ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

M. COSNARD
A. EBERHARD

Calcul explicite des constantes de renormalisation pour des classes particulières de fonctions unimodales

Annales de l'I. H. P., section A, tome 41, nº 4 (1984), p. 399-427
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1984__41_4_399_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 41, nº 4, 1984, p. 399-427. *Physique théorique*

Calcul explicite des constantes de renormalisation pour des classes particulières de fonctions unimodales

par

M. COSNARD et A. EBERHARD
Laboratoire TIM3, Institut IMAG, CNRS, INPG, BP 68,
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex France

RÉSUMÉ. — Nous étudions les propriétés de l'opérateur de renormalisation R appliqué à des classes particulières de fonctions unimodales.

Nous considérons, tout d'abord, l'ensemble F des applications linéaires par morceaux dont les pentes sont en progression géométrique. Dans certaines parties de F, R admet un unique point fixe en lequel il est différentiable. Les valeurs propres de R′ au point fixe sont réelles et strictement plus grandes que 1. Nous montrons aussi qu'il existe un sous-ensemble de F dans lequel R n'admet aucun point fixe, mais un cycle d'ordre 2.

En utilisant un procédé de troncature, nous construisons des familles de fonctions non-analytiques f_μ invariantes par R et telles que f_{μ_∞} est un point fixe de R. Si ce point fixe est la fonction de Feigenbaum, nous montrons que la constante de renormalisation est différente de $\delta = 4.669...$

Ces résultats montrent que la théorie de Feigenbaum est spécifique au cas des fonctions analytiques et que dans d'autres ensembles les propriétés de R peuvent être très différentes. De plus, ce travail nous conduit à penser qu'il est important de prendre des précautions dans l'utilisation pratique des résultats de Feigenbaum.

ABSTRACT. — We study properties of the renormalization operator R applied to some classes of non-analytical unimodal functions.

First we consider the set F of piecewise affine functions with slopes in geometric progression. For subsets of F, R has a unique fixed point in which it is differentiable. The eigenvalues of R′ at the fixed point are

real and strictly greater than 1. We then show a subset of F in which R does not possess any fixed point but admits a cycle of order 2.

Afterwards, using a troncature process, we construct non-analytical families f_μ invariant by R such that f_{μ_∞} is a fixed point of R. We compute explicitly the associated renormalization constants. If the fixed point is Feigenbaum function, we show that the constant is different from $\delta = 4.669...$

These results show that Feigenbaum theory is specific to the case of analytic functions and that in other sets the properties of R can be very different. Moreover this work leads us to think that it is necessary to take great care in the practical use of Feigenbaum results.

Lors de l'étude numérique de certaines familles de fonctions réelles dépendant d'un paramètre μ, comme par exemple $\mu \to 1 - \mu x^2$, Feigenbaum [*10*] [*11*] a mis en évidence une propriété surprenante : si l'on note μ_j la valeur de μ pour laquelle le cycle d'ordre 2^j bifurque en un cycle d'ordre 2^{j+1}, alors pour une large classe de familles

$$\lim_{j \to \infty} \frac{\mu_j - \mu_{j-1}}{\mu_{j+1} - \mu_j} = \delta = 4.669...$$

Une méthode, proposée par Feigenbaum [*10*] [*11*], a tout d'abord été utilisée par Collet, Eckmann et Lanford [*2*] pour démontrer l'ensemble des conjectures de Feigenbaum dans le cas de fonctions de la forme

$$f(x) = \Psi(|x|^{1+\varepsilon})$$

où Ψ est analytique dans un voisinage complexe de $[0, 1]$ et ε suffisamment petit. Elle a été ensuite reprise par Lanford [*13*] dans le cas de fonctions analytiques ($\varepsilon = 1$).

Cette méthode consiste à remarquer que le graphe de f^2 sur une partie de l'intervalle de définition « ressemble » à celui de f sur tout l'intervalle et, *via* une homothétie, à renormaliser f, c'est-à-dire agrandir cette partie de l'intervalle de définition à tout l'intervalle. L'opérateur de renormalisation R ainsi défini, possède des points fixes : Campanino et Epstein [*1*], puis Lanford [*13*], ont donné une preuve de l'existence d'un point fixe ; Cosnard et Eberhard [*6*], ont montré qu'il existait une infinité de points fixes de classe $C^k (k < +\infty)$, et ont proposé un algorithme de construction.

Dans la classe de fonctions étudiées par Feigenbaum, l'application linéaire tangente en ce point fixe admet une seule valeur propre supérieure à 1 égale à δ, et le reste du spectre est contenu dans l'intérieur du disque unité. L'opérateur admet donc une variété instable locale de dimension 1, et une variété stable locale de co-dimension 1. Une famille f_μ, dépendant d'un paramètre, telle $1 - \mu x^2$, peut être considérée comme une courbe coupant transversalement la variété instable. L'opérateur de renormalisation fait correspondre à f_{μ_j} une fonction admettant, comme $f_{\mu_{j-1}}$, un cycle d'ordre 2^{j-1}. La « distance » entre $f_{\mu_{j-1}}$ et f_{μ_j} diminue de manière géométrique comme δ^{-j}, pour j suffisamment grand. Cette propriété est à l'origine du phénomène observé par Feigenbaum.

Cet ensemble de conjectures a pu être placé dans un cadre théorique tout à fait satisfaisant, et démontré par Collet et al. [*2*], puis Lanford [*13*] dans les cas décrits plus haut.

Notre but est d'étudier l'opérateur de renormalisation, appliqué à un ensemble de fonctions non analytiques et de montrer en quoi les conjectures de Feigenbaum sont modifiées. Le cadre simple choisi permet de conduire les calculs explicites très loin (au prix d'une quantité importante de calculs) et donc de décrire très clairement le comportement de l'opérateur.

1. RÉSUMÉ DES RÉSULTATS OBTENUS

Dans une première partie nous nous placerons dans un ensemble de fonctions affines par morceaux dont les pentes sont en progression géométrique. L'ensemble est totalement défini par la donnée de deux réels ρ et θ. Ceux-ci étant fixés, R applique une partie de l'ensemble, notée $\Phi(\rho, \theta)$, dans l'ensemble noté $F(\rho, \theta)$. Il est possible de munir ce dernier d'une structure de variété différentiable pure de dimension 2. Pour certaines valeurs de ρ et θ, R admet dans $\Phi(\rho, \theta)$ un point fixe unique en lequel R est différentiable. Les valeurs propres de l'application linéaire tangente en ce point fixe sont réelles et toutes deux *strictement supérieures à 1*. Ceci constitue une première différence avec le cas des fonctions analytiques.

Au voisinage du point fixe, R admet une variété invariante associée à une des deux valeurs propres λ_1. Cette variété est de dimension 1 et peut être identifiée à une famille à un paramètre (elle correspond à la variété instable des conjectures de Feigenbaum). Les valeurs μ_j du paramètre pour lesquelles se produit la cascade de bifurcations convergent géométriquement vers leur limite et on vérifie, comme le prédisent les conjectures que :

$$\lim_{j \to \infty} \frac{\mu_j - u_{j-1}}{\mu_{j+1} - \mu_j} = \lambda_1$$

Contrairement au cas analytique, il existe des valeurs de ρ et de θ pour lesquelles R n'admet pas de point fixe dans la famille. Nous ne connaissons pas le comportement de R dans ce cas (le problème est ouvert mais semble assez difficile). Cependant, pour un couple particulier de paramètres, nous montrons qu'au lieu d'admettre un point fixe, R *admet un cycle d'ordre 2* (autre différence importante avec le cas analytique).

Par la suite, en utilisant un procédé de troncature, nous construisons des familles f_μ de fonctions non-analytiques, invariantes par R, telles que f_{μ_∞} soit un point fixe de R.

Nous calculons explicitement les constantes de renormalisation associées. Dans le cas où le point fixe est la fonction Ψ de Feigenbaum, dont l'existence a été montrée par Campanino et Epstein [*1*], nous montrons que la constante calculée est différente de $\delta = 4.669...$ Ceci illustre une nouvelle fois la dépendance des constantes de renormalisation avec la différentiabilité des familles au voisinage de 0.

L'ensemble de ces résultats montre que les propriétés démontrées par Collet et al. [*2*] et par Lanford [*13*] sont spécifiques au cas des fonctions analytiques et que dans des ensembles plus grands les propriétés de l'opérateur peuvent varier énormément. De plus, ce travail conduit à penser qu'il est nécessaire de s'entourer de très grandes précautions pour l'utilisation pratique des résultats de Feigenbaum. Il apparaît quelque peu illusoire d'espérer en pratique montrer que des phénomènes naturels possèdent une cascade de bifurcations et sont du type décrit plus haut par une mesure approchée des premières valeurs de bifurcation. Il semble tout aussi utopique d'espérer montrer expérimentalement que la transition vers la turbulence de certains phénomènes se produit à la suite de cascade de bifurcations dont les valeurs du paramètre convergent vers leur limite à la vitesse de 4.669...

2. LE CADRE GÉNÉRAL

Dans toute la suite nous considérerons des applications paires, continues de $[-1, +1]$ dans lui-même, telles que $f(0) = 1$ et que f soit décroissante sur $[0, 1]$. De telles applications seront dites unimodales et leur ensemble sera noté U.

Soit f une telle application. Posons $\alpha = -f(1)$. Supposons que :

$$\alpha > 0 \qquad \text{et} \qquad f^2(\alpha) \leqslant \alpha$$

nous dirons que f est renormalisable et nous appellerons renormalisée de f :

$$Rf(x) = -\frac{1}{\alpha} f^2(-\alpha x)$$

Rf est aussi une application unimodale. R est l'opérateur de renormalisation. Une propriété importante de cet opérateur est que Rf est conjuguée à f^2. (Voir (3) pour une présentation des propriétés de R).

3. L'ENSEMBLE DES APPLICATIONS AFFINES PAR MORCEAUX A PENTES EN PROGRESSION GÉOMÉTRIQUE

Soient ρ et θ deux réels tels que $0 \leqslant \theta \leqslant \rho \leqslant 1$ et g l'application de $[\rho, 1[$ dans $[\theta, 1[$ définie par :

$$\forall x \in [\rho, 1[\qquad g(x) = \frac{\theta(1-\rho)x}{\rho(1-\theta)-(\rho-\theta)x}.$$

Considérons l'ensemble (voir fig. 1) :

$$S(\rho, \theta) = S = \{ (x, z)/x \in [\rho, 1[,\ z \in]0, 2g(x)[\}$$

Soit (x, z) un élément de S. On construit la suite des points de R^2 :

$$(x_i, y_i) = (\rho^i x, 1 - \theta^i z) \qquad i = -1, 0, 1, \ldots$$

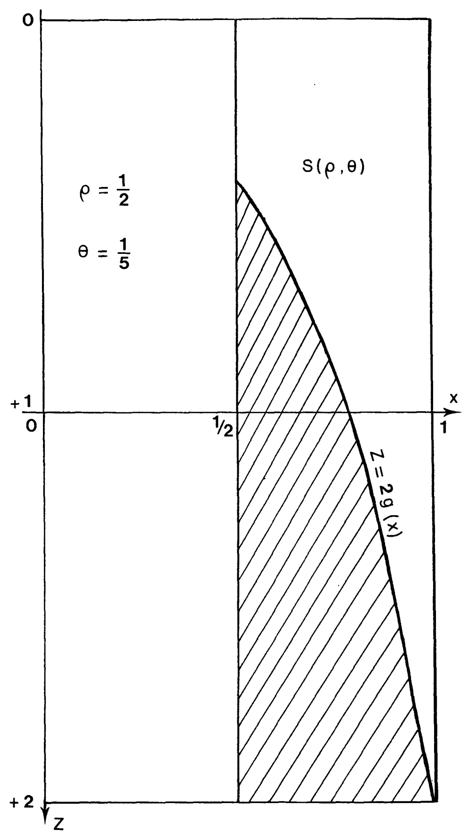

FIG. 1. — Domaine $S(\rho, \theta)$.

On définit une application $f_{(x,z)}$ de $[-1, +1]$ dans R par :

$$\forall t \in [-1,+1] \quad f_{(x,z)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t = 0 \\ 1 + \dfrac{\rho-\theta}{1-\rho}\theta^{i-1}z - \left(\dfrac{1-\theta}{1-\rho}\right)\left(\dfrac{\theta}{\rho}\right)^{i-1}\dfrac{z}{x}t & \text{si} \quad t \in]x_i, x_{i-1}] \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de voir que :

$$z \leqslant 2g(x) \Leftrightarrow f_{(x,z)}(1) \geqslant -1$$

Par conséquent, f est une application unimodale de $[-1, 1]$ dans lui-même dont le graphe est obtenu en reliant les points (x_i, x_i) (par ordre de i croissant) par des segments de droite et en complétant par continuité en 0 et symétrie paire. Notons que les pentes des segments ainsi construits sont toutes en progression géométrique dans le rapport θ/ρ.

Nous appellerons $F(\rho, \theta)$ l'ensemble des applications précédentes :

$$F = F(\rho, \theta) = \{ f / \exists (x, z) \in S(\rho, \theta), f = f_{(x,z)} \}$$

Nous munissons F de la topologie de la convergence uniforme, notée $\| \, . \, \|$.

L'application h de S dans F :

$$\forall (x, z) \in S \qquad h[(x, z)] = f_{(x,z)}$$

est donc une bijection. Nous aimerions munir S d'une topologie faisant de h un homéomorphisme.

Bien évidemment, deux éléments de F sont voisins si et seulement si leurs changements de pente sont voisins. Par conséquent, une application de F ayant un changement de pente en (x, z) avec x légèrement supérieur à ρ, sera proche d'une application ayant un changement de pente en (x', z'), où :

— soit (x', z') est voisin de (x, z) au sens de la distance de R^2
— soit (x', z') est voisin de $(x/\rho, z/\theta)$ au sens de la distance de R^2.

Appelons $\alpha = -f(1)$. Un calcul explicite montre que $\alpha = \dfrac{z}{g(x)} - 1$.

Deux applications $f_{(x,z)}$ et $f_{(x',z')}$ sont voisines si et seulement si x et x' sont voisins au sens défini plus haut et α et α' sont proches pour la distance de R.

Nous munissons donc $S(\rho, \theta)$ de la distance d suivante :

$$\forall x, x' \in [\rho, 1] \qquad \delta(x, x') = \inf(|x - x'|, |(1-\rho) - x - x'|)$$

$$\forall (x, z), (x', z') \in S \qquad d[(x, z), (x', z')] = \sup\left[\delta(x, x'), \left|\frac{z}{g(x)} - \frac{z'}{g(x')}\right|\right]$$

Muni de la distance précédente, (S, d) est un espace métrique, homéomorphe au cylindre $S^1 \times]0, 2[$ avec la distance du max. Bien évidemment, (S, d) et $(F, \| \, . \, \|)$ sont homéomorphes. C'est l'objet du lemme suivant dont la démonstration est une conséquence directe de ce qui précède :

LEMME 1. — *L'application* h *de* (S, d) *dans* $(F, \| \, . \, \|$ *est un homéomorphisme.*

F est l'ensemble des applications avec lesquelles nous construirons des familles dépendant d'un paramètre. Nous introduisons le sous-ensemble de F formé des applications renormalisables et dont les renormalisées sont dans F.

Soit $\Phi(\rho, \theta)$ le sous-ensemble de $F(\rho, \theta)$, défini par :

$$\Phi = \Phi(\rho, \theta) = \{ f \in F / \begin{array}{ll} (1) & \alpha = -f(1) > 0 \\ (2) & f^2(\alpha) < \alpha \\ (3) & f(\alpha) \geqslant x \} \end{array}$$

où $(x, z) = h^{-1}(f)$.

Il n'est pas difficile de montrer que Φ est d'intérieur non-vide dans F (nous verrons plus loin de nombreux exemples).

Les conditions (1) et (2) montrent que Rf existe et est une application unimodale.

LEMME 2. — R *est une application continue de* $(F, \| \, . \, \|)$ *dans* $(\Phi, \| \, . \, \|)$.

Démonstration. — La condition (3) implique que si $t \in [-\alpha, +\alpha]$ alors $f(t) \in [x, 1]$. f étant affine sur $[x, 1]$, nous en déduisons que :

— Rf est une application affine par morceaux

— les abscisses des changements de pente de f^2 sont dans le même rapport que celles de f, c'est-à-dire ρ

— si les y_i' sont les ordonnées des changements de pente de Rf alors les $z_i' = 1 - y_i'$ forment une progression géométrique de rapport θ.

Donc Rf appartient à F. Pour démontrer la continuité de l'opérateur R, il suffit de le décomposer en deux opérateurs : $R = R_2 \circ R_1$ avec

$$R_1 : \Phi \to C([-1, +1]) \times [-1, +1] \qquad R_1 f = (f^2, -f(1))$$

$$R_2 : C([-1, +1] \times [-1, +1] \to C([-1, +1]) \quad R_2(g, \alpha)(x) = -\frac{1}{\alpha} g(-\alpha x)$$

Il est facile de vérifier que R_1 et R_2 sont continus pour la norme uniforme.

Posons $\Sigma = h^{-1}(\Phi) \subseteq S(\rho, \theta)$ (voir figure 2) et munissons-le de la distance d induite. Le lemme 1 nous assure que Σ est d'intérieur non vide dans $S(\rho, \theta)$.

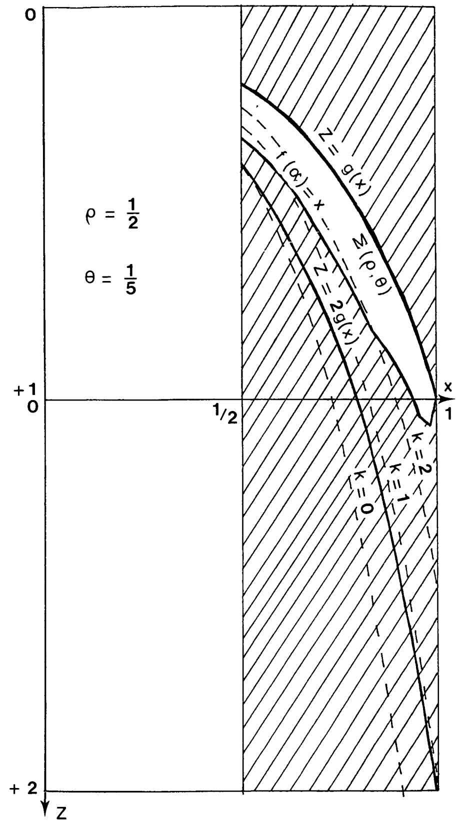

FIG. 2. — Domaine $\Sigma(\rho, \theta)$.

Nous allons maintenant munir S d'une structure de variété différentielle. Pour cela nous utilisons deux cartes. Posons :

$$\mathrm{U}_1 = \{ (x, z) \in \mathrm{S}/x \in \,]\rho, 1[, z \in \,]0, 2g(x)[\}$$

$$\mathrm{U}_2 = \left\{ (x, z) \in \mathrm{S}/x \in \left[\rho, \frac{1+\rho}{2}\right[\cup \left]\frac{1+\rho}{2}, 1\right[, z \in \,]0, 2g(x)[\right\}$$

$$\phi_1 : \mathrm{U}_1 \to \mathbb{R}^2 \quad (x, z) \to (x, z)$$

$$\phi_2 : \mathrm{U}_2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x, z) \to \begin{cases} \left(x, \dfrac{z}{g(x)}\right) & \text{si} \quad x \in \left[\rho, \dfrac{1+\rho}{2}\right[\\ \left(x - (1-\rho), \dfrac{z}{g(x)}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous utiliserons les notations de Dieudonné [9] pour définir une carte par un triplet.

Il est trivial de montrer que $c_1 = (U_1, \phi_1, 2)$ et $c_2 = (U_2, \phi_2, 2)$ sont des cartes de $S(\rho, \theta)$. Montrons que c_1 et c_2 sont compatibles :

$$U_1 \cap U_2 = \left\{ (x, z) \in S / x \in \left]\rho, \frac{1+\rho}{2}\right[\cup \left]\frac{1+\rho}{2}, 1\right[, z \in]0, 2g(x)[\right\}$$

$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ *est un homéomorphisme de* $\phi_1(U_1 \cap U_2)$ *dans*

$$\left]\frac{3\rho - 1}{2}, \rho\right[\cup \left]\rho, \frac{1+\rho}{2}\right[\times \left]0, 2\right[$$

qui se décompose en deux applications Ψ_1 et Ψ_2 :

$$\Psi_1(x, z) = \left(x, \frac{z}{g(x)}\right) \qquad \Psi_2(x, z) = \left(x - (1 - \rho), \frac{z}{g(x)}\right)$$

Ψ_1 et Ψ_2 sont évidemment indéfiniment différentiables. Il n'est pas difficile de voir que Ψ'_1 et Ψ'_2 sont de rang 2 en tout (x, z) appartenant aux domaines de définition de Ψ_1 et Ψ_2.

$$\Psi'_1, \Psi'_2 : \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{zg'(x)}{[g(x)]^2} & \dfrac{1}{g(x)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$$

Les cartes c_1 et c_2 nous permettent donc de munir (S, d) d'une structure de variété différentiable pure de dimension 2.

Remarquons que nous pouvons identifier la partie des (x, z) de S tels que $x \neq \rho$ avec la partie correspondante de R^2, par l'intermédiaire de la carte c_1. Nous utiliserons plus loin cette propriété pour simplifier les calculs (la métrique d est d'un emploi plus lourd que la distance dans R^2).

Munissons, pour terminer, $(F, \|\,.\,\|)$ de la structure de variété différentiable transportée par h de celle de (S, d). h est alors un difféomorphisme $\overset{\circ}{S}$ sur F. $\overset{\circ}{\Sigma}$ et $\overset{\circ}{\Phi}$ sont des ouverts non vides et peuvent être munis de la structure de variété différentiable induite.

4. POINTS FIXES DE R ET VALEURS PROPRES

Définissons T l'application continue de Σ dans S, conjuguée topologique de R par h :

$$T = h^{-1} \circ R \circ h$$

PROPOSITION 1. — *Pour tout* $(x, z) \in \Sigma$ *on pose* $T(x, z) = (X, Z)$. *Alors* :

1) *Il existe un unique entier k tel que*

$$(1 + \rho^k x)g(x) < z \leqslant (1 + \rho^{k-1}x)g(x)$$

2) *Si* (x, z) *vérifie la condition précédente, alors*

$$X = \rho^k \frac{\theta(1-\rho)x^2}{\rho(1-\theta)z - \theta(1-\rho)x - (\rho-\theta)xz}$$

$$Z = \theta^k \frac{\rho(1-\theta)z^2}{\rho(1-\theta)z - \theta(1-\rho)x - (\rho-\theta)xz}$$

Démonstration. — 1) Un calcul direct montre que :

$$\alpha = -f(1) = \frac{\rho(1-\theta-x)z - \theta(1-\rho-z)x}{\theta(1-\rho)x}$$

Une des conditions de renormalisation est que $\alpha > 0$. Cette condition s'écrit aussi :

$$\alpha > 0 \Leftrightarrow z > g(x)$$

Le domaine de définition de z implique que $z < 2g(x)$. Par conséquent :

$$1 < \frac{z}{g(x)} < 2$$

x étant compris entre ρ et 1, la suite $1 + \rho^{k-1}x$ est monotone décroissante, est égale à $1 + \frac{x}{\rho} \geqslant 2$ pour $k = 0$ et tend vers 1 lorsque k tend vers l'infini, d'où l'existence et l'unicité de k.

2) provient d'un calcul direct.

Étudions $\overset{\circ}{\Sigma}$ (intérieur de Σ). Pour appartenir à $\overset{\circ}{\Sigma}$, il est évident que (x, z) doit être tel que : $\alpha > 0, f^2(\alpha) < \alpha$, et $f(\alpha) > x$. Mais ces conditions ne sont pas suffisantes. En effet, soit (ρ, z) un point de Σ. Montrons qu'il n'appartient pas à $\overset{\circ}{\Sigma}$:

$$(\rho, z) \in \Sigma \Rightarrow \alpha = \frac{z}{\theta} - 1 > 0, \qquad f^2(\alpha) < \alpha \quad \text{et} \quad f(\alpha) \geqslant x$$

Remarquons que $f(\alpha) < 1$ puisque f est unimodale et que $\alpha > 0$. Soit alors $x' = 1 - \varepsilon$, $z' = \frac{z}{\theta}$ un point d'un voisinage de (ρ, z). On a bien évidemment :

$$\forall t \in [-1, +1] \qquad f'(t) = f_{(x',z')}(t) \leqslant f(t) = f_{(\rho,z)}(t)$$

et en particulier, $f'(\alpha') \leqslant f(\alpha)$. Posons $\varepsilon_1 = 1 - f(\alpha)$. Alors :

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_1 \qquad f'(\alpha') \leqslant f(\alpha) < 1 - \varepsilon$$

et donc $f'(\alpha) < x'$ et $(x', z') \notin \overset{\circ}{\Sigma}$.

Par conséquent : $\overset{\circ}{\Sigma} = \{ (x, z) \in \Sigma / f(\alpha) > x$ et $x \neq \rho \}$.

Par l'intermédiaire de la carte c_1 définie sur $\overset{\circ}{\Sigma}$, on ramène le problème de l'étude de T sur $\mathring{\Sigma}$ à l'étude de la transformation induite sur l'ouvert correspondant de R^2.

LEMME 3. — *Soit* (x, z) *un point de* $\mathring{\Sigma}$ *tel que*

$$\forall k \in \mathrm{N} \qquad z \neq (1 + \rho^{k-1}x)g(x)$$

Alors T *est différentiable en* (x, z).

Démonstration. — De l'hypothèse, nous déduisons qu'il existe k unique et un voisinage $V(x, z)$ tel que :

$$\forall (x', z') \in V(x, z) \qquad (1 + \rho^k x')g(x') < z' < (1 + \rho^{k-1}x')g(x')$$

Nous en déduisons que dans $V(x, z)$ la transformation T est donnée par les formules 2) de la proposition 1 *avec k constant.* Ceci implique que T est différentiable en (x, z). ■

Les hypothèses que nous avons ajoutées au problème :

$$x \neq \rho\,; \qquad z \neq (1 + \rho^{k-1}x)g(x)$$

peuvent paraître assez secondaires. Elles simplifient cependant beaucoup les calculs et la présentation des résultats sans trop atténuer la généralité de ceux-ci.

Nous allons étudier les points fixes de R et de T.

PROPOSITION 2. — *Soient*

$$x^* = \rho \frac{1 - \theta}{\rho - \theta}\left[1 - \theta^k - \left(\frac{\theta}{\rho}\right)^k\right] \qquad z^* = \theta \frac{1 - \rho}{\rho - \theta}\left[\left(\frac{\rho}{\theta}\right)^k - \rho^k - 1\right]$$

S'il existe $k \in \mathrm{N}$ *tel que* $\rho \leqslant x^*$ 1 *alors*

1) *k est unique*
2) z^* *est tel que*

$$(1 + \rho^k x^*)g(x^*) < z^* \leqslant (1 + \rho^{k-1}x^*)g(x^*)$$

3) *si* $(x^*, z^*) \in \Sigma$ *alors* (x^*, z^*) *est l'unique point fixe de* T *dans* Σ.

Démonstration. — 1) S'il existe k et l avec $k < l$ tels que

$$\rho \leqslant \rho \frac{1 - \theta}{\rho - \theta}\left[1 - \theta^k - \left(\frac{\rho}{\theta}\right)^k\right] < \rho \frac{1 - \theta}{\rho - \theta}\left[1 - \theta^l - \left(\frac{\rho}{\theta}\right)^l\right] < 1$$

Ces inégalités impliquent que :

$$\theta^k + \left(\frac{\theta}{\rho}\right)^k \leqslant \frac{1 - \rho}{1 - \theta} \qquad \theta^l + \left(\frac{\theta}{\rho}\right)^l > \frac{\theta}{\rho}\left(\frac{1 - \rho}{1 - \theta}\right).$$

Mais,

$$\theta^l+\left(\frac{\theta}{\rho}\right)^l<\frac{\theta^l}{\rho^{l-k}}+\left(\frac{\theta}{\rho}\right)^l=\left(\theta^k+\left(\frac{\theta}{\rho}\right)^k\right)\left(\frac{\theta}{\rho}\right)^{l-k}<\frac{1-\rho}{1-\theta}\left(\frac{\theta}{\rho}\right)^{l-k}<\frac{1-\rho}{1-\theta}\left(\frac{\theta}{\rho}\right)$$

ce qui contredit $\theta^l + \left(\frac{\theta}{\rho}\right)^l > \frac{\theta}{\rho}\left(\frac{1-\rho}{1-\theta}\right)$.

2) $(1 + \rho^k x^*)g(x^*) < z^* \leqslant (1 + \rho^{k-1}x^*)g(x^*)$ s'écrit aussi en posant $A = \rho^k - \rho^k\theta^k - \theta^k$:

$$\left(1+\rho\frac{1-\theta}{\rho-\theta}A\right)\frac{\theta(1-\rho)}{\rho-\theta}\frac{A}{\rho^k-A}<\theta\frac{1-\rho}{\rho-\theta}\frac{A}{\theta^k}\leqslant\left(1+\frac{1-\theta}{\rho-\theta}A\right)\frac{\theta(1-\rho)}{\rho-\theta}\frac{A}{\rho^k-A}$$

qui se simplifie en :

$$\left(1+\rho\frac{1-\theta}{\rho-\theta}A\right)\frac{1}{\rho^k-A}<\frac{1}{\theta^k}\leqslant\left(1+\frac{1-\theta}{\rho-\theta}A\right)\frac{1}{\rho^k-A}$$

$$\Leftrightarrow 1+\rho\frac{1-\theta}{\rho-\theta}A<\rho^k+1\leqslant 1+\frac{1-\theta}{\rho-\theta}A$$

$$\Leftrightarrow x^*<1\leqslant\frac{x^*}{\rho}$$

$$\Leftrightarrow \rho\leqslant x^*<1.$$

3) Posons $a = \rho(1-\theta)$; $b = \theta(1-\rho)$. Il s'agit de trouver dans Σ des solutions aux équations :

$$x=\rho^k\frac{bx^2}{az-bx-(a-b)xz}\qquad z=\theta^k\frac{az^2}{az-bx-(a-b)xz}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}=\left(\frac{\rho}{\theta}\right)^k\frac{b}{a}\left(\frac{x}{z}\right)^2\Rightarrow z=\left(\frac{\rho}{\theta}\right)^k\frac{b}{a}x.$$

D'où l'équation en x :

$$\left[\left(\frac{\rho}{\theta}\right)^k(a-b)\right]x^2-\left[\left(\frac{\rho}{\theta}\right)^k(2a-b)-(1+\rho^k)a\right]x+a\left[\left(\frac{\rho}{\theta}\right)^k-\rho^k-1\right]=0$$

dont les solutions sont $x = 1$, qui n'est pas admissible et

$$x^*=\rho\frac{1-\theta}{\rho-\theta}\left[1-\theta^k-\left(\frac{\theta}{\rho}\right)^k\right]$$

En remplaçant x^* par sa valeur on obtient z^*.

Si (x^*, z^*) appartient à Σ, la démonstration précédente montre que c'est l'unique point fixe de T dans Σ. Remarquons que si k n'existe pas ou si (x^*, z^*) n'appartient pas à Σ, alors T n'admet aucun point fixe dans Σ. ■

De la proposition 2 on déduit que, si k existe (voir figure 3) et si $(x^*, z^*) \in \Sigma$, alors $f^* = h(x^*, z^*)$ est un point fixe unique de R dans $\Phi(\rho, \theta)$. Pour une étude des points fixes de l'opérateur de renormalisation et de leurs propriétés itératives, nous renvoyons le lecteur à Cosnard et Eberhard [5] [6].

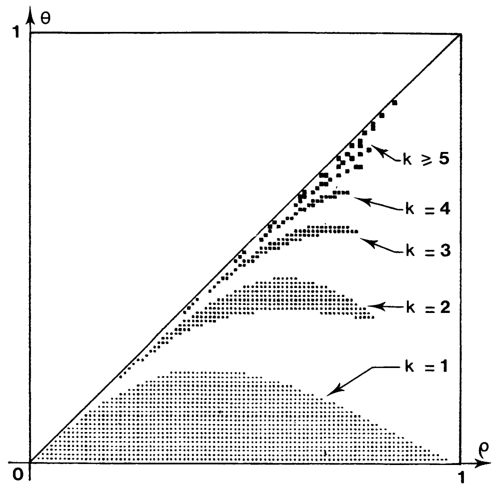

FIG. 3. — Représentation dans le domaine (ρ, θ) des plages d'existence des points fixes et des valeurs de k associées.

Les 3 exemples qui suivent illustrent les divers cas possibles :

1) $\rho = \frac{1}{2}$ $\quad \theta = \frac{1}{5}$ pour $k = 1$ $\quad x^* = \frac{8}{15}$ et $z^* = \frac{1}{3}$

α est alors égal à $\frac{1}{2}$, $f(\alpha) = \frac{7}{10} > x^*$ et $f^2(\alpha) = \frac{1}{4} < \alpha$.

Donc $f^* = h(x^*, z^*)$ est point fixe de R (voir figure 4).

2) $\rho = \frac{1}{2}$ $\quad \theta = \frac{1}{4}$

$$x^* = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right] \qquad \begin{array}{l} k = 1 \quad x^* = \frac{3}{8} \leqslant \rho \\ k = 2 \quad x^* = \frac{33}{32} \geqslant 1 \end{array}$$

Il n'existe pas d'entier k tel que $\rho \leqslant x^* < 1$.
R n'admet donc pas de point fixe dans $\Phi(1/2, 1/4)$.

3) $\rho = \frac{1}{2}$ $\quad \theta = \frac{1}{3}$.

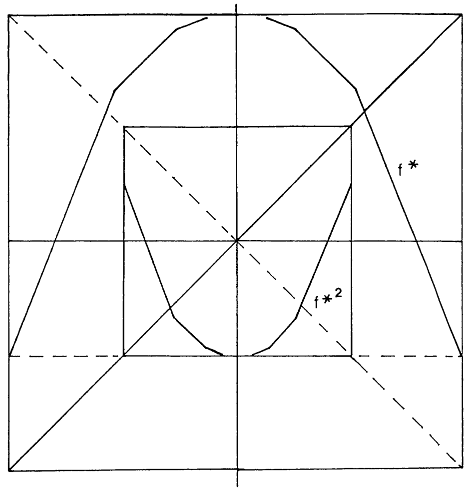

FIG. 4. — Le point fixe de R dans S(1/2, 1/5).

Pour $k = 2 \qquad x^* = \frac{8}{9}$ et $z^* = 1$.

α est alors égal à $\frac{1}{4}$ mais $f(\alpha) = \frac{31}{36} < x^*$.

$(x^*, z^*) \notin \Sigma$ et R n'admet pas de point fixe.

Nous nous intéressons maintenant au comportement itératif de T au voisinage d'un point fixe. Pour cela nous étudions l'opérateur linéarisé et en particulier les valeurs propres de la matrice Jacobienne de T au point fixe (pour simplifier, nous supposerons qu'il existe un ouvert de Σ contenant le point fixe).

PROPOSITION 3. — *Soient ρ et θ tels que* T *admette un point fixe* (x^*, z^*) *dans* $\mathring{\Sigma}(\rho, \theta)$ *et soit k l'entier associé* :

1) T *est dérivable en* (x^*, z^*),
2) *Les valeurs propres de* $T'(x^*, z^*)$ *sont*

$$\lambda_1 = \frac{\rho^k - \theta^k}{\rho^k\theta^k} \qquad \lambda_2 = 2$$

Démonstration. — 1) Provient des hypothèses et du lemme 3 (*).

2) Dans les hypothèses où nous sommes placés, nous pouvons consi-

(*) La condition $x^* \in \mathring{\Sigma}$ implique que $x^* \neq \rho$. Par conséquent, $\alpha = \rho^k \neq \rho^{k-1}x^*$ et donc on a bien $z^* \neq (1 + \rho^{k-1}x^*)g(x^*)$.

dérer T comme un opérateur d'une partie de R^2 dans R^2. (x^*, z^*) appartenant à $\overset{\circ}{\Sigma}$, k est constant dans un voisinage de (x^*, z^*). Les dérivées partielles de T en (x^*, z^*) s'obtiennent comme suit :

Posons $(X, Z) = T(x, z)$; $\quad a = \rho(1-\theta)$; $\quad b = \theta(1-\rho)$

$D(x, z) = az - bx - (a-b)xz$

Les expressions de la proposition 1 deviennent

$$X = \rho^k \frac{bx^2}{D(x, z)} \qquad Z = \theta^k \frac{az^2}{D(x, z)}$$

Les dérivées partielles de T, évaluées au point fixe sont alors égales à :

$$\frac{\delta X}{\delta x} = \rho^k \frac{bx^*(az^* + D(x^*, z^*))}{D^2(x^*, z^*)} \qquad \frac{\delta X}{\delta z} = \rho^k \frac{bx^{*2}(-a + (a-b)x^*)}{D^2(x^*, z^*)}$$

$$\frac{\delta Z}{\delta z} = \theta^k \frac{az^{*2}(b + (a-b)z^*)}{D^2(x^*, z^*)} \qquad \frac{\delta Z}{\delta z} = \theta^k \frac{az^*(D(x^*, z^*) - bx^*)}{D^2(x^*, z^*)}$$

En remplaçant x^* et z^* par leur valeur, les valeurs propres du Jacobien vérifient :

$$\lambda^2 - \left(2 + \frac{\rho^k - \theta^k}{\rho^k\theta^k}\right)\lambda + \frac{2}{\rho^k\theta^k}(\rho^k - \theta^k) = 0$$

dont les solutions sont : $\lambda_1 = \dfrac{\rho^k - \theta^k}{\rho^k\theta^k}$ et $\lambda_2 = 2$. ■

LEMME 4. — *Sous les hypothèses de la proposition précédente, nous avons* : $\lambda_1 > 1$.

Démonstration. — Nous avons vu que ρ, θ et k sont tels que $x^* \geqslant \rho$. Par conséquent :

$$x^* > 0 \Rightarrow \rho^k - \theta^k - \rho^k\theta^k > 0$$

ce qui implique que $\lambda_1 > 1$. ■

Nous en déduisons que le point fixe de T est localement répulsif.

Nous allons reprendre tous les résultats obtenus pour l'opérateur T dans le but d'obtenir des résultats identiques pour R. Résumons la situation : $(F, \|\,.\,\|)$ est muni de la structure de variété différentiable transportée par h de celle de S. h est donc un difféomorphisme de S sur F. $\overset{\circ}{\Phi}$ est un ouvert non vide de F et R applique continuement Φ dans F. De plus R et T sont conjugués topologiquement :

$$R = h \circ T \circ h^{-1}$$

C'est cette relation qui permet de transporter l'ensemble des résultats précédents.

THÉORÈME 1. — *Soient* ρ *et* θ *deux réels tels que* $0 < \theta < \rho < 1$ *et*

$$x^* = \rho \frac{1-\theta}{\rho-\theta}\left[1 - \theta^k - \left(\frac{\theta}{\rho}\right)^k\right] \qquad z^* = \theta \frac{1-\rho}{\rho-\theta}\left[\left(\frac{\rho}{\theta}\right)^k - \rho^k - 1\right]$$

S'il existe $k \in \mathrm{N}$ *tel que* $\rho \leqslant x^* < 1$ *alors :*

1) k *est unique et* $(x^*, z^*) \in \mathrm{S}(\rho, \theta)$

2) *si* $(x^*, z^*) \in \Sigma$ *on pose* $f^* = h(x^*, z^*)$. f^* *est alors l'unique point fixe de* R *dans* F.

Si en plus $(x^*, z^*) \in \mathring{\Sigma}$, *alors*

3) R *est dérivable en* f^*. *Si* $\mathrm{R}'(f^*)$ *est l'application tangente on a :*

$$\mathrm{R}'(f^*) = h'(x^*, z^*) \circ \mathrm{T}'(x^*, z^*) \circ [h'(x^*, z^*)]^{-1}$$

4) *Les valeurs propres de* $\mathrm{R}'(f^*)$ *sont* $\lambda_1 = \dfrac{\rho^k - \theta^k}{\rho^k \theta^k}$ *et* $\lambda_2 = 2$. λ_1 *est strictement supérieure à* 1 ; f^* *est donc localement répulsif.*

Démonstration. — Le théorème 1 est conséquence des résultats démontrés pour T et du fait que R et T sont conjugués par le difféomorphisme h. ■

Le théorème nous montre une différence importante avec le cas des fonctions analytiques présenté dans l'introduction. En effet f^* est localement répulsif, les deux valeurs propres étant supérieures à 1. Il n'existe donc pas de variété stable. Dans le cas analytique, celle-ci est formée des applications admettant tous les cycles d'ordre une puissance de 2. Si nous considérons dans $\mathrm{F}(\rho, \theta)$ l'ensemble formé des applications du type précédent, nous conjecturons qu'il a une structure de variété pure de dimension 1 localement invariante par R et correspondant à la valeur propre $\lambda_2 = 2$. Ainsi donc, dans le cas analytique, l'ensemble précédent serait la variété stable correspondant au spectre de module inférieur à 1 et, dans notre cas, une variété instable associée à $\lambda_2 = 2$.

Nous n'avons pas pu démontrer la conjecture précédente, mais nous avons mis en évidence l'existence d'un ensemble invariant correspondant à la valeur propre λ_1. Cet ensemble correspond, dans le cas analytique, à la variété instable associée à δ.

5. ÉTUDE D'UNE VARIÉTÉ LOCALEMENT INVARIANTE

Soit $\tilde{\mathrm{F}}(\rho, \theta)$ le sous-ensemble suivant :

$$\tilde{\mathrm{F}}(\rho, \theta) = \left\{ f \in \mathrm{F}(\rho, \theta) / \exists i \in \mathrm{Z} \ \left(\frac{1-\theta}{1-\rho}\right)\left(\frac{\theta}{\rho}\right)^{i-1} \frac{z}{x} = 1 \quad \text{avec} \quad (x, z) = h^{-1}(f) \right\}$$

$\tilde{\mathrm{F}}(\rho, \theta)$ est l'ensemble des éléments f de $\mathrm{F}(\rho, \theta)$ tels que, étendu à R tout entier, f admette un segment de pente égale à -1. Nous appellerons $\tilde{\mathrm{S}}(\rho, \theta)$

le sous-ensemble de S correspondant : $\tilde{S} = h^{-1}(\overline{F})$. Nous définissons ainsi

$$\tilde{\Phi} = \tilde{F} \cap \Phi \qquad \tilde{\Sigma} = \tilde{S} \cap \Sigma$$

LEMME 5. — $\tilde{F}$ *est un sous-ensemble connexe, fermé non vide de* F. *Muni de la structure induite, c'est une variété différentiable pure de dimension 1.*

Démonstration. — Pour démontrer le lemme, il suffit de montrer que, dans $(S(\rho, \theta), d)$, $\tilde{S}$ vérifie les propriétés énoncées :

$$\tilde{S} = \left\{ (x, z)/x \in [\rho, 1[, \ z \in]0, 2g(x)[\quad \text{et} \quad \exists i \in Z \qquad z = \frac{1-\rho}{1-\theta}\left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{i-1} x \right\}$$

Étudions les valeurs que i est susceptible de prendre. Pour cela, cherchons un point (x_M, z_M) tel que $\rho \leqslant x_M < 1$, $z_M = 2g(x_M)$ et qu'il existe i_M avec

$$z_M = \frac{1-\rho}{1-\theta}\left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{i_M - 1} x_M .$$

On obtient : $x_M = \dfrac{\rho(1-\theta)}{\rho - \theta}\left(1 - 2\left(\dfrac{\theta}{\rho}\right)^{i_M}\right)$ et la condition $\rho \leqslant x_M < 1$

entraîne :
$$\frac{\theta}{\rho}\left(\frac{1}{2}\frac{1-\rho}{1-\theta}\right) < \left(\frac{\theta}{\rho}\right)^{i_M} \leqslant \frac{1}{2}\frac{1-\rho}{1-\theta} .$$

Cette dernière inégalité détermine i_M de manière unique :

$$i_M = 1 + \text{partie entière de } \frac{\operatorname{Ln}\left(2\dfrac{1-\theta}{1-\rho}\right)}{\operatorname{Ln}\left(\dfrac{\rho}{\theta}\right)}$$

On vérifie aisément que

$$z < 2g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{soit} & i < i_M \\ \text{soit} & i = i_M \quad \text{et} \quad x_M < x < 1 \end{cases}$$

$$z_M = \frac{\theta(1-\rho)}{\rho - \theta}\left(\left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{i_M} - 2\right); \qquad x_M = \frac{\rho(1-\theta)}{\rho - \theta}\left(1 - 2\left(\frac{\theta}{\rho}\right)^{i_M}\right)$$

Supposons $i = i_M$ et faisons croître x de x_M (exclus) à 1 (exclus). z est alors croissant de z_M (exclus) à

$$\tilde{z}(i_M) = \frac{1-\rho}{1-\theta}\left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{i_M - 1}$$

Considérons maintenant $i = i_M - 1$ et faisons croître x de ρ (inclus) à 1. z est alors croissant de $\theta\tilde{z}(i_M)$ (inclus) à $\tilde{z}(i_M - 1)$. Plus généralement i étant choisi inférieur à i_M, si nous faisons croître x de ρ à 1, alors z va croître de

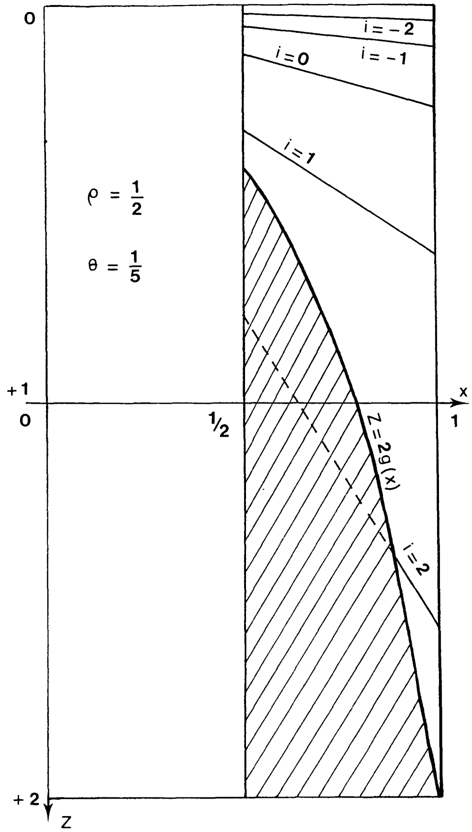

FIG. 5. — Représentation de $S(\rho, \theta)$ et valeurs de i associées.

$\theta \tilde{z}(i+1)$ à $\tilde{z}(i)$ où $\tilde{z}(i) = \dfrac{1-\rho}{1-\theta}\left(\dfrac{\rho}{\theta}\right)^{i-1}$. Lorsque i tend vers $-\infty$, z tend vers 0 (voir figures 5 et 6).

Étudions les propriétés topologiques de $\tilde{S}$ en utilisant la distance d. Il est bien évident que $\tilde{S}$ est non vide. Montrons qu'il est connexe. Pour cela il suffit de montrer que, i étant fixé, (x, z) tend vers $(\rho, \theta\tilde{z}(i))$ lorsque x tend vers 1, autrement dit :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ (x,z) \in \tilde{S}}} d((x, z), (\rho, \theta z(i))) = 0$$

Il est évident que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ (x,z) \in \tilde{S}}} \delta(x, \rho) = 0.$

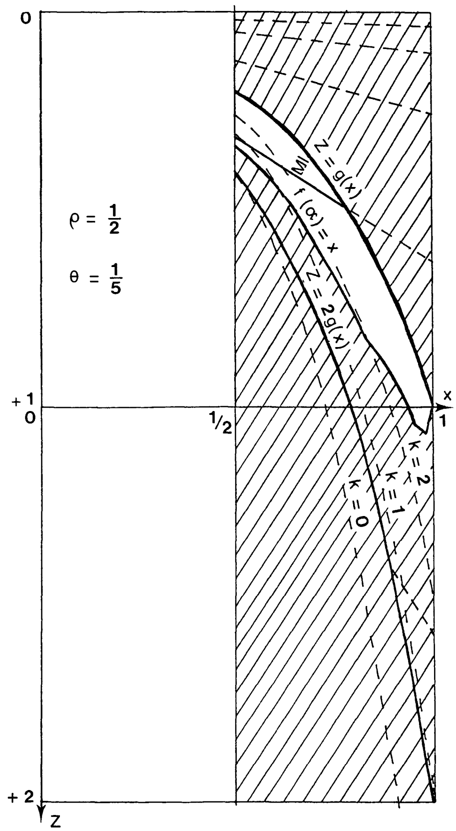

FIG. 6. — Représentation de $\bar{\Sigma}(\rho, \theta)$.

Il reste à étudier :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ (x,z) \in \tilde{S}}} \left| \frac{z}{g(x)} - \frac{\theta z(i)}{g(\rho)} \right| .$$

Mais par définition $g(\rho) = \theta$ et $\lim_{\substack{x \to 1 \\ (x,z) \in \tilde{S}}} z = \tilde{z}(i)$, donc la distance tend bien vers 0. Montrons maintenant que $\tilde{S}$ est fermé dans S.

Si (x, z) est un élément de $S - \tilde{S}$, c'est-à-dire tel qu'il existe i de Z pour lequel

$$\frac{1-\rho}{1-\theta}\left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{i-1} x < z < \frac{1-\rho}{1-\theta}\left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{i} x$$

alors, il existe un voisinage $V(x, z)$ dans (S, d) tel que

$$\forall (x', z') \in V(x, z) \; \frac{1-\rho}{1-\theta}\left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{i-1} x' < z' < \frac{1-\rho}{1-\theta}\left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{i} x'$$

Ceci montre que le complémentaire de $\tilde{S}$ dans S est ouvert et donc que $(\tilde{S}, d)$ est fermé.

Le fait que $\tilde{S}$ soit une sous-variété pure de dimension 1 résulte de ce qui précède. ■

Il n'y a aucune confusion possible à appeler R la restriction de R à $\tilde{F}$. Nous allons étudier ses propriétés, en particulier dans le voisinage d'un point fixe (s'il existe).

THÉORÈME 2. — 1) *Si* R *est une application continue de* $\tilde{\Phi}$ *dans* $\tilde{F}$.
2) *Si* f^* *existe alors* f^* *appartient à* $\tilde{\Phi}$.
3) *Si* f^* *existe et si* $(x^*, z^*) \in \overset{\circ}{\Sigma}$.
i) R *est dérivable en* f^* *dans* $\tilde{\Phi}$.
ii) *La valeur propre de* $R'(f^*)$ *est égale à*

$$\lambda_1 = \frac{\rho^k - \theta^k}{\rho^k \theta^k}.$$

Démonstration. — Pour la démonstration nous procédons comme nous l'avons fait pour démontrer le théorème 1, c'est-à-dire en utilisant l'opérateur T.

1) Montrons tout d'abord que T applique $\tilde{\Sigma}$ dans $\tilde{S}$.

Soit $(x, z) \in \tilde{\Sigma} \Rightarrow \exists i \in Z \, \dfrac{z}{x} = \dfrac{1-\rho}{1-\theta}\left(\dfrac{\rho}{\theta}\right)^{i-1}$.

Posons $(X, Z) = T(x, z)$. Si k est l'entier associé à (x, z) on a

$$\frac{Z}{X} = \frac{1-\theta}{1-\rho}\left(\frac{z}{x}\right)^2\left(\frac{\theta}{\rho}\right)^{k-1} = \frac{1-\rho}{1-\theta}\left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{2i-2}\left(\frac{\theta}{\rho}\right)^{k-1} = \frac{1-\rho}{1-\theta}\left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{2i-k-1}$$

et donc $\dfrac{Z}{X} = \dfrac{1-\rho}{1-\theta}\left(\dfrac{\rho}{\theta}\right)^{I-1}$ avec $I = 2i - k$ ce qui montre que $(X, Z) \in \tilde{S}$.

La continuité de T et, donc de R, est évidente à partir des lemmes 2 et 5.

2) Si f^* existe alors

$$x^* = \rho \frac{1-\theta}{\rho-\theta}\left[1 - \theta^k - \left(\frac{\theta}{\rho}\right)^k\right] \qquad z^* = \theta \frac{1-\rho}{1-\theta}\left[\left(\frac{\rho}{\theta}\right)^k - \rho^k - 1\right]$$

Nous avons donc $\dfrac{z^*}{x^*} = \dfrac{1-\rho}{1-\theta}\left(\dfrac{\rho}{\theta}\right)^{k-1}$ et donc $(x^*, z^*) \in \tilde{\Sigma}$ avec $i = k$.

3) Si $(x^*, z^*) \in \overset{\circ}{\Sigma}$, il existe un voisinage V de (x^*, z^*) dans $\tilde{\Sigma}$ tel que k soit constant. Dans V la transformation T est alors donnée par :

$$X = \frac{\rho^k \theta^k (1-\theta) x}{(\rho^k - \theta^k)(1-\theta) - (\rho - \theta)\rho^{k-1} x}.$$

Il n'est pas difficile de montrer que $X(x^*) = x^*$. Calculons $X'(x^*)$:

$$X'(x^*) = \frac{\rho^k\theta^k(\rho^k-\theta^k)(1-\theta)}{[(\rho^k - \theta^k)(1 - \theta) - (\rho - \theta)\rho^{k-1}x]^2} = \frac{\rho^k - \theta^k}{\rho^k\theta^k}.$$

Du théorème 2 nous déduisons que si f^* existe alors $\tilde{F}$ est une variété localement invariante. Le point fixe est répulsif et dans un voisinage de f^* l'action de R consiste à éloigner les éléments de $\tilde{\Phi}$ à une vitesse de l'ordre de $\lambda_1 = \dfrac{\rho^k - \theta^k}{\rho^k\theta^k}$.

6. CASCADE DE BIFURCATIONS

Dans cette partie nous allons continuer l'étude de $\Phi(\rho, \theta)$. Nous montrerons que $\tilde{F}$ peut être indentifiée à une famille à un paramètre d'applications appartenant à $\Phi(\rho, \theta)$, que cette famille admet une cascade de bifurcations de cycles d'ordre 2^i en cycles d'ordre 2^{i+1} et que les valeurs du paramètre correspondant à ces bifurcations convergent vers leur limite à la vitesse asymptotique d'une progression géométrique de rapport $\dfrac{1}{\lambda_1}$ où λ_1 est une des valeurs propres de R.

Soient $(x, z) \in \tilde{S}(\rho, \theta)$ et $\alpha = -f_{(x,z)}(1)$. On a :

$$\alpha = \left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{i+1}\frac{b}{a} - 1 \qquad \text{où} \qquad a = \rho(1 - \theta)\,; \qquad b = \theta(1 - \rho)$$

Ceci montre que, lorsque i est fixé, α est une fonction décroissante de x.

$$x = \rho \Leftrightarrow \alpha = \left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{i+1}\frac{b}{a} - 1\,; \qquad x \to 1 \Leftrightarrow a \to \left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{i}\frac{b}{a} - 1$$

Nous en déduisons que nous pouvons paramétrer $\tilde{F}(\rho, \theta)$ par α de la manière suivante :

$$\alpha \in \left]-1, +1\right[\qquad \left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{i}\frac{b}{a} - 1 \qquad \alpha \leqslant \left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{i+1}\frac{b}{a} - 1$$

$$x = \frac{a}{a-b}\left[1 - \left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{i}(1 + \alpha)\right] \qquad z = \frac{b}{a-b}\left[\left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{i} - (1 + \alpha)\right]$$

Donc lorsque α croît de -1 à 1 $\left(\text{c'est-à-dire } \dfrac{z}{g(x)} \text{ croît de 0 à 2}\right)$, $f_{(x,z)}$ décrit entièrement $\tilde{F}(\rho, \theta)$, où x et z sont donnés par les formules précédentes.

Étudions maintenant la cascade de bifurcations d'un cycle d'ordre 2^i en un cycle d'ordre 2^{i+1} et cherchons les valeurs du paramètre correspondant à ces bifurcations. Plus précisément nous allons calculer les valeurs de α pour lesquelles f admet un cycle superstable d'ordre 2^i.

Soit α tel que $f_{(x,z)}$ appartienne à $\tilde{\Phi}(\rho, \theta)$. Nous appellerons $A(\alpha)$ la valeur du paramètre correspondant à $Rf_{(x,z)} = f_{(X,Z)}$. Si l est l'application qui à α associe (x, z) nous avons :

$$A = l^{-1} \circ T \circ l = l^{-1} \circ h^{-1} \circ R \circ h \circ l$$

Du théorème 2 nous déduisons alors :

COROLLAIRE 1. — *Si f^* existe et si $(x^*, z^*) \in \mathring{\Sigma}$ alors :*

1) $l^{-1}(x^*, z^*) = \rho^k$.

2) A *est défini dans un voisinage de ρ^k où k est constant et on a*

$$A(\alpha) = \frac{\alpha(\rho^k - \theta^k + \theta^k\rho^k) - \rho^k(\rho^k - \theta^k)}{\theta^k\alpha}$$

3) $A(\rho^k) = \rho^k$.

Démonstration. — Conséquence directe des résultats précédents.

Nous dirons que f admet un cycle d'ordre n s'il existe $t_1^* \ldots t_n^*$ tels que

$$f(t_n^*) = t_1^* \qquad \text{et} \qquad f(t_i^*) = t_{i+1}^* \qquad i = 1 \ldots n-1 .$$

Le cycle $(t_1^*, t_2^*, \ldots, t_n^*)$ sera dit superstable si $\exists j \in [1, n]$ tel que $t_j^* = 0$.

Une propriété de base de l'opérateur de renormalisation R est que, à une fonction admettant un cycle superstable d'ordre n, R fait correspondre une fonction admettant un cycle superstable d'ordre $\frac{n}{2}$.

LEMME 6. — *Soit f, un élément de $\tilde{\Phi}(\rho, \theta)$ admettant un cycle superstable d'ordre n, alors :*

1) Rf *admet un cycle superstable d'ordre* $\frac{n}{2}$.

2) *Si* $R^{-1}f$ *existe et appartient à* $\tilde{\Phi}(\rho, \theta)$ *alors* $R^{-1}f$ *admet un cycle superstable d'ordre 2n.* ($R^{-1}f$ *est l'application g telle que* $Rg = f$).

3) *Si* $\alpha = l^{-1} \circ h^{-1}(f)$ $(\alpha = -f(1))$ *alors* $A(\alpha) = l^{-1} \circ h^{-1}(Rf)$ $(A(x) = -Rf(1))$.

De même si $R^{-1}f$ *existe, alors* $A^{-1}(\alpha) = l^{-1} \circ h^{-1}(R^{-1}f)$.

Démonstration. — 1), 2) Résultats tout à fait classiques (voir par exemple Collet et Eckmann [*3*]).

3) Autre formulation du corollaire 1. ■

Si $\alpha = \alpha_1 = 0$ alors f_α admet un cycle superstable d'ordre 2. Ce cycle est unique et la valeur α_1 correspondante aussi. Soit α_2 la solution de $A(\alpha) = \alpha_1$ $(\alpha_2 = A^{-1}(\alpha_1))$. Supposons que les hypothèses du corollaire 1 soient vérifiées et que, de plus, α_2 appartienne au voisinage de ρ^k où k est constant. Nous en déduisons que f_{α_2} admet un cycle superstable d'ordre 4 (α_2 est l'unique valeur de α comprise entre 0 et ρ^k pour laquelle un tel cycle est obtenu). Le lemme 5 et le corollaire 1 montrent alors que la suite

$\alpha_{i+1} = A^{-1}(\alpha_i)$ est parfaitement définie et que f_{α_i} est l'unique application de $\tilde{\Phi}(\rho, \theta)$, correspondant à un α_i compris entre 0 et ρ^k, admettant un cycle superstable d'ordre 2^i. α_{i+1} est donné par la formule :

$$\alpha_{i+1} = \frac{\rho^k(\rho^k - \theta^k)}{\rho^k - \theta^k + \rho^k\theta^k - \alpha_i\theta^k}$$

Un calcul direct montre que $\alpha = \rho^k$ est un point fixe attractif pour cette itération et donc que α_{i+1} tend vers ρ^k. La vitesse de convergence est donnée par

$$(A^{-1})'(\rho^k) = \frac{\rho^k\theta^k}{\rho^k - \theta^k} = \frac{1}{\lambda_1}$$

Nous en déduisons que :

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{\alpha_i - \alpha_{i-1}} = \frac{\rho^k\theta^k}{\rho^k - \theta^k}$$

d'où le résultat suivant :

THÉORÈME 3. — *Sous les hypothèses du corollaire* 1 *et si* α_2 *appartient au voisinage de* ρ^k, *où* k *est constant, alors* :

1) *Lorsque* α *croît de* 0 *à* ρ^k, *la famille* f_α *décrit une cascade de bifurcations d'un cycle d'ordre* 2^i *en un cycle d'ordre* 2^{i+1} $(i \in \mathbb{N})$;

2) *Il existe une valeur unique* α_i *telle que* f_{α_i} *admette un cycle superstable d'ordre* 2^i ;

3) *La suite* α_i *converge vers* ρ^k *lorsque* i *tend vers l'infini et on a* :

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{\alpha_i - \alpha_{i-1}} = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{\rho^k\theta^k}{\rho^k - \theta^k}.$$

Le théorème est encore vrai si, au lieu de α_2, c'est α_j qui appartient au voisinage de ρ^k ($j \geqslant 2$). De plus on peut, sans difficulté, étendre le théorème aux valeurs du paramètre pour lesquelles se produisent les bifurcations. En effet l'opérateur de renormalisation fait correspondre les applications obtenues pour ces valeurs de la même façon que les fonctions admettant des cycles superstables.

7. ÉTUDE DÉTAILLÉE D'UN EXEMPLE

Nous allons reprendre rapidement tous les résultats présentés jusqu'ici dans le cas particulier $\rho = \frac{1}{2}$ $\theta = \frac{1}{5}$.

Le calcul du point fixe de la transformation T donne :

$$k = 1 \qquad x^* = \frac{8}{15} \qquad z^* = \frac{1}{3} \qquad \alpha^* = \frac{1}{2}$$

Il n'est pas difficile de voir que ces valeurs vérifient les conditions du théorème 1. On constate en particulier que $z^* \neq (1+\rho^{k-1}x^*)g(x^*) = \frac{1}{3} + \frac{1}{135}$. Donc il existe un voisinage V de $\left(\frac{8}{15}, \frac{1}{3}\right)$ dans lequel T admet pour équation :

$$\forall (x, z) \in \mathrm{V} \qquad \mathrm{X} = \frac{1}{2}\frac{x^2}{4z - x - 3xz} \qquad \mathrm{Z} = \frac{4}{5}\frac{z^2}{4z - x - 3xz}$$

T est évidemment dérivable dans V et les valeurs propres de sa dérivée en (x^*, z^*) sont :

$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = 2$$

On retrouve bien les résultats de la proposition 3.

Étudions maintenant $\tilde{\mathrm{F}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$. Par définition :

$$\tilde{\mathrm{F}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right) = \left\{ f \in \mathrm{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right) / \exists i \in \mathrm{Z} \quad z = \left(\frac{5}{4}\right)^i \frac{x}{4} \right\}$$

En reprenant les calculs du lemme 5 on obtient que $i \leqslant 2$.

Un cas intéressant est obtenu pour $i = 1$. Ceci correspond aux valeurs de α comprises entre $-\frac{3}{8}$ et $\frac{9}{16}$ (rappelons que $\alpha = -f(1)$). Un calcul direct montre que les éléments de $\tilde{\Phi}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$ sont ceux pour lesquels :

$$0 < \alpha < \frac{5}{9}$$

Pour ces valeurs i reste égal à 1 et donc nous obtenons

$$\tilde{\Phi}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right) = \left\{ f \in \mathrm{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right) \Big/ \frac{68}{135} < x < \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad z = \frac{5}{8}x \right\}$$

On vérifie aisément que f^* appartient à $\tilde{\Phi}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$ et que R applique $\tilde{\Phi}$ dans $\tilde{\mathrm{F}}$. R est dérivable en f^* dans $\tilde{\Phi}$ et la valeur propre de $\mathrm{R}'(f^*)$ est $\lambda_1 = 3$.

Étudions maintenant la cascade de bifurcations associée à $\tilde{\Phi}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$. Le voisinage de f^* dans $\tilde{\Phi}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$, où k est constant, est donné par :

$$\frac{12}{23} < x < \frac{12}{19} \Leftrightarrow \frac{6}{19} < \alpha < \frac{12}{23}$$

Si nous posons $\alpha_1 = 0$, un calcul direct montre que $\alpha_2 = \frac{3}{8}$ appartient bien au voisinage de $\frac{1}{2}$ où k est égal à 1. Par conséquent les valeurs du paramètre pour lesquelles f_α admet des cycles superstables d'ordre 2^i sont données par :

$$\alpha_{i+1} = \frac{3}{8 - 4\alpha_i} \qquad \alpha_1 = 0$$

On obtient alors que $\alpha_i = \frac{3(3^i - 1)}{2(3^{i+1} - 1)}$,

puis que $\frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{\alpha_i - \alpha_{i-1}} = \frac{3(3^i - 1)}{3^{i+2} - 1}$

et donc que $\lim\limits_{i \to \infty} \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{\alpha_i - \alpha_{i-1}} = \frac{1}{3}$

ce qui constitue une vérification du théorème 3.

8. UN CYCLE D'ORDRE 2 POUR R

Nous avons vu dans la proposition 2 qu'une condition nécessaire pour que T et donc R admettent un point fixe est qu'il existe k entier tel que :

$$\rho \leqslant x^* = \rho \frac{1 - \theta}{\rho - \theta}\left[1 - \theta^k - \left(\frac{\theta}{\rho}\right)^k\right] < 1$$

On peut montrer que cette condition est équivalente à :

$$\left(\frac{\theta}{\rho}\right)\frac{1 - \rho}{1 - \theta} < \left(\frac{\theta}{\rho}\right)^k (1 + \rho^k) \leqslant \frac{1 - \rho}{1 - \theta}$$

Mais il existe des valeurs de ρ et de θ pour lesquelles cette condition n'est satisfaite par aucun entier k. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ est un tel couple de valeurs. Un problème difficile consiste alors en l'étude du comportement itératif de R dans $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. En effet la théorie de Feigenbaum dont nous nous sommes inspirés suppose l'existence d'un point fixe de l'opérateur de renormalisation.

Une manière d'appréhender le problème et de faire un pas en direction de sa solution est la suivante. Comme précédemment, la famille $\tilde{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ peut être paramétrée par α. Cette famille présente aussi une cascade de bifurcations et nous pouvons définir la suite α_i. Cette suite tend vers une limite $\alpha_\infty = \frac{2}{5}\left(\text{dans } \tilde{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right), \alpha_\infty = \frac{1}{2} \text{ et } f_{\alpha_\infty} \text{ est le point fixe de R}\right)$. Que se passe-t-il si nous calculons la renormalisée de f_{α_∞} dans $\tilde{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$?

Dans $\tilde{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, f_{α_∞} correspond à $x = \frac{39}{40}$ $z = \frac{13}{10}$. Cette application est renormalisable, mais sa renormalisée Rf_{α_∞} n'appartient pas à $\tilde{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (la condition $f(\alpha) \geqslant x$ n'est pas satisfaite). Rf est une application unimodale qui est aussi renormalisable. Or, la renormalisée de Rf_{α_∞} est f_{α_∞} elle-même. R *admet donc un cycle d'ordre 2* (voir figure 7).

Il est tout à fait raisonnable de penser qu'il existe d'autres couples (ρ, θ) pour lesquels R n'admet aucun point fixe mais un cycle d'ordre quelconque. En est-il de même pour d'autres classes de fonctions plus régulières? Le problème paraît difficile.

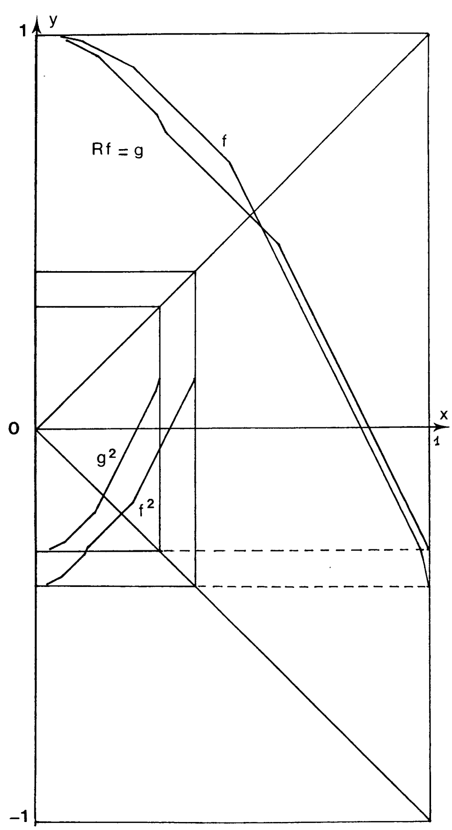

FIG. 7. — Cycle d'ordre 2 de R dans S(1/2, 1/4).

9. D'AUTRES FAMILLES INVARIANTES

Le but de cette partie est de montrer que l'on peut facilement construire des familles invariantes pour l'opérateur de renormalisation et calculer les constantes associées.

Considérons U l'ensemble des applications unimodales définies dans la deuxième partie et étudions l'action de R d'une partie de U dans U. Soit f un point fixe de R dans U. Nous appelons t^* le point fixe de f dans $[0, 1]$.

Soit μ un réel tel que $t^* \leqslant \mu \leqslant 1$. Nous définissons la famille f_μ par :

$$\forall t \in [-1, +1] \qquad f_\mu(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad f(\mu t) \geqslant \mu \\ \dfrac{1}{\mu} f(\mu t) & \text{sinon} \end{cases}$$

La famille f_μ est obtenue en renormalisant la tronquée de f à l'ordonnée μ.
On pose $\alpha = -f(1)$.

LEMME 7. — *Soit s tel que $f(s) = 0$. f_μ est renormalisable dès que $\mu \leqslant s$ et*

$$\forall \mu \geqslant s \qquad Rf_\mu = f_{\mu'} \qquad \text{avec} \qquad \mu' = -\frac{1}{\alpha} f(\mu)$$

Démonstration. — S'obtient par un calcul direct. ■

La construction précédente dépend du point fixe considéré. Cosnard et Eberhard [*6*] ont proposé un algorithme qui permet d'obtenir tous les points fixes de R dans U et Cosnard [*5*] a étudié leur comportement itératif.

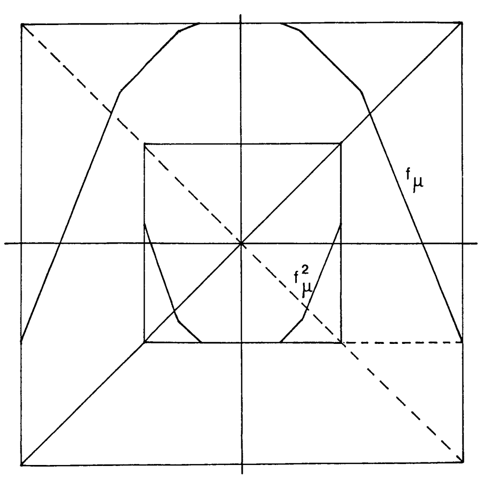

FIG. 8. — Renormalisation d'une fonction f_μ où f est le point fixe de R dans S(1/2, 1/5).

Il est caractérisé par l'existence de cycles d'ordre 2^i pour tout entier i et d'un attracteur cantorien.

Supposons que f n'admette pour tout entier i qu'un seul cycle d'ordre 2^i (voir [*6*] pour obtenir de telles fonctions). On montre facilement que, lorsque μ croît de t^* à 1, la famille f_μ présente une cascade de bifurcations d'un cycle attractif d'ordre 2^i en un cycle attractif d'ordre 2^{i+2}. Appelons μ_i la valeur du paramètre pour laquelle s'effectue cette bifurcation. Bien évidemment μ_i tend vers 1 quand i tend vers l'infini.

THÉORÈME 4. — *Sous les hypothèses précédentes, la valeur de μ_i est :*

$$\mu_i = -\frac{1}{\alpha} f(\mu_{i+1})$$

Si f est dérivable en 1 et si $f'(1) \neq 0$ alors :

$$\lambda^{-1} = \lim_{i \to \infty} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_i - \mu_{i-1}} = -\frac{\alpha}{f'(1)}.$$

Démonstration. — Conséquence du lemme 7.

Dans le cas où f est le point fixe de R dans $F(\rho, \theta)$ on obtient :

$$\lambda = \frac{1}{\theta^k} \neq \lambda_1$$

Par contre, si f est la fonction ψ de Feigenbaum, dont l'existence a été démontrée par Campanino et Epstein [*1*], on obtient :

$$\lambda = \frac{1}{\alpha^2} = 6, \ldots$$

Cette dernière valeur est différente de δ (constante de renormalisation des fonctions analytiques). Ceci montre l'importance fondamentale de la classe de fonctions considérées. Pour $\mu \neq 1$, f_μ n'est pas analytique et, bien que f le soit, la constante associée à la famille f_μ n'est pas égale à celle d'une famille analytique.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] M. CAMPANINO et H. EPSTEIN, On the existence of Feigenbaum's fixed point. *IHES*, Preprint, 1980, p. 35-80.

[2] P. COLLET, J. P. ECKMANN et LANFORD, Universal properties of maps on an interval, *Commun. Math. Phys.*, t. **76**, 1980, p. 211-254.

[*3*] P. COLLET et J. P. ECKMANN, *Iterated maps on the interval as dynamical systems.* Birkhäser, Boston-Basel-Stuggart, 1980.

[*4*] M. COSNARD, Comportement d'itérations d'un opérateur de renormalisation, *RAIRO. Anal. Num.*, T. **16**, 1982, p. 4.

[*5*] M. COSNARD, Étude des solutions de l'équation fonctionnelle de Feigenbaum, *Bifurcation, théorie ergodique et applications;* Astérique, 98-99, 1982, p. 143-162.

[6] M. Cosnard et A. Eberhard, Étude d'un opérateur de renormalisation; Première partie : Construction de points fixes. *Rapp. Rech. IMAG*, 1982, p. 305.

[7] P. Coullet et J. Tresser, Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **287**, 1978, p. 577-580.

[8] B. Derrida, A. Gervois et Y. Pommeau, Universal metric properties of bifurcations of endomorphisms. *J. Phys. A: Math. Gen.*, t. **12**, 3, 1979, p. 269-296.

[9] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse 3*, Gauthier-Villars, Paris, 1978.

[10] M. Feigenbaum, The universal metric properties of non-linear transformations, *J. Stat. Phys.*, t. **21**, 1979, p. 25-52.

[11] M. Feigenbaum, The transition to aperiodic behavior in turbulent systems, *Commun, Math. Phys.*, t. **77**, 1980, p. 85-86.

[12] O. E. Lanford, III, *Smooths transformations of intervals*. Séminaire Bourbaki, 563, 1980, p. 1-19.

[13] O. E. Lanford, III, A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures, *IHES*, Preprint, 1981, p. 17-81.

[14] M. Shub, *Stabilité globale des systèmes dynamiques*, Astérisque, Paris, 56, 1978.

(Manuscrit reçu le 12 mars 1984)

(Version révisée, reçue le 20 mai 1984)