

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ROBERT DEBEVER

NIKY KAMRAN

RAYMOND G. MCLENAGHAN

**Sur une nouvelle expression de la solution  
générale des équations d'Einstein avec champ de  
Maxwell non singulier, aligné, sans source et avec  
constante cosmologique, en type D**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 41, n° 2 (1984), p. 191-206

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1984\\_\\_41\\_2\\_191\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1984__41_2_191_0)

© Gauthier-Villars, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**Sur une nouvelle expression de la solution générale  
des équations d'Einstein  
avec champ de Maxwell non singulier, aligné,  
sans source et avec constante cosmologique,  
en type D**

par

**Robert DEBEVER**

Université Libre de Bruxelles,  
Département de Mathématique

et

**Niky KAMRAN et Raymond G. McLENAGHAN**

University of Waterloo, Dept. of Applied Mathematics,  
Waterloo, Ontario, Canada

---

**RÉSUMÉ.** — Nous présentons une expression de la solution générale des équations d'Einstein du vide et des équations de Maxwell sans source avec constante cosmologique, pour un champ de Maxwell non singulier aligné, en type D de Petrov. Nous donnons une caractérisation invariante des sous-classes et les particularisations sont présentées. Le potentiel vecteur est discuté ainsi que l'équation d'Hamilton-Jacobi.

**ABSTRACT.** — We present a single expression for the general solution of Einstein's vacuum and electrovac field equations with cosmological constant for Petrov type D admitting a non singular aligned Maxwell field. An invariant characterization of the subcases is proposed and the particularizations are delineated. The vector potential and the separability of the Hamilton-Jacobi equation are discussed.

---

## § 1. EXPRESSION DE LA MÉTRIQUE GÉNÉRALE

Dans [1 a] nous avons présenté un cadre général pour l'intégration des équations d'Einstein avec champ de Maxwell coïncident, en type D, avec constante cosmologique.

Depuis nous avons donné aux *Physics Letters* [1 b] une expression unique contenant tous les cas possibles et qui a été justifiée en détail en [1]. Partie de ce qui suit a été présenté aux Journées relativistes de Turin en mai 83 [1 d].

Nous reprenons ici, avec quelques détails ce résultat dans une expression un peu différente [2]. Pour les notations on pourra se reporter par exemple à [3]. La métrique est donnée par

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & ZF^{-2} \left\{ f [Z^{-1}W(\dot{l}du + mdv)]^2 - \left( \frac{2f}{1+f^2} \right)^2 W^{-2}dw^2 \right. \\
 & - [Z^{-1}X(ndu + pdv)]^2 - X^{-2}dx^2 \\
 & \left. + (1-f^2) \left( \frac{2}{1+f^2} \right) \cdot Z^{-1}dw(\dot{l}du + mdv) \right\} \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

Le champ électromagnétique est donné par la 2-forme autoduale

$$\overset{+}{F} = B \{ dw \wedge (\dot{l}du + mdv) - idx \wedge (ndu + pdv) \} \quad (1.2)$$

$$\text{On a} \quad Z = b^4(ce_x w + k)^2 + (ce_w x + l)^2 \quad (1.3)$$

$$F = 1 + a(ce_x w + k)(ce_w x + l) \quad (1.4)$$

$$\dot{l} = b^2 e_x \quad m = -e_w(c^2 x^2 + b^4 k^2 + l^2) - 2clx \quad (1.5)$$

$$n = e_w \quad p = b^2 e_x(c^2 w^2 + b^4 k^2 + l^2) + 2b^2 ckw \quad (1.6)$$

$$b^4 e_x^2 + e_w^2 = 1 \quad (1.7)$$

$$fW^2 = \mathcal{L}c^2 e_x^2 w^4 + (a\mathcal{P}_1 + 4k\mathcal{L})ce_x w^3 + (\mathcal{N} + 3ak\mathcal{P}_1 + 6k^2\mathcal{L})w^2 + f_1 w + f_0 \quad (1.8)$$

$$X^2 = \mathcal{L}_1 c^2 e_w^2 x^4 + (a\mathcal{P} + 4l\mathcal{L}_1)ce_w x^3 + (-\mathcal{N} + 3al\mathcal{P} + 6l^2\mathcal{L}_1)x^2 + g_1 x + g_0 \quad (1.9)$$

$$\mathcal{L} = -b^4 \frac{\Lambda}{3} - b^4 a^2 \mathcal{Q} + a^2 e^2 \quad (1.10)$$

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{\Lambda}{3} - a^2 \mathcal{Q} \quad (1.11)$$

$$\mathcal{Q}_1 = b^4 \mathcal{Q} - e^2 \quad (1.12)$$

$a, b, c, e_x, e_w, k, l, f, f_0, f_1, g_0, g_1, \mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{P}_1, \mathcal{Q}$  sont des constantes,  $f$  prend les valeurs 1, -1, ou 0.  $\Lambda$  est la constante cosmologique.

$$ce_x f_1 = \mathcal{P} + 2k\mathcal{N} + 3ak^2\mathcal{P}_1 + 4k^3\mathcal{L} \quad (1.13)$$

$$ce_w g_1 = \mathcal{P}_1 - 2l\mathcal{N} + 3al^2\mathcal{P} + 4l^3\mathcal{L}_1 \quad (1.14)$$

$$c^2 e_x^2 f_0 = \mathcal{Q} + k\mathcal{P} + k^2\mathcal{N} + ak^3\mathcal{P}_1 + k^4\mathcal{L} \quad (1.15)$$

$$c^2 e_w^2 g_0 = \mathcal{Q}_1 + l\mathcal{P}_1 - l^2\mathcal{N} + al^3\mathcal{P} + l^4\mathcal{L}_1 \quad (1.16)$$

$$B = \frac{1}{2}(E + iH)[b^2(ce_x w + k) - i(ce_w x + l)]^{-2} \quad (1.17)$$

où E et H sont des constantes, et

$$e^2 = \frac{1}{2}(E^2 + H^2) \quad (1.18)$$

Les seules composantes non nulles de la courbure riemannienne sont la courbure scalaire

$$R = -4\Lambda, \quad (1.19)$$

la composante  $\psi_2$  du tenseur de Weyl

$$\begin{aligned} \psi_2 = F^3 [b^2(ce_x w + k) + i(ce_w x + l)]^{-3} \times & \left( \frac{1}{2}(b^2\mathcal{P} - i\mathcal{P}_1) \right. \\ & \left. + e^2(1 - a(ce_x w + k)(ce_w x + l))(b^2(ce_x w + k) - i(ce_w x + l))^{-1} \right) \end{aligned} \quad (1.20)$$

et la composante  $\phi_{11}$  du tenseur de Ricci sans trace

$$\phi_{11} = \frac{1}{2}e^2 F^4 Z^{-2} \quad (1.21)$$

On satisfait pour appliquer le théorème de Goldberg-Sachs à

$$9\psi_2^2 \neq 4\phi_{11}^2 \quad (1.22)$$

L'intégration se fait à partir de la métrique de départ établie dans [1], [3] et [5] ou de (1.1) ci-dessus en prenant pour  $\dot{l}$  et  $m$  des fonctions inconnues de  $x$  et pour  $n$  et  $p$  des fonctions inconnues de  $w$  et où  $Z = \dot{l}p - mn$ .

Si

$$\Delta_w = np_w - pn_w, \quad \Delta_x = \dot{l}m_x - m\dot{l}_x \quad (1.23)$$

on fait un choix de variables par la condition

$$\Delta'_w + \Delta'_x = 0 \quad (1.24)$$

Il s'en suit que  $\Delta_w$  et  $\Delta_x$  sont des fonctions linéaires de leurs arguments et que  $Z_{wx} = 0$ . On peut alors montrer sans peine que l'on peut disposer de  $u$  et  $v$  de telle façon que  $\dot{l}$  et  $n$  soient des constantes, et  $m(x)$  et  $p(w)$  des polynômes du second degré. Les expressions (1.5) et (1.6) s'en suivent. Notons que  $\Delta'_w = \Delta'_x$  en place de (1.24) conduirait au choix initial de Demianski et Plebanski dans [8].

On peut s'assurer ensuite par simple substitution que l'on a bien une solution des équations de champ données dans [1] en D, I à VI.

En particulier les équations V et VI relatives à  $\Lambda$  et  $\phi_{11}$  se vérifient aisément.

ment compte tenu des relations suivantes qui résultent des conditions (1.13) à (1.16).

$$\frac{1}{4}f(W^2)'' = 3\mathcal{L}(ce_x w + k)^2 + \frac{3}{2}a\mathcal{P}_1(ce_x w + k) + \frac{1}{2}\mathcal{N} \quad (1.25)$$

$$\frac{1}{4}(X^2)'' = 3\mathcal{L}_1(ce_w x + l)^2 + \frac{3}{2}a\mathcal{P}(ce_w x + l) - \frac{1}{2}\mathcal{N} \quad (1.26)$$

$$fce_x(W^2)' = 4\mathcal{L}(ce_x w + k)^3 + 3a\mathcal{P}_1(ce_x w + k)^2 + 2\mathcal{N}(ce_x w + k) + \mathcal{P} \quad (1.27)$$

$$ce_w(X^2)' = 4\mathcal{L}_1(ce_w x + l)^3 + 3a\mathcal{P}(ce_w x + l)^2 - 2\mathcal{N}(ce_w x + l) + \mathcal{P}_1 \quad (1.28)$$

$$fc^2e_x^2W^2 = \mathcal{L}(ce_x w + k)^4 + a\mathcal{P}_1(ce_x w + k)^3 + \mathcal{N}(ce_x w + k)^2 + \mathcal{P}(ce_x w + k) + \mathcal{Q} \quad (1.29)$$

$$c^2e_w^2X^2 = \mathcal{L}_1(ce_w x + l)^4 + a\mathcal{P}(ce_w x + l)^3 - \mathcal{N}(ce_w x + l)^2 + \mathcal{P}_1(ce_w x + l) + \mathcal{Q}_1 \quad (1.30)$$

## § 2. CARACTÉRISATION INVARIANTE DES SOUS-CLASSES DE SOLUTIONS

On introduit un corepère rigide isotrope

$$\theta^1 = n_i dx^i, \quad \theta^2 = l_i dx^i, \quad \theta^3 = -\bar{m}_i dx^i, \quad \theta^4 = -m_i dx^i \quad (2.1)$$

tel que la métrique s'écrive

$$ds^2 = 2\theta^1\theta^2 - 2\theta^3\theta^4 \quad (2.2)$$

$l$  et  $n$  sont des covecteurs isotropes qui sont des directions principales du tenseur de Weyl de type D.

Le corepère est déterminé aux transformations suivantes près

$$l' = e^a l, \quad n' = e^{-a} n, \quad m' = e^{ib} m \quad (2.3)$$

où  $a$  et  $b$  sont des fonctions à valeurs réelles.

Dans un tel corepère la 2-forme autoduale

$$Z^2 = \theta^1 \wedge \theta^2 - \theta^3 \wedge \theta^4 \quad (2.4)$$

est invariante. On en déduit deux 1-formes à valeurs complexes invariants  $\theta$  et  $\omega$  telles que

$$dZ^2 = 2\theta \wedge Z^2 \quad \frac{1}{2}i * dZ^2 = \omega \quad (2.5)$$

On a

$$\theta = -\rho\theta^1 + \mu\theta^2 - \tau\theta^3 + \pi\theta^4 \quad (2.6)$$

$$\omega = \rho\theta^1 + \mu\theta^2 + \pi\theta^3 + \tau\theta^4 \quad (2.7)$$

Les équations de Maxwell sont équivalentes à

$$d\theta = 0 \quad (2.8)$$

Notons au passage que

$$F^+ = BZ(\theta^1 \wedge \theta^2 - \theta^3 \wedge \theta^4) \quad (2.9)$$

On a [4] [5]

$$\theta \wedge \bar{\theta} \wedge Z^2 = 0, \quad \omega \wedge \bar{\omega} \wedge Z^2 = 0 \quad (2.10)$$

Ces conditions sont équivalentes à

$$\rho\bar{\mu} - \bar{\rho}\mu = 0, \quad \tau\bar{\tau} - \pi\bar{\pi} = 0 \quad (2.11)$$

relations fondamentales pour la détermination de la métrique (cf. [3])

Une première caractérisation des solutions est la suivante.

a)

	Notation	
$\theta \wedge \bar{\theta} \wedge \omega \wedge \bar{\omega} \neq 0$	A*	(2.12)
$\theta \wedge \bar{\theta} = 0 \quad \omega \wedge \bar{\omega} \neq 0$	C*	(2.13)
$\theta \wedge \bar{\theta} \neq 0 \quad \omega \wedge \bar{\omega} = 0$	A°	(2.14)

En termes de coefficients spinoriels on a, compte tenu de (2.11) et pour

$$\mu = f\rho \quad \pi = \tau \quad (2.15)$$

$f(\rho\bar{\tau})^2 - (\bar{\rho}\tau)^2 \neq 0$	A*	(2.12)'
$\rho\bar{\tau} + \bar{\rho}\tau = 0 \quad \rho\bar{\tau} - \bar{\rho}\tau \neq 0$	C*	(2.13)'
$\rho\bar{\tau} + \bar{\rho}\tau \neq 0 \quad \rho\bar{\tau} = \bar{\rho}\tau = 0$	A°	(2.14)'

A\* est le cas général découvert dans le cas du vide et utilisant une coordonnée isotrope par Kinnersley [6] en 1969. Elle fut considérée par Debever en 1969 et 1971 dans le cas où il existe un champ électromagnétique et une constante cosmologique [7]. C'est en 1976 que Demianski et Plebanski [8] ont donné l'expression symétrique considérée depuis. Le passage de la forme à la Kinnersley à la forme symétrique a été établi par Debever et Kamran [9].

Le cas C\* connu sous le nom de C-métrique remonte à Levi-Civita (1917), Ehlers-Kundt (1962) entre autres et a été généralisé par Kinnersley et Walker et par Demianski et Plebanski (1976) [10].

A° est la métrique introduite par B. Carter en 1968 qui généralise les résultats de Kerr et Newman [11].

A° sera développé encore par Plebanski en 1975 [12].

Dans tous les cas  $A^*$ ,  $C^*$  et  $A^0$  le corepère est entièrement fixé si l'on demande (2.15) [13].

On a

$$\gamma = f\varepsilon \quad \beta = \alpha \quad (2.16)$$

Il existe un groupe  $G_2$  d'isométries, les orbites étant de type temps si  $f=1$ , de type espace pour  $f = -1$  et isotropes si  $f = 0$ .

Si  $\omega \wedge \bar{\omega} \neq 0$ , donc pour  $A^*$  et  $C^*$ , la 1-forme à valeurs complexes

$$k_1 = (\mathbf{BZ})^{-1/2}\omega \quad (2.17)$$

définit un vecteur de Killing complexe; on a

$$k_1 = -c \frac{\partial}{\partial u} + iae_x e_w \frac{\partial}{\partial v} \quad (2.18)$$

d'où suit le groupe  $G_2$  des translations sur  $u$  et  $v$ .

On peut démontrer, dans le cas  $C^*$  que les conditions (2.13), ou (2.13)' impliquent

$$\theta = \bar{\theta} \quad (2.19)$$

ou

$$\rho = \bar{\rho}, \quad \tau + \bar{\tau} = 0 \quad (2.19)'$$

En effet, dans le repère ci-dessus on différencie suivant  $D$  et  $\delta$  la relation  $\rho\bar{\tau} + \bar{\rho}\tau = 0$  de (2.13)', compte tenu des relations 4.22  $a, b, f, i, k, n$  de [3] on obtient sans peine les relations

$$\bar{\rho}\tau(\rho - \bar{\rho}) = 0 \quad (2.20)$$

$$\bar{\rho}\tau(\tau + \bar{\tau}) = 0 \quad (2.21)$$

qui compte tenu de (2.13)' impliquent (2.19) ou (2.19)'.

Si  $\omega \wedge \bar{\omega} = 0$ , donc pour  $A^0$ ,  $k_1$  est réel et (2.17) ne donne que la translation sur  $v$ .

Cependant  $\omega \wedge \bar{\omega} = 0$  entraîne la relation

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = \frac{\mu}{\bar{\mu}} = \frac{\tau}{\bar{\tau}} = \frac{\pi}{\bar{\pi}} \quad (2.22)$$

qui assurent l'existence d'un tenseur de Killing de rang 2. Dans notre contexte.

$$\mathbf{K}_{ij} = (ce_w x + l)^2 (l_i n_j + l_j n_i) + b^4 (ce_x w + k)^2 (m_i \bar{m}_j + \bar{m}_i m_j) \quad (2.23)$$

est un tel tenseur de Killing [14].

Le vecteur

$$k_2 = \mathbf{K}k_1 \quad (2.24)$$

est alors un second vecteur de Killing qui commute avec  $k_1$ .

On a

$$k_2 = b^2 c e_x e_w \frac{\partial}{\partial v} \quad (2.25)$$

b) Si  $\theta \wedge \bar{\theta} = \omega \wedge \bar{\omega} = 0$  (2.26)

ou  $\rho \bar{\tau} = 0$  (2.26)'

On envisagera les sous-classes suivantes

		Notation	
$\theta \cdot \bar{\theta} = \omega \cdot \bar{\omega} \neq 0$	$\theta - \bar{\theta} \neq 0$	$B_-^0$	(2.27)
$\theta \cdot \bar{\theta} = \omega \cdot \bar{\omega} \neq 0$	$\theta - \bar{\theta} = 0$	$C_-^0$	(2.28)
$\theta \cdot \bar{\theta} + \omega \cdot \bar{\omega} = 0$	$\theta - \bar{\theta} \neq 0$	$B_+^0$	(2.29)
$\theta \cdot \bar{\theta} + \omega \cdot \bar{\omega} = 0$	$\theta - \bar{\theta} = 0$	$C_+^0$	(2.30)
$\theta = \omega = 0$		$C^{00}$	(2.31)

En terme de coefficients spinoriels on a, compte tenu de (2.15)

$f\rho\bar{\rho}=0$	$\tau + \bar{\tau} \neq 0$	$B_-^0$	(2.27)'
$f\rho\bar{\rho}=0$	$\tau + \bar{\tau} = 0$ ( $\tau \neq 0$ )	$C_-^0$	(2.28)'
$\tau\bar{\tau}=0$	$\rho - \bar{\rho} \neq 0$	$B_+^0$	(2.29)'
$\tau\bar{\tau}=0$	$\rho - \bar{\rho}=0$ ( $\rho \neq 0$ )	$C_+^0$	(2.30)'
$\rho = \tau = 0$		$C^{00}$	(2.31)'

Par  $\theta \cdot \bar{\theta}$  et  $\omega \cdot \bar{\omega}$  on entend le produit scalaire.

Les cas (-) où  $\rho = \mu = 0$  sont souvent désignés comme espaces de Kundt, les cas (+) où  $\tau = \pi = 0$  sont connus sous les noms de Taub-N. U. T., le cas  $C^{00}$  sous les noms de Robinson-Bertotti [15].

Des caractérisations invariantes en terme de coefficients spinoriels ont été introduites et développées dans [5].

Dans tous les cas sous b) les conditions (2.15) et (2.16) ne suffisent plus à fixer le corepère.

Dans les  $B_-^0$  et  $C_-^0$  où  $\rho = \mu = 0$ , on peut satisfaire à (2.15), (2.16) et conserver la liberté d'une rotation minkowskienne dans le plan  $l, n$  et dans les cas  $B_+^0, C_+^0$  une liberté d'une rotation euclidienne dans le plan  $m, \bar{m}$ . Enfin dans le cas  $C^{00}$  on conserve les deux libertés à la fois.

On a donc affaire à des *espaces à groupes d'isotropie*, cas particuliers des espaces déterminés par Cahen et Defrise [16].



Les cas  $B_{\pm}^0$ ,  $C_{\pm}^0$  possèdent un groupe  $G_4$  d'isométrie et le cas  $C^{00}$  un groupe  $G_6$ . Ces groupes sont liés à l'existence des sous-espaces à courbure constante ainsi que nous l'expliciterons au paragraphe suivant.

Enfin les cas  $C^*$ ,  $C_{\pm}^0$ ,  $C^{00}$  ont en commun la condition  $\theta = \bar{\theta}$ .

Dans la métrique générale on a, si  $S = Z^{1/2}F^{-1}$

$$\rho = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot S^{-1}W(S_w \cdot S^{-1} + ib^2ce_x(ce_w x + k)Z^{-1}) \quad (2.32)$$

$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{2} S^{-1}X(b^2ce_w(ce_x w + k) + iS_x S^{-1}) \quad (2.33)$$

On en déduit

$$\rho\bar{\tau} - \bar{\rho}\tau = -iWXZ^{-1}(ac^2e_x e_w) \quad (2.34)$$

$$\rho\bar{\tau} + \bar{\rho}\tau = -\frac{1}{2}WXFZ^{-2}(1 - a(ce_x w + k)(ce_w x + l))(c^2 b^2 e_x e_w) \quad (2.35)$$

Il suit que pour

$$A^* : abce_x e_w \neq 0 \quad (2.36)$$

$$C^* : b = 0 \quad ace_x e_w \neq 0 \quad (2.37)$$

$$A^0 : a = 0 \quad bce_x e_w \neq 0 \quad (2.38)$$

Dans les cas  $B_{\pm}^0$ ,  $C_{\pm}^0$ ,  $C^{00}$  :  $ce_x e_w = 0$  (2.39)

Si  $e_x = 0$ ,  $bce_w \neq 0$ ,  $Z = Z(x)$ ,  $F = F(x)$ ,  $\rho = 0$ ,  $\tau + \bar{\tau} = \sqrt{2}XS^{-1}Z^{-1}(b^2ck)$  (2.40)

Si  $e_w = 0$ ,  $bce_x \neq 0$ ,  $Z = Z(w)$ ,  $F = F(w)$ ,  $\rho - \bar{\rho} = -i\sqrt{2}WS^{-1}Z^{-1}(b^2cl)$ ,  $\tau = 0$  (2.41)

Si  $c = 0$ ,  $e_x$  et (ou)  $e_w \neq 0$ ,  $Z = F = \text{Cte}$ ,  $\rho = \tau = 0$  (2.42)

### § 3. PARTICULARISATIONS DES SOLUTIONS

Les tableaux qui suivent faciliteront l'identification des solutions.

TABLEAU I.

	A*	A <sup>0</sup>	C*	B <sub>-</sub> <sup>0</sup>	B <sub>+</sub> <sup>0</sup>	C <sup>00</sup>
a	1	0	1	0	0	0
b	1	1	0	1	1	1
c	1	1	1	1	1	0
e <sub>x</sub>	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	0	1	~
e <sub>w</sub>	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1	0	~
k	0	0	0	k	0	$\sqrt{2}/2$
l	0	0	0	0	l	$\sqrt{2}/2$

TABLEAU II.

	$A^*, A^0$	$C^*$	$B_-^0$	$B_+^0$	$C^{00}$
$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$-2k\mathcal{N} + \frac{4}{3}k^3\Lambda$	$\mathcal{P}$	$\sqrt{2}\left(\frac{\Lambda}{3} - e^2\right)$
$\mathcal{Q}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{Q}$	$k^2\mathcal{N} - k^4\Lambda$	$-l^2\mathcal{N} - l^4\Lambda + e^2$	$\frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{\Lambda}{2}\right)$
$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$e^2$
$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_1$	$2l\mathcal{N} + \frac{4}{3}l^3\Lambda$	$\sqrt{2}\left(\frac{\Lambda}{3} + e^2\right)$
$\mathcal{Q}_1$	$\mathcal{Q} - e^2$	$-e^2$	$k^2\mathcal{N} - k^4\Lambda - e^2$	$-l^2\mathcal{N} - l^4\Lambda$	$-\frac{1}{2}\left(e^2 + \frac{\Lambda}{2}\right)$
$f_1$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$f_1$	$\mathcal{P}$	$f_1$
$f_0$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{Q}$	$f_0$	$-l^2\mathcal{N} - l^4\Lambda$	$f_0$
$g_1$	$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_1$	$g_1$	$g_1$
$g_0$	$\mathcal{Q} - e^2$	$-e^2$	$k^2\mathcal{N} - k^4\Lambda - e^2$	$g_0$	$g_0$

$C_-^0, C_+^0$  s'obtiennent respectivement pour  $k = 0$  et  $l = 0$ . Si  $k$  ou  $l$  est différent de zéro, on peut leur donner la valeur 1.

On posera

$$\text{pour } B_-^0 \quad fw^2 = \mathcal{N}^- w^2 + f_1 x + f_0, \quad \mathcal{N}^- = \mathcal{N} - 2k^2\Lambda \quad (3.1)$$

$$\text{pour } B_+^0 \quad X^2 = \mathcal{N}_1^+ x^2 + g_1 x + g_0, \quad \mathcal{N}_1^+ = -\mathcal{N} - 2l^2\Lambda \quad (3.2)$$

Reprenons à la lumière de ce qui précède les différents cas en prêtant attention aux solutions à orbites isotropes.

$$A^*: \quad F = 1 + wx, \quad Z = w^2 + x^2, \quad \dot{l} = 1, \quad m = -x^2, \quad n = 1, \quad p = w^2 \quad (3.3)$$

$$fW^2 = \left(-\frac{\Lambda}{3} + e^2 - \mathcal{Q}\right)w^4 + \mathcal{P}_1 w^3 + \mathcal{N} w^2 + \mathcal{P} w + \mathcal{Q} \quad (3.4)$$

$$X^2 = -\left(\frac{\Lambda}{3} + \mathcal{Q}\right)x^4 + \mathcal{P} x^3 - \mathcal{N} x^2 + \mathcal{P}_1 x + \mathcal{Q} - e^2 \quad (3.5)$$

$$\psi_2 = F^3(w + ix)^{-3} \left( \frac{1}{2}(\mathcal{P} - iP_1) + e^2(1 - wx)(w - ix)^{-1} \right) \quad (3.6)$$

On voit que  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{N}$  sont des paramètres cinématiques, si l'on annule les autres  $\psi_2, \phi_{11}$  et  $R$  sont nuls, on obtient l'espace de Minkowski [17]. Dans [8] les auteurs, en place de  $\mathcal{Q}$ , utilisent un paramètre  $\gamma$  lié à  $\mathcal{Q}$  par la relation

$$\mathcal{Q} = -\frac{\Lambda}{6} + \gamma + \frac{1}{2}H^2 \quad (3.7)$$

ce qui donne à  $fW^2$  et  $X^2$  des expressions plus symétriques et fait jouer des rôles séparés à H et E.

Si  $f = 0$  les conditions

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 = \mathcal{N} = \mathcal{Q} = 0, \quad e^2 = \frac{\Lambda}{3} \quad (3.8)$$

qui conduisent à

$$X^2 = -e^2(x^4 + 1) \quad (3.9)$$

ce qui est contradictoire.

On peut prévoir ce résultat *a priori*, on vérifie que si  $\mu = 0$  on a

$$2\rho\bar{\rho}\Lambda = 3(\rho\bar{\tau} - \bar{\rho}\tau)^2 \quad (3.10)$$

Il en résulte que dans le cas de  $A^*$ ,  $\Lambda$  est négatif ce qui contredit (3.8). Ajoutons que la condition (2.12), ou (2.12)' implique que  $f \neq 0$ .

$$A^0: \quad F=1, \quad Z=w^2+x^2, \quad \dot{l}=1, \quad m=-x^2, \quad n=1, \quad p=w^2 \quad (3.11)$$

$$fW^2 = -\frac{\Lambda}{3}w^4 + \mathcal{N}w^2 + \mathcal{P}w + \mathcal{Q} \quad (3.12)$$

$$X^2 = -\frac{\Lambda}{3}x^4 - \mathcal{N}x^2 + \mathcal{P}_1x + \mathcal{Q} - e^2 \quad (3.13)$$

Le cas isotrope est possible, si

$$f = \Lambda = \mathcal{N} = \mathcal{P} = \mathcal{Q} = 0 \quad (3.14)$$

soit

$$X^2 = \mathcal{P}_1x - e^2 \quad (3.15)$$

ce qui est compatible avec (3.10), dans le cas  $A^0$ ,  $\rho\bar{\tau} - \bar{\rho}\tau$  est nul et  $\rho \neq 0$

$$C^*: \quad F=1+wx, \quad Z=x^2, \quad \dot{l}=p=0, \quad n=1, \quad m=-x^2 \quad (3.16)$$

$$fW^2 = e^2w^4 + \mathcal{P}_1w^3 + \mathcal{N}w^2 + \mathcal{P}w + \mathcal{Q} \quad (3.17)$$

$$X^2 = -\left(\frac{\Lambda}{3} + \mathcal{Q}\right)x^4 + \mathcal{P}x^3 - \mathcal{N}x^2 + \mathcal{P}_1x - e^2 \quad (3.18)$$

L'expression habituellement étudiée s'obtient par l'inversion  $x \rightarrow x^{-1}$ .

Il vient

$$F = w + x, \quad Z = 1, \quad \dot{l} = p = 0, \quad n = 1, \quad m = -1 \quad (3.19)$$

$$X^2 = -e^2x^4 + \mathcal{P}_1x^3 - \mathcal{N}x^2 + \mathcal{P}x - \frac{\Lambda}{3} - \mathcal{Q} \quad (3.20)$$

La solution n'admet pas de limite à orbites isotropes, les conditions

$$e = \mathcal{P}_1 = \mathcal{N} = \mathcal{P} = \mathcal{Q} = 0 \quad (3.21)$$

avec  $\Lambda \neq 0$  conduisent à une forme de l'espace de de Sitter et  $\psi_2 = 0$  [15].

$$B_-^0: \quad F=1, \quad Z=k^2+x^2, \quad \dot{l}=0, \quad m=-Z, \quad n=1, \quad p=2kw \quad (3.22)$$

$fW^2$  est donné en (3.2),

$$X^2 = -\frac{\Lambda}{3}x^4 - (\mathcal{N}^- + 2k^2\Lambda)x^2 + \mathcal{P}_1x + k^2\mathcal{N}^- + k^4\Lambda - e^2 \quad (3.23)$$

La métrique a pour expression

$$ds^2 = (k^2 + x^2) \left[ fW^2 dv^2 - f \frac{dw^2}{W^2} - X^2 \left( \frac{du + 2kwdv}{k^2 + x^2} \right)^2 - \frac{dx^2}{X^2} \right] \quad (3.24)$$

La métrique en  $v, w$

$$fW^2 dv^2 - f \frac{dw^2}{W^2} \quad (3.25)$$

où  $W^2$  est un trinôme du second degré, est celle d'un espace à courbure constante qui possède un groupe d'isométries  $G_3$  qui s'étend à l'espace entier. On récupère ainsi la translation sur  $v$ , et deux autres vecteurs de Killing, combinaisons de  $\frac{\partial}{\partial v}$  et  $\frac{\partial}{\partial w}$ .

Notons que

$$\psi_2 = (k + ix)^{-3} \left[ -k\mathcal{N}^- - \frac{4}{3}k^3\Lambda - \frac{1}{2}i\mathcal{P}_1 + e^2(k - ix)^{-1} \right] \quad (3.29)$$

On obtient pour

$$\mathcal{P} = e^2 = 0, \quad \mathcal{N}^- + \frac{4}{3}k^2\Lambda = 0 \quad (3.30)$$

une forme de l'espace de de Sitter [18] et

$$X^2 = -\frac{\Lambda}{3}(x^2 + 1)^2 \quad (3.31)$$

Enfin il existe une métrique à orbites isotropes pour

$$\mathcal{N}^- = 0 \quad (3.32)$$

On peut aussi obtenir le cas  $B_-^0$  en conservant  $a \neq 0$  (Tableau I), soit

$$F = 1 + akx, \quad Z = k^2 + x^2 \quad (3.33)$$

mais une transformation homographique sur  $x$  permet de revenir à (3.22), (3.23) [19]. Le cas  $C_-^0$  s'obtient simplement en annulant  $k$ . Dans  $B_-^0$  on peut faire  $k = 1$ .

$$B_+^0 : F=1, \quad Z=w^2+l^2, \quad \dot{l}=1, \quad m=-2lx, \quad n=0, \quad p=Z \quad (3.34)$$

$$fW^2 = -\frac{\Lambda}{3}w^4 - (\mathcal{N}_1^+ + 2l^2\Lambda)w^2 + \mathcal{P}w + e^2 + l^2\mathcal{N}_1^+ + l^4\Lambda \quad (3.35)$$

$X^2$  est donné en (3.2).

Des considérations parallèles à celles développées pour  $B_-^0$  peuvent être détaillées. La métrique à courbure constante sera ici

$$X^2 dv^2 + \frac{dx^2}{X^2} \quad (3.36)$$

Par contre il n'y a pas de version à orbites isotropes, les conditions nécessaires conduisent à l'espace de Minkowski. Dans  $B_+^0$  on peut faire  $l = 1$ .  $C_+^0$ , qui contient Schwarzschild, et Reisner-Nördström s'obtient en annulant  $l$ .

$$C^{00} : \quad F = Z = 1, \quad \dot{l} = -m = n = p = \sqrt{2}/2 \quad (3.37)$$

$$fW^2 = (e^2 - \Lambda)w^2 + f_1 w + f_0, \quad (3.38)$$

$$X^2 = -(e^2 + \Lambda)x^2 + g_1 x + g_0 \quad (3.39)$$

La métrique

$$ds^2 = fW^2 du^2 - f \frac{dw^2}{W^2} - X^2 dv^2 - \frac{dx^2}{X^2} \quad (3.40)$$

est produit de deux métriques à courbure constante.

Une solution à orbites isotropes s'obtient pour

$$\Lambda = e^2 \quad (3.41)$$

Notons que

$$3\psi_2 = -\Lambda, \quad 2\phi_{11} = e^2 \quad (3.42)$$

si donc

$$\Lambda = \pm e^2 \quad (3.43)$$

$$9\psi_2^2 = 4\phi_{11}^2 \quad [20] \quad (3.44)$$

Enfin si l'on revient à la condition (2.19) commune à  $C^*$ ,  $C_{\pm}^0$ ,  $C^{00}$  on voit que ces métriques sont diagonales en les variables  $u, v, w, x$ .

*Remarques.*

1)  $C^{00}$  peut aussi s'obtenir par les choix suivants :

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & e_x & e_w & k & l \\ \sim & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \sim & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad (3.45)$$

qui conduisent à la même métrique.

2) Les solutions à orbites isotropes sont telles que

a)  $\mu = 0, \rho \neq 0$ , cf. (3.11) et (3.13). C'est un cas subordonné à  $A^0$  et

$$\rho\bar{\tau} = \bar{\rho}\tau \quad \text{et} \quad \rho\bar{\tau} + \bar{\rho}\tau \neq 0$$

b)  $\mu = \rho = 0$ . On les obtient par deux voies en faisant soit  $f = 0$  et en donnant à  $X^2$  l'expression correspondante (3.23 et 3.32), (3.39 et 3.41),

soit en partant des solutions  $B_-^0$ ,  $C_-^0$ ,  $C^{00}$  dans lesquelles la métrique  $W^2 dv^2 - \frac{dw^2}{W^2}$  est à courbure totale nulle,  $W^2$  étant linéaire.

La métrique

$$w dv^2 - w^{-1} dw^2 \quad (3.46)$$

est équivalente à

$$2dpdq$$

si

$$\sqrt{2p} = 2e^{v/2} \sqrt{w}, \quad \sqrt{2q} = -2e^{-v/2} \sqrt{w} \quad (3.47)$$

#### § 4. LE POTENTIEL-VECTEUR

Si l'on pose

$$\text{den} = b^2(ce_x w + k) - i(ce_w x + l) \quad (4.1)$$

$\overset{+}{F}$  s'écrit

$$\overset{+}{F} = \frac{1}{2}(E + iH)(\text{den}^*)^2 Z^{-2} [dw \wedge (\dot{l}du + mdv) - idx \wedge (ndu + pdv)] \quad (4.2)$$

On se propose de déterminer  $\overset{+}{\gamma}$  tel que

$$d\overset{+}{\gamma} = \overset{+}{F} \quad (4.3)$$

Soit

$$\overset{+}{\gamma} = \frac{1}{2}(E + iH)Z^{-1} [K(\dot{l}du + mdv) + iG(ndu + pdv)] \quad (4.4)$$

où  $G$  et  $K$  sont des fonctions à déterminer de  $w$  et  $x$ . [21]

On vérifie que l'on a

$$d * \overset{+}{\gamma} = 0 \quad (4.5)$$

La condition (4.3) conduit à quatre équations équivalentes aux quatre équations suivantes :

$$\partial_w G = 0, \quad \partial_x K = 0 \quad (4.6)$$

$$ZK'_w - KZ'_w - iGnp'_w = (\text{den}^*)^2 \quad (4.7 a)$$

$$-ZG'_x + GZ'_x + iKlm'_x = (\text{den}^*)^2 \quad (4.7 b)$$

Les équations (4.7) sans second membre correspondent aux  $\overset{+}{\gamma}_1$  tels que

$$d\overset{+}{\gamma}_1 = 0 \quad (4.8)$$

Ces équations s'écrivent

$$ZK'_w - p'_w(\dot{l}K + inG) = 0 \quad (4.9 a)$$

$$iZG'_x + m'_x(\dot{l}K + inG) = 0 \quad (4.9 b)$$

On en déduit

$$K = Cp + C_1, \quad G = -iCm + iC_2 \quad (4.10)$$

$$\text{où} \quad C_1 \dot{l} = C_2 n \quad (4.11)$$

que l'on satisfait par

$$C_2 = b^2 e_x D, \quad C_1 = e_w D \quad (4.12)$$

où  $C$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D$  sont des constantes arbitraires.

Par dérivation on établit que  $K$  et  $G$  sont tels que

$$K''' = G''' = 0 \quad (4.13)$$

La recherche d'une solution particulière des équations (4.7) s'obtient à partir d'expressions linéaires, les expressions quadratiques appartenant à  $\gamma_1^+$ .

Soit

$$K = \lambda w + \beta, \quad G = \mu x + \gamma \quad (4.14)$$

Il vient, si  $c \neq 0$

$$\lambda = \mu = -1 \quad (4.15)$$

et

$$i c e_w \gamma + b^2 c e_x \beta = -(b^2 k + i l) \quad (4.16)$$

on peut prendre pour  $K$  et  $G$  les expressions — si  $c \neq 0$  —

$$K = -w - \frac{e_x b^2}{c} (b^2 k + i l) \quad (4.17 a)$$

$$G = -x + i \frac{e_w}{c} (b^2 k + i l) \quad (4.17 b)$$

Si  $c = 0$  on peut faire, si  $b = 1$ ,  $k = 0$ ,  $e_x = 1 = l$ ,  $e_w = 0$

$$K = -w, \quad G = x \quad (4.18)$$

En résumé on a

TABLEAU III.

	K	G
$A^*, A^0, C^*, C_\pm^0$	$-w$	$-x$
$B_\pm^0$	$-w - i l$	$-x$
$B_\pm^0$	$-w$	$-x + i k$
$C^{00}$	$-w$	$x$

COROLLAIRE. — L'équation d'Hamilton-Jacobi pour les particules de masse  $m$  et de charge  $e$ , si  $A_i$  désigne le potentiel vecteur :

$$g^{ij} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^i} - e A_i \right) \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^j} - e A_j \right) = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = m^2 \quad (4.19)$$

où  $\tau$  est un paramètre affiné, est toujours séparable si  $m=0$ , et si  $m \neq 0$  dans tous les cas à l'exception de  $A^*$ , c'est-à-dire séparable si  $a=0$ , soit  $F=1$ . On a dans un repère tel que (2.15) et (2.16)

$$A_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} g^{-2} f F Z^{-1/2} E K, \quad A_1 = f A_2 \quad (4.20)$$

et 
$$A_3 = A_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} F Z^{-1/2} H G$$

Si

$$\phi = m^2 \tau + \alpha u + \beta v + \phi_1(w, \alpha, \beta, \gamma, \delta) + \phi_2(x, \alpha, \beta, \gamma, \delta) \quad (4.21)$$

où  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont des constantes et  $\phi$  l'intégrale complète.

(4.19) s'écrit

$$\begin{aligned} & f g^{-4} W^{-2} (\alpha p - \beta n - e E K)^2 - X^{-2} (-\alpha m + \beta \dot{l} + e H G)^2 \\ & - f W^2 \left( \frac{d\phi_1}{dw} \right)^2 - X^2 \left( \frac{d\phi_2}{dx} \right)^2 + (1-f^2) g^{-2} \frac{d\phi_1}{dw} (\alpha p - \beta n - e E K) \quad (4.22) \\ & = Z F^{-2} m^2 \end{aligned}$$

Le corollaire s'ensuit, chaque terme du premier membre étant fonction soit de la seule variable  $w$ , soit de la seule variable  $x$  et  $Z$  une somme d'une fonction  $w$  et d'une fonction de  $x$ .

Des considérations analogues peuvent être développées pour l'équation de Klein-Gordon ou pour l'électron de Dirac [22, a, b].

## RÉFÉRENCES

- [1] a. R. DEBEVER, N. KAMRAN, R. G. MCLENAGHAN, *Bull. Cl. Sc. Acad. r. Belgique*, t. LXVIII, 1982, p. 592.  
 b. R. DEBEVER, N. KAMRAN, R. G. MCLENAGHAN, *Physics Letters*, t. 93 A, 1983, p. 399.  
 c. R. DEBEVER, N. KAMRAN, R. G. MCLENAGHAN, Exhaustive integration... *J. Math. Phys.*, t. 25, 1984, p. 1955.  
 d. R. DEBEVER, N. KAMRAN, R. G. MCLENAGHAN, *Proceedings of the Journées Relativistes*, 1983, Torino, 5-8 May 1983; S. Benenti, M. Francaviglia and D. Galletto eds. Technoprint (Bologna; 1984, to appear). Nous remercions les éditeurs de l'autorisation de reprendre l'essentiel de ce texte augmenté de quelques précisions et du développement du § 4.
- [2] Les expressions données ci-dessous pour la métrique et le champ de Maxwell par les relations (1.1) à (1.7) peuvent être obtenues à partir de la référence [1 a] par le changement de coordonnées suivant

$$\begin{aligned} u & \rightarrow ((1+f^2)/2)^{1/2} [g^{-1}u + gh/\cos \gamma \sin \gamma \cdot v] \\ v & \rightarrow ((1+f^2)/2)^{1/2} g v, \quad w \rightarrow g^{-1}w, \quad x \rightarrow g^{-1}x \end{aligned}$$

où

$$g^2 := b^4 \cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma, \quad h := (k^2 \sin^2 \gamma - l^2 \cos^2 \gamma)(1 - b^2 g^{-2})$$

si

$$e_w = g^{-1} \sin \gamma, \quad e_x = g^{-1} \cos \gamma.$$



- [3] R. DEBEVER, R. G. MCLENAGHAN, *J. Math. Phys.*, t. **22**, 1981, p. 1711.
- [4] Dans le cas où il existe un champ de Maxwell ces relations s'établissent aisément, cf. [3] § 4.
- [5] Dans le cas du vide les relations (2.10) ou (2.11) sont plus cachées. On se reporte à S. R. CZAPOR et R. G. MCLENAGHAN, *J. Math. Phys.*, t. **23**, 1982, p. 2159.
- [6] W. KINNERSLEY, *J. Math. Phys.*, t. **10**, 1969, p. 1195.
- [7] R. DEBEVER, a. *Bull. Cl. Sc. Acad. r. Belgique*, t. **LV**, 1969, p. 8.  
b. *Bull. Soc. Math. Belgique*, t. **XXIII**, 1971, p. 360.
- [8] M. DEMIANSKI et J. F. PLEBANSKI, *Ann. Phys.*, (N. Y.), t. **98**, 1976, p. 98.
- [9] R. DEBEVER et N. KAMRAN, *Bull. Cl. Sc. Acad. r. Belgique*, t. **LXVI**, 1980, p. 585.
- [10] W. KINNERSLEY, M. WALKER, *Phys. Rev. D*, t. **2**, 1970, p. 1359 ; DEMIANSKI et PLEBANSKI sub. [8].
- [11] B. CARTER, *Commun. Math. Phys.*, t. **10**, 1968, p. 280.
- [12] J. K. PLEBANSKI, *Ann. Phys.* (N. Y.), t. **90**, 1975, p. 196.
- [13] Cf. sub. [3].
- [14] Cette situation a été envisagée particulièrement dans  
L. P. HUGHSTON, R. PENROSE, P. SOMMERS et M. WALKER, *Commun. Math. Phys.*, t. **27**, 1972, p. 303 et  
L. P. HUGHSTON et P. SOMMERS in *idem.*, t. **32**, 1973, p. 147.
- [15] Ces indications et celles qui précèdent sont données pour situer les différents cas par rapport aux métriques connues sans tenter une bibliographie sérieuse du sujet. On peut se reporter à  
D. KRAMER et al. *Exact Solutions of Einstein's field equations*. Cambridge, Univ. Press, 1980.
- [16] M. CAHEN et L. DEFRISE. *Commun. Math. Phys.*, t. **10**, 1968, p. 280.
- [17] Cf. [8].
- [18] J. F. PLEBANSKI, *J. Math. Phys.*, t. **20**, 1979, p. 1946.
- [19] Cf. [1], sur (3.32) · A. GARCIA D. et H. SALAZAR, *G. R. G.*, t. **15**, 1983, p. 417.
- [20] J. F. PLEBANSKI et S. HACYAN, *J. Math. Phys.*, t. **20**, 1979, p. 1004.
- [21]  $\gamma$  étant déterminé à une 1-forme fermée près, on établit grâce à (4.2) que  $\gamma$  peut toujours se mettre sous la forme (4.4).
- [22] a. N. KAMRAN et R. G. MCLENAGHAN, *Letters in Math. Phys.*, t. **7**, 1983, p. 381.  
b. N. KAMRAN et R. G. MCLENAGHAN, Separation of variables and symmetry operators for neutrino and Dirac equations... *J. Math. Phys.*, t. **25**, 1984, p. 1019.

(Manuscrit reçu le 12 Octobre 1983).