ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

X. P. WANG

Addendum « Puits multiples pour l'opérateur de Dirac »

Annales de l'I. H. P., section A, tome 44, nº 3 (1986), p. 341

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1986__44_3_341_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 44, n° 3, 1986, p. 341. *Physique théorique*

ADDENDUM

« Puits Multiples pour l'Opérateur de Dirac »

(*Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. XLIII, n° 3, 1985, p. 269-319)

by X. P. WANG
Institut de Mathématiques et d'Informatique,
Université de Nantes, Nantes, France.

Dans cet article, nous avons étudié l'approximation semi-classique des valeurs propres pour l'opérateur de Dirac et montré dans le § 6.1 que si le potentiel V possède des symétries, la première valeur propre positive est double (cf. Lemme 6.3). En fait dans cette direction il existe déjà un résultat connu sous le nom du Théorème de Kramers (voir Landau-Lifchitz : *Mécanique Quantique*, Éditions Mir, Moscou 1967, p. 249) qui dit que les valeurs propres de l'opérateur de Dirac avec spin $k/2$, k impair, sont toujours doubles. Voici une démonstration élémentaire :

Soit : $\mathrm{D} = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \mathrm{D}_j + \alpha_4 + \mathrm{V}$ l'opérateur de Dirac avec le potentiel V réel. Définissons l'opérateur $\mathrm{K} : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 ; \mathbb{C}^4) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 ; \mathbb{C}^4)$ par :

$$\mathrm{K}u = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \overline{u}, \qquad u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 ; \mathbb{C}^4)$$

où $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$. Comme les matrices α_k, $k \neq 2$, sont réelles, on peut vérifier que K commute avec D et $\mathrm{K}^2 = -\mathrm{I}$. Soit u un vecteur propre de D associé à la valeur propre E : $\mathrm{D}u = \mathrm{E}u$. $\mathrm{K}u$ est aussi un vecteur propre de D : $\mathrm{D}(\mathrm{K}u) = \mathrm{E}(\mathrm{K}u)$. De plus $\mathrm{K}u$ est linéairement indépendant de u. En fait s'il existait $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{K}u = \lambda u$, on aurait :

$$-u = \mathrm{K}^2 u = \mathrm{K}(\lambda u) = \overline{\lambda} \mathrm{K}u = |\lambda|^2 u$$

ce qui est impossible car $u \neq 0$. Donc les valeurs propres de D sont au moins de multiplicité 2.

Étant donné ce résultat, le Théorème 6.4 de notre article reste encore vrai si l'on suppose seulement que V est symétrique par rapport à $x_1 = 0$; $\mathrm{V}(-x_1, x_2, x_3) = \mathrm{V}(x_1, x_2, x_3)$ (comparer avec la condition (6.4)).