Annales de l'I. H. P., section A

Jean Lacroix

Localisation pour l'opérateur de Schrödinger aléatoire dans un ruban

Annales de l'I. H. P., section A, tome 40, nº 1 (1984), p. 97-116
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1984__40_1_97_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 40, n° 1, 1984, p. 97-116. *Physique théorique*

Localisation pour l'opérateur de Schrödinger aléatoire dans un ruban

by

Jean LACROIX
IRMAR, Université de Rennes 1,
Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex

RÉSUMÉ. — Soit H l'opérateur de Schrödinger aux différences finies avec potentiel aléatoire dans un ruban ou un demi-ruban de largeur d. Il a été prouvé dans [*1*] que H n'a presque sûrement pas de spectre absolument continu. On démontre ici la propriété plus forte attendue c'est-à-dire que presque sûrement le spectre de H est purement ponctuel, chaque sous-espace propre (de dimension $\leq d$) contenant au moins un élément à décroissance exponentielle. La méthode utilisée est une généralisation des considérations de [*2*].

ABSTRACT. — Let H be the finite difference Schrödinger operator with a random potential in a strip of width d. We suppose that the sequence of potentials is a family of independant random variables with a common law. When $d = 1$, it is known ([*7*], [*2*]) that under some assumptions on this law, the spectrum of H is almost surely pure point with exponentialy decaying eigenvectors.

We establish the same result for all d, using the theory of operators associated with the action of the symplectic group on some compact boundary.

INTRODUCTION

On désigne par H, l'opérateur auto-adjoint de l'espace de Hilbert

$$\mathscr{H} = \left\{ W = (W_n)_{n \geq 0} / W_n \in \mathbb{C}^d, \sum_{0}^{\infty} \| W_n \|^2 < + \infty \right\}$$

défini par :

$$(\mathrm{HW})_n = -\mathrm{W}_{n-1} - \mathrm{W}_{n+1} + \mathrm{A}_n\mathrm{W}_n \qquad (\mathrm{W}_{-1} = 0).$$

$(\mathrm{A}_n)_{n\geq 0}$ est une suite de matrices symétriques réelles d'ordre d, dont le terme d'ordre (i,j) vaut $\delta_i^j a_{i,n} - \delta_1^{|i-j|}$; la suite des « potentiels » $(a_{m,n})$, $m \in [1, \ldots, d]$, $n \in \mathbb{N}$, étant une suite de réels donnée.

En supposant que la suite des potentiels est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, nous cherchons à établir des propriétés presque sûres du spectre de H.

Dans le cas $d=1$, on sait que si la loi commune des potentiels a une densité sur $\mathbb{R}$ et un moment d'ordre 2, le spectre est presque sûrement ponctuel (voir [*7*] et [*2*]).

(Historiquement, le premier résultat de ce type a été prouvé dans le cas de l'opérateur de Schrödinger « continu » sur $\mathbb{R}$ $\mathrm{H} = -\Delta + \mathrm{V}$ par Gold'sheid *et al.* [*8*], résultat amélioré et simplifié par de nombreux auteurs).

Dans le cas $d > 1$, Gold'sheid annonça dans [*11*] une conclusion identique, malheureusement sans démonstration. C'est pourquoi nous nous proposons de donner une preuve complète de ce résultat en adoptant les techniques déjà utilisées dans [*2*]. Un résultat plus faible, à savoir que le spectre n'a presque sûrement pas de partie absolument continue, avait été obtenu dans [*1*] ; les techniques utilisées ici ne peuvent donner d'indications pour le même problème (non résolu) en dimension 2, car la plupart des notions utilisées n'ont plus aucun sens dans ce cas et toutes les majorations écrites tendent vers l'infini avec d...

Pour toutes les notations et propriétés immédiates de l'opérateur H, nous renvoyons à [*1*] à la différence près que la démonstration étant faite ici pour le demi-ruban (elle est identique dans l'autre cas) nous omettrons l'indice $\sim$ qui figurait dans [*1*].

Les études nécessaires sur le groupe symplectique et ses frontières ainsi que le calcul des barycentres de mesures spectrales ont été rejetés en annexe bien que leur lecture soit indispensable à la compréhension de la démonstration.

I. L'OPÉRATEUR DE SCHRÖDINGER DÉTERMINISTE

Si E_t est la résolution de l'identité de H, on note $\sigma_{(i,r)(j,s)}$ la mesure de fonction de répartition $t \to \langle \mathrm{E}_t\varepsilon_{i,r}, \varepsilon_{j,s} \rangle$ où $\varepsilon_{(i,r)}i = \underset{r\in\mathbb{N}}{1 \ldots d}$ est la base usuelle de $l^2([1, \ldots, d] \times \mathbb{N})$.

On note $\sigma_{(r,s)}$ la matrice carrée d'ordre d correspondant aux termes ci-dessus.

Soit ${}^{\mathrm{N}}\mathrm{H}$ l'opérateur restreint à la boîte $[1, \ldots, d] \times [0, \ldots, \mathrm{N}]$ et X une matrice symétrique d'ordre d ; on note ${}^{N}H^{X}$ l'opérateur symétrique défini sur $W = (W_0, \ldots, W_N) \in (\mathbb{C}^d)^{N+1}$ par

$$({}^{N}H^{X}W)_n = (HW)_n \qquad 0 \leqslant n \leqslant N-1$$
$$({}^{N}H^{X}W)_n = -W_{n-1} + (A_N - X)W_N$$

On vérifie facilement que λ est valeur propre de ${}^{N}H^{X}$ si et seulement si $\det(P_{N+1} - XP_N) = 0$ le sous-espace correspondant étant constitué des vecteurs $(W_n)_{n=0,\ldots,N}$ avec $W_n = P_nW_0$ et $W_0 \in \operatorname{Ker}(P_{N+1} - XP_N)$.

$(P_n(\lambda))_{n \geq 0}$ est la suite de matrices d'ordre d solution de :

$$(*) \qquad -P_{n+1} - P_{n-1} + A_nP_n = \lambda P_n, \qquad P_{-1} = 0, \qquad P_0 = I.$$

Dans toute la suite M' désigne la transposée d'une matrice M et M* la transposée de la conjuguée, si V est un vecteur de $\mathbb{R}^d$, V^i est sa composante de rang i.

LEMME 1. — *L'ensemble des* X *pour lesquels il existe une valeur propre multiple pour* ${}^{N}H^{X}$ *et une sous-variété algébrique stricte de* $\mathbb{R}^{\frac{d(d+1)}{2}}$.

Preuve. — Si $\Delta(\lambda, X)$ désigne le polynôme caractéristique de ${}^{N}H^{X}$, le résultant R(X) de $\left\{\begin{array}{l} \Delta(\lambda, X) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial\lambda}\Delta(\lambda, X) = 0 \end{array}\right.$ est un polynôme par rapport aux coefficients de X.

Il suffit de vérifier que R n'est pas le polynôme nul ce qui se voit aisément en considérant des matrices X de la forme $X = \operatorname{diag}(0, \ldots, 0, x)$. Si ${}^{N}H^{X}$ a ses valeurs propres simples, on a pour $n \leq N$

$${}^{N}\sigma^{X}_{(i,n)(j,0)} = \frac{1}{2}\left\{ \sum_{(\lambda\in R,\, V\in S_{d-1}/(P_{N+1} - XP_N)V=0} \frac{V^j(P_nV)^i}{\sum_{k=0}^{N} V'P_k'P_kV}\, \varepsilon_\lambda \right\}$$

En particulier la matrice ${}^{N}S^{X}$ des densités de ${}^{N}\phi^{X}_{0,0}$ par rapport à sa trace ${}^{N}\sigma^{X}$ est donnée par :

$${}^{N}S^{X} = VV' \quad \text{pour } {}^{N}\sigma^{X} \text{ presque tout } \lambda.$$

Le rang de ${}^{N}S^{X}$ est égal à 1 et chaque colonne de ${}^{N}S^{X}$ est le V_0 d'un vecteur propre de ${}^{N}H^{X}$ pour ${}^{N}\sigma^{X}$ presque tout λ.

Ceci nous incite à penser que si S est une matrice de densités de ϕ_{00} par rapport à sa trace σ (mesure spectrale) les vecteurs colonnes de S sont des candidats raisonnables pour être des « V_0 » de vecteurs propres de H.

LEMME 2. — *Soit* ${}^{N}\hat{\phi}_{(r,s)}$ *une suite de matrices de mesures bornées qui* *converge étroitement vers* $\phi_{(r,s)}$ *pour tout* $r, s \geq 0$. *Alors si pour tout intervalle ouvert borné* I *on a la majoration* :

$$\sum_{i,j} \sum_{n \geq 0} \varliminf_{\mathrm{N}} | {}^{\mathrm{N}}\hat{\sigma}_{(i,n)(j,0)} | (\mathrm{I}) < +\infty$$

σ *est une mesure ponctuelle.*

Preuve. — Si $\sum_{i,j} \sum_{n \geq 0} \int_{\mathrm{I}} | (\mathrm{P}n\mathrm{S})_{ij} | d\sigma < +\infty$, pour σ presque tout λ chaque vecteur colonne de S est le vecteur initial d'un vecteur propre pour H et σ presque sûrement ils ne sont pas simultanément nuls puisque $\operatorname{tr}(\mathrm{S}) = 1$ (σ p. s.) et donc σ est ponctuelle.

De la relation $\phi_{r,s} = \mathrm{P}_r \mathrm{S} \mathrm{P}'_s \sigma$ (voir [*1*]) on en déduit

$$\int_{\mathrm{I}} | (\mathrm{P}n\mathrm{S})_{ij} | d\sigma = | \sigma_{(i,n)(j,0)} | (\mathrm{I})$$

l'application $\mu \to | \mu | (\phi)$ avec ϕ sci $\geqslant 0$, étant sci pour la convergence étroite on obtient le résultat. (Ce critère est inspiré de celui figurant dans [*7*], p. 213).

Pour vérifier que la condition du lemme 2 est satisfaite, on pourrait utiliser pour chaque X la famille ${}^{\mathrm{N}}\phi^{\mathrm{X}}_{(r,s)}$ qui converge étroitement vers $\sigma_{(r,s)}$ mais leur manipulation étant difficile on les remplace par leurs barycentres ${}^{\mathrm{N}}\hat{\phi}_{(r,s)} = \int {}^{\mathrm{N}}\phi^{\mathrm{X}}_{(r,s)} \, dm(\mathrm{X})$ où m est une probabilité sur les matrices symétriques. Il se trouve (sans qu'une explication satisfaisante puisse être avancée), que le choix de la mesure invariante sous l'action du sous-groupe compact maximal de $\mathrm{S}_p(d, \mathbb{R})$ donnera un résultat très simple (après des calculs fastidieux), voir annexe B.

En utilisant la dernière formule prouvée dans l'annexe B, on arrive alors au :

LEMME 3. — σ *est ponctuelle dès que, pour tout intervalle ouvert borné* I

$$\sum_{n \geq 0} \int_{\mathrm{I}} \varliminf_{\mathrm{N}} (\operatorname{tr} \Delta_{\mathrm{N}}^{-1} \operatorname{tr} (\Delta_{\mathrm{N}}^{-1} \Delta_n))^{1/2} d\lambda < +\infty$$

(On a posé $\Delta_k = \mathrm{P}'_k \mathrm{P}_k + \mathrm{P}'_{k+1} \mathrm{P}_{k+1}$).

Remarques. — 1) En posant comme dans [*1*] $\mathrm{S}_k = g_k \ldots g_0$, on remarque que $\Delta_k = (\mathrm{I}, 0)(\mathrm{S}_k)' \mathrm{S}_k \begin{pmatrix} \mathrm{I} \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui montre que le problème posé se réduit au comportement asymptotique d'un produit de matrices de $\mathrm{S}_p(d, \mathbb{R})$.

2) On obtient la formule « magique » : pour $0 \leq n \leq N$:

$$\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}} \operatorname{tr}(\Delta_N^{-1} P_n' P_n) d\lambda = \Pi$$

(Cette relation remarquable est valable pour n'importe quelle suite P_n solution de $(*)$ avec $P_{-1} = 0$, $P_0 = I$, A_n symétrique, mais ne sera pas utilisée...).

II. L'OPÉRATEUR DE SCHRODINGER ALÉATOIRE

On suppose maintenant que la suite $(a_{m,n}) m \in [1, \ldots, d]$, $n \in \mathbb{N}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi ayant une densité sur $\mathbb{R}$.

LEMME 4. — *σ est presque sûrement ponctuelle dès que pour tout couple $i, j \in \{1, \ldots, d\}$:*

$$\sum_n \int_I \varliminf \mathbb{E}\left[\frac{(\det \Delta_n)^{1/2}}{\det \Delta_N} (\det x_i' \Delta_N x i \det x_j' T_n'^{-1} \Delta_N T_n^{-1} x j)^{1/2}\right] d\lambda < +\infty .$$

x_i est la matrice $[d, d-1]$ obtenue en supprimant la colonne de rang i dans la matrice identité d'ordre d et $\Delta_n = T_n' T_n$.

Preuve. — D'après le lemme 3, il suffit d'avoir

$$\sum_n \int_I \varliminf_N \mathbb{E}[(\operatorname{tr} \Delta_N^{-1} \operatorname{tr} \Delta_N^{-1} \Delta_n)^{1/2}] d\lambda < +\infty ,$$

or pour une matrice symétrique Δ d'ordre d, régulière :

$$\operatorname{tr} \Delta^{-1} = \frac{1}{\det \Delta} \sum_{i=1}^{d} \det (x_i' \Delta x_i) .$$

On sait [voir 1] qu'en posant $g_n^\lambda = \begin{pmatrix} A_n - \lambda I & , & -I \\ I & & 0 \end{pmatrix}$ la loi p_λ de cette suite de matrices aléatoires indépendantes à valeurs dans $G = \mathrm{Sp}(d, \mathbb{R})$ a une puissance p_λ^r admettant une densité. Par conséquent si X est une frontière compacte de G et ρ un cocycle K invariant sur $G \times X$ (voir annexe A) l'opérateur $T_{\rho,\lambda}$ sur C(X), défini par :

$$T_{\rho,\lambda} f(x) = \int_G \rho(g, x) f(g \cdot x) dp_\lambda(g) \quad \text{avec} \quad \int \operatorname{Sup}_x \rho(g, x) dp_\lambda < +\infty$$

a une puissance $T_{\rho,\lambda}^r$ compacte.

L'opérateur $T_{\mu,\lambda}^r$ sur $C(X_{(d-1,d)})$ associé à la probabilité ρ_λ et au cocycle μ

de l'annexe (A) soit $\mu(g, \bar{x}_{d-1}, \bar{x}_d) = \dfrac{\rho_{d-1}(g, \bar{x}_{d-1})}{\rho_d(g, \bar{x}_d)}$ est compact dès que le cocycle μ et les noyaux de Poisson qui ont servi à le construire vérifient une condition d'intégrabilité. Or :

$$P_{X_{d-1}}(g, \bar{x}_{d-1}) = [\rho_{d-1}(g, \bar{x}_{d-1})]^{-\frac{d+2}{2}}$$

$$P_{(X_d, X_{d-1})}(g, \bar{x}_{d-1}, \bar{x}_d) = [\rho_{d-1}(g, \bar{x}_{d-1})]^{-\frac{d}{2}}[\rho_d(g, \bar{x}_d)]^{-1}$$

et si $\bar{x} \in X_k$, on a :

$$\rho_k(g, x) \leq \| g \|^{2k}$$
$$[\rho_k(g, \bar{x})]^{-1} \leq \| g^{-1} \|^{2k}$$

où $\| g \|^2$ est le rayon spectral de $g'g$.

Or $\quad g_\lambda = \begin{pmatrix} A-\lambda I & -I \\ I & I \end{pmatrix}, \quad g_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & A-\lambda I \end{pmatrix}.$

Les conditions d'intégrabilité sont donc réalisées dès que la loi des potentiels a un moment d'ordre $d(d + 1)$.

Dans la suite on posera pour $t \in [0, 1], f \in C(X_{d-1,d})$

$$T_{t,\lambda} f(x) = \int \mu^t(g, x) f(gx) dp_\lambda(g)$$

LEMME 5. — *Si les potentiels sont indépendants de même loi ayant une densité et un moment d'ordre $d(d + 1)$, pour tout intervalle* I *borné, il existe des constantes* $C_{1,I}$, $C_{2,I}$, ρ_I *avec* $\rho_I < 1$ *et vérifiant* :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \lambda \in I \qquad \| T^n_{1,\lambda} 1 \| \leq C_{1,I}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \lambda \in I \qquad \| T^n_{1/2,\lambda} 1 \| \leq C_{2,I} \rho^n_I$$

Preuve. — L'application $\lambda \to T_{t,\lambda}$ étant continue (pour la topologie de la norme des opérateurs) il suffit de prouver les énoncés pour l'opérateur $T^r_{t,\lambda}$ à la place de $T_{t,\lambda}$.

En utilisant les remarques faites à la fin de l'annexe A et en remarquant que l'opérateur $f \to \int f(gy) dp^r_\lambda(g)$ est markovien sur C(Y), on obtient que la suite $\| \hat{T}^{nr}_{P_Y} \|$ est bornée, par conséquent il en est de même de $\| \hat{T}^{nr}_{P_Y} \|$ et donc de $\| T^{nr}_\mu \|$. La majoration est uniforme sur un compact en λ car l'opérateur de projection associé aux valeurs propres de module 1 est continu en λ [9].

Pour obtenir la seconde majoration on note $r_\lambda(t)$ le rayon spectral de $T^r_{t,\lambda}$. On sait que $r_\lambda(0) = r_\lambda(1) = 1$ et que $t \to \operatorname{Log} r_\lambda(t)$ est convexe pour $t \in [0, 1]$. Les propriétés de $r_\lambda(t)$ pour t voisin de zéro sont obtenues par perturbation des propriétés spectrales de $T^r_{0,\lambda}$. En effet Tutubalin a démontré que 1 est la seule valeur propre de module 1 de $T^r_{0,\lambda}$ et qu'elle est simple [*10*]. Il en résulte [*9*] que pour λ fixé et t voisin de 0, $T^r_{t,\lambda}$ a une unique probabilité propre $\nu_{t,\lambda}$ et une unique fonction propre $\Phi_{t,\lambda}$ avec $\nu_{t,\lambda(\Phi_{t,\lambda})=1}$.

En écrivant $T^r_{t,\lambda}\Phi_{t,\lambda} = r_\lambda(t)\Phi_{t,\lambda}$, la continuité de $t \to \Phi_{t,\lambda}$ et $t \to \nu_{t,\lambda}$ donne par passage à la limite $t \to 0$:

$$\frac{d}{dt} r_\lambda(t)\,|_{t=0} = \nu_{0,\lambda} \otimes p'_\lambda\,(\mathrm{Log}\,\mu)\,.$$

Mais cette dernière quantité vaut $-\gamma_d(\lambda)$ qui est strictement négative (voir [*1*]). On en déduit que $r_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) < 1$ et donc $r_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) \leq \rho < 1$ pour λ dans un compact (par semi-continuité supérieure du rayon spectral) d'où le résultat.

THÉORÈME. — *Si les potentiels forment une famille de variables aléatoires indépendantes de même loi possédant une densité sur $\mathbb{R}$ et un moment d'ordre $d(d+1)$ alors presque sûrement le spectre de* H *est ponctuel et il existe une fonction propre à décroissance exponentielle dans chaque sous-espace propre.*

Preuve. — Les considérations précédentes permettent d'écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall \lambda \in \mathrm{I} \qquad \forall(\bar{x}_{d-1}, \bar{x}_d) \in \mathrm{X}_{(d-1,d)} \quad \mathbb{E}\left[\frac{\det\,(x'_{d-1}(\mathrm{S}^\lambda_k)'\mathrm{S}^\lambda_k x_{d-1})}{\det\,(x'_d(\mathrm{S}^\lambda_k)'\mathrm{S}^\lambda_k x_d)}\right] \leq \mathrm{C}_{1,\mathrm{I}}\,\frac{\det\,(x'_{d-1}x_{d-1})}{\det\,(x'_d x_d)}\,.$$

Calculons l'espérance dans le lemme 4 en intégrant d'abord par rapport aux variables g_k d'indice $k \in (n+1, \ldots, \mathrm{N})$: en appliquant l'inégalité de Schwarz ; elle est majorée par :

$$\mathrm{C}_{1,\mathrm{I}} \quad \mathbb{E}\left[\left(\frac{\det\; x'_i\Delta_n x_i}{\det\;\Delta_n}\right)^{1/2}\right]$$

car $$\det\,(x'_j \mathrm{T}'^{-1}_n \Delta_n \mathrm{T}^{-1}_n x_j) = 1\,.$$

Or cette dernière espérance est majorée par $\mathrm{C}_{21}\rho^n_{\mathrm{I}}$, ce qui prouve d'après le lemme 4 que σ est presque sûrement ponctuelle. Si I est un intervalle ouvert borné :

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathrm{I}} \sum_{i,j} |(\mathrm{P}^n\mathrm{S})_{ij}|\, d\sigma\right) \leq \mathrm{C}_{3,\mathrm{I}}\rho^n_{\mathrm{I}} \quad \text{avec} \quad \rho_{\mathrm{I}} < 1\,.$$

On en déduit immédiatement que

$$|\,\sigma_{(i,n)(j,0)}\,|\,(\mathrm{I}) = \int_{\mathrm{I}} |(\mathrm{P}^n\mathrm{S})_{ij}|\, d\sigma_\omega \leq \mathrm{C}(\omega)t^n\,.$$

$C(\omega)$ étant une fonction presque sûrement finie et t n'importe quel nombre de $]\rho_I, 1[$.

. Si $C(\omega) < +\infty$ et λ une valeur propre de H_ω, on a donc :

$$|(P^n S)_{ij}(\lambda)| \leq \frac{C(\omega)}{\sigma_\omega(\lambda)} t^n .$$

Les colonnes de la matrice S n'étant pas simultanément nulles, on en déduit l'existence d'une fonction propre à décroissance exponentielle pour ce λ.

Malheureusement les sous-espaces propres étant *a priori* de dimension $\leq d$, on ne peut affirmer (sauf si $d = 1$) que toutes les fonctions propres sont à décroissance exponentielles (Dans le cas où λ est valeur propre simple de λ, il résulte des considérations précédentes que S est alors de rang 1).

Remarques. — 1) Soit b_N la plus petite valeur propre de $\sum_0^N P'_n P_n$; λ est valeur propre de H si et seulement si la suite b_N est bornée.
On aurait donc pu tenter de prouver que le spectre est purement ponctuel en étudiant cette suite b_N, mais ceci paraît difficile (sauf bien sûr si $d = 1$) car il n'existe pas de relation simple entre b_N et b_{N+1}.

2) Comme dans [*2*] la méthode utilisée permet d'obtenir le même résultat pour des opérateurs aux différences plus généraux de la forme :

$$(HW)_n = -B_n W_{n-1} + A_n W_n - B_n W_{n+1} .$$

A_n, B_n étant des matrices symétriques avec $aI \leq B_n \leq bI$ $(0 \leq a \leq b < +\infty)$.

Le seul problème supplémentaire est l'existence d'une densité pour une puissance de la loi de $g_n^\lambda = \begin{pmatrix} B_n^{-1}(A_n - \lambda I) & , & -I \\ I & & 0 \end{pmatrix}$ sur $S_p(d, \mathbb{R})$, mais en particularisant les problèmes on peut toujours faire une démonstration analogue à celle de [*1*].

3) La méthode utilisée permet sans difficulté supplémentaire de donner le même résultat sur le ruban entier en introduisant des approximations sur $[1, \ldots, d] \times [-N, \ldots, N]$, et les matrices ${}^N P_n$ solutions de $(*)$ avec ${}^N P_{-N-1} = 0$ et ${}^N P_{-N} = I$, ainsi que les produits :

$${}^N S_n^\lambda = g_n^\lambda \ldots g_0^\lambda g_{-1}^\lambda \ldots g_{-N}^\lambda$$

Dans ce cas il est facile de voir qu'une condition suffisante pour que H soit à spectre ponctuel est :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_I \varliminf_N \left(\operatorname{tr}\left({}^N\Delta_N^{-1}\, {}^N\Delta_m\right) \operatorname{tr}\left({}^N\Delta_N^{-1}\, {}^N\Delta_n\right)\right)^{1/2} d\lambda < +\infty$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$ (ou seulement pour $m = 0$ et $m = -1$).

Il suffit de répéter la preuve précédente avec une intégration de plus.

On montre de la même façon que pour presque tout ω il existe dans chaque sous-espace propre une fonction propre à décroissance exponentielle. On peut toutefois ajouter que dans ce cas les sous-espaces propres qui *a priori* étaient de dimension $\leq 2d$ sont en fait de dimension $\leq d$ car si 2 fonctions propres correspondent à deux vecteurs de départ $\begin{pmatrix} U_0 \\ U_{-1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} V_0 \\ V_{-1} \end{pmatrix}$ on a : $\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ U_n \end{pmatrix} = S_n \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{-1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} V_{n+1} \\ V_n \end{pmatrix} = S_n \begin{pmatrix} V_0 \\ V_{-1} \end{pmatrix}$ et de la relation $S_n' J S_n = J$ on déduit que $\begin{pmatrix} U_0 \\ U_{-1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} V_0 \\ V_{-1} \end{pmatrix}$ appartiennent à un même sous-espace isotrope de $\mathbb{R}^{2d}$.

ANNEXE A

FRONTIÈRE ET NOYAUX DE POISSON POUR LE GROUPE SYMPLECTIQUE $S_p(d, \mathbb{R})$

I. ÉTUDE DE $S_p(d, \mathbb{R})$

$G = S_p(d, \mathbb{R})$ est le sous-groupe de $Gl(2d, \mathbb{R})$ laissant invariante la forme $\sum_{i=1}^{d} (x_i \wedge x_{i+d})$.

Un élément g de G est caractérisé par la relation :

$$g'Jg = J \qquad (\text{ou } gJg' = J) \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer que le sous-groupe K des matrices orthogonales de G est constitué des éléments $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ tels que $A + iB$ soit unitaire, par conséquent $S_p(d, \mathbb{R}) \cap SO(2d) \simeq U(d)$.

Décomposition d'Iwasawa de G.

L'algèbre de Lie de G est constitué des matrices $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & -X'_1 \end{pmatrix}$ avec X_2 et X_3 symétriques.

On peut écrire une décomposition de Cartan $\mathscr{G} = \mathscr{K} + \mathscr{P}$ avec

$$\mathscr{K} = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ -X_2 & X_1 \end{pmatrix} / X_2 \text{ symétrique, } X_1 \text{ antisymétrique} \right\}$$

$$\mathscr{P} = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & -X_1 \end{pmatrix} / X_2 \text{ symétrique, } X_1 \text{ symétrique} \right\}$$

$$\mathscr{A} = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -X \end{pmatrix} / X = \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_d) \right\}$$

est une sous-algèbre maximale abélienne de $\mathscr{P}$.

Si l'on choisit la chambre de Weyl $\mathscr{A}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -X \end{pmatrix} / x_1 > x_2 > x_d > 0 \right\}$ on obtient le système de racines positives :

$$\Delta^+ = \{ \Phi_{ij}/j > i \} \cup \{ \psi_{ij}/j \geq i \}$$

où
$$\Phi_{ij}\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -X \end{pmatrix} = x_i - x_j \qquad \Psi_{ij}\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -X \end{pmatrix} = x_i + x_j$$

et
$$\mathscr{N} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathscr{G}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & -X'_1 \end{pmatrix} \middle/ \begin{array}{l} X_2 \text{ symétrique} \\ X_1 \text{ triang. sup. avec termes diagonaux nuls.} \end{array} \right\}$$

On en déduit la décomposition d'Iwasawa :

$$G = KAN$$

avec $K = SO(2d) \cap S_p(d, \mathbb{R}) \simeq U(d)$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X^{-1} \end{pmatrix} / X = \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_d) x_i > 0 \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & (X^{-1})' \end{pmatrix} \Big/ \begin{matrix} XY' = YX' \\ X \text{ triang. sup. avec des 1 dans la diagonale.} \end{matrix} \right\}$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} / X = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d) \varepsilon_i = \pm 1 \right\}$$

$$H = MAN = \left\{ \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & (X^{-1})' \end{pmatrix} \Big/ \begin{matrix} XY' = YX' \\ X \text{ triang. sup.} \end{matrix} \right\}.$$

On peut exhiber un système de racines primitives Π

$$\Pi = \{ \Phi_{i,i+1} \}_{i=1,\ldots,d-1} \cup \{ \Psi_{d,d} \}$$

ce qui permettraît grâce à la construction indiquée par Koranyi dans [4] (p. 386 à 391), de construire algébriquement toutes les frontières de G, mais nous utiliserons ici une représentation géométrique de ces frontières.

II. Frontières de $S_p(d, \mathbb{R})$

Si x_k désigne un système libre de k vecteurs de $\mathbb{R}^{2d}$, $\bar{x}_k$ est le sous-espace de dimension k associé. On dit qu'un sous-espace de $\mathbb{R}^{2d}$ et isotrope si pour tout couple u, v de vecteurs de ce sous-espace, on a $\langle u, Jv \rangle = 0$.

En notant $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées des éléments de x_k (a et b matrices (d, k)), $\bar{x}_k$ est isotrope si et seulement si $a'b = b'a$ et toute autre base de $\bar{x}_k$ s'écrit $\begin{pmatrix} ac \\ bc \end{pmatrix}$ où c est une matrice (k, k) inversible.

L_k désignera la variété Lagrangienne des sous-espaces isotropes de $\mathbb{R}^{2d}$ de dimension k et $X_{(1,\ldots,d)}$ l'espace des drapeaux isotropes c'est-à-dire des suites

$$x = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_d) \quad \text{avec} \quad \bar{x} \in L_k \quad \text{et} \quad \bar{x}_k \subset \bar{x}_{k+1}$$

$(e_i)_{i=1,\ldots,2d}$ étant la base usuelle de $\mathbb{R}^{2d}$, on note e le point de $X_{(1,\ldots,d)}$ défini par

$$e = (\bar{e}_1, (\overline{e_1, e_2}), \ldots, (\overline{e_1, \ldots, e_d})).$$

On vérifie que G est transitif sur $X_{(1,\ldots,d)}$ et que le stabilisateur de e est le groupe $H = MAN$ par conséquent $X_{(1,\ldots,d)} = G/H$ est la frontière maximale de G.

III. Cocycles et noyaux de Poisson

D'après les résultats de [3], tout cocycle K invariant ρ sur $G \times X_{(1,\ldots,d)}$ est défini par l'exponentielle $\rho(h, e)$ sur H, or $[H, H] = N$ par conséquent $H/[H, H] \simeq \{ \mathbb{R}^*, x \}^d$.

Un cocycle ρ, K invariant $G \times X_{(1,\ldots,d)}$ vérifie donc

$$\rho(h, e) = \prod_{i=1}^{d} (x_i^2)^{\lambda i} \quad \text{si} \quad h = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & (X^{-1})' \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad X = \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n).$$

Or si l'on considère les d cocycles K invariants ρ_k définis par

$$\rho_k(g, x) = \rho_k(g, \bar{x}_k) = \frac{\det x_k' g' g x_k}{\det x_k' x_k} \qquad k = 1, \ldots, d$$

on a
$$\rho_k(h, e) = \prod_{i=1}^{k} x_i^2 .$$

Par conséquent tout cocycle K invariant sur $G \times X_{(1,\ldots,d)}$ s'écrit

$$\rho(g, x) = \prod_{k=1}^{d} [\rho_k(g, x)]^{\lambda_k} .$$

Il s'ensuit que les cocycles sur les frontières partielles

$$X_{i_1,\ldots,i_r} = \{ x = (\bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_r})/\bar{x}_{i_k} \in L_{i_k} \quad (\bar{x}_{i_k} \subset \bar{x}_{i_{k+1}} \}$$

sont de la forme :

$$\rho(g, x) = \prod_{k=1}^{r} \rho_{i_k}[(g, x)]^{\lambda_{i_k}}.$$

Si $m_{i_1,\ldots,i_r}$ est la probabilité K invariante sur $X_{i_1,\ldots,i_r}$ le noyau de Poisson est le cocycle $P_{i_1 . i_r}$ défini par

$$P_{i_1 . i_r}(g, x) = \frac{dg^{-1} m_{i_1 \ldots i_r}}{dm_{i_1 \ldots i_r}}(x)$$

et par conséquent, il suffit de déterminer les coefficients λ_{i_k} associés à ce cocycle pour connaître le noyau de Poisson.

En suivant la méthode exposée par Furstenberg et Tzkoni, on explicitera le noyau de Poisson dans les cas où l'on peut trouver une représentation paramétrique simple de la frontière à savoir X_k et $X_{(k,d)}$.

1) *Noyau de Poisson* X_k $(1 \leq k \leq d)$

Si $x_k = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec a carrée de dimension k, a inversible.

La trajectoire de x sous H peut être associée au produit ba^{-1} de dimension $(2d-k, k)$.

Mais il ne faut considérer que le sous-ensemble de ces matrices correspondant à des plans isotropes ; en écrivant

$$b = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} u \textit{ et } w \text{ de dimension } (d - k, k) \\ v \text{ carrée de dimension } k \end{array}$$

x est isotrope si et seulement si $va^{-1} + (ua^{-1})'wa^{-1}$ est symétrique d'où la représentation paramétrique de X_k (avec a inversible)

$$\bar{x}_k \xrightarrow{\pi} \begin{bmatrix} X \\ M \\ Y \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{X et Y matrices } (d - k, k) \\ \text{M matrice symétrique } (k, k) \end{array}$$

avec
$$X = ua^{-1}, \quad Y = wa^{-1}, \quad M - X'Y = va^{-1})$$

$\left(\text{on en déduit donc que } X_k \text{ est une variété de dimension } 2k(d-k) + \frac{k(k+1)}{2}\right).$

Si on considère l'élément $h_\alpha = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix} \in H$ avec $T = \operatorname{diag}(\alpha, 1, \ldots, 1)$ $\alpha > 0$, on obtient

$$\pi(h_\alpha^{-1}\bar{x}_k) = \begin{bmatrix} X & \hat{T} & \\ & \hat{T} & M\hat{T} \\ Y & \hat{T} & \end{bmatrix} \qquad \text{avec } \hat{T} = \operatorname{diag}(\alpha, 1 \ldots 1) \text{ carrée de dimension } k)$$

Le Jacobien de cette transformation linéaire est égal à α^{2d-k+1}.

Par conséquent

$$P_k(h_\alpha, e) = \frac{1}{\alpha^{2d-k+1}} = [\rho_k(h_\alpha, e)]^{-\frac{2d-k+1}{2}}$$

D'où le noyau de Poisson de X_k :

$$P_k(g, \bar{x}_k) = \left[\frac{\det x_k' x_k}{\det x_k' g' g x_k}\right]^{\frac{2d-k+1}{2}}$$

Remarques. — Sur X_d cette formule était bien connue, car X_d est la frontière de Bergman Silov du domaine Hermitien symétrique borné Ω :

$$\Omega = \{ Z \in \mathcal{M}_{d,d}(\mathbb{C})/Z \text{ symétrique et } I - Z^*Z > 0 \}$$

qui s'identifie naturellement à $\hat{G}/\hat{K}$ ($\hat{G}$ est la forme conjuguée de $Sp(d, \mathbb{R})$ soit $SU(d, d)$ et $\hat{K} \sim U(d)$; un élément $\hat{g} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ de $\hat{G}$ opérant sur Ω par $\hat{g}Z = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$.

En effet la transformation définie par :

$$x_d = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \bar{x}_d \to (a + ib)(a - ib)^{-1}$$

est une bijection de X_d sur les matrices symétriques unitaires qui constituent la frontière de Bergman Silov de Ω soit $\partial\Omega$.

L'action de $\hat{K}$ sur $\partial\Omega$ s'écrit

$$Z \to UZU' \qquad \text{avec} \qquad U \in U(d).$$

Dans ces conditions, la mesure $\hat{K}$ invariante sur $\partial\Omega$ est connue et transportée sur X_d, elle est en fait portée par $\tilde{X}_d = \{ \bar{x}_d/a \text{ inversible} \}$ qui est homéomorphe à l'espace des matrices symétriques réelles d'ordre d par l'application $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \to M = ba^{-1}$ et l'on obtient

$$dm_d(M) = \text{constante } [\det(I + M^2)]^{-\frac{d+1}{2}} \prod_{i \geq j} dm_{ij}$$

L'action de G sur les matrices symétriques s'écrivant

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad gM = (AM + B)(CM + D)^{-1}$$

il est donc possible d'obtenir directement $\dfrac{dg^{-1}m_d}{dm_d}(M)$ par un calcul de Jacobien.

Le noyau de Poisson obtenu plus haut (pour $k = d$) correspond à la formule obtenue dans [5], page 99 écrite sous la forme :

$$P_d(Z, U) = \frac{1}{\operatorname{Vol}(\Omega)} \frac{(\det(I - Z\bar{Z}))^{\frac{d+1}{2}}}{|\det(I - Z\bar{U})|^{d+1}} \qquad \text{avec} \qquad Z \in \Omega \text{ et } U \in \partial\Omega.$$

Précisons enfin que l'on dispose d'une construction algébrique de X_d car si l'on considère le sous-ensemble E de racines primitives $E = \{ \phi_{i,i+1}/i = 1, \ldots, d-1 \}$ en posant $\mathscr{A}_E = \{ A \in \mathscr{A}/\phi_{i,i+1}(A) = 0 \ i = 1, \ldots, d-1 \}$ on obtient $\mathscr{A}_E = \left\{ \begin{pmatrix} tI & 0 \\ 0 & -tI \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$ et par conséquent le centralisateur $\mathscr{M}_E$ de $\mathscr{A}_E$ dans $\mathscr{K}$ s'écrit

$$\mathscr{M}_E = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{pmatrix} / X_1 \text{ antisymétrique} \right\}$$

dans ces conditions

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A + iB \text{ unitaire} \right\}$$

$$M_E = \left\{ \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad L \in SO(d) \right\}$$

et $K/M_E \simeq$ Matrices unitaires symétriques $\simeq X_d$.

2) De même sur $X_1 = \mathbb{P}^{2d-1}$ le noyau de Poisson était connu puisque l'on a

$$Sp(d, \mathbb{R}) \subset Sl(2d, \mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad K \subset SO(2d)$$

par conséquent P_1 est identique au noyau calculé sur le groupe $Sl(2d, \mathbb{R})$ c'est-à-dire :

$$P_1(g, v) = [\rho_1(g, v)]^{-d} = \left(\frac{\| v \|}{\| gv \|} \right)^{2d}.$$

3) *Noyau de Poisson de* $X_{(k,d)}$ $1 \leq k \leq d$

$$X_{(k,d)} = \{ (\bar{x}_k, \bar{x}_d)/\bar{x}_k \subset \bar{x}_d \}.$$

si $x_k = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $x_d = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec a inversible alors $\bar{x}_k \subset \bar{x}_d \Leftrightarrow v = ba^{-1}u$, on posera

$$u = \begin{pmatrix} u_k \\ u_{d-k} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} u_k \text{ matrice } (k, k) \\ u_{d-k} \text{ matrice } (d-k, k). \end{matrix}$$

On a alors une représentation paramétrique des k plans de type $\begin{pmatrix} u \\ ba^{-1}u \end{pmatrix}$ pour lesquels u_k est inversible en prenant $\begin{pmatrix} u \\ ba^{-1}u \end{pmatrix} \to u_{d-k}u_k^{-1} \in \mathbb{R}^{k(d-k)}$.

On a donc une représentation paramétrique de l'ouvert

$$\tilde{X}_{(k,d)} = \{ (\bar{x}_k, \bar{x}_d) \in X_{(kd)}/u_k \text{ et } a \text{ inversibles} \}$$

en posant

$$\pi(\bar{x}_k, \bar{x}_d) = (u_{d-k}u_k^{-1}, ba^{-1}) \in \mathbb{R}^{k(d-k)} \times \mathbb{R}\frac{d(d+1)}{2}.$$

En considérant cette fois l'élément ($\alpha > 0$, $\beta > 0$) :

$$h_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X^{-1} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad X = \operatorname{diag}(\alpha, 1, \ldots, 1, \beta)$$

on obtient que

$$\pi[h_{\alpha,\beta}^{-1}(\bar{x}_k, \bar{x}_d)] = \left(\underset{\substack{\uparrow \\ (d-k,\, d-k)}}{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}} u_{d-k}u_k^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ (k,\, k)}}{\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}}, \quad Xba^{-1}X \right)$$

le Jacobien de cette transformation est égal à

$$\alpha^{d-k}\beta^{-k} \times \alpha^{d+1}\beta^{d+1} = \alpha^{2d-k+1}\beta^{d-k+1}$$

or

$$\rho_k(h_{\alpha,\beta}, (\overline{e_1, \ldots, e_k})) = \alpha^2$$

$$\rho_d(h_{\alpha,\beta}, (\overline{e_1, \ldots, e_d})) = \alpha^2\beta^2$$

Par conséquent :

$$\boxed{\mathrm{P}_{k,d}(g, (\bar{x}_k, \bar{x}_d)) = [\rho_k(g, \bar{x}_k)]^{-\frac{d}{2}}[\rho_d(g, \bar{x}_d)]^{-\frac{d+1-k}{2}}}$$

IV. Opérateurs associés aux cocycles

Soit X une frontière de G, ρ un cocycle K invariant sur G $\times$ X, p une probabilité sur G avec $\int \operatorname{Sup}_x \rho(g, x) dp(g) < +\infty$.

On peut alors considérer l'opérateur borné T_ρ sur C(X)

$$\mathrm{T}_\rho f(x) = \int_{\mathrm{G}} \rho(g, x) f(gx) dp(g)$$

et l'opérateur dual T_ρ^* sur $\mathscr{M}$(X).

Soit P le noyau de Poisson de (G, X), on a alors le résultat d'entrelacement suivant :

i) Si $\phi \in \mathrm{C(X)}$,

$$(\phi m)\hat{\mathrm{T}}^*_{\mathrm{P}\rho^{-1}} = (\mathrm{T}_\rho\phi)m$$

($\hat{\mathrm{T}}$ *est l'opérateur associé à* $\hat{\mu}$).

ii)

$$(\mathrm{Ker}\,(\mathrm{T}_\rho - \lambda \mathrm{I})^k)m \subset \mathrm{Ker}\,(\hat{\mathrm{T}}^*_{\mathrm{P}\rho^{-1}} - \lambda \mathrm{I})^k .$$

Preuve. — Soit $f \in \mathrm{C(X)}$

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \langle (\phi m)\hat{\mathrm{T}}^*_{\mathrm{P}\rho^{-1}}, f \rangle = \langle \phi m, \hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{P}\rho^{-1}} f \rangle \\ &= \int \frac{\mathrm{P}(g^{-1}, x)}{\rho(g^{-1}, x)} f(g^{-1}x)\phi(x) dm(x) dp(g) \end{aligned}$$

en écrivant que $\mathrm{P}(g^{-1}, x) = \dfrac{dgm}{dm}(x)$ on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int \frac{f(x)\phi(gx)}{\rho(g^{-1}, gx)} dm(x)dp(g) = \int f(x)\rho(g, x)\phi(gx)dm(x)dp(g) \\ &= \langle (\mathrm{T}_\rho\phi)m, f \rangle \end{aligned}$$

ii) est une conséquence immédiate de ce que $f \to fm$ est injective.

Conséquence importante :

Supposons que p ait une densité sur G, les opérateurs T_ρ sont alors compacts (ainsi que $\hat{\mathrm{T}}_\rho$).

Par conséquent les deux sous-espaces $\mathrm{Ker}\,(\hat{\mathrm{T}}_\rho - \lambda \mathrm{I})^k$, $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{T}_{\mathrm{P}\rho^{-1}} - \lambda \mathrm{I})^k$ ont la même dimension (finie) pour $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $k \in \mathbb{N}$.

Il s'ensuit que la famille $\|\hat{\mathrm{T}}_\rho^n\|$ est bornée si et seulement si la famille $\|\mathrm{T}^n_{\mathrm{P}\rho^{-1}}\|$ est bornée.

En effet les rayons spectraux sont identiques et dans le cas où celui-ci vaut 1, un opérateur compact T dont le rayon spectral est égal à 1 a ses puissances bornées si et seulement si pour toute valeur propre λ de module 1, on a $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{T} - \lambda\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{T} - \lambda\mathrm{I})^2$.

Soit Y une autre frontière de G image équivariante de X par une application continue τ (i. e. $g.\tau(x) = \tau(gx)$).

Un cocycle $\sigma(g, y)$ se remonte en un cocycle $\bar{\sigma}(g, x)$ en posant $\bar{\sigma}(g, x) = \sigma(g, \tau(x))$ et si $\phi \in C(Y)$, on pose $\bar{\phi} \in C(X)$ par $\bar{\phi}(x) = \phi(\tau(x))$. Il est alors facile de constater que

$$T_{\bar{\sigma}}(\bar{\phi}) = \overline{T_\sigma \phi}\,.$$

Par conséquent chaque valeur propre de T_σ est une valeur propre de $T_{\bar{\sigma}}$ et $\| T_\sigma^n \| = \| T_{\bar{\sigma}}^n \|$.

Application au groupe symplectique.

En prenant $X = X_{(d-1,d)}$ et $Y = X_{d-1}$.

On considérera le cocycle μ sur X associé aux noyaux de Poisson P_X et P_Y de X et Y par $\mu = P_X \bar{P}_Y{}^{-1}$.

Les formules précédentes donnent

$$\mu(g, \bar{x}_{d-1}, \bar{x}_d) = [\rho_{d-1}(g, \bar{x}_{d-1})][\rho_d(g, \bar{x}_d)]^{-1}$$

(On peut remarquer que ce cocycle est celui qui fait apparaître le coefficient de Lyapounoff $-\gamma_d$ et qu'il est donc négatif dès que $\gamma_d > 0$ (voir [*1*])).

ANNEXE B

CALCUL DE ${}^{\mathrm{N}}\hat{\sigma}_{(i,r)(j,s)}$

Si ϕ est une fonction continue à support compact dans $\mathbb{R}$

$$ {}^{\mathrm{N}}\sigma^{\mathrm{X}}_{(i,r)(j,s)}(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{\{\lambda\in\mathbb{R},\, \mathrm{V}\in\mathrm{S}_{d-1}/(\mathrm{P}_{\mathrm{N}+1} - \mathrm{X}\mathrm{P}_{\mathrm{N}})\mathrm{V}=0\}} \phi(\lambda) \frac{(\mathrm{P}_r\mathrm{V})^i(\mathrm{P}_s\mathrm{V})^j}{\sum_{k=0}^{n} \mathrm{V}'\mathrm{P}_k'\mathrm{P}_k'\mathrm{V}} $$

(dans le cas où ${}^{\mathrm{N}}\mathrm{H}^{\mathrm{X}}$ a ses valeurs propres simples).

En utilisant la transformation de Cayley

$$ \mathrm{Q}_{\mathrm{N}} = (\mathrm{P}_{\mathrm{N}} + i\mathrm{P}_{\mathrm{N}+1})(\mathrm{P}_{\mathrm{N}} - i\mathrm{P}_{\mathrm{N}+1})^{-1} $$
$$ \mathrm{Z} = (\mathrm{I} + i\mathrm{X})(\mathrm{I} - i\mathrm{X})^{-1} $$

Q_{N} et Z sont unitaires symétriques et

$$ (\mathrm{P}_{\mathrm{N}+1} - \mathrm{X}\mathrm{P}_{\mathrm{N}})\mathrm{V} = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{Q}_{\mathrm{N}} - \mathrm{Z})(\mathrm{P}_{\mathrm{N}} - i\mathrm{P}_{\mathrm{N}+1})\mathrm{V} = 0 . $$

De plus $\left(\text{en notant } \dot{\mathrm{M}} = \dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial \lambda}\right)$ on a la relation

$$ \dot{\mathrm{Q}}_{\mathrm{N}} = 2i(\mathrm{P}_{\mathrm{N}}' - i\mathrm{P}_{\mathrm{N}+1}')^{-1}\left(\sum_{0}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}_k'\mathrm{P}_k\right)(\mathrm{P}_{\mathrm{N}} - i\mathrm{P}_{\mathrm{N}+1})^{-1} $$

(voir par exemple [*6*], p. 156).

D'autre part si ψ est une fonction continue à support compact de $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et g de classe C^1 de $\mathbb{R}^d$ dans C^d n'ayant qu'un nombre fini de zéros :

$$ \sum_{\{x/g(x)=0\}} \psi(x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\mathrm{B}_\varepsilon} \int_{\{x\in\mathbb{R}^d/\|g(x)\|\leq\varepsilon\}} \psi(x)\,|\,\mathrm{J}(x)\,|\,dx $$

B_ε est le volume de la boule de rayon ε de $\mathbb{R}^d$ et J la matrice Jacobienne de g, $|\,\mathrm{J}(x)\,|$ le module de det $\mathrm{J}(x)$. On notera $\theta \to \mathrm{V}$ une représentation paramétrique de S_{d-1} et $\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta}$ la matrice $(d, d-1)$ Jacobienne de ce changement de variable.

En prenant $g(\theta, \lambda) = (\mathrm{Q}_{\mathrm{N}} - \mathrm{Z})(\mathrm{P}_{\mathrm{N}} - i\mathrm{P}_{\mathrm{N}+1})\mathrm{V}$ on obtient :

$$ \mathrm{J} = \left\{ (\mathrm{Q}_{\mathrm{N}} - \mathrm{Z})(\mathrm{P}_{\mathrm{N}} - i\mathrm{P}_{\mathrm{N}+1})\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta},\ [(\mathrm{Q}_{\mathrm{N}} - \mathrm{Z})(\dot{\mathrm{P}}_{\mathrm{N}} - i\dot{\mathrm{P}}_{\mathrm{N}+1}) + \dot{\mathrm{Q}}_{\mathrm{N}}(\mathrm{P}_{\mathrm{N}} - i\mathrm{P}_{\mathrm{N}+1})]\mathrm{V} \right\} $$

Pour calculer ce Jacobien sur les zéros de g, on peut utiliser la relation

$$ \det(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_d) = \det(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_{d-1}, \mathrm{W}) \frac{\mathrm{W}^*\mathrm{U}_d}{\mathrm{W}^*\mathrm{W}} $$

où les U_i et W sont des éléments de $\mathbb{C}^d$ et $\mathrm{W}^*\mathrm{U}_i = 0$ $i = 1, \ldots, d-1$.

En effet, en choisissant $\mathrm{W} = (\mathrm{P}_{\mathrm{N}} + i\mathrm{P}_{\mathrm{N}+1})\mathrm{V}$, on a sur les zéros de g :

$$ \mathrm{W}^*(\mathrm{Q}_{\mathrm{N}} - \mathrm{Z}) = 0 \qquad (\text{car } \mathrm{Q}_{\mathrm{N}} - \mathrm{Z} \text{ est symétrique}) $$

$$ \mathrm{W}^*[(\mathrm{Q}_{\mathrm{N}} - \mathrm{Z})(\dot{\mathrm{P}}_{\mathrm{N}} - i\dot{\mathrm{P}}_{\mathrm{N}+1}) + \dot{\mathrm{Q}}_{\mathrm{N}}(\mathrm{P}_{\mathrm{N}} - i\mathrm{P}_{\mathrm{N}+1})]\mathrm{V} = 2i\mathrm{V}'\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}_k'\mathrm{P}_k\right)\mathrm{V} $$

et par conséquent

$$|J| = |J_0| \frac{V'\left(\sum_{k=0}^{N} P_k' P_k\right)V}{V'\Delta_N V}$$

où l'on a posé $\Delta_N = P'_{N+1}P_{N+1} + P'_N P_N$ et

$$J_0 = \left((Q_N - Z)(P_N - iP_{N+1})\frac{\partial V}{\partial \theta}, (P_N + iP_{N+1})V\right)$$

d'où la formule :

$$^{N}\sigma^{X}_{(i,r)(j,s)}(\phi) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{B_\varepsilon} \int_{\{\|(Q_N - Z)(P_N - iP_{N+1})V\| \leq \varepsilon\}} \phi(\lambda) \frac{(P_rV)^i(P_sV)^j}{V'\Delta_N V} |J_0| \, d\lambda d\theta$$

La probabilité m sur les matrices unitaires symétriques $Z = G'e^{i\Phi}G$ avec $G \in SO(d)$, $\Phi = \text{diag}(\phi_1, \ldots, \phi_d)$ invariante par les transformations $Z \to UZU'$ avec $U \in SU(d)$ est donnée par la formule $dm(Z) = d\Phi \otimes dG$, dG étant la mesure de Haar de $SO(d)$ et $d\Phi$ la probabilité $d\Phi = \alpha_d h(\phi_1, \ldots, \phi_d) \prod_{k=1}^{d} d\phi_k$ sur $[-\pi, \pi]^d$ avec

$$h(\phi_1, \ldots, \phi_d) = 1_{(\phi_1 \geq \phi_2, \ldots, \geq \phi_d)} \prod_{r>s} |e^{i\phi_r} - e^{i\phi_s}|$$

D'autre part le groupe $K = \begin{pmatrix} B & -A \\ A & B \end{pmatrix}$ avec $A + iB$ unitaire est transitif sur X_d par conséquent il existe une matrice réelle inversible C telle que :

$$\begin{pmatrix} P_{N+1} \\ P_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & -A \\ A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc $P_N + iP_{N+1} = (A + iB)C$

$$Q_N = (A + iB)(A + iB)'$$

On en déduit que

$$(Q_N - Z)(P_N - iP_{N+1}) = (A + iB)[I - (A' - iB')Z(A - iB)]C$$

En utilisant l'invariance de m, $^{N}\hat{\sigma}_{(i,r)(j,s)}$ possède donc une densité par rapport à la mesure de Lebesgue $d\lambda$ donnée par :

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{B_\varepsilon} \int_{\{\|(I-Z)CV\| \leq \varepsilon\}} |\det((I-Z)C\frac{\partial V}{\partial \theta}, CV| \times \frac{(P_rV)^i(P_sV)^j}{V'\Delta_N V} dm(Z)d\theta$$

Soit encore en posant $Z = G'e^{i\Phi}G$, par $\int R_{(i,r)(j,s)}(G)dG$ avec

$$R_{(i,r)(j,s)}(G) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{B_\varepsilon} \int_{\{\|(I - e^{i\Phi})GCV\| \leq \varepsilon\}} |\det((I - e^{i\Phi})GC\frac{\partial V}{\partial \theta}, GCV)| \frac{(P_rV)^i(P_sV)^j}{V'\Delta_N V} d\Phi d\theta$$

Cette dernière intégrale se calcule facilement en choisissant $k \in [1, \ldots, d]$ et en intégrant d'abord par rapport aux variables (ϕ_k, θ) les autres ϕ étant fixés (leurs valeurs pouvant toujours être supposées distinctes de 0).

Alors en posant

$$g_k(\phi_k, \theta) = (\mathrm{I} - e^{i\Phi})\mathrm{GCV}$$

$$\{ g_k = 0 \} = \left\{ \phi_k = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{V} = {}^k\mathrm{V} \quad \text{tel que} \quad \mathrm{GC}^k\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ (\mathrm{GC}^k\mathrm{V})^k \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

De plus, la matrice Jacobienne de g_k soit J_k vaut

$$\mathrm{J}_k = \left((\mathrm{I} - e^{i\Phi})\mathrm{GC}\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta}, \; - ie^{i\Phi_k} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ (\mathrm{GCV})^k \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

On en déduit que

$$\mathrm{R}_{(i,r)(j,s)}(\mathrm{G}) = \frac{(\mathrm{P}_r^k\mathrm{V})^i(\mathrm{P}_s^k\mathrm{V})^j}{{}^k\mathrm{V}'\Delta_{\mathrm{N}}\,{}^k\mathrm{V}}\; {}^k\beta_d$$

(Il n'y a que deux vecteurs ${}^k\mathrm{V}$ opposés définis par $g_k = 0$)

avec
$${}^k\beta_d = 2\,\frac{\displaystyle\int h(\phi_1, \ldots, \phi_{k-1}, 0, \phi_{k+1}, \phi_d) \prod_{j \neq k} d\phi_j}{\displaystyle\int h(\phi_1, \ldots, \phi_d) \prod_j d\phi_j}$$

il est facile de constater que ${}^k\beta_d$ est indépendant de k et sera donc noté β_d.

On peut alors donner une expression de R plus symétrique :

$$d\,\mathrm{R}_{(i,r)(j,s)}(\mathrm{G}) = \beta_d \sum_{k=1}^{d} (\mathrm{P}_r\mathrm{C}^{-1}\mathrm{G}'e_k)^i(\mathrm{P}_s\mathrm{C}^{-1}\mathrm{G}'e_k)^j$$

(en tenant compte de la relation $\Delta_{\mathrm{N}} = \mathrm{C}'\mathrm{C}$).

En particulier pour $r = s$, $i = j$

$$\sum_{i=1}^{d} \mathrm{R}_{(i,r)(i,r)}(\mathrm{G}) = \frac{\beta d}{d}\,\mathrm{tr}\,(\Delta_{\mathrm{N}}^{-1}\mathrm{P}_r'\mathrm{P}_r)$$

et donc
$$\frac{d}{d\lambda}\,\mathrm{tr}\;{}^{\mathrm{N}}\hat{\sigma}_{(r,r)} = \frac{{}^{\beta}d}{d}\,\mathrm{tr}\,(\Delta_{\mathrm{N}}^{-1})\mathrm{P}_r'\mathrm{P}_r)$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz :

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\sum_{i,j} |\,{}^{\mathrm{N}}\hat{\sigma}_{(i,r)(j,s)}\,| \right) \leq {}^{\beta}d\; [\mathrm{tr}\,(\Delta_{\mathrm{N}}^{-1}\mathrm{P}_r'\mathrm{P}_r)\,\mathrm{tr}\,(\Delta_{\mathrm{N}}^{-1}\mathrm{P}_s'\mathrm{P}_s)]^{1/2}$$

La formule de trace permet de calculer explicitement le coefficient β_d. En effet, tous les calculs effectués sont valables en remplaçant dans l'opérateur de Schrödinger la suite A_n par une suite de matrices symétriques quelconques.

En choisissant le cas particulier $r=N=0$ et $A_0=0$, on trouve que $\Delta_0=(1+\lambda^2)I$ et par conséquent $\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}} \operatorname{tr}(\Delta_0^{-1})d\lambda = \Pi$ or puisque ${}^N\hat{\varnothing}_{(0,0)}$ est une matrice dont les termes diagonaux sont des probabilités, on a $\frac{1}{d}\int \frac{d}{d\lambda} \operatorname{tr} {}^N\hat{\varnothing}_{(0,0)} d\lambda = 1$ et par conséquent $\frac{\beta_d}{d} = \frac{1}{\Pi}$ d'où les formules finales

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{d\lambda} \operatorname{tr} {}^N\hat{\varnothing}_{(r,k)} = \frac{1}{\Pi} \operatorname{tr}(\Delta_N^{-1} P_r' P_r) \\ &\frac{d}{d\lambda} \sum_{i,j} |{}^N\hat{\varnothing}_{(i,r)(j,s)}| \leq \frac{d}{\Pi} [\operatorname{tr}(\Delta_N^{-1} P_r' P_r) \operatorname{tr}(\Delta_N^{-1} P_s' P_s)]^{1/2} \end{aligned}}$$

RÉFÉRENCES

[1] J. Lacroix, Singularité du Spectre de l'opérateur de Schrödinger aléatoire dans un ruban ou un demi-ruban, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Sect. A; t. **XXXVIII**, n° 4, 1983.

[2] J. Lacroix, Problèmes probabilistes liés à l'étude des opérateurs aux différences aléatoires, *Annales de l'Institut Élie Cartan*, Nancy, n° 7.

[3] H. Furstenberg and I. Izkoni, Spherical functions and integrals geometry, Israël, *J. Math.*, t. **10**, 1971.

[4] Symetric Spaces « G/K », *Pure and applied Mathematics Series*, t. **8**, 1972.

[5] Hua, Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains, *A. M. S. Providence Transl. of Math. Monographs*, t. **6**.

[6] Atkinson, *Discrete and continuous boundary problems*, N. Y. Academic Press, 1964.

[7] Kunz and Souillard, Sur le spectre des opérateurs aux différences finies aléatoires, *Commun. Math. Phys.*, t. **78**, 1980, p. 201-246.

[8] Gold'sheid, Molchanov, Pastur, A pure point spectrum of the stochastic one dimensional Schrödinger operator, *Funct. Anal. Appl.*, t. **11**, 1977.

[9] Kato, *Perturbation theory for liear operators*, Springer, 1966.

[10] Tutubalin, On limit theorems for the product of random matrices, *Theory of Proba. Applic.*, t. **10**, 1965.

[11] Gold'sheid, The structure of the Schrödinger random difference operator, *Soviet Math. Dokl.*, t. **22**, n° 3, 1980.

(Manuscrit reçu le 18 janvier 1983)