, j_r) = \inf_{\substack{\mu \neq \nu \\ 1 \leqslant \mu, \nu \leqslant r \\ \omega \in S^{n-1}}} |\lambda_{j_\mu}(\omega) - \lambda_{j_\nu}(\omega)|$$

ce qui achève la preuve du théorème 3.

Preuve du théorème 4. — Soit $\psi(t, x)$ la solution de :

$$\partial_t \psi - A(d)\psi + iB\psi = 0, \tag{2}$$

de donnée initiale $\psi(0, x) = \psi_0(x) \in (L^2(\mathbb{R}^n))^N$. f étant une forme sesquilinéaire sur $\mathbb{C}^N$, presque partout compatible avec (2), on note :

$$I(t) = \int f(\psi(t, x), \psi(t, x)) dx.$$

$\varepsilon > 0$ étant donné, on choisit $\psi_1(x)$ tel que :

$$\hat{\psi}_1 \in (\mathscr{D}(\mathbb{R}^n))^N$$

et $$|\psi_0 - \psi_1|_{L^2}^2 \leqslant \varepsilon .$$

On désigne par $\phi(t, x)$ la solution de (2) de donnée initiale $\phi(0, x) = \psi_1(x)$ et on note :

$$J(t) = \int f(\phi(t, x), \phi(t, x))dx .$$

Grâce à la conservation de l'énergie, on a :

$$|I(t) - J(t)| \leqslant c\varepsilon \tag{6}$$

où c ne dépend que de f et $|\psi_0|_{L^2}$.

Exprimons $J(t)$ à l'aide de l'égalité de Parseval :

$$J(t) = C \cdot \int_{S^{n-1}} u(t, \omega)d\omega ,$$

où

$$u(t, \omega) = \int_0^\infty f(e^{-it(\rho A(\omega)+B)}\hat{\psi}_1(\rho\omega), e^{-it(\rho A(\omega)+B)}\hat{\psi}_1(\rho\omega))\rho^{n-1}d\rho .$$

D'une part, on a :

$$|u(t, \omega)| \leqslant \|f\| \int_0^\infty \rho^{n-1} |\hat{\psi}_1(\rho\omega)|^2 d\rho = g(\omega)$$

où g est dans $L^1(S^{n-1})$.

D'autre part, ω étant fixé dans S^{n-1}, le théorème de Rellich assure l'existence d'une matrice diagonale réelle $A_\omega(\rho) = (\delta_{ij}\lambda_j^\omega(\rho))$ et d'une matrice unitaire $P_\omega(\rho)$, analytiques par rapport à ρ dans $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\rho A(\omega) + B = P_\omega^{-1}(\rho)A_\omega(\rho)P_\omega(\rho) .$$

Si π_j désigne la matrice de projection sur la $j^{\text{ème}}$ composante $u(t, \omega)$ s'écrit :

$$u(t, \omega) = \sum_{1 \leqslant j,h \leqslant N} \int_0^\infty e^{-it(\lambda_j^\omega(\rho) - \lambda_h^\omega(\rho))} f(P_\omega^{-1}(\rho)\pi_j P_\omega(\rho)\hat{\psi}_1(\rho\omega), \\ P_\omega^{-1}(\rho)\pi_h P_\omega(\rho)\hat{\psi}_1(\rho\omega))\rho^{n-1}d\rho . \tag{7}$$

$\lambda_j^\omega - \lambda_h^\omega$ étant analytique sur $\mathbb{R}$, $\lambda_j^\omega = \lambda_h^\omega$ sur $\mathbb{R}$ ou sur un ensemble discret. Si $\lambda_j^\omega = \lambda_h^\omega$ la compatibilité impose que pour presque tout ρ et presque tout ω : $f(P_\omega^{-1}(\rho)\pi_j P_\omega(\rho)\hat{\psi}_1(\rho\omega), P_\omega^{-1}(\rho)\pi_h P_\omega(\rho)\hat{\psi}_1(\rho\omega)) = 0$ si bien que l'intégrale est nulle. Donc, dans la somme (7) ne figurent que les intégrales correspondant à $\lambda_j^\omega \neq \lambda_h^\omega$. Nous allons montrer que ces intégrales tendent vers 0 quand $|t| \to \infty$. Soit $R > 0$ tel que :

$$\operatorname{supp} \hat{\psi}_1 \subset B(0, R) .$$

Soit $\varepsilon_1 > 0$. Puisque $\lambda_j^\omega \neq \lambda_h^\omega +$ cste l'ensemble $\mathcal{N}$ des points ρ de $[0, R]$

où $\frac{d}{d\rho}(\lambda_j^{\omega}(\rho) - \lambda_h^{\omega}(\rho))$ égale 0 est fini. On choisit alors χ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que χ soit égale à 1 sur un voisinage de $\mathcal{N}$, assez petit pour que

$$\int |\chi(\rho) f(\mathrm{P}_{\omega}^{-1}(\rho)\pi_j \mathrm{P}_{\omega}(\rho)\hat{\psi}_1(\rho\omega), \mathrm{P}_{\omega}^{-1}(\rho)\pi_h \mathrm{P}_{\omega}\hat{\psi}_1(\rho\omega))| \rho^{n-1} d\rho < \varepsilon_1 .$$

On a alors,

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-it(\lambda_j^{\omega}(\rho) - \lambda_h^{\omega}(\rho))} f(\mathrm{P}_{\omega}^{-1}(\rho)\pi_j \mathrm{P}_{\omega}(\rho)\hat{\psi}_1(\rho\omega), \mathrm{P}_{\omega}^{-1}(\rho)\pi_h \mathrm{P}_{\omega}(\rho)\hat{\psi}_1(\rho\omega))\rho^{n-1} d\rho \right| \leqslant \varepsilon_1 + \int_0^{\infty} e^{-it\varphi(\rho)} \mathrm{A}(\rho) d\rho$$

où

$$\varphi(\rho) = \lambda_j^{\omega}(\rho) - \lambda_h^{\omega}(\rho)$$

et

$$\mathrm{A}(\rho) = (1 - \chi(\rho)) f(\mathrm{P}_{\omega}^{-1}(\rho)\pi_j \mathrm{P}_{\omega}(\rho)\hat{\psi}_1(\rho\omega), \mathrm{P}_{\omega}^{-1}(\rho)\pi_h \mathrm{P}_{\omega}(\rho)\hat{\psi}_1(\rho\omega))\rho^{n-1} .$$

L'amplitude $\mathrm{A}(\rho)$ est une fonction de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ et $\varphi'(\rho)$ ne s'annule pas sur un voisinage du support de $\mathrm{A}(\rho)$. Le théorème de la phase stationnaire assure alors que :

$$\int_0^{\infty} e^{-it\varphi(\rho)} \mathrm{A}(\rho) d\rho \to 0 \qquad |t| \to \infty .$$

Ceci achève de montrer que pour presque tout ω

$$u(t, \omega) \to 0 \qquad \text{quand} \qquad |t| \to \infty .$$

Le théorème de convergence dominée permet de conclure que $\mathrm{J}(t) \to 0$ quand $|t| \to \infty$ ce qui, joint à (6), termine la preuve de la première partie du théorème. La preuve de la deuxième partie est rigoureusement analogue à celle du théorème 1.

II. EXEMPLES

Nous appliquons les théorèmes précédents à l'étude, successivement, de l'équation des ondes, des systèmes du second ordre $u_{tt} - (\mathrm{A}(d))^2 u = 0$ — ce qui permet de traiter l'équation des ondes élastiques en milieu inhomogène et l'équation des ondes magnétoélastiques en milieu parfaitement conducteur —, du système de Maxwell, du système de Dirac. Enfin, nous établissons un résultat analogue pour les systèmes hermitiens inhomogènes tels que l'équation de Klein-Gordon ou le système de Dirac avec masse non nulle et donnons un exemple de système n'admettant aucune forme d'équipartition de l'énergie : l'équation des neutrinos.

1) L'équation des ondes.

Le problème :

$$u_{tt} - \Delta_x u = 0\,, \quad u(0,x) = f(x)\,, \qquad u_t(0,x) = g(x)$$

est équivalent au système :

$$\begin{cases} \psi_t - \mathrm{A}(d)\psi = 0 \\ \psi(0,x) = \psi_0(x) \end{cases}$$

avec $\psi < (u_t, u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$, $\psi_0 = (g, f_{x_1}, \dots, f_{x_n})$ et

$$\mathrm{A}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & \xi_1, \dots, \xi_n \\ \xi_1 & 0 \;\dots\; 0 \\ \vdots & 0 \\ \xi_n & 0 \qquad 0 \end{bmatrix}$$

L'équipartition de l'énergie de u s'exprime à l'aide de ψ :

$$\int |\, u_t(t,x)\,|^2 - |\, \nabla_x u(t,x)\,|^2 dx = \int f(\psi(t,x), \psi(t,x))dx$$

où f est la forme sesquilinéaire de matrice diagonale.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de $\mathrm{A}(\xi)$ est égal à $\lambda^{n-1}(\lambda^2 - |\,\xi\,|^2)$. Un vecteur propre X de $\mathrm{A}(\xi)$ associé à $\varepsilon\,|\,\xi\,|$, $\varepsilon = \pm 1$, est de la forme $\mathrm{X} = \left(x_0, \varepsilon \dfrac{x_0}{|\,\xi\,|}\xi\right)$; donc $f(\mathrm{X},\mathrm{X}) = 0$. D'autre part, la projection sur $\operatorname{Ker} \mathrm{A}(\xi)$ d'un vecteur $\mathrm{X} = (x_0, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est égale à $\left(0, x - \dfrac{1}{|\,\xi\,|^2}(\xi \cdot x)\xi\right)$. Sachant que

$$\hat{\psi}_0(\xi) = (\,\hat{g}(\xi), i\hat{f}(\xi)\xi)$$

la projection orthogonale de $\hat{\psi}_0(\xi)$ sur $\operatorname{Ker} \mathrm{A}(\xi)$ est nulle. On peut donc appliquer les théorèmes 2 et 3 en tenant compte de la remarque. On en déduit que si $\nabla_x f$ et g sont dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de u tend vers 0 quand $|t| \to \infty$; si f et g sont dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, la décroissance est de l'ordre de $|t|^{-n}$ et si 0 n'est pas dans le support de $\hat{f}$ et $\hat{g}$ la décroissance est rapide ; enfin, si $\operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g$ est dans la boule $B(0, R)$ il y a égalité entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle pour $|t| \geqslant R$ ([*20*]).

2) Équations du second ordre.

On considère une solution ψ du système hyperbolique du second ordre suivant :

$$\partial_{tt}^2 \psi - (A(d))^2 \psi = 0 \tag{8}$$

où

$$A(d) = \sum_{i=1}^{n} A_i \partial_{x_i}$$

les A_i étant des matrices hermitiennes $N \times N$. On suppose que $\psi(0, x) = \psi_0(x)$, $\psi_t(0, x) = \psi_1(x)$ vérifient :

$$\begin{aligned} A(d)\psi_0 &\in (L^2(\mathbb{R}^n))^N \\ \psi_1 &\in (L^2(\mathbb{R}^n))^N . \end{aligned} \tag{9}$$

L'énergie cinétique $K(t)$ et l'énergie potentielle $P(t)$ sont définies par :

$$K(t) = \int |\psi_t(t, x)|^2 dx$$

$$P(t) = \int |A(d)\psi(t, x)|^2 dx .$$

Le problème de Cauchy (8) (9) est équivalent au système :

$$\left\{ \begin{aligned} & \partial_t \Psi - \begin{bmatrix} 0 & A(d) \\ A(d) & 0 \end{bmatrix} \Psi = 0 \\ & \Psi = (\psi_t, A(d)\psi), \qquad \Psi(0) = (\psi_1, A(d)\psi_0) \end{aligned} \right. \tag{10}$$

et

$$K(t) - P(t) = \int f(\Psi(t, x), \Psi(t, x)) dx$$

où f est la forme sesquilinéaire sur $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ définie par :

$$f((X, Y), (X, Y)) = |X|^2 - |Y|^2 .$$

Nous allons montrer que si 0 n'est pas valeur propre de $A(\xi)$, f est compatible avec le système (10).

Soient $\Lambda(\xi)$ une matrice diagonale réelle et $P(\xi)$ une matrice unitaire telles que :

$$A(\xi) = P^{-1}(\xi)\Lambda(\xi)P(\xi).$$

Si on note :

$$\mathscr{A}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & A(\xi) \\ A(\xi) & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathscr{L}(\xi) = \begin{bmatrix} \Lambda(\xi) & 0 \\ 0 & -\Lambda(\xi) \end{bmatrix}$$

et

$$\mathscr{P}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P(\xi) & 0 \\ 0 & P(\xi) \end{bmatrix}$$

on vérifie aisément que :

$$\mathscr{A}(\xi) = \mathscr{P}^{-1}(\xi)\mathscr{L}(\xi)\mathscr{P}(\xi)$$

si bien que les valeurs propres de $\mathscr{A}(\xi)$ sont celles de $A(\xi)$ et leur opposé avec la même multiplicité. Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de $\mathscr{A}(\xi)$ et (X, Y) un vecteur propre associé ; alors $X = \frac{1}{\lambda}A(\xi)Y$. On évalue :

$$f((X, Y), (X, Y)) = \frac{1}{\lambda^2}{}^tY{}^tA(\xi)\overline{A}(\xi)\overline{Y} - {}^tY\overline{Y}$$

or

$${}^tA(\xi)\overline{A}(\xi)\overline{Y} = \overline{A^2(\xi)Y} = \lambda^2\overline{Y}.$$

Donc $f((X, Y), (X, Y)) = 0$ ce qui montre que f est compatible. Nous pouvons appliquer le théorème 1. Pour appliquer les théorèmes 2 et 3 il est nécessaire que les valeurs propres de $\mathscr{A}(\xi)$ soient de multiplicité constante. Une condition suffisante pour cela est que la multiplicité des p valeurs propres $\lambda_j(\xi)$ de $A(\xi)$ soit constante et que pour tout $\xi \neq 0$

(11) $$\{ \lambda_j(\xi), 1 \leqslant j \leqslant p \} \cap \{ -\lambda_j(\xi), 1 \leqslant j \leqslant p \} = \phi.$$

Un cas particulier important pour les applications est celui où

(12) $$0 < \lambda_1(\xi) < \lambda_2(\xi) < \ldots < \lambda_p(\xi).$$

Nous concluons cette étude en énonçant le :

THÉORÈME 5. — *On suppose que* 0 *n'est pas valeur propre de* $A(\xi)$ *pour presque tout* ξ. *Alors si on note* $E = K(t) + P(t)$ *l'énergie totale conservée, on a :*

$$\lim_{|t|\to\infty} K(t) = \lim_{|t|\to\infty} P(t) = \frac{1}{2}E.$$

Si on suppose, de plus, que $\mathscr{A}(\xi)$ *est à multiplicité constante, pour* $\xi \neq 0$ $K(t) - P(t)$ *décroît comme* $|t|^{-n}$ *si* ψ_0 *et* ψ_1 *sont dans* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *; et si, de plus, tous les moments de* ψ_0 *et* ψ_1 *sont nuls, alors* $K(t) - P(t)$ *est à décroissance rapide.*

On suppose que $A(\xi)$ *et* $\mathscr{A}(\xi)$ *vérifient les hypothèses ci-dessus, et que la dimension de l'espace est impaire ; alors* $K(t) = P(t)$ *si*

$$\operatorname{supp} \psi_0 \cup \operatorname{supp} \psi_1 \subset B(0, R)$$

et

$$|t| \geqslant \frac{2R}{\delta}$$

où

$$\delta = \operatorname*{Inf}_{\substack{j \neq h \\ \omega \in S^{n-1}}} |\mu_j(\omega) - \mu_h(\omega)|$$

et les μ_j *sont les valeurs propres distinctes de* $\mathscr{A}(\xi)$. *En particulier, si (12) est satisfait,* $K(t) = P(t)$ *pour*

$$|t| \geqslant \frac{R}{\underline{\lambda}_1}, \qquad \underline{\lambda}_1 = \operatorname*{Inf}_{\omega \in S^{n-1}} (\lambda_1(\omega)),$$

et plus généralement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la composante de l'onde de vélocité $|\lambda_j|$ *sont égales pour* $|t| \geqslant \frac{R}{\underline{\lambda}_j}$, $\underline{\lambda}_j = \operatorname*{Inf}_{\omega \in S^{n-1}} (\lambda_j(\omega))$.

On a un résultat analogue pour :

$$\text{(13)} \qquad I(t) = \operatorname{Im} \int {}^t\psi_t(t, x) \cdot \overline{A(d)\psi(t, x)} dx .$$

En effet, la forme sesquilinéaire sur $\mathbb{C}^{2N}$ définie par :

$$f((X, Y), (X, Y)) = {}^tY \cdot \bar{X} - {}^tX\bar{Y}$$

est compatible avec le système (10) car pour $X = \frac{1}{\lambda} A(\xi)Y$

$${}^tY \cdot \overline{X} - {}^tX\overline{Y} = \frac{1}{\lambda}({}^tY\overline{A(\xi)}\,\overline{Y} - {}^tY{}^tA(\xi)\overline{Y}) = 0 .$$

On peut donc appliquer les théorèmes 1, 2, 3 à $I(t)$ et obtenir un théorème analogue au théorème 5. La convergence vers 0 de $I(t)$ donnée par (13) exprime que le moment de ψ devient réel quant $|t| \to \infty$. Enfin, on peut énoncer un résultat analogue en appliquant le théorème 4 aux équations du type :

$$\psi_{tt} - (A(d) + iB)^2\psi = 0 .$$

Le théorème 5 permet de retrouver des résultats récents sur la propagation des ondes en milieu non homogène.

3) **L'équation des ondes élastiques anisotropes.**

Il s'agit du système du second ordre

$$\partial_{tt}^2 u_i - \frac{1}{\rho} c_{ijkl} \partial_{x_j x_l}^2 u_k = 0 \,, \qquad i = 1, 2, 3 \,. \tag{14}$$

L'équipartition de l'énergie a été étudiée par G. Dassios, E. Galanis [*15*] et G. Dassios, M. Grillakis [*16*]. L'écriture tensorielle (14) est en fait équivalente à un système de type (8) et vérifiant (12). On peut appliquer le théorème 5 à :

$$\mathrm{K}(t) = \int \rho \,|\, \partial_t u_i \,|^2 dx$$

$$\mathrm{P}(t) = \int c_{ijkl} u_{i,j} \cdot u_{k,l} dx \,.$$

4) **L'équation des ondes magnétoélastiques dans un milieu conducteur.**

Le déplacement $u(t, x)$ d'un milieu élastique, homogène, parfaitement conducteur et soumis à un champ magnétique constant H vérifie les équations :

$$\rho u_{tt} = \mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot u) + \frac{\mu_0}{4\pi} (\nabla \times h) \times \mathrm{H}$$

où

$$h = \nabla \times (u \times \mathrm{H}) = \mathrm{H} \cdot \nabla u - \mathrm{H} \nabla \cdot u \,.$$

Cette équation est en fait équivalente à un système du type (8) vérifiant (12). Le théorème 5 montre l'équipartition entre l'énergie cinétique $\mathrm{K}(t)$ et l'équation potentielle $\mathrm{P}(t)$, somme de l'énergie de torsion élastique et de l'énergie d'interaction magnétique :

$$\mathrm{K}(t) = \rho \int |\, u_t \,|^2 dx \,,$$

$$\mathrm{P}(t) = \int \mu \,|\, \nabla u \,|^2 + (\lambda + \mu) \,|\, \nabla \cdot u \,|^2 + \frac{\mu_0}{4\pi} \,|\, h \,|^2 dx \,.$$

Le résultat a été établi par G. Dassios [*13*].

5) **Équations du second ordre non homogènes.**

On peut utiliser le théorème 4 pour généraliser le théorème 5 à l'étude des équations du type :

$$\partial_{tt}^2 \psi - (\mathrm{A}(d))^2 \psi + \mathrm{B}^2 \psi = 0 \tag{15}$$

où
$$A(d) = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

les matrices A_i et B étant hermitiennes. L'énergie cinétique $K(t)$ et l'énergie potentielle $P(t)$ sont définies par :

$$K(t) = \int |\psi_t(t,x)|^2 dx$$

$$P(t) = \int |A(d)\psi(t,x)|^2 + |B\psi(t,x)|^2 dx.$$

L'équation (15) est équivalente au système :

(15)
$$\partial_t \Psi - \mathscr{A}(d)\Psi + i\mathscr{B}\Psi = 0$$

où
$$\Psi = (\partial_t\psi, A(d)\psi, B\psi)$$

$$\mathscr{A}(d) = \begin{bmatrix} 0 & A(d) & 0 \\ A(d) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -iB \\ 0 & 0 & 0 \\ iB & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soit (X, Y, Z) un vecteur propre de $\mathscr{A}(\xi) + \mathscr{B}$ associé à une valeur propre $\lambda \neq 0$. On a :

(17)
$$A(\xi)Y - iBZ = \lambda X$$

(18)
$$A(\xi)X = \lambda Y$$

(19)
$$iBX = \lambda Z.$$

On déduit de (17) que :

$${}^tX\overline{X} = \frac{1}{\lambda^2}({}^tY\overline{A^2(\xi)Y} + {}^tZ\overline{B^2Z} + i{}^tY{}^tA(\xi)\overline{BZ} - i{}^tZ{}^tB\overline{A(\xi)Y}).$$

(17) et (18) donnent

$${}^tY\overline{A^2(\xi)Y} = \lambda^2\,{}^tY\overline{Y} - i{}^tY{}^tA(\xi)\overline{B}\,\overline{Z}$$

(17) et (19) donnent:

$${}^tZ\overline{B^2Z} = \lambda^2\,{}^tZ\overline{Z} + i{}^tZ{}^tB\overline{A(\xi)}\,\overline{Y}.$$

On en conclut que :

(20)
$${}^tX\overline{X} - {}^tY\overline{Y} - {}^tZ\overline{Z} = 0.$$

Montrons à présent que la projection de $\hat{\Psi}(0, \xi)$ sur Ker $\mathscr{A}(\xi) + \mathscr{B}$ est nulle si $A^2(\xi) + B^2$ est inversible. D'après (17) (18) (19) un vecteur (X, Y, Z) est un vecteur propre pour $\mathscr{A}(\xi) + \mathscr{B}$ si

$$Y = \frac{1}{\lambda} A(\xi)X$$

$$Z = \frac{i}{\lambda} BX$$

$$(A^2(\xi) + B^2)X = \lambda^2 X .$$

On en déduit que les valeurs propres non nulles de $\mathscr{A}(\xi) + \mathscr{B}$ sont égales à $\pm \sqrt{\mu}$ où μ est valeur propre non nulle de $A^2(\xi) + B^2$. Décomposons $\hat{\psi}_0(\xi)$ et $\hat{\psi}_1(\xi)$ en projections sur les sous-espaces propres de $A^2(\xi) + B^2$ supposée inversible :

$$\hat{\psi}_0(\xi) = \sum_{\mu \in \underline{\Lambda}} \varphi_{0,\mu}(\xi)$$

$$\hat{\psi}_1(\xi) = \sum_{\mu \in \underline{\Lambda}} \varphi_{1,\mu}(\xi)$$

et $(A^2(\xi) + B^2)\varphi_{i,\mu}(\xi) = \mu\varphi_{i,\mu}(\xi)$, où $\underline{\Lambda}$ est l'ensemble des valeurs propres de $A^2(\xi) + B^2$.

Sachant que

$$\hat{\Psi}_0(\xi) = \begin{bmatrix} \hat{\psi}_1(\xi) \\ - iA(\xi)\hat{\psi}_0(\xi) \\ B\hat{\psi}_0(\xi) \end{bmatrix}$$

on a :

$$\hat{\psi}_0(\xi) = \sum_{\mu \in \underline{\Lambda}} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varphi_{1,\mu} - i\sqrt{\mu}\varphi_{0,\mu} \\ \frac{1}{\sqrt{\mu}} A(\varphi_{1,\mu} - i\sqrt{\mu}\varphi_{0,\mu}) \\ \frac{i}{\sqrt{\mu}} B(\varphi_{1,\mu} - i\sqrt{\mu}\varphi_{0,\mu}) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varphi_{1,\mu} + i\sqrt{\mu}\varphi_{0,\mu} \\ \frac{-1}{\sqrt{\mu}} A(\varphi_{1,\mu} + i\sqrt{\mu}\varphi_{0,\mu}) \\ \frac{-i}{\sqrt{\mu}} B(\varphi_{1,\mu} + i\sqrt{\mu}\varphi_{0,\mu}) \end{bmatrix}$$

ce qui réalise la décomposition de $\hat{\Psi}_0(\xi)$ selon les sous-espaces propres de $\mathscr{A}(\xi) + \mathscr{B}$. On en déduit que la projection de $\hat{\Psi}_0(\xi)$ sur le noyau est nulle. On peut appliquer le théorème 4 à la forme $|X|^2 - |Y|^2 - |Z|^2$ pour les solutions du sytème (16) en tenant compte de la remarque pourvu que les valeurs propres de $\mathscr{A}(\xi) + \mathscr{B}$ vérifient l'hypothèse H_1 que l'on peut exprimer en fonction des valeurs propres de $A^2(\xi) + B^2$.

$$(\mathrm{H}'_1)\quad\left\{\begin{array}{l}\text{Pour presque tout } \omega \text{ dans } \mathrm{S}^{n-1}, \text{ si } \mu_j(\rho\omega) \text{ et } \mu_h(\rho\omega) \text{ sont deux}\\ \text{valeurs propres de } \rho^2\mathrm{A}^2(\omega) + \mathrm{B}^2, \text{ analytiques pour } \rho > 0, \text{ alors}\\ \sqrt{\mu_j(\rho\omega)} - \sqrt{\mu_h(\rho\omega)} \text{ et } \sqrt{\mu_j(\rho\omega)} + \sqrt{\mu_h(\rho\omega)} \text{ ne sont pas identi-}\\ \text{quement égales pour } \rho > 0 \text{ à une constante non nulle.}\end{array}\right.$$

THÉORÈME 6. — *On suppose que* B *est inversible ou que pour presque tout* ξ, $\mathrm{A}(\xi)$ *est inversible. On suppose, de plus, que* (H'_1) *est vérifiée. Soit* ψ *une solution d'énergie finie de (15). On note* E *l'énergie totale conservée, somme de l'énergie cinétique* $\mathrm{K}(t)$ *et de l'énergie potentielle* $\mathrm{P}(t)$ *où*

$$\mathrm{K}(t) = \int |\,\psi_t(t,x)\,|^2 dx$$

$$\mathrm{P}(t) = \int |\,\mathrm{A}(d)\psi(t,x)\,|^2 + |\,\mathrm{B}\psi(t,x)\,|^2 dx\,.$$

Alors

$$\lim_{|t|\to\infty} \mathrm{K}(t) = \lim_{|t|\to\infty} \mathrm{P}(t) = \frac{1}{2}\mathrm{E}\,.$$

6) Système de Maxwell.

On considère le système :

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{l}\partial_t \mathrm{E} = \mathrm{rot}\,\mathrm{H}\\ \partial_t \mathrm{H} = -\,\mathrm{rot}\,\mathrm{E}\\ \mathrm{div}\,\mathrm{E} = \mathrm{div}\,\mathrm{H} = 0\,.\end{array}\right.$$

Les deux premières équations sont équivalentes au système hermitien

$$\partial_t\begin{bmatrix}\mathrm{E}\\ \mathrm{H}\end{bmatrix} - \mathrm{A}(d)\begin{bmatrix}\mathrm{E}\\ \mathrm{H}\end{bmatrix} = 0$$

où

$$\mathrm{A}(\xi) = \begin{bmatrix}0 & {}^t\mathrm{B}(\xi)\\ \mathrm{B}(\xi) & 0\end{bmatrix} \qquad \mathrm{B}(\xi) = \begin{bmatrix}0 & \xi_3 & -\,\xi_2\\ -\,\xi_3 & 0 & \xi_1\\ \xi_2 & -\,\xi_1 & 0\end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de $\mathrm{A}(\xi)$ sont 0, $|\,\xi\,|$, $-\,|\,\xi\,|$ et si

$$\mathrm{A}(\xi)\begin{bmatrix}\mathrm{X}\\ \mathrm{Y}\end{bmatrix} = \varepsilon\,|\,\xi\,|\begin{bmatrix}\mathrm{X}\\ \mathrm{Y}\end{bmatrix}$$

on a :

$$\mathrm{Y} = \frac{\varepsilon}{|\,\xi\,|}\mathrm{B}(\xi)\mathrm{X}\,, \qquad \mathrm{X} = \frac{\varepsilon}{|\,\xi\,|}\,{}^t\mathrm{B}(\xi)\mathrm{Y}$$

si bien que

$$|X|^2 - |Y|^2 = 0, \qquad {}^t X\overline{Y} + {}^t Y\overline{X} = 0.$$

D'autre part, si $\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$ est la projection de $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ sur Ker A(ξ) on voit aisément que

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \frac{1}{|\xi|^2} A^2(\xi) \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}.$$

Le calcul donne alors :

$$X_0 = (\xi \cdot X)\xi$$
$$Y_0 = (\xi \cdot Y)\xi.$$

Si la donnée initiale $E(0, x)$, $H(0, x)$ vérifie :

$$\operatorname{div} E(0, x) = \operatorname{div} H(0, x) = 0$$

la projection de $(\hat{E}(0, \xi), \hat{H}(0, \xi))$ sur Ker A(ξ) est égale à $((\xi \cdot \hat{E}(0, \xi))\xi$, $(\xi \cdot \hat{H}(0, \xi))\xi) = 0$. On peut appliquer les théorèmes 1, 2 et 3 en tenant compte de la remarque pour les formes $f((E, H), (E, H)) = |E|^2 - |H|^2$ et $\mathscr{R}e\, E \cdot \overline{H}$, on retrouve l'équipartition, à temps fini pour les données à support compact, de l'énergie électrique et de l'énergie magnétique, et l'orthogonalité de E et H quand $|t| \to \infty$, [*10*].

7) Système de Dirac (masse nulle).

On considère le système hermitien

$$\partial_t \psi - A(d)\psi = 0$$

où

$$A(\xi) = \sum_{i=1}^{3} \xi_i \begin{bmatrix} 0 & a_i \\ a_i & 0 \end{bmatrix}$$

où (a_i) désigne les matrices de Pauli

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

B. Hanouzet et J. L. Joly ont montré dans [*31*] qu'une forme sesquilinéaire sur $\mathbb{C}^4$ était compatible avec le système de Dirac si et seulement si sa matrice est de la forme :

$$\begin{bmatrix} \alpha I & \beta I \\ -\beta I & -\alpha I \end{bmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

$\alpha = 1$, $\beta = 0$ correspond à la matrice γ_4 dans les notations habituelles de la théorie de Dirac et donne l'équipartition de la charge entre les deux fonctions d'onde (ψ_1, ψ_2) et (ψ_3, ψ_4) qui composent le spineur ψ

$$\lim_{t\to t} \int |\psi_1(t,x)|^2 + |\psi_2(t,x)|^2 dx = \lim_{t\to t} \int |\psi_3(t,x)|^2 + |\psi_4(t,x)|^2 dx .$$

Cette équipartition a été établie par Costa et Strauss [*10*].

$\alpha = 0$, $\beta = 1$ correspond à la matrice $\gamma_4\gamma_5$ qui apparaît souvent en théorie de jauge. A notre connaissance l'équipartition pour la forme $\gamma_4\gamma_5$ n'était pas établie. Enfin, notons que le théorème 3 s'applique et qu'il y a équipartition en temps fini pour les données initiales à support compact.

8) Système de Dirac (masse non nulle).

Les champs fermioniques libres massifs obéissent à l'équation :

$$\partial_t\psi - A(d)\psi + iM\gamma_4\psi = 0$$

où

$$A(\xi) + M\gamma_4 = \begin{bmatrix} MI & a(\xi) \\ a(\xi) & -MI \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de $A(\xi) + M\gamma_4$ sont $\pm\sqrt{|\xi|^2 + M^2}$ et un vecteur propre (X, Y) vérifie :

$$Y = \frac{1}{M \pm \sqrt{|\xi|^2 + M^2}} X, \qquad (\xi \neq 0)$$

si bien que

$$|X|^2 - |Y|^2 \neq 0$$

et

$${}^t X\overline{Y} - {}^t Y\overline{X} = 0 .$$

On en conclut que la forme sesquilinéaire $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 - |\psi_4|^4$ n'est pas compatible avec le système de Dirac massif, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'équipartition de la charge entre (ψ_1, ψ_2) et (ψ_3, ψ_4) alors que, par contre, la forme sesquilinéaire $(\psi_1\overline{\psi}_3 + \psi_2\overline{\psi}_4 - \psi_3\overline{\psi}_1 - \psi_4\overline{\psi}_2)$ est compatible si bien que l'on peut lui appliquer le théorème 4.

9) Équation de Klein-Gordon.

On considère l'équation :

$$\Box u + m^2 u = 0$$

$$u(0,x) = f(x) ; \qquad u_t(0,x) = g(x) .$$

On pose :

$$U = (u_0, u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$$

où

$$u_0 = \partial_t u$$

$$u_i = \partial_{x_i} u, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

$$u_{n+1} = mu .$$

L'équation de Klein-Gordon devient alors

$$\partial_t U - A(d)U + iBU = 0$$

où

$$A(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & \xi_1 \ldots \xi_n & 0 \\ \xi_1 & & \\ \vdots & & \\ \xi_n & 0 & \\ 0 & & \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & \ldots\ldots. & 0 & im \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ -im & 0 \ldots.. & & 0 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de $A(\xi) + B$ est $\lambda^n(\lambda^2 - (|\xi|^2 + m^2))$. Un vecteur propre de $A(\xi) + B$ relatif à la valeur propre $\pm \sqrt{|\xi|^2 + m^2}$ est du type $\left(x_0, \pm \frac{x_0}{\sqrt{|\xi|^2 + m^2}} \xi, \mp \frac{imx_0}{\sqrt{|\xi|^2 + m^2}}\right)$. Un tel vecteur est isotrope pour la forme :

$$|x_0|^2 - \sum_{i=1}^{n+1} |x_i|^2 .$$

D'autre part, la projection sur $\operatorname{Ker}(A(\xi) + B)$ d'un vecteur

$$X = (x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_0, x, x_{n+1})$$

est égale à

$$\left(0, x - \left(\frac{\xi \cdot x + imx_{n+1}}{|\xi|^2 + m^2}\right)\xi, x_{n+1} + \frac{im}{|\xi|^2 + m^2}(\xi \cdot x + imx_{n+1})\right).$$

La condition initiale $U(0, x)$ vérifie :

$$\hat{U}(0, \xi) = (\hat{g}(\xi), + i\hat{f}(\xi)\xi, m\hat{f}(\xi))$$

si bien que sa projection sur $\operatorname{Ker}(A(\xi) + B)$ est nulle.

On peut appliquer le théorème 4 et la remarque et déduire que, pour toute solution d'énergie finie de l'équation de Klein-Gordon, il y a équipartition de l'énergie :

$$\lim_{|t| \to \infty} \int |u_t(t, x)|^2 dx = \lim_{|t| \to \infty} \int |\nabla_x u(t, x)|^2 + m^2 |u(t, x)|^2 dx .$$

10) Un système n'admettant pas d'équipartition : l'équation des neutrinos.

L'équation des neutrinos est le système hermitien 2×2 :

$$\partial_t \psi + \sum_{j=1}^{3} a_j \partial_{x_j} \psi = 0 , \qquad \psi = (\psi_1 , \psi_2) ,$$

où les a_j sont les matrices de Pauli (voir l'exemple 7). On vérifie aisément que la seule forme compatible est la forme nulle ; ce système n'admet donc aucune équipartition de l'énergie. Remarquons cependant, que chaque composante ψ_i étant solution de l'équation des ondes $\square \psi_i = 0$, il y a équipartition de leurs énergies cinétiques et potentielles.

APPENDICE

On considère le système hyperbolique

$$\mathscr{L} = \mathrm{I}\partial_t - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i \partial_{x_i} \tag{1}$$

et une forme sesquilinéaire f de matrice F dans la base canonique de $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$. Dans [*30*] [*31*] il est établi que f est compatible avec le système (1) si et seulement si, pour tout $(\tau, \xi) \neq 0$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, il existe deux matrices $\mathrm{D}(\tau, \xi)$ et $\mathrm{G}(\tau, \xi)$ telles que :

$$\mathrm{F} = {}^t\overline{(\tau.\mathrm{I} - \mathrm{A}(\xi))}\mathrm{D}(\tau, \xi) + {}^t\overline{\mathrm{G}}(\tau, \xi)(\tau.\mathrm{I} - \mathrm{A}(\xi)).$$

f est dite régulièrement compatible si, de plus, $\mathrm{G}(\tau, \xi)$ et $\mathrm{D}(\tau, \xi)$ sont bornées pour $|\tau| + |\xi| = 1$. Nous établissons le résultat suivant :

PROPOSITION. — *Soit f une forme sesquilinéaire presque partout compatible avec (1). On suppose que pour $\xi \neq 0$ les valeurs propres de* $\mathrm{A}(\xi)$ *sont de multiplicité constante. Alors f est régulièrement compatible (et* a fortiori, *compatible).*

Preuve. — Il existe un ensemble négligeable $\mathscr{N}$ de $\mathbb{R}^n$, tel que, pour tout τ réel, le noyau de $\tau \cdot \mathrm{I} - \mathrm{A}(\xi)$ est dans le cône isotrope de f si ξ n'est pas dans $\mathscr{N}$. D'après les propositions 6 et 9 de [*31*] on peut alors écrire F sous la forme :

$$\mathrm{F} = {}^t\overline{(\mathrm{I}\tau - \mathrm{A}(\xi))}\mathrm{D}(\tau, \xi) + {}^t\overline{\mathrm{G}}(\tau, \xi)(\mathrm{I}\tau - \mathrm{A}(\xi)), \qquad \xi \notin \mathscr{N} \tag{22}$$

avec

$$\mathrm{D}(\tau, \xi) = \int_{-\infty}^{0} (\mathrm{I}\tau - \mathrm{A}(\xi))e^{s\mathrm{S}}\mathrm{F}e^{s\mathrm{S}}ds \tag{23}$$

$$\mathrm{G}(\tau, \xi) = \int_{-\infty}^{0} (\mathrm{I}\tau - \mathrm{A}(\xi))e^{s\mathrm{S}}\,{}^t\overline{\mathrm{F}}e^{s\mathrm{S}}ds \tag{24}$$

où
$$\mathrm{S} = (\mathrm{I}\tau - \mathrm{A}(\xi))^2.$$

Soient $\tau_1(\xi) < \ldots < \tau_p(\xi)$ les p valeurs propres distinctes de $\mathrm{A}(\xi)$ pour $\xi \notin \mathscr{N}$. Les valeurs propres de S sont donc $|\tau - \tau_j(\xi)|^2$. Si on note $\pi_j(\xi)$ le projecteur associé à $\tau_j(\xi)$, on a :

$$e^{s\mathrm{S}}\mathrm{F}e^{s\mathrm{S}} = \sum_{1 \leqslant j,h \leqslant p} e^{s(|\tau-\tau_j(\xi)|^2 + |\tau-\tau_h(\xi)|^2)}\pi_j(\xi)\mathrm{F}\pi_h(\xi).$$

Par compatibilité $\pi_j \mathrm{F} \pi_j = 0$ si $\xi \notin \mathscr{N}$ et donc

$$e^{s\mathrm{S}}\mathrm{F}e^{s\mathrm{S}} = \sum_{1 \leqslant j \neq h \leqslant p} e^{s(|\tau-\tau_j(\xi)|^2 + |\tau-\tau_h(\xi)|^2)}\pi_j(\xi)\mathrm{F}\pi_h(\xi).$$

Or,

$$\begin{aligned}|\tau - \tau_j(\xi)|^2 + |\tau - \tau_h(\xi)|^2 &\geqslant \frac{1}{2}(|\tau - \tau_j(\xi)| + |\tau - \tau_h(\xi)|)^2 \\ &\geqslant \frac{1}{2}|\tau_j(\xi) - \tau_h(\xi)|^2.\end{aligned}$$

Les valeurs propres τ_j étant continues en ξ on a :

$$0 < \delta = \operatorname*{Inf}_{\substack{j \neq h \\ |\xi| = 1}} \frac{1}{2} | \tau_j(\xi) - \tau_h(\xi) |^2 .$$

Donc, pour tout τ et presque tout ξ, on a :

$$| \mathrm{D}(\tau, \xi) | \leqslant \mathrm{C}(| \tau | + | \xi |) \int_{-\infty}^{0} e^{\delta |\xi|^2 s} ds \tag{25}$$

et la même estimation tient pour $\mathrm{G}(\tau, \xi)$.

D'autre part, si

$$\mathrm{M} = \operatorname*{Sup}_{\substack{j \\ |\xi| = 1}} | \lambda_j(\xi) |$$

on a :

$$| \tau - \tau_j(\xi) |^2 + | \tau - \tau_h(\xi) |^2 \geqslant 2(| \tau | - | \xi | \mathrm{M})^2$$

et donc,

$$| \mathrm{D}(\tau, \xi) | \leqslant \mathrm{C}(| \tau | + | \xi |) \int_{-\infty}^{0} e^{2(|\tau| - |\xi| \mathrm{M})^2 s} ds . \tag{26}$$

A présent si $| \tau | + | \xi | = 1$ on a :

$$\begin{aligned} (| \tau | - | \xi | \mathrm{M})^2 &\geqslant (1 - | \xi | (\mathrm{M} + 1))^2 \\ &\geqslant 1 - 2(\mathrm{M} + 1) | \xi | . \end{aligned}$$

On déduit alors de (25) et (26) pour tout τ et tout $\xi \notin \Gamma$ et tels que $| \tau | + | \xi | = 1$.

$$| \mathrm{D}(\tau, \xi) | \leqslant \mathrm{C} \cdot \mathrm{Inf} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{\delta |\xi|^2 s} ds, \int_{-\infty}^{0} e^{(2 - 4(\mathrm{M}+1)|\xi|)s} ds \right)$$

et donc

$$\sup_{\substack{|\tau| + |\xi| = 1 \\ \xi \notin \Gamma}} | \mathrm{D}(\tau, \xi) | < + \infty .$$

On conclut que pour tout $(\tau, \xi) \neq (0, 0)$ on peut définir à l'aide de (23) et (24) des matrices D et G vérifiant (22) et bornées sur $\{ | \tau | + | \xi | = 1 \}$, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] G. S. S. Avila et D. G. Costa, Decay of solutions of symmetric hyperbolic systems of partial differential equations, *Rocky Mountain J. Math.*, t. **9**, n° 3, 1979, p. 405-413.

[*2*] G. S. S. Avila et D. G. Costa, Asymptotic properties of general symmetric hyperbolic systems, *J. Funct. Anal.*, t. **35**, 1980, p. 49-63.

[*3*] A. Bachelot, *Régularité microlocale de produits dans les espaces de type L^p et propagation des singularités*. Publications de l'Université de Bordeaux I, n° 8407.

[*4*] A. Bachelot, B. Hanouzet, Applications bilinéaires compatibles avec un système différentiel à coefficients variables. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **299**, série I, n° 12, 1984, p. 543-546.

[*5*] A. Bachelot, Équipartition de l'énergie pour les systèmes hyperboliques et formes compatibles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **301**, série I, n° 11, 1985, p. 573-576.

[*6*] C. Bardos et D. G. Costa, Decay along non-bicharacteristic says of solutions of first order hyperbolic systems, *J. Math. Pures Appl.*, t. **53**, 1974, p. 427-435.

[7] L. E. BOBISUD, J. CALVERT, Energy bounds and virial theorems for abstract wave equation, *Pacific J. Math.*, t. **47**, 1973, p. 27-37.

[8] A. R. BRODSKY, On the asymptotic behavior of solutions of the wave equation, *Proc. A. M. S.*, t. **18**, 1967, p. 207-208.

[9] D. G. COSTA, On partition of energy uniformly propagative systems, *J. Math. Anal. App.*, t. **58**, 1977, p. 56-62.

[10] D. G. COSTA et W. A. STRAUSS, Energy splitting, *Quart. Appl. Math.*, t. **39**, 1981, p. 351-361.

[11] G. DASSIOS, Equipartition of energy in elastic wave propagation, *Mech. Res. Comm.*, t. **6** (1), 1979, p. 45-50.

[12] G. DASSIOS, Equipartition of energy for Maxwell's equations, *Quart. Appl. Mat.*, t. **37** (4), 1980, p. 465-469.

[13] G. DASSIOS, Energy theorems for magnetoelastic waves in a perfectly conducting medium, *Quart. Appl. Math.*, t. **39** (4), 1982, p. 479-490.

[14] G. DASSIOS, Finite time equipartition for second-order hyperbolic systems. *I. M. A., J. Appl. Math.*, t. **29**, 1982, p. 197-202.

[15] G. DASSIOS, E. GALANIS, Asymptotic equipartition of kinetic and strain energy for elastic waves in anisotropic media, *Quart. Appl. Math.*, t. **38** (1), 1980, p. 121-128.

[16] G. DASSIOS, M. GRILLAKIS, Equipartition of energy for anisotropic elastic waves, *J. Diff. Equat.*, t. **51**, 1984, p. 408-418.

[17] G. DASSIOS, M. GRILLAKIS, Dissipation rates and partition of energy in thermoelasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.*, t. **87**, 1984, p. 49-91.

[18] G. DASSIOS, M. GRILLAKIS, Equipartition of energy in scattering theory, *S. I. A. M., J. Math. Anal.*, t. **14**, 1983, p. 915-924.

[19] G. DASSIOS, M. GRILLAKIS, Asymptotic equipartition rate for wave motion in an even number of space dimensions, *à paraître* in *J. Math. Anal. Appl.*

[20] R. J. DUFFIN, Equipartition of energy in wave motion, *J. Math. Anal. Appl.*, t. **32**, 1970, p. 386-391.

[21] R. T. GLASSEY, On the asymptotic behavior of nonlinear wave equations, *Trans. A. M. S.*, t. **182**, 1973, p. 187-200.

[22] R. T. GLASSEY, W. A. STRAUSS, *Propagation of the energy of Yang-Mills fields*, in: *Bifurcation phenomena in mathematical physics* (ed. D. Bessis et C. Bardos), Reidel Publ. Co, p. 231-241.

[23] J. A. GOLDSTEIN, An asymptotic property of solutions of wave equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **23**, 1969, p. 359-363.

[24] J. A. GOLDSTEIN, An asymptotic property of solutions of wave equations II, *J. Math. Anal. Appl.*, t. **32**, 1970, p. 392-399.

[25] J. A. GOLDSTEIN, S. J. ROSENCRANS, Energy decay and partition for dissipative wave equations, *J. Diff. Equat.*, t. **36**, 1980, p. 66-73.

[26] J. A. GOLDSTEIN, J. T. SANDEFUR (Jr), Asymptotic equipartition of energy for differential equations in Hilbert Space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **219**, 1976, p. 397-406.

[27] J. A. GOLDSTEIN, J. T. SANDEFUR (Jr), Abstract equipartition of energy theorems, *J. Math. Appl.*, t. **67**, 1979, p. 58-74.

[28] K. HAMDACHE, Existence globale et comportement asymptotique pour des systèmes hyperboliques semi-linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **297**, 1983, p. 619-622.

[29] B. HANOUZET, Applications bilinéaires compatibles avec un système à coefficients variables. Continuité dans les espaces de Besov, *C. P. D. E.*, t. **10** (4), 1985, p. 433-465.

[30] B. HANOUZET, J. L. JOLY, Applications bilinéaires sur certains sous-espaces de type Sobolev, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **294**, 1982, p. 745-747.

[31] B. HANOUZET, J. L. JOLY, *Formes multilinéaires sur des sous-espaces de distributions*, Publication de l'Université de Bordeaux I, n° 8203.

[32] B. HANOUZET, J. L. JOLY, Bilinear maps compatible with a system, in: *Contributions*

to nonlinear partial differential equations (C. Bardos, A. Damlamian, I. J. Diaz, J. Hernandez, eds), *Research Notes in Math.*, t. **89**, Pitman Advanced Publishing Program, 1983.

[*33*] B. HANOUZET, J. L. JOLY, Applications bilinéaires compatibles avec un système hyperbolique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **301**, série I, 1985, p. 491-494.

[*34*] H. A. LEVINE, An equipartition of energy theorem for weak solutions of evolutionary equations in Hilbert space: the Lagrange identity method. *J. Diff. Equat.*, t. **24**, 1977, p. 197-210.

[*35*] K. MOCHIZUKI, Asymptotic property of solutions of some higher order hyperbolic equations I, *Proc. Japan Acad.*, t. **46**, 1970, p. 262-272.

[*36*] R. S. STRICHARTZ, Asymptotic behavior of waves, *J. Funct. Anal.*, t. **40**, 1981, p. 341-357.

[*37*] C. H. WILCOX, Asymptotic wave functions and energy distributions in strongly propagative anisotropic media, *J. Math. Pures Appl.*, t. **57**, 1978, p. 275-321.

(Manuscrit reçu le 20 avril 1986)

(Version révisée reçue le 28 juin 1986)