

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

P. FOULON

Réductibilité de systèmes dynamiques variationnels

Annales de l'I. H. P., section A, tome 45, n° 4 (1986), p. 359-388

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1986__45_4_359_0

© Gauthier-Villars, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Réductibilité de systèmes dynamiques variationnels

par

P. FOULON

Centre de Physique Théorique de l'École Polytechnique,
Plateau de Palaiseau, 91128 Palaiseau, Cedex, France
« Laboratoire Propre LP.14 du CNRS »

RÉSUMÉ. — Nous étudions les conditions de réductibilité que doit satisfaire un système dynamique variationnel pour qu'il admette une classe non triviale de lagrangiens équivalents. Cette question génère un problème plus large d'équivalence de formes de contact pour lequel on donne un théorème de réductibilité qui précise les propriétés géométriques spécifiques aux systèmes dynamiques réductibles. Par rapport à ce problème étendu de nature globale, le cas plus restrictif de l'équivalence lagrangienne présente des contraintes locales que nous résolvons de façon effective grâce à l'utilisation de la géométrie des équations différentielles du second ordre.

ABSTRACT. — We study the reducibility conditions that a variational dynamical system should satisfy in order to admit a non trivial class of equivalent lagrangians. This question leads to a broader problem of equivalence for contact forms. We give a reducibility theorem for that case, stating the geometric properties specific of reducible dynamical systems. As compared with this global extended problem, the more restrictive case of lagrangian equivalence exhibits local constraints. These constraints are effectively solved by using geometric properties of second order differential equations.

INTRODUCTION

En mécanique classique, quand un système peut être décrit par un lagrangien, celui-ci n'est jamais unique. Pour un lagrangien donné, toute une classe de transformations telles que multiplication par une constante ou addition d'une différentielle ne modifient pas les équations de Lagrange du mouvement. Les transformations que je viens de citer sont applicables à tous les lagrangiens quelle que soit la nature des problèmes physiques qu'ils décrivent : elles ne contiennent donc aucune information.

Par contre, on peut se demander si certains lagrangiens particuliers admettent d'autres lagrangiens « équivalents » non déduits par les transformations triviales précédentes, mais conduisant aux mêmes solutions du mouvement.

C'est cette question qui est à l'origine de ce travail. En fait on conçoit bien que de tels phénomènes ne peuvent se produire que pour des systèmes particuliers et que ce n'est pas la construction d'autres lagrangiens mais plutôt les propriétés spécifiques de ces systèmes qu'il faut dégager. D'une manière peu précise, on peut donner dès maintenant une idée générale des résultats.

L'existence de lagrangiens équivalents non triviaux est liée à des propriétés géométriques de décomposabilité du système en sous-systèmes. Les propriétés des sous-systèmes obtenus pourraient nous suggérer dans un sens très géométrique, de les appeler « modes » ou « pseudo-particules », de la même manière que pour un système à variables séparées on pourrait employer le vocable de particules indépendantes.

Pour passer de l'existence de plusieurs lagrangiens équivalents non triviaux à la mise en évidence de cette décomposition invariante et donc à la lecture directe de certaines propriétés du système étudié, on a besoin d'un formalisme qui fasse clairement apparaître les propriétés géométriques liées au calcul des variations. Quand on développe ce formalisme intrinsèque, on s'aperçoit qu'à tout problème lagrangien sont associés en fait deux objets de nature différente. Il y a le *champ de vecteurs solution*. Mais les équations de Lagrange sont des équations différentielles du second ordre et donc ce champ est d'un type particulier : on lui donne d'ailleurs le nom d'*équation différentielle du second ordre*. Ce champ est déterminé par un système d'équations linéaires dont les coefficients sont construits à partir d'une 1-forme différentielle qui se déduit du lagrangien. Cette forme est dans le cas d'un problème régulier une *forme de contact*. L'équation du calcul des variations, écrite sous cette forme, peut être généralisée à toute forme de contact ne provenant pas nécessairement d'un lagrangien. De même le problème initial de l'équivalence des lagrangiens trouve une généralisation naturelle, dans celui de l'équivalence des formes de contact.

Dans cet article, nous commençons par travailler dans ce cadre étendu. Il est à noter que l'aspect variationnel ne disparaît pas complètement, puisqu'avec 1-forme de contact on a une fonctionnelle sur les chemins en prenant l'intégrale de cette 1-forme. Il s'agit donc d'une version à la « Mau-pertuis » du principe variationnel, et comme d'habitude, on a un champ de vecteurs solution. En fait, c'est un champ de directions qui est uniquement déterminé car aucun paramétrage n'est vraiment privilégié dans ce contexte. Par extension on peut appeler un tel champ de directions « système dynamique ».

Notre première démarche consiste à trouver les propriétés particulières des « systèmes dynamiques » qui peuvent être (dans le sens précédent) déterminés par plusieurs formes de contact non trivialement équivalentes. Les propriétés géométriques de décomposition invariante qu'ils doivent satisfaire sont réunies dans le théorème de réductibilité (Théorème 2.5). Le champ d'application de ce théorème est beaucoup plus vaste que le simple problème de l'équivalence des lagrangiens. Tous les systèmes considérés classiquement comme complètement intégrables sont réductibles. Mais beaucoup d'autres cas plus généreux sont possibles.

La deuxième question serait de savoir si un système donné est réductible. Mais dans ce cadre général, la réductibilité peut toujours être satisfaite localement. Il en résulte que c'est un problème global au même titre que celui de la complète intégrabilité des systèmes hamiltoniens. Par contre, si on se limite au problème de la réductibilité lagrangienne (équivalence de lagrangiens), on a alors un problème restreint beaucoup plus rigide. Le Théorème 4.4 et ses corollaires nous montrent qu'il faut vérifier des conditions locales. Dans la pratique celles-ci sont suffisamment restrictives pour qu'on puisse conclure. Parfois cependant, l'obstruction à la réductibilité lagrangienne est de nature globale. Pour tester ceci, nous considérons l'exemple très particulier d'une variété M compacte munie d'un lagrangien L tel que « l'endomorphisme de Jacobi » θ_x qui s'en déduit vérifie $\theta_x = -c \text{Id}$ où c est une constante positive. Nous observons que ce cas pourtant très symétrique n'est pas « complètement réductible Lagrangien ».

1. Calcul variationnel et fibré homogène.

Le fibré homogène d'une variété M est le fibré tangent de M quotienté par le groupe \mathbb{R}_*^+ des dilatations. Nous montrons dans cette partie que c'est un cadre adapté pour le calcul variationnel quand on considère que le temps physique est inclus dans la variété de base M . Sur ce fibré, l'équation intrinsèque de Lagrange-Cartan [C] met en présence deux structures : une forme de contact et un champ de vecteurs solution, qu'on appelle équation différentielle du second ordre sur le fibré homogène (Toutes les démonstrations de cette partie se trouvent dans [F1]).

2. Équivalence de deux formes de contact.

Une forme de contact détermine un champ de vecteurs particulier qu'on appelle son champ de Reeb. On dit que deux formes de contact sont équivalentes si leurs champs de Reeb sont colinéaires, ce qui signifie que ces deux champs admettent les mêmes orbites. Une forme de contact donnée admet toujours une classe triviale de formes équivalentes; par contre l'existence globale d'une classe plus large contenant des formes de contact équivalentes de façon triviale a des conséquences importantes sur le système étudié. Nous montrons qu'à une paire de formes de contact équivalentes non trivialement est associé un « opérateur de conjugaison ». Plutôt que d'étudier les formes elles-mêmes, nous travaillons avec cet opérateur de conjugaison. Avec cet outil nous obtenons le Théorème 2.5 de réductibilité qui donne des informations sur les systèmes réductibles.

3. Propriétés supplémentaires des équations différentielles du second ordre.

Dans le cadre de la mécanique lagrangienne le champ de vecteurs solution est à la fois le champ de Reeb d'une forme de contact et une équation différentielle du second ordre sur le fibré homogène. Il possède dès lors une structure plus riche que les équations différentielles ne provenant pas d'un problème variationnel. Notamment dans le cas des lagrangiens convexes, on peut munir le fibré homogène d'une métrique riemannienne.

4. La réductibilité lagrangienne.

L'étude effectuée au § 2 peut être menée beaucoup plus loin pour le problème de l'équivalence de deux lagrangiens. Les formes de contact déduites de lagrangiens réguliers sont des formes semi-basiques. Cette condition restreint la classe des opérateurs de conjugaison. En utilisant les propriétés supplémentaires des équations différentielles du second ordre et la métrique (pseudo-riemannienne) nous sommes en mesure dans le Théorème 4.4 de donner en terme de « courbure » les équations de réductibilité. Ce théorème et ses corollaires résolvent le problème algébrique local et permet des calculs explicites sur des exemples. Ensuite on considère un exemple très simple. L'élément intéressant de cette partie n'est pas le résultat sur la réductibilité mais le théorème 4.9, valable dans un cadre beaucoup plus étendu et qui interdit l'existence d'intégrales premières C^1 pour les lagrangiens convexes à endomorphisme de Jacobi négatif sur les variétés compactes.

1 – CALCUL VARIATIONNEL ET FIBRÉ HOMOGENÈNE (*)

Sur une variété M un lagrangien L est une fonction au moins C^2 sur $\overset{\circ}{\text{TM}}$ le fibré tangent pointé de M. On se donne un lagrangien dans le but d'étudier les extrémales de l'action définie pour un chemin $c : I \rightarrow M$ (où I est intervalle réel) par

$$F(c) = \int_I L(\dot{c})dt \quad \text{avec} \quad \dot{c} = \frac{dc}{dt}.$$

On sait que, pour que l'action soit *invariante par changement de paramétrage*, il est nécessaire et suffisant que L soit une fonction positivement homogène de degré 1 sur chaque fibre de TM. Pour tout $Z \in T_x M$, (x est un point de M)

$$L(\lambda Z) = \lambda L(Z) \quad \text{si} \quad \lambda > 0.$$

Rappelons sans démonstration la version intrinsèque des équations de Lagrange donnée par Cartan

$$i_{\check{c}} dd_v L = d(L - D \cdot L).$$

(D.L est la dérivée de Lie et L relativement au champ de Liouville D). Dans le cas particulier des lagrangiens positivement homogènes de degré 1, celle-ci s'écrit

$$i_{\check{c}} dd_v L = 0,$$

où $\check{c} : I \rightarrow \overset{\circ}{\text{TM}}$ est le deuxième relèvement du chemin et $d_v L$, [K1], [Gn], désigne la dérivée verticale du lagrangien. C'est une 1-forme sur TM. Si $(x^i, \xi^j)_{1 \leq i, j \leq n}$ sont des coordonnées locales adaptées pour TM, on a

$$d_v L = \left(\frac{\partial L}{\partial \xi^j} \right) dx^j,$$

On voit que $d_v L$ est une forme de Pfaff semi-basique relativement à la projection de TM sur M.

Remarquons que $dd_v L$ étant une 2-forme sur une variété TM de dimension paire, son noyau est dans le meilleur des cas de dimension 2 puisqu'il contient au moins D. La dégénérescence du noyau est due à l'homogénéité positive de degré 0 de la 1-forme $d_v L$. Dans le cas où $d_v L$ est de classe $2n - 1$, on prouve dans [F1], qu'il existe une équation différentielle du second ordre sur TM [Gn] solution. Dans la suite on supposera toujours que le problème est « régulier » c'est-à-dire $d_v L$ de classe $2n - 1$. Il me semble plus agréable de lever cette dégénérescence. Ceci peut être réalisé aisément en utilisant

(*) Il s'agit dans cette partie d'un simple aperçu des résultats. Les démonstrations peuvent être trouvées dans [Be] [Gn] [F1].

non pas TM mais le fibré homogène ou fibré des demi-droites tangentes. Il faut ôter la section nulle et, si on note r l'application qui à un vecteur de TM associe sa demi-droite, on a :

$$\begin{array}{ccc} \overset{\circ}{\text{TM}} & \xrightarrow{r} & \text{HM} \\ & \searrow p_M & \downarrow \sigma \\ & & \text{M} \end{array}$$

σ désigne la projection sur la base.

Ce fibré en demi-droites a l'avantage d'être complètement intrinsèque et de ne faire aucune référence à une quelconque notion métrique. Habituellement, dans le cadre de la géométrie riemannienne, on prend le fibré unitaire UM. On voit qu'ici, avec deux métriques riemanniennes g_1 et g_2 sur M, on sera amené à travailler sur le même fibré HM.

Si M est de dimension n , les fibres de HM sont homéomorphes à S^{n-1} . Mais HM est aussi une variété différentielle et (voir [F1]) on considérera fréquemment son espace tangent THM. On peut écrire le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \text{THM} & \xrightarrow{T\sigma} & \overset{\circ}{\text{TM}} & \xrightarrow{r} & \text{HM} \\ p_{\text{HM}} \downarrow & & \downarrow p_M & & \\ \text{HM} & \xrightarrow{\sigma} & \text{M} & & \end{array}$$

On appellera de même *fibré vertical* VHM le fibré vectoriel $\text{Ker } T\sigma$ qui est constitué des vecteurs tangents aux fibres de HM.

On peut maintenant revenir au calcul variationnel en remarquant que l'homogénéité de degré 0 de d_vL a pour conséquence l'existence sur HM d'une unique 1-forme A telle que

$$d_vL = r_*A \quad (\text{où } * \text{ désigne l'image réciproque}).$$

On appelle A le *semi-potentiel associé au lagrangien* L. Cette 1-forme est semi-basique, c. à. d. que pour tout vecteur vertical Y dans VHM on a

$$A(Y) = 0.$$

En passant au fibré homogène, nous avons gagné une dimension : HM est de dimension impaire $2n-1$. Des propriétés de l'image réciproque, il résulte que

$$r_*dA = dr_*A = dd_vL.$$

La 2-forme dA a un noyau de dimension 1.

Par transport point par point de l'équation de calcul des variations, on est conduit à la recherche d'un champ de vecteurs X sur HM tel que

$$i_X dA = 0.$$

On peut de plus normaliser X par

$$i_X A = 1.$$

Dans le cas d'un problème régulier, l'argument sur le noyau de dA assure que A est une *forme de contact* sur HM , c. à. d. que

$$A \wedge dA^{n-1} \text{ est une forme-volume.}$$

Le champ de vecteurs solution de ce problème est alors appelé le champ de Reeb du semi-potentiel A , on l'appelle *dynamique* de A .

On peut montrer [F1] que le champ de vecteurs solution n'est pas quelconque, il est tel que

$$r \circ T\sigma \circ X = \text{Id}_{HM}.$$

Tous les champs de vecteurs qui vérifient cette relation sont par définition des « *Équations différentielles du second ordre sur le fibré homogène* ». Elles font l'objet d'une étude détaillée dans l'article [F2]. « *Géométrie des équations différentielles du second ordre* ». Je vais ici seulement citer quelques remarques.

Pour mieux comprendre cette nouvelle notion, on peut à l'aide de coordonnées locales adaptées pour TM (x^μ, ξ^μ) prendre des coordonnées homogènes pour HM soit $\left(x^\mu, v^\alpha = \frac{\xi^\alpha}{\xi^0}\right) (1 \leq \alpha \leq n-1)$ en un point où $\xi^0 \neq 0$.

Alors une équation différentielle du second ordre s'écrit

$$X = X^\mu(x, v) \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \bar{X}^\beta(x, v) \frac{\partial}{\partial v^\beta}$$

avec

$$X^\alpha(x, v) = v^\alpha X^0(x, v).$$

Dès lors, un problème régulier du calcul des variations conduit à l'utilisation sur le fibré homogène de deux structures mathématiques très importantes :

- une forme de contact,
- une équation différentielle du second ordre.

On peut étudier indépendamment les structures géométriques qui résultent de la présence d'un de ces éléments. La géométrie de contact est assez bien connue et présente de nombreuses analogies avec la géométrie symplectique. Nous en rappellerons certaines en tenant compte ici d'un fait supplémentaire : les semi-potentiels sont des formes semi-basiques.

La géométrie créée par la donnée d'une équation différentielle du second ordre sur le fibré homogène est différente et s'apparente plus à la géométrie riemannienne puisqu'elle permet de retrouver et d'étendre une partie des notions classiques de dérivation covariante et de courbure. Cette géométrie est finalement une formulation intrinsèque de l'ancienne équation

tion de Newton de la dynamique. Je propose de l'appeler « *géométrie newtonnienne* ». J'ai commencé son étude locale dans un précédent article [F2] et elle me semble riche et vaste. Elle prend notamment en compte les phénomènes non stationnaires et dissipatifs. Pour des questions de place dans cet article, je ferai sans cesse référence à [F2] en espérant que le lecteur n'en souffrira pas trop. On trouvera une bonne synthèse du cas classique et du fibré homogène dans l'article de P. Libermann [Ln].

2 – ÉQUIVALENCE DE DEUX FORMES DE CONTACT

Considérons une variété N de dimension $2n-1$

2.1. DÉFINITION. — Deux formes de contact α et α' sont dites *équivalentes* si $d\alpha$ et $d\alpha'$ ont même noyau.

Cette équivalence n'est pas celle que l'on considère habituellement. On dit généralement que deux formes de contact ω et ω' sont équivalentes si elles définissent la même structure de contact, c'est-à-dire s'il existe une fonction f' ne s'annulant pas telle que $\omega' = f'\omega$.

Il existe toujours des formes de contact équivalentes à une forme α donnée. En effet, si φ est une fonction sur M à valeurs réelles, et k un nombre réel, la forme

$$\alpha' = k\alpha + d\varphi,$$

est équivalente à α . Nous disons que α' est *trivialement équivalente* à α si α' est en plus une forme de contact.

Dans la suite nous ne nous intéresserons qu'aux formes de contact « non trivialement équivalentes ». En général une forme de contact n'admet pas globalement de forme de contact équivalente non triviale. Cependant il en existe toujours localement. On peut s'en convaincre aisément à l'aide de la décomposition locale de Darboux. Dans un voisinage suffisamment petit d'un point x de N , on peut trouver des coordonnées centrées (y_i, x^i, z) , $1 \leq i \leq n$, telles que la forme α et son champ de Reeb ξ s'écrivent respectivement

$$\alpha = dz + y_i dx^i \quad \text{et} \quad \xi = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Toute forme de contact qui s'écrit $\alpha' = dz + y'_i dx'^i$ où les y'_i et x'^i sont des fonctions indépendantes de z est équivalente à α .

L'équivalence non triviale ne va donc se produire que pour une classe particulière de formes de contact. En fait ce n'est pas l'obtention des formes α' équivalentes à α que nous recherchons mais les propriétés spécifiques des champs de Reeb tels qu'on puisse trouver plusieurs formes de contact

non triviales au sens précédent. Nous dirons qu'un tel *champ de Reeb* est une *dynamique réductible*.

Quelques notations.

On notera F_α le noyau de α et on sait que la restriction de $d\alpha$ à F_α est une forme de classe maximale. On utilisera la décomposition $TN = \mathbb{R}\xi \oplus F_\alpha$ qui nous permet en chaque point x de N pour toute 1-forme ω sur N d'écrire

$$\omega = \lambda\alpha + i_{Z_\omega}d\alpha.$$

Le vecteur Z_ω de F_α est unique. Par ailleurs on détermine simplement λ en remarquant que

$$i_{\xi(x)}\omega = \lambda i_{\xi(x)}\alpha = \lambda.$$

d'où

$$\omega = (i_{\xi(x)}\omega)\alpha + i_{Z_\omega}d\alpha(\mathbb{N}).$$

2.2. PROPOSITION. — *A toute paire α, α' de formes de contact équivalentes est associé un unique champ d'automorphismes, $\psi_{\alpha\alpha'}$ de TN appelé opérateur de conjugaison de α vers α' tel que pour tout Z dans TN*

- i) $i_{\psi_{\alpha\alpha'}(Z)}d\alpha = i_Zd\alpha'$,
- ii) $i_{\psi_{\alpha\alpha'}(Z)}\alpha = i_Z\alpha$.

Preuve. — Pour chaque point x de N et chaque Z de T_xN , on peut décomposer de manière unique la 1-forme $i_Zd\alpha'(x)$ en

$$i_Zd\alpha'(x) = (i_\xi i_Zd\alpha'(x))\alpha + i_{\tilde{\psi}_{\alpha\alpha'}(Z)}d\alpha(x),$$

où $\tilde{\psi}_{\alpha\alpha'}(Z)$ est uniquement déterminé et se trouve dans F_α . Mais puisque α' est équivalente à α le premier terme de droite disparaît. On pose ensuite

$$\psi_{\alpha\alpha'}(Z) = \tilde{\psi}_{\alpha\alpha'}(Z) + (i_Z\alpha)\xi.$$

Ainsi on obtient un champ d'automorphismes vérifiant i) et ii). Il est bien entendu unique puisque si $\psi'_{\alpha\alpha'}$ vérifie i) et ii), on est conduit à

$$i_{(\psi_{\alpha\alpha'} - \psi'_{\alpha\alpha'}(Z))}d\alpha = 0 \quad \text{et} \quad i_{(\psi_{\alpha\alpha'} - \psi'_{\alpha\alpha'}(Z))}\alpha = 0.$$

D'où, puisque α est une forme de contact,

$$\psi_{\alpha\alpha'}(Z) - \psi'_{\alpha\alpha'}(Z) = 0. \quad \blacksquare$$

Remarques.

- Par construction, pour le champ de Reeb de α , on a $\psi_{\alpha\alpha'}(\xi) = \xi$.
- Si on considère deux formes de contact α et α' trivialement équivalentes

$$\alpha' = k\alpha + d\varphi, \quad \text{alors} \quad d\alpha' = kd\alpha$$

et donc $\psi_{\alpha\alpha'}(Z) = kZ - (k - 1)\alpha(Z)\xi$. Cette démarche permet donc de s'affranchir de l'équivalence triviale.

Un opérateur de conjugaison $\psi_{\alpha\alpha'}$ jouit naturellement de certaines propriétés algébriques. Tout d'abord il doit être symétrique relativement aux deux cobords $d\alpha$ et $d\alpha'$, c'est-à-dire pour tous Z_1 et Z_2 dans T_xN

$$i_{\psi_{\alpha\alpha'}(Z_1)}i_{Z_2}d\alpha = i_{Z_1}i_{\psi_{\alpha\alpha'}(Z_2)}d\alpha,$$

et

$$i_{\psi_{\alpha\alpha'}(Z_1)}i_{Z_2}d\alpha' = i_{Z_1}i_{\psi_{\alpha\alpha'}(Z_2)}d\alpha'.$$

Ceci provient de la définition. En effet

$$i_{Z_1}i_{\psi_{\alpha\alpha'}(Z_2)}d\alpha = i_{Z_1}i_{Z_2}d\alpha' = -i_{Z_2}i_{Z_1}d\alpha' = -i_{Z_2}i_{\psi_{\alpha\alpha'}(Z_1)}d\alpha,$$

de même en recommençant

$$\begin{aligned} i_{Z_1}i_{\psi_{\alpha\alpha'}(Z_2)}d\alpha' &= i_{Z_1}i_{\psi_{\alpha\alpha'}^2(Z_2)}d\alpha = i_{\psi_{\alpha\alpha'}(Z_1)}i_{\psi_{\alpha\alpha'}(Z_2)}d\alpha \\ &= i_{\psi_{\alpha\alpha'}(Z_1)}i_{Z_2}d\alpha'. \end{aligned}$$

Si Z est un vecteur de TN , la définition de $\psi_{\alpha\alpha'}$ nous conduit à

$$i_Zi_{\psi(Z)}d\alpha = 0 = i_Zi_Zd\alpha'.$$

On peut montrer aisément par récurrence qu'on a aussi

$$i_{\psi_{\alpha\alpha'}^p(Z)}i_{\psi_{\alpha\alpha'}^q(Z)}d\alpha = 0 \quad \text{pour tout } p \text{ et } q \text{ entiers.} \quad (2.2.2)$$

Cette dernière relation va nous permettre d'énoncer une proposition sur le nombre maximal de valeurs propres d'un opérateur de conjugaison.

2.3. PROPOSITION. — *Soit N une variété de dimension $2n-1$ et deux formes de contact α et α' équivalentes. Leur opérateur de conjugaison $\psi_{\alpha\alpha'}$ admet en plus de la valeur propre 1 (qui apparaît pour le champ de Reeb ξ de α) au plus $(n-1)$ valeurs propres.*

Preuve. — On va commencer par donner un lemme

LEMME 2.3.1. — *Soit un vecteur Z dans T_xN . Alors, pour ce vecteur, il existe $n-2$ nombres qu'on notera $\Lambda_p(Z)$ et aussi deux nombres réels a, χ tels qu'on puisse écrire l'équation polynomiale*

$$(-1)^{n-1}\psi_{\alpha\alpha'}^{n-1}(Z) + \sum_{p=1}^{n-2} \Lambda_p(Z)\psi_{\alpha\alpha'}^p(Z) + \chi Z = a\xi.$$

On peut préciser encore que $\chi \neq 0$ et que

$$a = \left\{ (-1)^{n-1} + \sum_{p=1}^{n-2} \Lambda_p(Z) + \chi \right\} i_Z\alpha$$

(ξ est le champ de Reeb de α).

Démonstration du lemme. — Puisque $\alpha \wedge d\alpha^{n-1}$ et $\alpha' \wedge d\alpha'^{n-1}$ sont des formes-volumes, il existe une fonction jamais nulle k réelle telle que

$$k\alpha \wedge d\alpha^{n-1} = \alpha' \wedge d\alpha'^{n-1}.$$

En contractant sur ξ , ceci nous conduit à

$$kd\alpha^{n-1} = (i_\xi \alpha') d\alpha'^{n-1} \quad \text{et donc} \quad i_\xi \alpha' \text{ n'est jamais nul.}$$

On pose $\chi = \frac{k}{(i_\xi \alpha')}$ et on a

$$d\alpha'^{n-1} = \chi d\alpha^{n-1}.$$

Maintenant on écrit

$$i_{\psi_{\alpha\alpha'}^{-2}(Z)} \dots i_{(Z)}(d\alpha')^{n-1} = \chi i_{\psi_{\alpha\alpha'}^{-2}(Z)} \dots i_Z(d\alpha)^{n-1}.$$

En utilisant 2.2.2, on obtient

$$(n-1)! i_Z d\alpha' \wedge \dots \wedge i_{\psi_{\alpha\alpha'}^{-2}(Z)} d\alpha' = (n-1)! \chi i_Z d\alpha \wedge \dots \wedge i_{\psi_{\alpha\alpha'}^{-2}(Z)} d\alpha.$$

Il n'y a plus qu'à écrire la définition de $\psi_{\alpha\alpha'}$ et à ranger les termes pour avoir

$$i_{\{Z+(-1)^{n-1}\psi_{\alpha\alpha'}^{-1}(Z)\}} d\alpha \wedge i_{\psi_{\alpha\alpha'}(Z)} d\alpha \wedge \dots \wedge i_{\psi_{\alpha\alpha'}^{-2}(Z)} d\alpha = 0,$$

soit encore puisque $i_\xi \alpha = 1$

$$i_\xi \alpha \cdot i_{\{Z+(-1)^{n-1}\psi_{\alpha\alpha'}^{-1}(Z)\}} d\alpha \wedge i_{\psi_{\alpha\alpha'}(Z)} d\alpha \wedge \dots \wedge i_{\psi_{\alpha\alpha'}^{-2}(Z)} d\alpha = 0;$$

et donc ces différents vecteurs sont liés.

La proposition est une conséquence immédiate de ce lemme. En effet s'il y avait plus de $n-1$ valeurs propres différentes il existerait un vecteur ne satisfaisant pas une équation polynomiale de degré $n-1$. ■

Remarque. — Dans le cas d'une variété N de dimension trois, d'après le Lemme 2.3.1, on obtient l'équation polynomiale

$$-\psi_{\alpha\alpha'}(Z) + \chi Z = a\xi$$

avec $a = \{-1 + \chi\} i_Z \alpha$, d'où $d\alpha' = \chi d\alpha$.

2.4 PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES D'UN OPÉRATEUR DE CONJUGAISON DE DEUX FORMES DE CONTACT.

PROPOSITION 2.4.1. — *Un opérateur de conjugaison d'une forme α vers une forme α' est à dérivée de Lie nulle le long du champ de Reeb ξ de α*

$$L_\xi \psi_{\alpha\alpha'} = 0.$$

Remarque. — Cette proposition a des conséquences très importantes sur l'existence d'opérateurs de conjugaison pour une forme α donnée.

On peut annoncer tout de suite quelques corollaires de cette proposition.

COROLLAIRE 2.4.2. — Soit $\psi_{\alpha\alpha'}$ l'opérateur de conjugaison de deux formes de contact équivalentes α et α' . La linéarité sur chaque fibre de $\psi_{\alpha\alpha'}$ nous permet de définir point par point son polynôme caractéristique $P(\psi_{\alpha\alpha'})$.

$$P(\psi_{\alpha\alpha'}) = \sum_{p=1}^{2n-1} a_p \psi_{\alpha\alpha'}^p$$

où $a_p : \text{TN} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^1 .

Alors les fonctions a_p sont des intégrales premières du champ de Reeb ξ de la forme α , i. e.

$$L_\xi a_p = 0, \quad (1 \leq p \leq 2n - 1).$$

Remarques. — Le Corollaire 2.4.2 nous montre que, si le champ de Reeb ξ d'une forme de contact α n'admet pas d'intégrale première, non triviale alors tous les coefficients du polynôme caractéristique d'un de ses opérateurs de conjugaison sont des constantes.

Exemples. — Sur une variété M compacte, le lagrangien défini par l'élément de longueur d'une métrique riemannienne à courbure négative détermine sur le fibré unitaire un flot ergodique. D'après le chapitre précédent, nous savons qu'il y a une identification naturelle avec HM. Si A est le semi-potentiel associé à ce Lagrangien, tout opérateur de conjugaison $\psi_{A\alpha}$ vers une autre forme de contact α équivalente aura donc toutes ses valeurs propres constantes.

Dans le cas d'une variété N de dimension trois, d'après le Lemme 2.3.1 et la remarque qui le suit, on sait que sur les champs de vecteurs à valeurs dans le système de Pfaff d'une forme de contact, un opérateur de conjugaison est une homothétie. Si le champ de Reeb ξ de α n'admet pas d'intégrale première, ce rapport d'homothétie k est alors une constante et il n'y a pas de forme α' non trivialement équivalente puisque

$$d\alpha' = k d\alpha.$$

Preuve de 2.4.1. — Il n'y a qu'à écrire la définition de l'opérateur de conjugaison $\psi_{\alpha\alpha'}$ et à dériver les relations par le champ de Reeb ξ

$$\begin{aligned} L_\xi(i_{\psi_{\alpha\alpha'}(Z)}d\alpha) &= L_\xi(i_Z d\alpha'), \\ L_\xi(i_{\psi_{\alpha\alpha'}(Z)}\alpha) &= L_\xi(i_Z \alpha). \end{aligned}$$

De la première relation puisque $L_\xi d\alpha = L_\xi d\alpha' = 0$ on tire

$$i_{(L_\xi \psi_{\alpha\alpha'}(Z))} d\alpha = 0 \quad \text{où on a remarqué que } i_{\psi_{\alpha\alpha'}([\xi, Z])} d\alpha = i_{[\xi, Z]} d\alpha',$$

et de la deuxième

$$i_{(L_\xi \psi_{\alpha\alpha'}(Z))} \alpha = 0 \quad \text{où on a remarqué que } i_{\psi_{\alpha\alpha'}([\xi, Z])} \alpha = i_{[\xi, Z]} \alpha'.$$

Cette relation étant vérifiée pour tout champ de vecteurs Z et α étant de contact, on en déduit que $L_\xi \psi_{\alpha\alpha'} = 0$. ■

Preuve de 2.4.2. — Il faut utiliser les propriétés universelles de la trace. De $L_\xi \psi_{\alpha\alpha'} = 0$, on déduit que $L_\xi \text{Tr} \psi_{\alpha\alpha'} = 0$.

De même $L_\xi \text{Tr} (\psi_{\alpha\alpha'})^p = 0$ pour tout entier p .

La relation $L_\xi \psi_{\alpha\alpha'} = 0$, permet d'obtenir plus d'informations.

COROLLAIRE 2.4.3. — *Soit un sous-espace E stable d'un opérateur de conjugaison $\psi_{\alpha\alpha'}$ alors $L_\xi E$ est aussi stable par $\psi_{\alpha\alpha'}$. En particulier si un champ de vecteurs Z est propre pour $\psi_{\alpha\alpha'}$ de valeur propre ρ alors $[\xi, Z]$ est aussi propre pour $\psi_{\alpha\alpha'}$ avec la même valeur propre*

$$\psi_{\alpha\alpha'}(Z) = \rho Z \Rightarrow \psi_{\alpha\alpha'}([\xi, Z]) = \rho [\xi, Z]$$

Preuve de 2.4.3. — D'après les hypothèses, $\psi_{\alpha\alpha'}(E) \subset E$. La relation $L_\xi \psi_{\alpha\alpha'} = 0$ entraîne que pour tout champ de vecteurs sur N à valeurs dans E , on a

$$[\xi, \psi_{\alpha\alpha'}(Z)] = \psi_{\alpha\alpha'}([\xi, Z]).$$

Dans le cas d'un champ de vecteurs propre, les coefficients du polynôme caractéristique sont des intégrales premières de ξ et donc dans un domaine où les valeurs propres ne se croisent pas, celles-ci sont différentiables et sont aussi des intégrales premières de ξ . Donc

$$\psi_{\alpha\alpha'}([\xi, Z]) = [\xi, \psi_{\alpha\alpha'}(Z)] = [\xi, \rho Z] = \rho [\xi, Z].$$

Dans la suite on va supposer que les valeurs propres de $\psi_{\alpha\alpha'}$ sont toutes réelles et on ne travaillera que dans des domaines où il n'y a pas de croisement.

Fixons quelques notations.

Restreignons-nous à F_α

$(\rho_j, q_j) 1 \leq j \leq k$ désignent les valeurs propres avec leur multiplicité,

$$\sum_{j=1}^k q_j = 2n - 1 \text{ et } E_j \text{ les champs de sous-espaces propres correspondants.}$$

On a une décomposition de F_α qui est préservé par $\psi_{\alpha\alpha'}$ en

$$F_\alpha = \bigoplus_{j=1}^k E_j$$

En fait ce qui nous intéresse ce sont les propriétés spécifiques des formes de contact « réductibles » c'est-à-dire admettant d'autres formes de contact équivalentes mais non triviales. Nous allons réunir des conditions nécessaires à une telle situation dans le théorème de réductibilité. Mais avant, remarquons que nous avons déjà entièrement résolu le cas où la variété M est de dimension 3.

THÉORÈME DE RÉDUCTIBILITÉ 2.5. — *Considérons sur une variété N avec $n \geq 5$, une forme de contact α de noyau F_α et de champ de Reeb X .*

Supposons que α admette une forme de contact α' équivalente non triviale. Alors la restriction à F_α de l'opérateur de conjugaison associé $\psi_{\alpha\alpha'}$ a nécessairement au moins deux valeurs propres différentes. Comme on le sait déjà, les valeurs propres ρ_j sont des intégrales premières du champ de Reeb et les sous-espaces propres E_j sont invariants par X

$$L_X \rho_j = 0, \quad L_X E_j \subset E_j, \quad F_\alpha = \bigoplus E_j.$$

De plus

- i) *les sous-espaces propres sont de dimension paire ;*
- ii) *la projection de $[E_j, E_j]$ sur $\bigoplus_{\lambda \neq j} E_\lambda$ est en chaque point un sous-espace vectoriel de dimension au plus un ;*
- iii) *(rigidité). Si une valeur propre ρ_j est de multiplicité $q_j > 2$, alors E_j est entièrement contenu dans le noyau de $d\rho_j$;*
- iv) *Si une valeur propre ρ_j est une constante, alors $\mathbb{R}X \oplus E_j$ est intégrable au sens de Frobenius.*

Démonstration. — i) est une propriété purement algébrique. La symétrie de $\psi_{\alpha\alpha'}$ relativement à $d\alpha$ entraîne que les sous-espaces propres sont orthogonaux relativement à $d\alpha$ (i. e. si Z_i et Z_j sont deux vecteurs propres de valeur propre respective $\rho_i \neq \rho_j$, alors $i_{Z_i} i_{Z_j} d\alpha = 0$). Mais α est une forme de contact et cette orthogonalité impose que la restriction de $d\alpha$ à chaque espace propre E soit de classe maximum. Il est donc nécessaire que E soit de dimension paire.

Pour la suite de la démonstration nous aurons besoin d'un lemme qui va tout faire marcher. Notons ρ une valeur propre, λ les autres et ξ_ρ le champ de vecteurs à valeurs dans F_α tel que $d\rho = i_{\xi_\rho} d\alpha$. Si on considère deux champs de vecteurs propres Y et Z de valeur propre ρ on peut former leur crochet et écrire une décomposition de la forme

$$[Y, Z] = B_\rho + \sum_{\lambda \neq \rho} B_\lambda + \mu X, \quad B_\rho \in E_\rho, \quad B_\lambda \in E_\lambda.$$

LEMME 2.5.1. — Dans les conditions précédentes on a

$$\sum_{\lambda \neq \rho} (\lambda - \rho) B_\lambda + \mu(1 - \rho) X = (L_Y \rho) Z - (L_Z \rho) Y + (i_Z i_Y d\alpha)(\xi_\rho + (\rho - 1) X).$$

Preuve du lemme. — Pour obtenir ce résultat, il faut s'intéresser à $L_Y \psi_{\alpha\alpha'}$ et $L_Z \psi_{\alpha\alpha'}$. On peut faire ceci en revenant à la définition de $\psi_{\alpha\alpha'}$

$$i_{\psi_{\alpha\alpha'}(Z)} d\alpha = i_Z d\alpha', \quad i_{\psi_{\alpha\alpha'}(Z)} \alpha = i_Z \alpha$$

et en dérivant par rapport à Y on obtient

$$(L_Y \psi)(Z) = (L_Z \rho)Y + ((1 - \rho)X - \xi_\rho)(i_Z i_Y d\alpha)$$

où on a fortement utilisé le fait que Y et Z sont dans le même sous-espace propre. On remarque ensuite que

$$L_Y(\psi(Z)) = (L_Y \psi)(Z) + \psi([Y, Z]) = L_Y(\rho Z) = (L_Y \rho)Z + \rho[Y, Z],$$

d'où

$$\psi([Y, Z]) - \rho[Y, Z] = (L_Y \rho)Z - (L_Z \rho)Y + (i_Z i_Y d\alpha)(\xi_\rho + (\rho - 1)X)$$

et enfin on utilise la décomposition $[Y, Z] = B_\rho + \sum_{\lambda \neq \rho} B_\lambda + \mu X$.

Suite de la preuve du Théorème. — ii) On peut de même décomposer ξ_ρ sur les sous-espaces propres en

$$\xi_\rho = \xi_{\rho\rho} + \sum_{\lambda \neq \rho} \xi_{\rho\lambda}.$$

D'après le Lemme, on obtient

$$(\lambda - \rho)B_\lambda = (i_Z i_Y d\alpha)\xi_{\rho\lambda},$$

soit

$$B_\lambda = (i_Z i_Y d\alpha) \frac{\xi_{\rho\lambda}}{(\lambda - \rho)}.$$

Dès lors

$$\sum_{\lambda \neq \rho} B_\lambda = (i_Z i_Y d\alpha) \sum_{\lambda \neq \rho} \frac{\xi_{\rho\lambda}}{(\lambda - \rho)}.$$

Ainsi quels que soient les vecteurs propres choisis Z et Y , la projection de leur crochet sur $\bigoplus_{\lambda \neq \rho} E_\lambda$ est toujours colinéaire au vecteur $\sum_{\lambda \neq \rho} \frac{\xi_{\rho\lambda}}{(\lambda - \rho)}$.

iv) A ce stade on peut donner un corollaire plus fin que *iv)*

COROLLAIRE 2.5.2. — *Pour qu'une distribution $\mathbb{R}X \oplus E_j$ soit intégrable, il est nécessaire et suffisant que le champ de vecteurs ξ_ρ dans F tel que $d\rho = i_{\xi_\rho} d\alpha$ soit aussi un vecteur propre de valeur propre ρ .*

Le résultat provient de la relation précédente du fait que $L_X E_\rho \subset E_\rho$. On pourrait se poser la question de l'intégrabilité de E_ρ mais ce n'est jamais intégrable puisque $d\alpha$ doit y être de classe maximum.

iii) Dire que $d\alpha$ est de classe maximale sur E_ρ , c'est dire que $d\alpha$ est symplectique sur E_ρ (on peut toujours trouver localement une base symplectique de E_ρ avec $(Z_k) \ 1 \leq k \leq \frac{q_p}{2}$). Soit $d\alpha(Z_{2p}, Z_{2p+1}) = 1$

$$d\alpha(Z_{2p}, Z_r) = \delta_{2p+1,r},$$

donc, pour tout $r \neq 2p + 1$, le lemme donne

$$(L_{Z_r, \rho})Z_{2p} - (L_{Z_{2p}, \rho})Z_r = \sum_{\lambda \neq \rho} (\lambda - \rho)B_{\lambda, r, 2p} + \mu_{r, 2p}(1 - \rho)X$$

avec

$$[Z_r, Z_{2p}] = \sum_{\lambda \neq \rho} (\lambda - \rho)B_{\lambda, r, 2p} + \mu_{r, 2p}(1 - \rho)X + B_{\rho, r, 2p}.$$

On en déduit

$$\mu_{r, 2p}(1 - \rho) = 0, \quad B_{\lambda, r, 2p} = 0$$

et surtout

$$(L_{Z_r, \rho})Z_{2p} - (L_{Z_{2p}, \rho})Z_r = 0,$$

d'où $L_{Z_{2p}, \rho} = 0, \quad L_{Z_r, \rho} = 0$ pour tout $r \neq 2p + 1$.

On aurait pu faire une étude semblable avec Z_{2p+1} et on aurait obtenu en plus $L_{Z_{2p+1}, \rho} = 0$.

Ce raisonnement ne s'applique que si on peut trouver $r \neq 2p + 1$, c'est-à-dire si la multiplicité de ρ est strictement supérieure à 2.

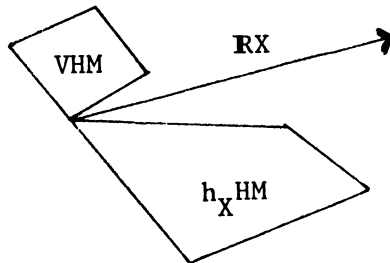
Pour terminer nous avons dit qu'il fallait que, sur F , $\psi_{\alpha\alpha'}$ ait au moins deux valeurs propres différentes. C'est évident d'après la rigidité puisque pour $n \geq 3$ la multiplicité serait > 2 et alors ρ devrait être constante sur F_α . En plus ρ est une intégrale première, donc une vraie constante et on aurait

$$d\alpha' = \rho d\alpha \quad \rho \in \mathbb{R}$$

ce qui est une équivalence triviale. ■

3 – PROPRIÉTÉS SUPPLÉMENTAIRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE DÉDUITES D'UN LAGRANGIEN

Dans [F2] nous avons montré que la donnée d'une équation différentielle du second ordre X sur le fibré homogène a pour conséquence une décomposition de THM en trois sous-fibrés supplémentaires $THM = \mathbb{R}X \oplus VHM \oplus h_X HM$



où $h_X HM$ est le sous-fibré horizontal associé à X . Il est isomorphe à VHM . A tout vecteur vertical Y on peut associer un vecteur horizontal grâce à un opérateur H_X défini par

$$H_X(Y) = - [X, \tilde{Y}] - \frac{1}{2} v_X [X, [X, \tilde{Y}]]$$

où \tilde{Y} est une quelconque extension verticale de Y et v_X est l'endomorphisme vertical associé à X . Toujours sans démonstration voir [F1] rappelons les propriétés de v_X

3.1

- i) $v_X(X) = 0$;
- ii) $v_X(Y) = 0$;
- iii) $v_X([X, Y]) = - Y$;
- iv) son image est VHM et on remarque que $v_X(H_X(Y)) = Y$.

3.2 LA MÉTRIQUE PSEUDO-RIEMANNIENNE g SUR LE FIBRÉ HOMOGÈNE

En fait nous allons simplement utiliser le fait qu'à tout Lagrangien on sait associer un semi-potentiel, c'est-à-dire une forme de contact semi-basique A sur le fibré homogène. La dynamique qui lui est associée vérifie les équations $i_X A = 1$, $i_X dA = 0$ ce qui a pour conséquence $L_X A = 0$.

Remarquons tout d'abord que pour tout champ de vecteurs vertical Y sur HM la semi-basacité entraîne que $i_Y A = 0$ et par conséquent que $i_{[X, Y]} A = L_X(i_Y A) = 0$. D'après le théorème de verticalité [F2], l'hyperplan de contact de A coïncide donc avec $h_X HM \oplus VHM$. De plus celui-ci est invariant par X puisque, pour tout champ de vecteurs ξ à valeurs dans $h_X HM \oplus VHM$, on a $i_\xi A = 0$ et donc $L_X(i_\xi A) = i_{[X, \xi]} A = 0$ ce qu'on peut écrire

$$L_X(h_X HM \oplus VHM) \subset h_X HM \oplus VHM .$$

Signalons d'autre part qu'on peut montrer [F1] que c'est une condition nécessaire et suffisante pour que X soit localement la dynamique d'un semi-potentiel.

Métrie verticale.

Le semi-potentiel et sa dynamique permettent de définir sur les fibres de HM une métrique g_v dite *métrique verticale*.

3.2.1. PROPOSITION. — Soit A un semi-potentiel sur le fibré homogène X sa dynamique, Y_1 et Y_2 deux champs de vecteurs verticaux sur HM . L'opérateur g_v agissant sur les sections de VHM , défini par la relation $g_v(Y_1, Y_2) = i_{Y_1} i_{[X, Y_2]} dA$ est

- i) bilinéaire

- ii) *symétrique*
- iii) $\Lambda(\text{HM})$ *bilinéaire*
- iv) *non dégénéré*
- v) *c'est donc une pseudo-métrique riemannienne sur VHM, on l'appelle métrique verticale.*

Preuve. — (voir [F1]).

A propos de la signature de g_v on a le résultat suivant ([F1]).

3.2.2. PROPOSITION. — *La métrique verticale associée à un Lagrangien positivement homogène de degré un strictement convexe sur les fibres est définie positive. Voir [F1].*

En utilisant la décomposition de $\text{THM} = h_X \text{HM} \oplus \text{VHM} \oplus \mathbb{R}X$, on peut définir sur HM une métrique pseudo-riemannienne g de la manière suivante

- i) sur le fibré vertical VHM, g coïncide avec g_v ;
- ii) les sous-fibrés $[X]$, $h_X \text{HM}$, VHM sont orthogonaux;
- iii) sur le fibré horizontal $h_X \text{HM}$, pour deux vecteurs horizontaux h_1 et h_2 , on pose

$$g(h_1, h_2) = g(v_X(h_1), v_X(h_2));$$

- iv) $g(X, X) = 1$.

Rappelons encore quelques propriétés immédiates de g ([F1]).

- i) $g(X, \xi) = i_\xi A$ pour tout ξ dans THM
- ii) pour tout ξ dans THM,

$$(L_X g)(X, \xi) = 0;$$

- iii) pour toute paire de vecteurs verticaux Y_1, Y_2 ,

$$(L_X g)(Y_1, Y_2) = 0;$$

- iv) pour toute paire de vecteurs horizontaux h_1, h_2 ,

$$(L_X g)(h_1, h_2) = 0.$$

3.3 L'ENDOMORPHISME DE JACOBI ET LA DÉRIVATION DYNAMIQUE

Le texte [F2] est consacré à l'étude de ces deux opérateurs dans le cas général d'une équation différentielle du second ordre. Nous nous contentons ici de rappeler leur définition et d'étendre leurs propriétés dans ce cas particulier. A la décomposition $\text{THM} = \mathbb{R}X \oplus h_X \text{HM} \oplus \text{VHM}$, on associe les projections

$$\text{Id}_{\text{THM}} = p_X \oplus >_X \oplus \Lambda_X.$$

- 3.3.1. DÉFINITION. — *L'endomorphisme de Jacobi θ_X associé à une*

équation différentielle du second ordre X sur le fibré homogène est l'opérateur différentiel d'ordre 0 défini par

- i) $\theta_X(X) = 0$
- ii) $\theta_X(Y) = \Lambda_X[X, H_X(Y)]$ pour Y vertical
- iii) $\theta_X(h) = H_X \Lambda_X[X, h]$ pour h horizontal.

Remarques. — Par construction, les sous-fibrés horizontaux et verticaux sont stables par θ_X . De plus on a les propriétés immédiates suivantes :

$$[\theta_X, v_X] = 0, \quad [\theta_X, H_X] = 0.$$

3.3.2. DÉFINITION. — A toute équation différentielle du second ordre X sur HM , on peut associer un opérateur γ_X différentiel d'ordre un agissant sur THM en posant

- i) $\gamma(\alpha X) = (L_X \alpha)X$ pour toute fonction α de classe C^1 ;
- ii) $\gamma_X(Y) = -\frac{1}{2} v_X[X, [X, Y]]$ pour tout champ de vecteurs vertical Y ;
- iii) $\gamma_X(h) = \langle X, h \rangle$ pour tout champ de vecteurs horizontal h ;

On appelle γ_X la dérivation *dynamique associée* à l'équation différentielle du second ordre X .

Remarques. — Voici quelques propriétés générales énoncées dans [F2].

- i) par construction la décomposition $THM = \mathbb{R}X \oplus h_X HM \oplus VHM$ est invariante par γ_X ;
- ii) avec ces notations [F2]

$$H_X(Y) = - [X, Y] + \gamma_X(Y) ;$$

- iii) $[\gamma_X, v_X] = \gamma_X \circ v_X - v_X \circ \gamma_X = 0$;
- iv) $\gamma_X(H_X(Y)) = H_X(\gamma_X(Y))$ pour tout champ de vecteurs vertical.

Donnons maintenant des propriétés supplémentaires de θ_X et γ_X valables si X est la dynamique d'un semi-potentiel.

3.3.3. PROPOSITION. — Si X est la dynamique d'un semi-potentiel A , alors

- i) son endomorphisme de Jacobi θ_X est symétrique relativement à la métrique g associée à A ;
- ii) La dérivation dynamique γ_X est compatible avec g , c'est-à-dire pour tout champ de vecteurs ξ_1 et ξ_2 sur HM on a

$$L_X(g(\xi_1, \xi_2)) = g(\gamma_X(\xi_1), \xi_2) + g(\xi_1, \gamma_X(\xi_2)).$$

Remarques. — L'invariance de $h_X HM \oplus VHM$ par X dans le cas d'un

semi-potentiel et les définitions de θ_X et γ_X permettent d'écrire pour tout champ de vecteurs horizontal h la relation

$$[X, h] = \theta_X(v_X(h)) + \gamma_X(h).$$

La relation *i*) est très importante. Dans le cas où g est définie positive, elle garantit la semi-simplicité de θ_X .

Preuve. — Commençons par *ii*).

Pour h et Y deux champs de vecteurs respectivement horizontaux et verticaux, l'orthogonalité de $h_X \text{HM}$ et de VHM et leur invariance par θ_X permet d'écrire la relation évidente où tous les termes sont nuls

$$L_X(g(Y, h)) = g(\gamma_X(Y), h) + g(Y, \gamma_X(h)).$$

Pour deux champs de vecteurs verticaux Y_1 et Y_2 , si on se souvient que $(L_X g)(Y_1, Y_2) = 0$, on peut écrire

$$L_X(g(Y_1, Y_2)) = g([X, Y_1], Y_2) + g(Y_1, [X, Y_2]).$$

Mais on a

$$[X, Y_1] = -H_X(Y_1) + \gamma_X(Y_1) \quad \text{et} \quad [X, Y_2] = -H_X(Y_2) + \gamma_X(Y_2),$$

et il ne reste que

$$L_X(g(Y_1, Y_2)) = g(\gamma_X(Y_1), Y_2) + g(Y_1, \gamma_X(Y_2)).$$

On conclurait de même pour deux champs de vecteurs horizontaux. ■

i) Pour démontrer cette partie nous allons avoir besoin d'un lemme qui a en lui-même un intérêt.

3.3.4. LEMME. — Si une équation différentielle du second ordre X est la dynamique d'un semi-potentiel A , alors son fibré horizontal $h_X \text{HM}$ est Legendrien pour A , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} i_{h_1} A &= 0 \\ i_{h_1} i_{h_2} dA &= 0 \quad \text{pour tous vecteurs horizontaux } h_1 \text{ et } h_2. \end{aligned}$$

Démonstration du lemme. — On sait déjà que $i_h A = 0$ pour tout vecteur horizontal. La semi-basicité de A a déjà pour conséquence que VHM est Legendrien. Pour tous champs de vecteurs Y_1 vertical et h_2 horizontal, on peut écrire

$$i_{Y_1} i_{h_2} dA = -g(Y_1, v_X(h_2)).$$

avec

$$h_2 = -[X, v_X(h_2)] + \gamma_X(v_X(h_2)).$$

Si on dérive cette relation suivant X , on obtient

$$i_{[X, Y_1]} i_{h_2} dA + i_{Y_1} i_{[X, h_2]} dA = -L_X(g(Y_1, v_X(h_2))).$$

Si nous écrivons que $[X, h_2] = \gamma_X(h_2) + \theta_X(v_X(h_2))$, il ne reste que

$$i_{[X, Y_1]} i_{h_2} dA + i_{Y_1} i_{\gamma_X(h_2)} dA = -L_X(g(Y_1, v_X(h_2))).$$

Maintenant souvenons-nous de ce que $h_2 = H_X(v_X(h_2))$ et que

$$\gamma_X(H_X(v_X(h_2))) = H_X \gamma_X(v_X(h_2)).$$

En développant cette dernière relation, on obtient

$$\gamma_X(h_2) = -[X, \gamma_X(v_X(h_2))] + \gamma_X \circ \gamma_X(v_X(h_2))$$

et donc

$$i_{Y_1} i_{\gamma_X(h_2)} dA = -i_{Y_1} i_{[X, \gamma_X(v_X(h_2))]} dA = -g(Y_1, \gamma_X(v_X(h_2))),$$

d'où

$$i_{[X, Y_1]} i_{h_2} dA = -L_X(g(Y_1, v_X(h_2))) + g(Y_1, \gamma_X(v_X(h_2))).$$

On n'a plus qu'à utiliser *ii*)

$$i_{[X, Y_1]} i_{h_2} dA = -g(\gamma_X(Y_1), v_X(h_2))$$

et donc

$$i_{[X, Y_1]} i_{h_2} dA + i_{\gamma_X(Y_1)} i_{[X, v_X(h_2)]} dA = 0,$$

soit encore

$$i_{[X, Y_1]} i_{h_2} dA - i_{\gamma_X(Y_1)} i_{h_2} dA = 0.$$

D'où

$$i_{h_2} i_{H_X(Y_1)} dA = 0.$$

d'où le lemme puisque tout champ de vecteurs horizontal h_1 peut s'écrire $h_1 = H_X(Y_1)$ avec $Y_1 = v_X(h_1)$.

Suite de la preuve de la proposition. — Considérons deux champs de vecteurs horizontaux h_1 et h_2 . Le lemme nous permet d'écrire $i_{h_1} i_{h_2} dA = 0$ ce qui par dérivation le long de X conduit à

$$i_{[X, h_1]} i_{h_2} dA + i_{h_1} i_{[X, h_2]} dA = 0.$$

En utilisant les formules

$$[X, h_1] = \theta_X(v_X(h_1)) + \gamma_X(h_1) \quad \text{et} \quad [X, h_2] = \theta_X(v_X(h_2)) + \gamma_X(h_2),$$

ceci devient

$$i_{\theta_X(v_X(h_1))} i_{h_2} dA + i_{h_1} i_{\theta_X(v_X(h_2))} dA = 0.$$

ou à l'aide de

$$h_2 = -[X, v_X(h_2)] + \gamma_X(v_X(h_2)) \quad \text{et} \quad h_1 = -[X, v_X(h_1)] + \gamma_X(v_X(h_1)),$$

on obtient

$$-i_{\theta_X(v_X(h_1))} i_{[X, v_X(h_2)]} dA + i_{\theta_X(v_X(h_2))} i_{[X, v_X(h_1)]} dA = 0.$$

soit

$$g(\theta_X(v_X(h_1)), v_X(h_2)) = g(v_X(h_1), \theta_X(v_X(h_2))).$$

Cette dernière relation adjointe aux propriétés de g permet de conclure. ■

4 – LA RÉDUCTIBILITÉ LAGRANGIENNE

Nous allons chercher les conditions que doit satisfaire un système dynamique $\mathbb{R}X$ pour qu'il puisse provenir de plusieurs Lagrangiens non trivialement équivalents. Ce problème se ramène à celui de l'étude de l'équivalence de deux semi-potentiels A et B sur le fibré homogène. On peut d'abord se poser le problème de l'équivalence forte à savoir; existe-t-il deux semi-potentiels A et B tels que

- i) $i_X A = i_X B = 1,$
- ii) $i_X dA = i_X dB = 0.$

4.1. PROPOSITION. — *Si deux semi-potentiels A et B sont fortement équivalents, ils sont égaux.*

Preuve. — A et B sont deux formes de contact semi-basiques et $A - B$ est une 1-forme nulle sur X . La 2-forme VA est de classe maximum sur l'hyperplan de contact, donc il existe un unique champ de vecteurs ξ à valeurs dans $h_X HM \oplus VHM$ tel que

$$A - B = i_\xi dA,$$

mais $A - B$ est aussi semi-basique et donc, pour tout vecteur vertical Y , on doit avoir $i_Y i_\xi dA = 0$ ce qui n'est possible que si ξ est un champ de vecteurs vertical (voir métrique verticale). On peut aussi écrire

$$dA - dB = d(i_\xi dA),$$

d'où en contractant sur X

$$0 = i_X d(i_\xi dA) = L_X(i_\xi dA) - d(i_X i_\xi dA),$$

soit

$$0 = L_X(i_\xi dA) = i_{[X, \xi]} dA.$$

Le noyau de la forme dA étant réduit à $\mathbb{R}X$, le théorème de verticalité [F2] entraîne que ξ est la section nulle de THM . ■

On va donc s'intéresser à l'équivalence de deux semi-potentiels en demandant pour que A et B soient équivalents seulement que

$$i_X A = 1, \quad i_X dA = i_X dB = 0.$$

D'après le paragraphe sur l'équivalence des formes de contact, on sait que

ceci ne peut se produire que s'il existe un opérateur de conjugaison ψ_{AB} tel que

- i) $i_{\psi_{AB}(\xi)}A = i_{\xi}A$
- ii) $i_{\psi_{AB}(\xi)}dA = i_{\xi}dB$

Le caractère semi-basique de A et B a pour conséquence la proposition suivante.

4.2. PROPOSITION. — Soit A un semi-potential de dynamique X et B un autre semi-potential équivalent. Alors l'opérateur de conjugaison ψ_{AB} est tel que

- i) La décomposition $\text{THM} = \mathbb{R}X \oplus h_X\text{HM} \oplus \text{VHM}$ est stable pour ψ_{AB} ;
- ii) $[\psi_{AB}, v_X] = 0$;
- iii) $[\psi_{AB}, K_X] = 0$.

Rappelons (cf. [F2]) que $K_X = \frac{1}{2}(L_X(v_X) + \text{Id}_{\text{THM}})$ permet de définir $h_X\text{HM}$ comme étant le noyau de K_X .

Preuve i). — Remarquons tout d'abord que VHM est stable par ψ_{AB} . En effet, soient Y et Y' deux vecteurs verticaux. Puisque B est semi-basique, $i_{Y'}i_Y dB = 0$ et donc $i_{Y'}i_{>_X\psi_{AB}(Y)}dA = 0$.

On peut décomposer $\psi_{AB}(Y)$ sur $h_X\text{HM} \oplus \text{VHM}$ en

$$\psi_{AB}(Y) = >_X\psi_{AB}(Y) + \Lambda_X\psi_{AB}(Y) .$$

On obtient

$$i_{Y'}i_{>_X\psi_{AB}(Y)}dA = 0 .$$

Ceci veut dire que le vecteur horizontal $>_X\psi_{AB}(Y)$ est orthogonal relativement à dA à tout vecteur vertical. Mais le sous-fibré horizontal étant lagrangien $>_X\psi_{AB}(Y)$ est aussi orthogonal à tout vecteur horizontal. Il est donc dans le noyau de dA et est donc nul.

Un raisonnement semblable permet de conclure pour la stabilité de $h_X\text{HM}$.

Pour ii) d'après le théorème de verticalité et ses corollaires [F2], on sait qu'il suffit de prouver cette relation sur X, sur les champs de vecteurs verticaux Y et sur leur crochet $[X, Y]$ avec la dynamique. Évidemment

$$v_X \circ \psi(X) = v_X(X) = 0 = \psi(v_X(X)) .$$

Pour un champ de vecteurs vertical, à l'aide de i), on a $v_X \circ \psi(Y) = 0$ et de même $\psi(v_X(Y)) = \psi(0) = 0$.

Maintenant on va utiliser la Proposition 2.4.1

$$\begin{aligned} v_X \circ \psi([X, Y]) &= v_X([X, \psi(Y)] - (L_X \psi)(Y)) \\ &= v_X[X, \psi(Y)] \\ &= -\psi(Y) \\ &= \psi(v_X[X, Y]). \end{aligned}$$

On prouverait de même *iii*). ■

Dans le cas de l'équivalence générale on ne savait rien sur la semi-simplicité d'un opérateur de conjugaison. Ici grâce à la métrique g définie par A on a une information supplémentaire.

4.3. PROPOSITION. — Soit A un semi-potential de dynamique X . Alors l'opérateur de conjugaison défini par un semi-potential B équivalent est symétrique relativement à la métrique pseudo-riemannienne g définie par A .

Remarque. — Dans le cas où g est définie positive on en déduit que ψ_{AB} est semi-simple.

Preuve. — D'après la stabilité de la décomposition de THM, la construction de g à partir de la métrique verticale, la relation $[\psi_{AB}, v_X] = 0$, il n'y a qu'à vérifier ceci sur VHM.

Soient Y_1 et Y_2 deux champs de vecteurs verticaux

$$g(\psi_{AB}(Y_1), Y_2) = i_{\psi_{AB}(Y_1)} i_{[X, Y_2]} dA = i_{Y_1} i_{\psi_{AB}[X, Y_2]} dA$$

d'après la symétrie de ψ_{AB} relativement à dA .

Mais $L_X \psi_{AB} = 0$ d'où $\psi_{AB}[X, Y_2] = [X, \psi_{AB}(Y_2)]$

$$g(\psi_{AB}(Y_1), Y_2) = i_{Y_1} i_{[X, \psi_{AB}(Y_2)]} dA = g(Y_1, \psi_{AB}(Y_2)). \quad \blacksquare$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner le théorème fondamental de la réductibilité lagrangienne. C'est lui qui va nous permettre d'avoir une méthode constructive pour trouver les candidats champs de vecteurs propres d'un opérateur de conjugaison.

4.4. THÉORÈME. — Soit A un semi-potential de dynamique X et B un autre semi-potential équivalent à A , alors l'opérateur de conjugaison ψ_{AB} doit vérifier les équations de réductibilité lagrangienne

- i) $[\psi_{A,B}, \theta_X] = 0,$
- ii) $[\psi_{A,B}, \gamma_X] = 0.$

Remarques. — La première relation est purement algébrique et comme θ_X est diagonalisable, les « candidats » champs de vecteurs propres sont les sous-espaces champs propres de θ_X . La première étape est donc une simple diagonalisation.

Ne restent possibles que les sous-espaces qui sont en plus invariants par γ_X .

Mais on peut toujours choisir localement un champ de repères g -orthonormé de vecteurs propres de θ_X . Sur celui-ci la Proposition (3.3.3) entraîne que γ_X s'y écrit comme une matrice antisymétrique et il faut donc aussi assurer cette deuxième relation de commutation.

Ce problème est, comme on le voit, intimement lié à celui des caractéristiques du système dynamique $[X]$ puisque dans [F2] on prouve que les directions propres de θ_X sont en fait des caractéristiques du système dynamique. Donnons un exemple.

4.5. DÉFINITION. — Un système lagrangien est *complètement réductible lagrangien* s'il admet un opérateur de conjugaison dont toutes les valeurs propres sont de multiplicité 2.

4.6. PROPOSITION. — *Pour qu'un système lagrangien soit complètement réductible lagrangien, il faut que l'opérateur $[\theta_X, L_X\theta_X]$ soit nul.*

Remarque. — Cette proposition nous fournit un moyen pour trouver une obstruction à la complète réductibilité lagrangienne. De plus, dans [F2], l'étude des caractéristiques des systèmes dynamiques prouve que cet opérateur a une loi de transformation très simple quand on change de représentant du système dynamique, c'est-à-dire quand on modifie le paramétrage des orbites de X . On peut donc le calculer aisément à l'aide d'un quelconque choix de représentant.

Preuve du théorème. — Sur X , on a évidemment

$$\theta_X(\psi_{AB}(X)) = \theta_X(X) = 0 = \psi_{AB}(\theta_X X) \quad (\text{idem pour } \gamma_X).$$

Pour un champ de vecteurs horizontal h , rappelons que

$$[X, h] = \gamma_X(h) + \theta_X(v_X(h)).$$

Utilisons d'une part la stabilité de la décomposition $\mathbb{R}X \oplus h_X HM \oplus VHM$ et d'autre part la relation $L_X \psi_{AB} = 0$ pour écrire que

$$\begin{aligned} [X, \psi_{AB}(h)] &= \gamma_X(\psi_{AB}(h)) + \theta_X(v_X(\psi_{AB}(h))) \\ &= \psi_{AB}([X, h]) = \psi_{AB}(\gamma_X(h)) + \psi_{AB}(\theta_X(v_X(h))). \end{aligned}$$

L'identification des termes horizontaux donne

$$\gamma_X \circ \psi_{AB}(h) = \psi_{AB}(\gamma_X(h)).$$

Pour les termes verticaux il vient

$$\theta_X(\psi_{AB}(h)) = \psi_{AB}(\theta_X(h)). \quad \blacksquare$$

4.7. Preuve de la proposition. — Les multiplicités des valeurs propres étant toutes égales à deux, on peut d'après ce qui précède trouver une base

orthonormée de champs de vecteurs propres $\{ Y_i, H_X(Y_i) \}$, $1 \leq i \leq n - 1$, tels que $\psi_{AB}(Y_i) = \rho_i Y_i$, $\theta_X(Y_i) = \theta_i Y_i$.

De plus la relation $[\psi_{AB}, \gamma_X] = 0$ entraîne

$$\psi_{AB}(\gamma_X(Y_i)) = \gamma_X(\psi_{AB}(Y_i)) = \rho_i \gamma_X(Y_i).$$

Les deux champs de vecteurs $\gamma_X(Y_i)$ et Y_i sont donc colinéaires. D'après notre choix, $\| Y_i \| = 1$. La relation $L_X \| Y_i \|^2 = 2g(Y_i | \gamma_X(Y_i))$ nous permet d'écrire que $\gamma_X(Y_i) = 0$.

Pour terminer rappelons que $L_X \theta_X = [\gamma_X, \theta_X]$ [F2] et évaluons cet opérateur sur cette base.

Il vient $L_X \theta_X(Y_i) = \gamma_X \circ \theta_X(Y_i) - \theta_X(\gamma_X \cdot Y_i) = \gamma_X \cdot \theta_X(Y_i) = (L_X \theta_i) Y_i$ et donc θ_X et $L_X \theta_X$ sont simultanément diagonalisables. ■

Pour terminer ce paragraphe nous allons dans le cas particulier de la réductibilité lagrangienne compléter le théorème de réductibilité par la proposition suivante.

4.8. PROPOSITION. — *Soient A un semi-potentiel de dynamique X réductible lagrangien, B un semi-potentiel équivalent à A, ψ_{AB} leur opérateur de conjugaison. Si $\rho \neq 1$ est une valeur propre de ψ_{AB} de multiplicité supérieure ou égale à quatre, alors*

i) *la distribution verticale propre associée à ρ est intégrable au sens de Frobenius.*

ii) *il en est de même pour la distribution horizontale propre associée à ρ .*

Preuve. — Ceci résulte du Lemme (2.5.1) et du fait que les sous-fibrés VHM et $h_X HM$ sont lagrangiens ($i_{Y_1} i_{Y_2} dA = i_{h_1} i_{h_2} dA = 0$). Dans ces conditions, on peut, pour deux champs de vecteurs Y_1 et Y_2 indépendants associés à ρ , écrire avec les notations du lemme 2.5.1

$$[Y_1, Y_2] = B + \sum_{\lambda \neq \rho} B_\lambda + \mu X, \quad B_\rho \in E_\rho, \quad B_\lambda \in E_\lambda$$

et

$$\sum_{\lambda \neq \rho} (\lambda - \rho) B_\lambda + \mu(1 - \rho) X = (L_{Y_1} \rho) Y_2 - (L_{Y_2} \rho) Y_1,$$

d'où la nullité des B_λ ainsi que celle de μ .

La même relation serait obtenue pour deux champs de vecteurs h_1 et h_2 horizontaux associés à ρ . ■

On considère une variété M compacte et sur TM on a un lagrangien tel que l'endomorphisme de Jacobi associé soit défini négatif. Dans ces conditions on étend un résultat connu pour les systèmes Riemannien.

4.9. THÉORÈME. — *Soit M une variété compacte et un lagrangien L. Si l'endomorphisme de Jacobi de X, la dynamique de L sur HM, est défini*

négatif, alors X n'a pas d'intégrales premières C¹ non constantes. De plus le centralisateur de X est trivial

i. e. si $\zeta \in \tau\text{HM}$ et $L_X \zeta \equiv 0$, alors $\zeta \equiv aX$, $a \in \mathbb{R}$.

Remarque. — Rappelons qu'à toute intégrale première ρ est associée un unique champ de vecteur ζ dans l'hyperplan de contact tel que $d\rho = i_\zeta dA$, que $[X, \zeta] = 0$ et donc si le centralisateur de X est trivial $\zeta = 0$ et $d\rho = 0$.

Preuve. — Tout champ de vecteurs ζ sur HM se décompose naturellement sur $\text{VHM} \oplus h_X \text{HM} \oplus \mathbb{R}X$ en $\zeta = aX + h + v$. La relation $[X, \zeta] = 0$ conduit à

$$0 = (L_X a)X + p_X[X, h] + \theta_X(v_X(h)) + \gamma_X(h) - H_X(v) + \gamma_X(v).$$

Il en résulte après projection les trois équations

- i) $0 = (L_X a)X + p_X[X, h]$
- ii) $0 = \theta_X(v_X(h)) + \gamma_X(v)$
- iii) $0 = \gamma_X(h) - H_X(v).$

La relation i) est automatiquement vérifiée, $a = 0$, $p_X[X, h] = 0$.

Puisque $[\gamma_X, v_X] = 0$, on obtient pour iii)

$$0 = \gamma_X(v_X(h)) - v,$$

soit en reportant dans ii)

$$(\theta_X + \gamma_X \circ \gamma_X)(v_X(h)) = 0.$$

Cette équation est fondamentale et généralise l'équation habituelle des champs de Jacobi de la géométrie riemannienne.

Maintenant on utilise la métrique riemannienne sur HM associée à L

$$g(v_X(h), (\theta_X + \gamma_X \circ \gamma_X)(v_X(h))) = 0,$$

mais

$$g(v_X(h), \gamma_X \circ \gamma_X(v_X(h))) + g(\gamma_X(v_X(h)), \gamma_X(v_X(h))) = L_X g(v_X(h), \gamma_X(v_X(h)))$$

d'où

$$g(v_X(h), \theta_X(v_X(h))) - \|\gamma_X(v_X(h))\|^2 + \frac{1}{2} L_X^2 \|v_X(h)\|^2 = 0.$$

Puisque M est compacte $\|v_X(h)\|$ atteint son maximum en au moins un point z de HM. Mais en ce point $L_X^2 \|v_X(h)\|^2 \leq 0$ ce qui est contradictoire avec l'équation si $\|v_X(h)\| \neq 0$ puisqu'alors $g(v_X(h), \theta_X(v_X(h))) < 0$. ■

Grâce à ce théorème on peut par exemple considérer le cas très particulier à $\theta_X = -c\text{Id}$ pour lequel on a la proposition suivante.

4.10. PROPOSITION. — *Soit M une variété compacte de dimension ≥ 2 et L un lagrangien de dynamique X tel que l'endomorphisme de Jacobi soit*

négligé constant $\theta_X = -c \text{ Id}$. Alors le système n'est pas complètement réductible lagrangien (i. e. toutes les valeurs propres ne peuvent pas être simples sur VHM).

Preuve. — D'après le théorème de réductibilité et le théorème précédent la réductibilité d'un système à endomorphisme de Jacobi négatif nécessite que chaque sous-espace-propre de l'opérateur de conjugaison associé forme avec X une distribution intégrable.

Dans le cas qui nous intéresse ici, on va voir que c'est la courbure horizontale (voir [F2]) qui va interdire la complète réductibilité. En effet celle-ci est liée à θ_X et γ_X par la relation suivante.

4.11. LEMME. — Soit X une équation différentielle du second ordre sur le fibré homogène provenant d'un lagrangien et N_X la courbure horizontale associée à

$$\begin{aligned} N_X(h, h') = & -\frac{1}{2}(\theta_X - \gamma_X \circ \gamma_X)[Y, Y'] + \frac{1}{2}[Y, (\theta_X + \gamma_X \circ \gamma_X)(Y')] \\ & - \frac{1}{2}[Y', (\theta_X + \gamma_X \circ \gamma_X)(Y)] - \gamma_X([Y, \gamma_X(Y')]) \\ & + \gamma_X([Y', \gamma_X(Y)]) + [\gamma_X(Y), \gamma_X(Y')] \end{aligned}$$

où $Y = v_X(h), \quad Y' = v_X(h').$

L'obtention de cette formule est purement calculatoire et, pour des raisons de place, nous ne la développerons pas ici.

L'équation de réductibilité $[\psi, \theta_X] = 0$ nous permet de diagonaliser simultanément ψ et θ_X . Sur cette base propre orthonormée de θ_X , $\{Y_i\}$ ($1 \leq i \leq n-1$) la dérivation dynamique γ_X vérifie $g(\gamma_X(Y_i), Y_j) = -g(Y_i, \gamma_X(Y_j))$. Ici on suppose que les valeurs propres de ψ sont simples. La deuxième équation de réductibilité $[\psi, \gamma_X] = 0$ signifie que pour tout vecteur propre Y_i

$$\psi(\gamma_X(Y_i)) = \gamma_X(\psi(Y_i)) = \gamma_X(\rho_i Y_i) = \rho_i \gamma_X(Y_i)$$

et donc $\gamma_X(Y_i) = \alpha Y_i$ et d'après ce qui précède $\gamma_X(Y_i) = 0$.

On a supposé de plus que $\theta_X = -c \text{ Id}$. En utilisant le lemme, on peut réécrire que

$$N_X(h_i, h_j) = +\frac{1}{2}c[Y_j, Y_i] + \frac{1}{2}\gamma_X \circ \gamma_X[Y_i, Y_j].$$

On va montrer qu'on peut fabriquer avec h_i, h_j, Y_i, Y_j un champ de vecteurs commutant avec X. Utilisons pour cela deux fois l'identité de Jacobi

$$\begin{aligned} [X, [h_i, h_j]] + [h_i, [h_j, X]] + [h_j, [X, h_i]] &= 0; \\ [X, [Y_i, Y_j]] + [Y_i, [Y_j, X]] + [Y_j, [X, Y_i]] &= 0. \end{aligned}$$

Mais $[X, h_i] = \theta_X(Y_i) + \gamma_X(h_i)$ et le deuxième terme est nul puisque

$[\gamma_X, v_X] = 0$ remarquons aussi que $h_i = -[X, Y_i] + \gamma_X(Y_i)$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} [X, [h_i, h_j]] + [-[X, Y_i], CY_j] + [-[X, Y_j], -CY_i] &= 0 \\ [X, [Y_i, Y_j]] + [Y_i, [Y_j, X]] + [Y_j, [X, Y_i]] &= 0 \end{aligned}$$

et donc, si on pose $\xi = [h_i, h_j] - C[Y_i, Y_j]$, on a

$$[X, \xi] = 0.$$

D'après le Théorème (4.9) ce champ de vecteurs est nul. On a prouvé que

$$[h_i, h_j] = C[Y_i, Y_j]$$

et par conséquent aussi que

$$N_X(h_i, h_j) = \Lambda_X[h_i, h_j] = C[Y_i, Y_j].$$

Si on compare ceci avec la relation précédemment obtenue, on en déduit

$$3C[Y_i, Y_j] = \gamma_X \circ \gamma_X[Y_i, Y_j] \quad \text{où } C > 0.$$

Pour terminer, si on emploie un raisonnement analogue à celui de la démonstration du Théorème (4.9) on obtient $[Y_i, Y_j] = 0$ en tout point. Ces propriétés sont contradictoires avec la topologie des fibres de HM. Celles-ci sont homéomorphes à la sphère S^{n-1} ce qui interdit l'existence globale d'une famille libre maximale de champs de vecteurs commutant deux à deux dès que n est supérieur ou égal à 2. ■

BIBLIOGRAPHIE

- [A] V. ARNOLD, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. Éditions Mir Moscou, 1980.
- [A-A] V. ARNOLD, A. AVEZ, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.
- [Bn] D. BENNEQUIN, *Quelques remarques simples sur la rigidité symplectique*, Séminaire Sud-Rhodanien de géométrie symplectique, 1983, Vol. II, Hermann.
- [Be] A. BESSE, *Manifolds all of whose geodesics are closed*. *Ergebnisse der Math.*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1972.
- [D] P. DAZORD, *Propriétés globales des géodésiques des espaces de Finsler*, Thèse, 575, Publ. Math. Lyon, 1969.
- [F1] P. FOULON, *Contribution à l'étude géométrique des problèmes de la dynamique lagrangienne*. Preprint Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France, octobre 1983.
- [F2] P. FOULON, Géométrie des équations différentielles du second ordre. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. 45, n° 1, 1986, p. 1-28.
- [Gn] C. GODBILLON, *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann, 1969.
- [G] J. GRIFONE, Structure presque tangente et connexions, *Ann. Inst. Fourier*, Tome XXII, Fascicule 1 et 3, 1972.
- [K1] J. KLEIN, Espaces variationnels et mécaniques, *Ann. de l'Institut Fourier*, t. 12, 1962, p. 124.

- [K2] J. KLEIN, *Geometry of Sprays. Lagrangian Case, Principle of least curvature*. Proceedings of the IUTAM-ISIMM Symposium on Modern developments of Sciences of Turin, 7 novembre 1982.
- [L] P. LIBERMANN, *Sur quelques propriétés de Géométrie Homogène*. Colloque de Balaruc, Travaux en cours, (Hermann).
- [C] H. CARTAN, *Calcul différentiel*, Hermann, 1967.

(Manuscrit reçu le 5 octobre 1985)

(Version révisée reçue le 15 mai 1985)