ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

J. LACROIX

Singularité du spectre de l'opérateur de Schrödinger aléatoire dans un ruban ou un demi-ruban

Annales de l'I. H. P., section A, tome 38, nº 4 (1983), p. 385-399

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1983__38_4_385_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XXXVIII, n° 4, 1983, p. 385-399. *Physique théorique.*

Singularité du spectre de l'opérateur de Schrödinger aléatoire dans un ruban ou un demi-ruban

par

J. LACROIX
UER Math. Informatique, Campus de Beaulieu,
35042 Rennes Cedex, France.

RÉSUMÉ. — Soit H l'opérateur de Schrödinger aux différences finies avec potentiel aléatoire dans un ruban de largeur d. Goldseid a annoncé dans [*7*] que la mesure spectrale de H était presque sûrement ponctuelle, mais ce résultat n'a été clairement établi que dans le cas $d = 1$. On démontre ici que la mesure spectrale de H est presque sûrement orthogonale à toute mesure fixée sur $\mathbb{R}$; en particulier H n'a presque sûrement pas de spectre absolument continu.

Pour ceci on adapte une méthode due à Pastur [*6*] dans le cas $d = 1$ et qui consiste à comparer deux types de croissance presque sûre des images d'un vecteur sous l'action d'une marche aléatoire à valeurs dans le groupe symplectique.

ABSTRACT. — Let H be the finite difference Schrödinger operator with random potential in a strip of width d. Goldseid has announced in [*7*] that H has almost surely pure point spectrum, but this result has been definitely established only for $d = 1$. Here we prove that the spectral measure of H is almost surely orthogonal to any fixed measure on $\mathbb{R}$. In particular H has almost surely no absolutely continuous spectrum. For that purpose, we adapt a method of Pastur [*6*] for the case $d = 1$, which consists in comparing two types of almost sure increase of the images of a vector under the action of a random walk with values in the symplectic group.

I

ÉTUDE DE L'OPÉRATEUR NON ALÉATOIRE

Si d est un entier supérieur ou égal à 1, on désigne par $\mathcal{H}$ (resp. $\tilde{\mathcal{H}}$) l'espace de Hilbert $l^2([1, \ldots, d] \times \mathbb{Z}$ [resp. $(l^2(1, \ldots, d) \times \mathbb{N})$] et on associe à une suite réelle $a_{m,n}$ $m \in [1, \ldots, d]$, $n \in \mathbb{Z}$ (resp. $n \in \mathbb{N}$) l'opérateur H (resp. $\tilde{\mathrm{H}}$) défini sur une suite $u_{m,n} \in \mathcal{H}$ (resp. $\tilde{\mathcal{H}}$) par :

$$(\mathrm{H}u)_{m,n} = -(u_{m+1,n} + u_{m-1,n} + u_{m,n+1} + u_{m,n-1}) + a_{m,n}u_{m,n}$$

avec
$$u_{0,n} = u_{d+1,n} = 0$$

La formule est la même pour $\tilde{\mathrm{H}}$ en ajoutant la condition au bord $u_{m,-1} = 0$.

Il sera plus commode de considérer l'action de H ou $\tilde{\mathrm{H}}$ sur une suite V_n de vecteurs de $\mathbb{C}^d$ par les formules

$$(\mathrm{HV})_n = -\mathrm{V}_{n-1} - \mathrm{V}_{n+1} + \mathrm{A}_n\mathrm{V}_n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$(\tilde{\mathrm{H}}\mathrm{V})_n = -\mathrm{V}_{n-1} - \mathrm{V}_{n+1} + \mathrm{A}_n\mathrm{V}_n, \quad \mathrm{V}_{-1} = 0, \qquad n \in \mathbb{N}$$

où A_n est une matrice carrée d'ordre d de terme général

$$\mathrm{A}_{n;i;j} \text{ vérifiant } \mathrm{A}_{n,i,i} = a_{i,n},$$
$$\mathrm{A}_{n\,i,j} = -1 \text{ si } |i-j| = 1$$
$$\mathrm{A}_{n,i,j} = 0 \quad \text{si } |i-j| > 1$$

On considérera aussi pour $\lambda \in \mathbb{C}$, les équations :

$$(\mathrm{E}_\lambda) \quad \mathrm{HV} = \lambda\mathrm{V}, \qquad \mathrm{V} \in (\mathbb{C}^d)^{\mathbb{Z}}$$
$$(\tilde{\mathrm{E}}_\lambda) \quad \tilde{\mathrm{H}}\mathrm{V} = \lambda\mathrm{V}, \qquad \mathrm{V} \in (\mathbb{C}^d)^{\mathbb{N}}$$

et on désigne par $\mathrm{P}_n(\lambda)$ et $\mathrm{Q}_n(\lambda)$ les matrices carrées d'ordre d, solutions de l'équation de récurrence du second ordre :

$$-\mathrm{M}_{n-1} - \mathrm{M}_{n+1} + (\mathrm{A}_n - \lambda\mathrm{I})\mathrm{M}_n = 0$$

avec les conditions initiales $\mathrm{P}_0 = \mathrm{Q}_{-1} = \mathrm{I}$, $\mathrm{P}_{-1} = \mathrm{Q}_0 = 0$.

Alors toute solution de (E_λ) s'écrit

$$\mathrm{V}_n = \mathrm{P}_n\mathrm{V}_0 + \mathrm{Q}_n\mathrm{V}_{-1} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

et toute solution de $(\tilde{\mathrm{E}}_\lambda)$ s'écrit

$$\mathrm{V}_n = \mathrm{P}_n\mathrm{V}_0 \qquad n \in \mathbb{N}.$$

1) Approximation des mesures spectrales de H et $\tilde{\mathrm{H}}$.

On désigne par ${}^{\mathrm{N}}\mathrm{H}$ (resp. ${}^{\mathrm{N}}\tilde{\mathrm{H}}$) les restrictions des opérateurs aux « boîtes » $[1, \ldots, d] \times [-\mathrm{N}, \ldots, \mathrm{N}]$, (resp. $[1, \ldots, d] \times [0, \ldots, \mathrm{N}]$). Ces opérateurs sont autoadjoints et l'on constate que :

* λ est valeur propre de ${}^{\mathrm{N}}\mathrm{H}$ si et seulement si le déterminant de la matrice d'ordre $2d\begin{pmatrix} P_{-N-1} & Q_{-N-1} \\ P_{N+1} & Q_{N+1} \end{pmatrix}$ est nul, le sous-espace propre correspondant étant constitué des vecteurs $V_n(n \in [-N, \ldots, N])$ de la forme

$$V_n = P_n V_0 + Q_n V_{-1}$$

où $\begin{pmatrix} V_0 \\ V_{-1} \end{pmatrix}$ appartient au noyau de la matrice précédente.

* λ est valeur propre de ${}^{\mathrm{N}}\tilde{\mathrm{H}}$ si et seulement si det $[P_{N+1}(\lambda)] = 0$, le sous-espace propre correspondant étant constitué des vecteurs V_n ($n \in [0, \ldots, N]$) de la forme $V_n = P_n V_0$ où V_0 appartient au noyau de P_{N+1}.

Si u et v sont des éléments de $\mathscr{H}$ (resp. $\tilde{\mathscr{H}}$) on note par $\sigma_{u,v}$ (resp. $\tilde{\sigma}_{u,v}$) les mesures spectrales associées à la résolution de l'identité de H (resp. $\tilde{\mathrm{H}}$).

Dans le cas où $u = e_{i,r}$ $v = e_{j,s}$ ($e_{i,n}$ étant la base usuelle de $\mathscr{H}$) on écrira $\sigma_{u,v} = \sigma_{(i,r),(j,s)}$ et on note par $\boldsymbol{\sigma}_{(r,s)}$ la matrice carrée d'ordre d dont $\sigma_{(i,r),(j,s)}$ est le terme d'ordre (i, j).

En utilisant la convergence faible de la résolvante de ${}^{\mathrm{N}}\mathrm{H}$ (resp. ${}^{\mathrm{N}}\tilde{\mathrm{H}}$) vers celle de H (resp. $\tilde{\mathrm{H}}$) on obtient la convergence étroite des mesures spectrales. On remarque que la matrice $\boldsymbol{\sigma}_{r,s}$ (resp. $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{r,s}$) est symétrique et que l'on a les relations :

$$\int d\boldsymbol{\sigma}_{(i,r)(j,s)} = \int d\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{(i,r)(j,s)} = \delta_j^i \delta_s^r$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{r,s} = (P_r, Q_r)\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{0,0} & \boldsymbol{\sigma}_{-1,0} \\ \boldsymbol{\sigma}_{0,-1} & \boldsymbol{\sigma}_{-1,-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_s^* \\ Q_s^* \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{r,s} = P_r \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{0,0} P_s^* .$$

Les deux dernières relations sont tout d'abord établies dans une « boîte » en écrivant explicitement les mesures spectrales, puis en passant à la limite, on a les mêmes relations dans le ruban ou le demi-ruban en utilisant la convergence étroite des mesures spectrales et le fait que P_n et Q_n sont à coefficients continus (en fait polynomiaux).

A partir de maintenant on notera $\boldsymbol{\sigma}$ la matrice d'ordre $2d\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{0,0} & \boldsymbol{\sigma}_{-1,0} \\ \boldsymbol{\sigma}_{0,-1} & \boldsymbol{\sigma}_{-1,-1} \end{pmatrix}$ $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ la matrice d'ordre $d\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{0,0}$, σ et $\tilde{\sigma}$ leurs traces respectives.

2) **Multiplicité des spectres de** H et $\tilde{\mathrm{H}}$.

On constate que la famille $\{ \mathrm{H}^n e_{(i,r)} \}$ $n \in \mathbb{N}$, $i \in [1, \ldots, d]$, $r \in [-1, 0]$ est totale dans $\mathscr{H}$ (respect. que la famille $\{ \tilde{\mathrm{H}}^n e_{(i,0)} \}$ $n \in \mathbb{N}$, $i \in [1, \ldots, d]$ est totale dans $\tilde{\mathscr{H}}$).

Par conséquent toutes les mesures $\sigma_{u,v}$ (resp. $\tilde{\sigma}_{u,v}$) sont absolument continues par rapport à σ (resp. $\tilde{\sigma}$). Dans la suite on désignera par S (resp. $\tilde{S}$) une matrice de densités de $\boldsymbol{\sigma}$ par rapport à σ (resp. de $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ par rapport à $\tilde{\sigma}$).

S est pour σ-presque tout λ une matrice symétrique positive d'ordre $2d$, de trace égale à 1 (resp. $\tilde{S}$ est pour $\tilde{\sigma}$ presque tout λ une matrice symétrique positive d'ordre d, de trace égale à 1).

3) Solutions de (E_λ) et $(\tilde{E}_\lambda)$ à « croissance lente ».

PROPOSITION 1. — *Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe un vecteur $\begin{pmatrix} V_0 \\ V_{-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2d}$ de norme 1 (resp. un vecteur V_0 de $\mathbb{R}^d$ de norme 1) et une fonction $\psi(\lambda)$ σ presque sûrement finie (resp. une fonction $\tilde{\psi}(\lambda)$ $\tilde{\sigma}$ presque sûrement finie) vérifiant :*

$$\| P_n V_0 + Q_n V_{-1} \|^2 \leq n^2 \psi (n \in \mathbb{Z} - \{0\})$$

$$(\text{resp. } \| P_n \tilde{V}_0 \|^2 \leq n^2 \tilde{\psi} (n \in \mathbb{N} - \{0\})).$$

Preuve. — Cette proposition pourrait se déduire d'un résultat général sur les fonctions propres généralisées d'un opérateur de Carleman. Mais dans notre cas, elle peut se démontrer très simplement de la façon suivante : la matrice S est pour σ presque tout λ diagonalisable par une matrice orthogonale K, les valeurs propres h_i vérifiant $h_1 \geq \ldots \geq h_{2d} \geq 0$, on note H la matrice diagonale associée

$$\boldsymbol{\sigma}_{n,n} = (P_n Q_n) S \begin{pmatrix} P_n^* \\ Q_n^* \end{pmatrix} \sigma = (P_n, Q_n) K H K^* \begin{pmatrix} P_n^* \\ Q_n^* \end{pmatrix} \sigma$$

et en notant C_i les vecteurs colonnes de K :

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}_{n,n}) = \sum_{i=1}^{2d} h_i \| (P_n, Q_n) C_i \|^2 \sigma$$

puisque $\sum_{i=1}^{2d} h_i = 1$ on a $h_1 \geq \frac{1}{2d}$ et en posant $C_1 = \begin{pmatrix} V_0 \\ V_{-1} \end{pmatrix}$ on obtient :

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}_{n,n}) \geq \frac{1}{2d} \| P_n V_0 + Q_n V_{-1} \|^2 \sigma .$$

On pose $\psi = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \| P_n V_0 + Q_n V_{-1} \|^2$ d'où

$$\int \psi d\sigma \leq 2d \sum_{n \neq 0} \int \frac{\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}_{n,n}}{n^2} = (2d)^2 \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

ψ est donc σ presque sûrement finie puisque σ intégrable.

La preuve est la même pour l'opérateur dans le demi ruban.

Remarque. — La matrice S ayant toutes chances d'être très dégénérée (elle est de rang 1 dans le cas d'une boîte et lorsque les valeurs propres sont simples !) on ne peut prouver (contrairement à une affirmation malencontreuse de [*6*]) que toutes les solutions de E_λ sont à « croissance lente ». (Sauf bien sûr dans le cas du demi-ruban pour $d = 1$). Le vecteur de départ de la solution construite dans la proposition 1 dépend donc de la suite $a_{m,n}$. Il s'en suit que dans le cas aléatoire, le théorème de Furstenberg assurant la croissance exponentielle presque sûre d'une solution de E_λ (*avec vecteur de départ fixé*) ne permet pas de conclure comme dans [*1*] et l'on doit utiliser un résultat plus fin dû à Osseledec [*4*].

II

L'OPÉRATEUR DE SCHRÖDINGER ALÉATOIRE

On suppose maintenant que la suite $a_{m,n}$ est une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes de loi μ.

On note par p_λ la loi image de $\bigotimes_1^d \mu$ sur $\mathrm{Sl}(2d, \mathbb{R})$ par l'application

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \xrightarrow{\tau_\lambda} \begin{pmatrix} A - \lambda I & -I \\ & \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & x_d \end{pmatrix}$$

On désignera aussi par g_n^λ la matrice de $\mathrm{Sl}(2d, \mathbb{R})$

$$g_n^\lambda = \begin{pmatrix} A_n - \lambda I & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{où } A_n \text{ est la matrice définie en I}.$$

On remarque que g_n^λ appartient en fait au groupe $S_p(d, \mathbb{R})$ et on pose

$$\begin{aligned} S_n^\lambda &= g_n^\lambda \ldots g_1^\lambda g_0^\lambda & \text{si} \quad n \geq 0 \\ S_n^\lambda &= (g_n^\lambda)^{-1} \ldots (g_{-1}^\lambda)^{-1} & \text{si} \quad n \leq -1 \end{aligned}$$

on a alors les relations :

$$S_n^\lambda = \begin{pmatrix} P_{n+1} & Q_{n+1} \\ P_n & Q_n \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad n \geq 0, \qquad S_n^\lambda = \begin{pmatrix} P_n & Q_n \\ P_{n-1} & Q_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad n \leq -1$$

Par conséquent si V est solution de (E_λ) on a :

$$\begin{pmatrix} V_{n+1} \\ V_n \end{pmatrix} = S_n^\lambda \begin{pmatrix} V_0 \\ V_{-1} \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad n \geq 0, \qquad \begin{pmatrix} V_n \\ V_{n-1} \end{pmatrix} = S_n^\lambda \begin{pmatrix} V_0 \\ V_{-1} \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad n \leq -1$$

et si V est solution de $(\tilde{\mathrm{E}}_\lambda)$ on a :

$$\begin{pmatrix} V_{n+1} \\ V_n \end{pmatrix} = S_n^\lambda \begin{pmatrix} V_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1) Exposants de Liapunoff d'une marche aléatoire à valeurs dans $\mathrm{S}_p(d, \mathbb{R})$.

Soit p une probabilité sur $\mathrm{S}_p(d, \mathbb{R})$ et (g_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi p vérifiant

$$\int \operatorname{Log} \| g \| \, dp(g) < +\infty$$

On a alors le théorème ergodique d'Osseledec [4] :

Il existe des coefficients $\gamma_{2d} \leq \gamma_{2d-1} \leq \ldots \leq \gamma_1$ (avec $\gamma_j = -\gamma_{2d-j+1}$) et pour presque tout ω une suite $\mathrm{E}_j(\omega)$ de sous-espaces de $\mathbb{R}^{2d}$ vérifiant :

a) $\{0\} = \mathrm{E}_{2d+1}(\omega) \subset \mathrm{E}_{2d}(\omega) \subset \ldots \subset \mathrm{E}_1(\omega) = \mathbb{R}^{2d}$

b) E_{j+1} est distinct de E_j si et seulement si $\gamma_j \neq \gamma_{j+1}$

c) Si $\mathrm{V} \in \mathrm{E}_j(\omega) - \mathrm{E}_{j+1}(\omega)$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| g_n \ldots g_0 \mathrm{V} \| = \gamma_j$.

On peut faire apparaître les coefficients $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ par le procédé suivant :

Soit F_k la sous-variété Lagrangienne de la grasmanienne G_k des sous-espaces de dimension k de $\mathbb{R}^{2d} (k = 1, \ldots, d)$, autrement dit un élément de G_k est dans F_k si pour tout couple u, v de vecteurs de $\mathbb{R}^{2d}$ lui appartenant, on a $u^* \mathrm{J} v = 0$ où J est la matrice carrée d'ordre $2d \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}$.

En désignant par x une matrice $(2d, k)$ formée par les coordonnées de k vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^{2d}$ on note $\bar{x}$ l'élément de G_k correspondant ; $\bar{x} \in \mathrm{F}_k$ si et seulement si en écrivant $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. où x_1 et x_2 sont des matrices (d, k), on a la relation $x_1^* x_2 = x_2^* x_1$ (ceci est indépendant du représentant x choisi dans $\bar{x}$ car tout autre représentant s'écrit $\begin{pmatrix} x_1 & \mathrm{D} \\ x_2 & \mathrm{D} \end{pmatrix}$ où D est une matrice carrée d'ordre k inversible).

Le groupe $\mathrm{G} = \mathrm{S}_p(d, \mathbb{R})$ est transitif sur chaque F_k et on considère le cocycle ρ_k sur $\mathrm{G} \times \mathrm{F}_k$ défini par :

$$\rho_k(g, \bar{x}) = \frac{\det\,[x^* g^* g x]}{\det\,[x^* x]} \quad (\text{où } x \text{ est un représentant quelconque de } \bar{x}).$$

On a alors le résultat suivant :

Si $\int \operatorname{Log} \| g \| dp(g) < +\infty$ *et si le groupe fermé* Gp *engendré par le support de* p *a une action irréductible sur* $\mathbb{R}^{2d}$, *pour un élément* $\bar{x}$ *fixé de* F_k *on a presque sûrement*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} \operatorname{Log} \rho_k(g_n \dots g_0, x) = \gamma_1 + \dots + \gamma_k \qquad (k=1, \dots, d).$$

La preuve est copiée sur celle de Furstenberg dans [*3*]. Il suffit en effet de vérifier que l'hypothèse d'irréductibilité entraîne que sur $(\mathbb{R}^{2d})^k$ tout sous-espace invariant a ses projections nulles ou égales à $\mathbb{R}^{2d}$. Si sur $(\mathbb{R}^{2d})^k$ on considère l'application π qui associe à un système de k vecteurs l'espace vectoriel engendré, il est facile de constater que si une mesure ν sur F_k vérifie $\rho * \nu = \nu$ l'image réciproque de son support par π contient une base de $(\mathbb{R}^{2d})^k$ d'où le résultat (en suivant la preuve du théorème 8.5).

De même en reprenant la démonstration du théorème 8.6 si on ajoute la condition « G_p ne laisse aucune mesure invariante sur $\mathbb{P}^{2d-1}$ » alors on peut affirmer que $\gamma_1 > 0$.

2) **Application à l'opérateur de Schrödinger.**

Nous commençons par établir des propriétés d'irréductibilité. (On écrira G_λ au lieu de G_{p_λ}).

PROPOSITION 2. — *Si* μ *charge au moins deux points,* G_λ *a une action irréductible sur* $\mathbb{R}^{2d}$ *et ne laisse aucune mesure invariante sur* $\mathbb{P}^{2d-1}$.

Preuve. — On peut supposer $\lambda = 0$ en translatant μ ; μ prenant au moins 2 valeurs a et b distinctes, on pose $\rho = b - a$.

On commence par remarquer comme dans [*2*] qu'en posant

$$g = \begin{pmatrix} A & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad \text{on a} \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & A \end{pmatrix}$$

et en effectuant les produits gg'^{-1} et $g'^{-1}g$, que G contient toutes les matrices de type $\begin{pmatrix} I & \Delta \\ 0 & I \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} I & 0 \\ \Delta & I \end{pmatrix}$.

Δ étant une matrice diagonale dont les coefficients sont nuls ou égaux à $\pm \rho$.

1) L'action de G est irréductible sur $\mathbb{R}^{2d}$:

Soit E un sous-espace non réduit à 0 stable par G.

L'ensemble des matrices carrées d'ordre $2d$ laissant E stable est une sous-algèbre contenant G et d'après la remarque ci-dessus contient toutes les matrices de type $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec A, B, C, D diagonales d'ordre d.

Par conséquent si V est un vecteur de E, E contient tous les vecteurs de base de $\mathbb{R}^{2d}$ correspondant à une coordonnée non nulle de V ainsi que ceux d'indice symétrique par rapport au « centre » de $[1, \ldots, 2d]$. E est donc engendré par le système $\{ (f_i), (f_{i+d}) \}_{i \in J}$. J étant une partie de $[1, \ldots, d]$ et (f_i) la base usuelle de $\mathbb{R}^{2d}$.

En écrivant maintenant que E est stable par l'élément $g = \begin{pmatrix} A & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, pour $i \in \Delta$, gf_i a une coordonnée non nulle pour les indices $i+1$ et $i-1$ (s'ils sont dans $[1, \ldots, d]$) par conséquent $E = \mathbb{R}^{2d}$.

2) G ne laisse pas de mesure invariante sur $\mathbb{P}^{2d-1}$.

Soit E_1 le sous-espace projectif de $\mathbb{P}^{2d-1}$ engendré par les d premiers vecteurs de base de $\mathbb{R}^{2d}$.

Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $g = \begin{pmatrix} I & \rho I \\ 0 & I \end{pmatrix}$ on constate que $g^n(x) = \begin{pmatrix} x_1 + n\rho x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ par conséquent :

— si $x \in E_1$(i. e. $x_2 = 0$) alors $g^n(x) = x \in E_1$

— si $x \notin E_1$ (i. e. $x_2 \neq 0$) alors $g^n(x)$ qui peut aussi s'écrire

$$\begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{n} + \rho x_2 \\ \\ \dfrac{x_2}{n} \end{pmatrix} \quad \text{converge vers le point } \begin{pmatrix} \rho x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dans } E_1 .$$

Il en résulte que si une mesure est stable par G, elle est portée par E_1, de même en considérant E_2 engendré par les d derniers vecteurs de base $\mathbb{R}^{2d}$ et $g = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \rho I & I \end{pmatrix}$.

Puisque $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ on a le résultat demandé.

Corollaire 3. — On suppose que μ charge au moins deux points et que

$$\int \operatorname{Log}(1 + |x|) d\mu(x) < +\infty$$

Soit λ fixé

Il existe alors des scalaires $\gamma_{2d}(\lambda) \leq \ldots \leq \gamma_1(\lambda)$ vérifiant $\gamma_j = -\gamma_{2d-j+1}$ et pour presque tout ω une suite $E_j(\omega, \lambda)$ de sous-espaces de $\mathbb{R}^{2d}$ vérifiant :

a) $\{0\} = E_{2d+1} \subset E_{2d} \ldots \subset E_1 = \mathbb{R}^{2d}$

b) E_{j+1} est distinct de E_j si et seulement si $\gamma_j \neq \gamma_{j+1}$

c) Si $V \in E_j - E_{j+1}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \operatorname{Log} \| S_n^\lambda V \| = \gamma_j(\lambda)$

d) Si $\bar{x} \in F_k$ on a presque sûrement ($k = 1, \ldots, d$)

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} \operatorname{Log} \rho_k(S_n^\lambda, \bar{x}) = \gamma_1(\lambda) + \ldots + \gamma_k(\lambda)$$

e) $$\gamma_1(\lambda) > 0$$

En fait, il sera nécessaire dans la suite d'utiliser la propriété $\gamma_d(\lambda) > 0$. Il est fort probable qu'elle puisse être obtenue sous les seules hypothèses du corollaire 3, mais faute de preuve nous sommes contraints de supposer (dans le cas $d > 1$) que le support μ est d'intérieur non vide ou bien que μ a une densité sur $\mathbb{R}$.

Ceci implique (voir proposition 8 de l'annexe A) qu'il existe un entier n_0 tel que $(p_\lambda^*)^{n_0}$ ait la même propriété. Dans ce cas, comme indiqué dans [*5*], le semi-groupe fermé engendré par le support de p_λ contient une matrice contractante sur toutes les variétés Lagrangiennes et il s'en suit que tous les exposants de Liapunoff sont distincts (ce qui implique bien sûr $\gamma_d(\lambda) > 0$).

PROPOSITION 4. — *On suppose que* $\int \log(1 + |x|) d\mu(x) < +\infty$ *et que*

— μ *charge au moins 2 points si* $d = 1$

— μ *a un support d'intérieur non vide ou bien a une densité si* $d > 1$.

Soit λ *fixé.*

1) *Pour presque tout* ω *l'une au moins des deux limites :*

$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{|n|} \operatorname{Log} \| S_n^\lambda W \|$ *est strictement positive quel que soit le vecteur* W *non nul de* $\mathbb{R}^{2d}$.

2) *Pour presque tout* ω, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| S_n^\lambda \binom{V}{0} \| > 0$ *quel que soit le vecteur* V *non nul de* $\mathbb{R}^d$.

Preuve. — Sous les hypothèses écrites on a $\gamma_d(\lambda) > 0$.

1) Le théorème d'Ossedelec appliqué « dans les deux sens » permet d'affirmer que

$$\text{si } W \notin E_d(\omega, \lambda) \quad \text{on a} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| S_n^\lambda W \| \geq \gamma_d(\lambda) > 0$$

$$\text{si } W \in E_d(\omega, \lambda) \quad \text{on a} \quad \lim_{n \to -\infty} \frac{1}{-n} \operatorname{Log} \| S_n^\lambda W \| \geq \gamma_d(\lambda) > 0 .$$

On pourrait aussi faire le même raisonnement que Pastur dans [*6*] en constatant que pour des raisons d'ergodicité, pour presque tout ω, λ n'est pas valeur propre de H_ω, puis utiliser le fait que pour chaque W non nul les limites écrites sont soit strictement négatives soit strictement positives (puisque $\gamma_d(\lambda) > 0$) et que par conséquent elles ne peuvent être simultanément strictement négatives.

2) Soit V un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$ et k l'indice de sa dernière coordonnée

non nulle, $(C_1, \ldots, C_{2d})$ les vecteurs colonnes de S_n^λ. On désigne par d_k la distance de C_k au sous-espace engendré par $(C_1, \ldots, C_{k-1})$

$$\| S_n^\lambda \binom{V}{0} \|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{k} V_i C_i \right\|^2 \geq V_k^2 d_k^2 \quad \text{si} \quad k \geq 2$$
$$= V_1^2 \| C_1 \|^2 \quad \text{si} \quad k = 1$$

Si $\overline{e}_k$ est l'élément de F_k engendré par les k premiers vecteurs de base de $\mathbb{R}^{2d}$ on a donc :

$$\| S_n^\lambda \binom{V}{0} \|^2 \geq V_k^2 \rho_k(S_n^\lambda, \overline{e}_k) \rho_{k-1}^{-1}(S_n^\lambda, \overline{e}_{k-1}) \quad \text{si} \quad k \geq 2$$
$$= V_1^2 \rho_1(S_n^\lambda, \overline{e}_1) \quad \text{si} \quad k = 1$$

dans tous les cas, on obtient :

$$\underline{\lim} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| S_n^\lambda \binom{V}{0} \| \geq \gamma_k(\lambda) \geq \gamma_d(\lambda) > 0$$

PROPOSITION 5. — *Si μ satisfait aux hypothèses de la proposition 4 et θ est une mesure positive fixée sur $\mathbb{R}$, σ_ω (resp. $\tilde{\sigma}_\omega$) est orthogonale à θ pour presque tout ω.*

Preuve. — On peut prouver sans peine (par exemple en construisant les matrices S et $\tilde{S}$ par un théorème de martingales) que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} V_0(\lambda, \omega) \\ V_{-1}(\lambda, \omega) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad V_0(\lambda, \omega),$$

figurant dans la proposition 1 peuvent être choisis mesurablement par rapport au couple (ω, λ).

On pose alors :

$$R = \left\{ (\omega, \lambda) / \operatorname{Sup} \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| S_n^\lambda \binom{V_0}{V_{-1}} \|, \quad \lim_{n \to -\infty} \frac{1}{-n} \operatorname{Log} \| S_n^\lambda \binom{V_0}{V_{-1}} \| \right) > 0 \right\}$$

$$\tilde{R} = \left\{ (\omega, \lambda) / \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| S_n^\lambda \binom{V_0}{0} \| > 0 \right\}$$

D'après la proposition 1, pour tout ω on a :

$$\sigma_\omega(R_\omega) = 0 \,(\text{resp. } \tilde{\sigma}_\omega(\tilde{R}_\omega) = 0)$$

et d'après la proposition 4, pour tout λ on a :

$$P(R_\lambda) = 1 \,(\text{resp. } P(\tilde{R}_\lambda) = 1)$$

Le théorème de Fubini appliqué à R (resp. $\tilde{R}$) et $P \otimes \theta$ donne :

$$\int P(\complement R_\lambda) d\theta(\lambda) = \int P(\complement \tilde{R}_\lambda) d\theta(\lambda) = 0$$

et donc

$$\int \theta(\mathbf{C}\mathrm{R}_\lambda)d\mathrm{P}(\omega) = \int \theta(\mathbf{C}\tilde{\mathrm{R}}_\lambda)d\mathrm{P}(\omega) = 0$$

On pourrait aussi prouver ce théorème dans le demi-ruban par une méthode analogue à celle utilisée dans [*2*] car on peut obtenir une forme explicite de la résolvante de $\tilde{\mathrm{H}}$ (voir annexe B).

On justifie alors le passage à la limite quand $\mathscr{I}\mathrm{m}(\lambda) \to 0$ dans la série de la dernière formule de l'annexe **B** en utilisant la proposition 4, et le théorème de Fatou fournit l'orthogonalité presque sûre de $\tilde{\sigma}_\omega$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

ANNEXE A

On note par $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de Sp $(d, \mathbb{R})$, E_{ij} la matrice d'ordre d dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice (i, j) qui vaut 1 puis on pose :

$$X_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & E_{ij} + E_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_{ij} = X_{ij}^*$$

et

$$Z_{ij} = \begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & -E_{ji} \end{pmatrix}$$

on remarque que l'on a les relations :

$$[X_{ii}, Y_{ij}] = \frac{1}{2} Z_{ij}$$

$$[Z_{ij}, X_{j,k}] = X_{ik},\ [Z_{ij}, Y_{ik}] = -Y_{jk}$$

Par conséquent $\mathcal{G}$ est engendrée par les vecteurs X_{ij} et Y_{ij} pour $|i - j| \leq 1$.

Proposition 6. — *Soit* S *une partie de* $\mathbb{R}$ *et* $S^d = S \times \ldots \times S \subset \mathbb{R}^d$. *Si* $S - S$ *est un voisinage de zéro alors* $\tau_\lambda(S^d)$ *engendre topologiquement* Sp $(d, \mathbb{R})$ [τ_λ *est l'application définie au début de II*]. *En conséquence si le support de* $\mu * \hat{\mu}$ *est un voisinage de zéro* (*en particulier si* μ *a une densité*) *on a* $G_\lambda = \mathrm{Sp}(d, \mathbb{R})$.

Preuve. — On peut supposer $\lambda = 0$. En remarquant comme dans la proposition 2 que le groupe engendré par $\tau(S^d)$ soit G_0, contient les matrices $\exp(b - a)X_{ii}$ (où a et b sont des éléments de S) ainsi que leurs transposées, on en déduit que $\mathcal{G}_0$ contient les matrices X_{ii} et Y_{ii} ce qui suffit dans le cas $d = 1$.

Si $d > 1$ en notant $g = \begin{pmatrix} A & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ on remarque que

$$g \exp X_{ii} g^{-1} = \exp \begin{pmatrix} -AE_{ii} & AE_{ii}A \\ -E_{ii} & E_{ii}A \end{pmatrix} = \exp H_i(g)$$

En considérant deux éléments g_1 et g_2 de $\tau(S^d)$

$$H_i(g_1) - H_i(g_2) = (a_{2,i} - a_{1i})(Z_{ii} + X_{i,i+1} + X_{i,i-1}) + (a_{1i}^2 - a_{2i}^2)X_{ii}$$

où X_{ij} est nulle si $j \notin [1, \ldots, d]$), on en déduit que $\mathcal{G}_0$ contient toutes les matrices X_{ij} (puis Y_{ij}) pour $|i - j| \leq 1$ d'où le résultat.

Lemme 7. — *Soit* G *un groupe de Lie simple d'algèbre* $\mathcal{G}$, U *une partie de* G *engendrant topologiquement* G. $(X_1, \ldots, X_d)$ *des éléments non nuls de* $\mathcal{G}$. *Il existe alors* $(g_1, \ldots, g_{n_0})$ *dans* U *tels que le rang du système*

$$(\mathrm{Ad}(g_1 g_2 \ldots g_k)X_i) \quad \begin{matrix} k = 1, \ldots, n_0 \\ i = 1, \ldots, d \end{matrix} \qquad \textit{soit égal à la dimension de } \mathcal{G}.$$

On note par H_ω le sous-espace de $\mathcal{G}$ engendré par le système ci-dessus si $\omega = (g_1 g_2, \ldots, g_n)$. On a alors la relation $H_{(\omega,\omega')} = H_\omega + \mathrm{Ad}(g_1 . g_2 . g_n)\, H_{\omega'}$ si H_{ω_0} est un sous-espace de dimension maximum $H_{(\omega_0,\omega')} = H_{\omega_0}$ et $\mathrm{Ad}(g_1 \ldots g_{n_0})H_{\omega'} \subset H_{\omega_0}$ donc $H_{\omega'} \subset H_{\omega_0}$ (en faisant tout d'abord $\omega' = \omega_0$) on en déduit que H_{ω_0} est stable par $\mathrm{Ad}g$, $g \in$ U, et est par conséquent un idéal de $\mathcal{G}$ donc égal à $\mathcal{G}$.

Proposition 8. — *Si μ a une densité, il existe un entier n_0 tel que $(p_\lambda^*)^{n_0}$ ait la même propriété. Si λ a un support d'intérieur non vide alors $(p_\lambda^*)^{n_0}$ a la même propriété.*

Preuve. — Soit S un ouvert de $\mathbb{R}$. D'après la proposition 6 et le lemme 7 (en posant $U = [\tau(S^d)]^{-1}$) il existe un entier n_0 et des éléments $g_k = \tau(a_k)$, $a_k \in S^d$, $k = 1, \ldots, n_0$, tels que le rang de $\{ Adg_1^{-1} g_2^{-1} \ldots g_k^{-1} X_i \}_{\substack{i=1\ldots d \\ k=1\ldots n_0}}$ soit égal à la dimension de $\mathcal{G}$.

On considère l'application ϕ de $(\mathbb{R}^d)^{n_0}$ dans G définie par $\phi(x_1, \ldots, x_{n_0}) = \tau(x_{n_0}) \ldots \tau(x_2)\tau(x_1)$.

Si $t \in \mathbb{R}^d$ et en notant T la matrice $\displaystyle\sum_{i=1}^{d} t_i X_{ii}$ on constate que $\tau(x+t) = (\exp T)\tau(x)$.

Par conséquent :

$$\phi(a_1 + t_1, \ldots, a_{n_0} + t_{n_0}) = (\exp T_{n_0}) g_{n_0} \ldots (\exp T_2) g_2 (\exp T_1) g_1 .$$

La différentielle de ϕ au point $(a_1, \ldots, a_{n_0})$ est donc de rang maximum. ϕ étant analytique, l'ensemble des points où elle n'est pas de rang maximum est une réunion dénombrable de sous variétés de $(\mathbb{R}^d)^{n_0}$ de dimension inférieure par conséquent négligeables.

On en déduit que si μ a une densité, il en est de même de $(p_\lambda^*)^{n_0}$.

La deuxième affirmation se prouve exactement de la même façon en choisissant pour S un ouvert contenu dans le support μ. On obtiendra alors que ϕ est un homéomorphisme d'un ouvert contenant $(a_1, \ldots, a_{n_0})$ sur un ouvert de G d'où le résultat.

(Il serait en fait intéressant de prouver que l'entier n_0 minimum ne dépend pas de l'ouvert choisi et est égal à $2d + 1$).

ANNEXE B

Calcul de la Résolvante dans le demi-ruban. Soit N un entier ≥ 1, ${}^{N}\tilde{R}_{\lambda}$ la résolvante de ${}^{N}\tilde{H}$ pour $\mathscr{I}m\,\lambda \neq 0$, $\varepsilon_i = e_{i,0}$ $i = [1, \ldots, d]$.

Nous nous proposons de calculer ${}^{N}\tilde{R}_{\lambda}\varepsilon_i = U^i$.

U^i est donc solution de l'équation : $({}^{N}\tilde{H} - \lambda I)U^i = \varepsilon_i$ et par conséquent on a les relations :

$$\begin{pmatrix} U^i_{n+1} \\ U^i_n \end{pmatrix} = g^{\lambda}_n \begin{pmatrix} U^i_n \\ U^i_{n-1} \end{pmatrix} \qquad \text{pour } 1 \leq n \leq N, \qquad U^i_{N+1} = U^i_{-1} = 0$$

$$U^i_1 = (A_0 - \lambda I)U^i_0 - \varepsilon_i$$

Par conséquent

$$\begin{pmatrix} 0 \\ U^i_N \end{pmatrix} = S^{\lambda}_N (g^{\lambda}_0)^{-1} \begin{pmatrix} U^i_1 \\ U^i_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{N+1} & Q_{N+1} \\ P_N & Q_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & A_0 - \lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^i_1 \\ U^i_0 \end{pmatrix}$$

d'où l'équation $U^i_0 = -P^{-1}_{N+1}Q_{N+1}\varepsilon_i$

En notant par ${}^{N}\tilde{\mathbb{R}}_{\lambda}$ la matrice de terme général $\langle \varepsilon_j, {}^{N}\tilde{R}_{\lambda}\varepsilon_i \rangle$

$${}^{N}\tilde{\mathbb{R}}_{\lambda} = -P^{-1}_{N+1}Q_{N+1}.$$

La matrice S^{λ}_N étant symplectique on a les relations

(i) $$P^*_{N+1}Q_N - P^*_N Q_{N+1} = I, \qquad P^*_{N+1}P_N = P^*_N P_{N+1}$$

En multipliant à gauche la relation (i) par $P^{-1}_{N+1}(P^*_N)^{-1}$ (qui est égale à $P_N^{-1}(P^*_{N+1})^{-1}$) on obtient :

$$-P^{-1}_{N+1}Q_{N+1} + P_N^{-1}Q_N = P^{-1}_{N+1}(P^*_N)^{-1}$$

Par conséquent

$${}^{N}\tilde{\mathbb{R}}_{\lambda} = \sum_{k=0}^{N} (P^*_k P_{k+1})^{-1} = \sum_{k=0}^{N} (P^*_{k+1}P_k)^{-1}$$

On obtient donc en définitive

$$\tilde{\mathbb{R}}_{\lambda} = \sum_{k \geq 0} (P^*_k P_{k+1})^{-1}$$

(La convergence étant la convergence simple de chaque terme de la série de matrice).

On en déduit ($\mathscr{I}m\,\lambda \neq 0$)

$$\tilde{\mathbb{R}}_{\lambda} = \int \frac{d\tilde{\sigma}(t)}{\lambda - t} = \sum_{k \geq 0} (P^*_k P_{k+1})^{-1}$$

et

$$\int \frac{d\tilde{\sigma}(t)}{\lambda - t} = \sum_{k \geq 0} \operatorname{tr}\,[(P^*_k P_{k+1})^{-1}]$$

RÉFÉRENCES

[1] J. Lacroix, Problèmes probabilistes liés à l'étude des opérateurs aux différences aléatoires. *Annales de l'Institut Elie Cartan*, Nancy, t. **7**, 1983.

[2] Y. Yoshioka, On the singularity of the spectral measures of a semi infinite random system. *Proc. Japan Acad.*, t. **49**, 1973, p. 665.

[3] FURSTENBERG, Non commuting random products. *Am. Math. Soc.*, t. **108**, 1963, p. 337.
[4] OSSEDELEC, A multiplicative ergodic theorem. *Trans. Moscow Math. Soc.*, t. **19**, 1968, p. 197-362.
[5] Y. GUIVARC'H, A. RAUGI, Frontière de Furstenberg. Propriétés de contraction et théorèmes de convergence. Séminaire de Probabilités, Rennes, 1981.
[6] PASTUR, Spectral properties of disordered systems in the one body approximation. *Commun. Math. Phys.*, t. **75**, 1980, p. 179-196.
[7] GOLDSEID, The structure of the Spectrum of the Schrödinger random difference operator. *Soviet Math Dokl.*, t. **22**, 1980, n° 3.

(Manuscrit reçu le 15 juin 1982)