ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

M. DE WILDE
P. LECOMTE
S. GUTT

À propos des deuxième et troisième espaces de cohomologie de l'algèbre de Lie de Poisson d'une variété symplectique

Annales de l'I. H. P., section A, tome 40, nº 1 (1984), p. 77-83
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1984__40_1_77_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 40, n° 1, 1984, p. 77-83. *Physique théorique*

A propos des deuxième et troisième espaces de cohomologie de l'algèbre de Lie de Poisson d'une variété symplectique

par

M. DE WILDE, P. LECOMTE
Institut de Mathématiques, Université de Liège,
B. 4000 Liège, Belgique.

et

S. GUTT (*)
Département de Mathématiques, Université de Bruxelles,
B. 1050 Bruxelles, Belgique.

RÉSUMÉ. — On simplifie et on précise le calcul des deuxième et troisième espaces de cohomologie de Chevalley de la représentation adjointe de l'algèbre de Poisson d'une variété symplectique. Ce sont les espaces qui contiennent les obstructions à l'équivalence et à l'existence des déformations formelles du produit et du crochet de Poisson.

ABSTRACT. — The paper provides a simplified and improved computation of the second and third cohomology spaces of the adjoint representation of the Poisson Lie algebra of a symplectic manifold. These spaces include the obstructions to the existence and to the equivalence of the formal deformations of the product and of the Poisson bracket.

L'étude des déformations de l'algèbre de Lie de Poisson d'une variété symplectique a mis en évidence l'intérêt des 2^e et 3^e espaces de la cohomologie de Chevalley associée à la représentation adjointe de cette algèbre. Dans le cas de la cohomologie différentiable (c'est-à-dire dans le cas où les cochaînes considérées sont des opérateurs différentiels ou locaux), ces espaces de cohomologie ont été déterminés dans [*2*]. L'objet de cette note est de simplifier l'étude de [*2*] et d'apporter une correction à la description du troisième espace de cohomologie.

(*) Chargé de Recherches au Fonds National de la Recherche Scientifique.

1. DÉFINITIONS

Nous suivons essentiellement la terminologie de [*1*]. Nous désignons par (W, F) une variété symplectique connexe, paracompacte et de dimension $2n > 2$ et par N l'algèbre de Lie formée de l'espace des fonctions réelles de classe C_∞ sur W, muni du crochet de Poisson.

Une cochaîne locale $(u_0, \ldots, u_{p-1}) \to C(u_0, \ldots, u_{p-1})$ s'exprime, dans un domaine de carte relativement compact Ω quelconque, comme un opérateur différentiel multilinéaire et antisymétrique en les u_i :

$$C(u_0, \ldots, u_{p-1}) = \sum_{\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}} C_{\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}}(x) D_x^{\alpha_0} u_0 \ldots D_x^{\alpha_{p-1}} u_{p-1}$$

où α_i est un multi-indice et $D_x^{\alpha_i} = D_{x^1}^{\alpha_i^1} \ldots D_{x^{2n}}^{\alpha_i^{2n}}$. L'*ordre* (resp. l'*ordre total*) du terme

$$C_{\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}}(x) D_x^{\alpha_0} u_0 \ldots D_x^{\alpha_{p-1}} u_{p-1}$$

est $\vec{r} = (|\alpha_0|, \ldots, |\alpha_{p-1}|)$ (resp. $|\vec{r}| = |\alpha_0| + \ldots + |\alpha_{p-1}|$).

L'ordre total de C dans Ω est le maximum des s tels que les termes d'ordre total s ne soient pas identiquement nuls dans Ω ; son *ordre* est le maximum dans l'ordre lexicographique des $\vec{r}$ d'ordre total maximum tels que les termes d'ordre $\vec{r}$ ne soient pas identiquement nuls.

Si C est d'ordre total s (resp. d'ordre $\vec{s}$) dans Ω, ses termes d'ordre total s (resp. d'ordre $\vec{s}$) permettent de définir le *symbole total* σ_C (resp. le *symbole principal* $\bar{\sigma}_C$) de C, qui sont les polynômes en $\xi_0, \ldots, \xi_{p-1} \in T_x^*W$ obtenus en substituant dans les termes considérés de C, $\xi_i^{\alpha_i}$ à $D_x^{\alpha_i} u_i$ pour tout i.

On désigne par μ l'isomorphisme $\mu : TW \to T^*W : X \to -i(X)F$. Il s'étend naturellement aux fibrés de tenseurs contravariants et covariants. On pose $\Lambda = \mu^{-1}F$. C'est une forme bilinéaire anti-symétrique et non dégénérée sur T_x^*W pour tout $x \in W$. On sait [*4*] que les polynômes en $\xi_0, \ldots, \xi_{p-1} \in T_x^*W$, invariants par l'action naturelle du groupe symplectique $Sp(T_x^*W, \Lambda)$, sont de la forme

$$Q(\Lambda(\xi_i, \xi_j) : i < j) \tag{1}$$

où Q est un polynôme arbitraire. Notons $\mathscr{P}$ l'ensemble des polynômes de la forme (1), de degré > 2 en chaque ξ_i, $\mathscr{C}$ l'ensemble des polynômes (1) de degré 2 en chaque ξ_i et Q l'ensemble des $q(x, \xi_i, \ldots)$, polynômes en les ξ_i de degré $\leqslant 1$ en chaque ξ_i et de classe C_∞ en x.

Nous noterons un peu abusivement $\mathscr{P} \otimes \mathscr{C} \otimes \mathscr{Q}$ l'enveloppe linéaire des polynômes

$$(\xi_0, \ldots, \xi_{p-1}) \to a(\xi_{\nu_0}, \ldots, \xi_{\nu_i}) b(\xi_{\nu_{i+1}}, \ldots, \xi_{\nu_j}) c(\xi_{\nu_{j+1}}, \ldots, \xi_{\nu_{p-1}})$$

où $a \in \mathscr{P}$, $b \in \mathscr{C}$, $c \in \mathscr{Q}$ et $(\nu_0, \ldots, \nu_{p-1})$ est une permutation de $(0, \ldots, p-1)$.

On établit dans [*1*] la

PROPOSITION 1.1. — *Si* C *est un cocycle local, il s'écrit* $C = C' + \partial E$ *où* E *est une cochaîne locale et* C′ *un cocycle d'ordre au plus égal à celui de* C, *dont le symbole total appartient à* $\mathcal{P} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{Q}$.

Le symbole de ∂C s'obtient à partir de celui de C par la formule suivante (cf. [*1*]) :

$$\sigma_{\partial C}(\xi_0, \ldots, \xi_p) = \sum_{i<j} (-1)^j \Lambda(\xi_i, \xi_j)[\sigma_C(\ldots, \xi_i + \xi_j, \ldots \hat{j} \ldots) - \sigma_C(\ldots \hat{j} \ldots) - \sigma_C(\ldots, \xi_j, \ldots \hat{\imath} \ldots)] \quad (2)$$

On utilisera par ailleurs le lemme élémentaire

LEMME 1.2. — *On a*

$$\{ (\Lambda(\xi_i, \xi_j) : 0 \leqslant i < j \leqslant 3) : \xi_i \in T_x^* W \, (0 \leqslant i \leqslant 3) \} = \mathbb{R}^6 .$$

De là, pour tout polynôme Q,

$$Q(\Lambda(\xi_i, \xi_j) \quad (0 \leqslant i < j \leqslant 3)) \equiv 0 \Rightarrow Q \equiv 0 .$$

La procédure suivie dans [*2*] pour déterminer les espaces de cohomologie $H^2_{\text{diff}}(N)$ et $H^3_{\text{diff}}(N)$ est la suivante. Par une récurrence basée sur l'ordre total et l'ordre lexicographique, on corrige successivement un cocycle en lui soustrayant un cobord et, éventuellement, un multiple d'un cocycle standard, de façon à diminuer son ordre. Après un nombre fini de corrections, on est ramené à un cocycle d'ordre $\leqslant 1$ en chaque argument et on utilise alors la description de la cohomologie 1-différentiable de [*3*].

La proposition 1.1, en fournissant une description assez restrictive du symbole principal, permet de réduire un certain nombre d'étapes de cette démonstration.

2. CALCUL DE $H^2_{\text{diff}}(N)$

Rappelons d'abord un lemme de [*2*].

LEMME 2.1. — *Le symbole principal d'un p-cocycle ne peut être d'ordre* $(r_0, \ldots, r_{p-1})$ *avec* $r_{p-1} > 3$.

Soit alors un cocycle C d'ordre (r_0, r_1). Vu l'antisymétrie de C, on a toujours $r_0 \geqslant r_1$. D'après la proposition 1.1, on peut supposer que $\bar{\sigma}_C(\xi_0, \xi_1)$ est un élément de $\mathcal{P} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{Q}$. Comme tout élément de $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{C}$ est un polynôme à au moins 2 arguments, $\bar{\sigma}_C$ est soit un élément de $\mathcal{P}$ soit un élément de $\mathcal{C}$, soit un élément de $\mathcal{Q}$. Dans ce dernier cas, le cocycle est 1-différentiable.

A. $\bar{\sigma} \in \mathcal{P}$. Par le lemme 2.1, $r_1 = 3$. Il est alors trivial que $r_0 = 3$ et que

$$\bar{\sigma}_C = \theta \Lambda(\xi_0, \xi_1)^3 .$$

On sait (cf. [2]) qu'il existe un cocycle standard S^3_Γ associé à une connexion symplectique Γ (i. e. linéaire, sans torsion et telle que $\nabla F = 0$), ayant les propriétés suivantes : son symbole est $\Lambda(\xi_0, \xi_1)^3$ et sa classe de cohomologie ne dépend pas de Γ. Alors $C - \theta s^3_\Gamma$ est d'ordre $< (3, 3)$.

B. $\bar{\sigma}_C \in \mathscr{C}$. Le seul élément de $\mathscr{C}$ à 2 arguments est $\Lambda(\xi_0, \xi_1)^2$. Comme il est symétrique en ξ_0, ξ_1, ce ne peut être le symbole d'un cocycle. Donc $\bar{\sigma}_C = 0$.

C. $\bar{\sigma}_C \in \mathscr{Q}$. Alors C est 1-différentiable et on conclut comme dans [2].

3. CALCUL DE $H^3_{\text{diff}}(N)$

Soit C un cocycle d'ordre (r_0, r_1, r_2).

Par le lemme 2.1, on peut supposer que $r_2 \leqslant 3$.

On peut supposer que $\bar{\sigma}_C \in \mathscr{P}$. Il est trivial de vérifier que les seuls éléments de $\mathscr{P}$ de l'ordre indiqué sont les multiples de

$$\alpha(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = \Lambda(\xi_0, \xi_1)^a \Lambda(\xi_0, \xi_2)^3 \qquad (a \geqslant 3)$$

ou de

$$\beta(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = \Lambda(\xi_0, \xi_1)^a \Lambda(\xi_0, \xi_2)^2 \Lambda(\xi_1, \xi_2) \qquad (a \geqslant 2)$$

(α et β ne sont pas de même ordre !).

A. *a*) $\bar{\sigma}_c = \theta\alpha$.

Par raison de symétrie en $\xi_1, \xi_2, a \neq 3$.

Cherchons le terme de $\sigma_{\partial C}$ d'ordre $(a+3, a-1, 3, 3)$. Par (2), il est formé de

$$\frac{1}{2}\Lambda(\xi_1, \xi_2)(\xi_2 D_{\xi_1})^2 \bar{\sigma}_C(\xi_0, \xi_1, \xi_3) - \frac{1}{2}\Lambda(\xi_1, \xi_3)(\xi_3 D_{\xi_1})^2 \bar{\sigma}_C(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$$
$$- \frac{1}{2}\Lambda(\xi_2, \xi_3)(\xi_3 D_{\xi_2})^2 D(\xi_0, \xi_1, \xi_2), \qquad (3)$$

où $\xi' D_\xi$ est la dérivée en ξ dans la direction ξ' et où D est le terme de σ_C d'ordre $(a+3, a-1, 4)$ (élément de $\mathscr{P}$ par la proposition 1.1.). Le premier terme vaut encore

$$\theta \frac{a(a-1)}{2} \Lambda(\xi_1, \xi_2)\Lambda(\xi_0, \xi_1)^{a-2}\Lambda(\xi_0, \xi_2)^2\Lambda(\xi_0, \xi_3)^3 .$$

C'est le seul monôme de ce type dans (3). Comme $\sigma_{\partial C} \equiv 0$, par le lemme 1.2, on a $\theta = 0$, donc $\bar{\sigma}_C = 0$.

A. *b*) $\bar{\sigma}_C = \theta\beta$.

On note que, si a est impair, $\Lambda(\xi_0, \xi_1)^{a+2}$ est antisymétrique et on peut former une cochaîne E de symbole $\Lambda(\xi_0, \xi_1)^{a+2}$. On a alors $\bar{\sigma}_{\partial E} = 0$ et le premier terme non nul de $\sigma_{\partial E}$, d'ordre $(a+2, a+1, 3)$, est précisément $\frac{1}{2}\beta$. Donc, si a est impair, on peut, en corrigeant C par un cobord, faire baisser son ordre.

Prouvons que a est impair. On cherche pour cela le terme d'ordre $(a+1, a+1, 3, 3)$ de $\sigma_{\partial C}$. Il est formé de

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\Lambda(\xi_0, \xi_2)(\xi_2 D_{\xi_0})^2\bar{\sigma}_C(\xi_0, \xi_1, \xi_3) - \frac{1}{2}\Lambda(\xi_0, \xi_3)(\xi_3 D_{\xi_0})^2\bar{\sigma}_C(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \\ &\quad + \frac{1}{2}\Lambda(\xi_1, \xi_2)(\xi_2 D_{\xi_1})^2 D_1(\xi_0, \xi_1, \xi_3) - \frac{1}{2}\Lambda\xi_1, \xi_3)(\xi_3 D_{\xi_1})^2 D_1(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \\ &\quad - \frac{1}{2}\Lambda(\xi_2, \xi_3)(\xi_3 D_{\xi_2})^2 D_2(\xi_0, \xi_1, \xi_2), \end{aligned} \tag{4}$$

où D_1 est le terme de σ_C d'ordre $(a+1, a+2, 3)$ donc, par antisymétrie,

$$D_1(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = -\bar{\sigma}_C(\xi_1, \xi_0, \xi_2),$$

et D_2 le terme d'ordre $(a+1, a+1, 4)$.

Le coefficient de

$$\Lambda(\xi_0, \xi_1)^{a-2}\Lambda(\xi_0, \xi_2)\Lambda(\xi_0, \xi_3)^2\Lambda(\xi_1, \xi_2)^2\Lambda(\xi_1, \xi_3)$$

dans le développement de (4) est

$$\frac{1}{2}a(a-1)[1+(-1)^a].$$

Par le lemme 1.2, il est nul et a est impair.

B. $r_0 \geqslant r_1 \geqslant r_2 = 2$.

Le seul élément de $\mathscr{P} \otimes \mathscr{C}$ de l'ordre considéré est

$$\gamma(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = \Lambda(\xi_0, \xi_1)\Lambda(\xi_0, \xi_2)\Lambda(\xi_1, \xi_2).$$

d'ordre $(2, 2, 2)$.

Soit ∇ la dérivée covariante associée à une connexion sans torsion Γ. On appelle A^∇ l'opérateur différentiel $A^\nabla : x \to [Y \to \nabla_Y X]$ de $\mathscr{H}(W)$ dans les champs d'endomorphismes de $T(W)$. Soit T la 3-cochaîne

$$T(u, v, w) = \frac{1}{6}\underset{u,v,w}{\mathrm{S}}\operatorname{tr} A^\nabla(X_u)\{[A^\nabla(X_v), A^\nabla(X_w)] + 3R(X_v, X_w)\}$$

où S est la somme sur les permutations circulaires de u, v, w et R la courbure de Γ.

Dans une carte naturelle, son développement explicite est

$$\mathrm{T}(u_1, u_2, u_3) = \Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2k_1}\Lambda^{j_2k_2}\nabla_{i_1i_2}u_1\,\nabla_{j,j_2}u_2\nabla_{k,k_2}u_3 + \frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_{\ 1\ \ 2\ \ 3}\Lambda^{kl}\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}\mathrm{R}^s_{i_2i_1l}\nabla_k u_{\lambda_1}\nabla_s u_{\lambda_2}\nabla_{j,j_2}u_{\lambda_3}$$

avec $\mathrm{R}^a_{bcd}e_a = \mathrm{R}(e_c, e_d)e_b$.

On vérifie sans peine que, d'une part, le symbole principal de T est γ et que, d'autre part,

$$\partial\mathrm{T}(u_0, \ldots, u_3) = \tau(\mathrm{X}_{u_0}, \ldots, \mathrm{X}_{u_3}),$$

où τ est la 4-forme fermée

$$\tau(\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_3) = \frac{1}{8}\sum_{\nu} \varepsilon_\nu \operatorname{tr} \mathrm{R}(\mathrm{X}_{\nu_0}, \mathrm{X}_{\nu_1})\mathrm{R}(\mathrm{X}_{\nu_2}, \mathrm{X}_{\nu_3}).$$

Il résulte de ce qui précède qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{C} - \lambda\mathrm{T}$ soit d'ordre $< (2, 2, 2)$. Le bord de $\mathrm{C} - \lambda\mathrm{T}$ n'est plus nul, mais il est 1-différentiable.

C. $r_0 \geqslant r_1 \geqslant 1 \geqslant r_2 \qquad (r_0 > 1)$.

On voit comme dans le cas de $\mathrm{H}^2_{\mathrm{diff}}(\mathrm{N})$ que le symbole de C est soit nul, soit de la forme

$$\Lambda(\xi_0, \xi_1)^3 \cdot v(\xi_2),$$

avec v d'ordre $\leqslant 1$ et on établit comme dans [2] que le symbole de C coincide avec celui d'un cocycle de la forme

$$\mathrm{S}^3_\Gamma \wedge \theta_\mathrm{X}$$

où $\qquad \theta_\mathrm{X} : u \to \mathrm{L}_\mathrm{X}u + k_\mathrm{X}u, \quad \mathrm{X} \in \mathrm{L}^c, \quad$ i. e. $\quad (\mathrm{L}_\mathrm{X} + k_\mathrm{X})\mathrm{F} = 0$.

D. Il résulte de ce qui précède que tout cocycle C s'écrit sous la forme

$$\mathrm{C} = \mathrm{S}^3_\Gamma \wedge \theta_\mathrm{X} + \lambda\mathrm{T} + \mathrm{C}' + \partial\mathrm{E}, \tag{5}$$

où C' est 1-différentiable.

On sait d'après [3] que toute cochaîne 1-différentiable C' s'écrit de façon unique

$$\mathrm{C}' = \mathrm{C}_0 + 1\!\!1 \wedge \mathrm{C}_1,$$

où C_0 et C_1 sont 1-différentiables et nuls sur les constantes. Ces C_i s'écrivent alors $\omega_i(\mathrm{X}_{u_0}, \ldots)$, où ω_i est une forme sur W. Par la correspondance ainsi établie entre les cochaînes 1-différentiables et les couples de formes (ω_0, ω_1), l'opérateur ∂ correspond à

$$\delta(\omega_0, \omega_1) = (d\omega_0 + \mathrm{F} \wedge \omega_1, - d\omega_1).$$

Revenons à présent à (5); C est un cocycle si et seulement si $\mathrm{S}^3_\Gamma \wedge \theta_\mathrm{X}$ est un cocycle et

$$(d\omega_0 + \mathrm{F} \wedge \omega_1 + \lambda\tau, - d\omega_1) = 0. \tag{6}$$

C'est un cobord si et seulement si $S^3_\Gamma \wedge \theta_X$ est un cobord, $\lambda = 0$ et il existe ω'_1, ω'_2 tels que

$$\omega_0 = d\omega'_0 + F \wedge \omega'_1, \qquad \omega_1 = -\, d\omega'_1 .$$

Supposons d'abord que τ est de la forme $d\omega_0 + F \wedge \omega_1$, avec $d\omega_1 = 0$ (soit $[\tau]$ appartient à l'image de l'opérateur $F_\# : [\omega] \to [F \wedge \omega]$ induit par F en cohomologie de de Rham). Dans ce cas, si C_{ω_0,ω_1} est la cochaîne 1-différentiable associée au couple (ω_0, ω_1), $T' = T - C_{\omega_0,\omega_1}$ est un cocycle et tout cocycle s'écrit

$$C = S^3_\Gamma \wedge \theta_X + \lambda T' + C'' + \partial E \qquad (C''\text{ 1-différentiable}),$$

avec, cette fois

$$\partial C = 0 \Leftrightarrow \partial C'' = 0$$

et C est un cobord si et seulement si θ_X est un cobord, C'' est un cobord et $\lambda = 0$.

Supposons à présent que $[\tau] \notin im\, F_\#$. Alors (6) n'est vérifié que pour $\lambda = 0$.

La présence de la cochaîne T, qui a été omise dans [*2*], modifie légèrement les conclusions du calcul de $H^3_{\text{diff}}(N)$. En tenant compte du lemme 12 de [*2*], on a

PROPOSITION. — *i) Si* $[\tau] \in im\, F_\#$, *tout 3-cocycle* C *s'écrit*

$$C = S^3_\Gamma \wedge \theta_X + \lambda T' + \partial E + C'$$

où $X \in L^c$, E *est une 2-cochaîne locale,* C' *un 3-cocycle 1-différentiable. Le nombre* λ, *la classe de* X *dans* L^c/L^* *et celle de* C' *dans* $H^3_{1-\text{diff}}(N)$ *sont univoquement déterminés par* C. *On a donc*

$$H^3_{\text{diff}}(N) \cong L^c/L^* \oplus \mathbb{R} \oplus H^3_{1-\text{diff}}(N) .$$

ii) Si $[\tau] \notin im\, F_\#$, *les conclusions sont les mêmes qu'en (i) sauf que* $\lambda = 0$ *et donc*

$$H^3_{\text{diff}}(N) \cong L^c/L^* \oplus H^3_{1-\text{diff}}(N) .$$

RÉFÉRENCES

[*1*] M. DE WILDE, P. LECOMTE, Cohomologie 3-différentiable de l'algèbre de Lie de Poisson d'une variété symplectique *(à paraître)*.

[*2*] S. GUTT, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **33**, 1980, p. 1-31.

[*3*] A. LICHNEROWICZ, *J. Math. Pures and Appl.*, t. **53**, 1974, p. 459-484.

[*4*] C. DE CONCINI, C. PROCESI, *Adv. in Math.*, t. **21**, 1976, p. 330.

(Manuscrit reçu le 3 janvier 1983)