ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

M. FERRARIS
M. FRANCAVIGLIA
C. REINA

Sur les fibrés d'objets géométriques et leurs applications physiques

Annales de l'I. H. P., section A, tome 38, nº 4 (1983), p. 371-383
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1983__38_4_371_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXXVIII, n° 4, 1983, p. 371-383.

Section A :
Physique théorique.

Sur les fibrés d'objets géométriques et leurs applications physiques

par

M. FERRARIS et M. FRANCAVIGLIA
Istituto di Fisica Matematica « J.-L. Lagrange »,
via C. Alberto n. 10, 10123 Torino, Italie

et

C. REINA
Istituto di Fisica, Università di Milano,
via Celoria n. 16, 20133 Milano, Italie

RÉSUMÉ. — Dans le cadre de la géométrie des espaces fibrés, on donne une méthode explicite pour construire le relèvement de difféomorphismes locaux de la variété de base à des fibrés d'objets géométriques. A titre d'exemple, on étudie en détail les théories de jauge de groupe U(1) pour l'électromagnétisme.

ABSTRACT. — An explicit method to construct the lifting of local diffeomorphisms of the base manifold to bundles of geometric objects is given within the framework of the geometry of fiber bundles. As an example, U(1) gauge theories of electromagnetism are studied in detail.

1. INTRODUCTION

Les fibrés d'objets géométriques ont trouvé beaucoup d'applications dans de nombreux travaux récents de Physique Mathématique. En particulier, nous rappelons ici le travail fondamental de D. Krupka et A. Trautman [*1*] sur l'invariance générale dans le calcul des variations, les travaux suivants de D. Krupka [*2*]-[*11*] sur la théorie des invariants différentiels et ses applications aux théories de champs relativistes, le travail de J. F. Pommaret [*12*] sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles et les pseudo-groupes de Lie, le travail de J. Kijowski et W. M. Tulczyjew [*13*] sur les tenseurs d'impulsion-énergie et de tension dans les théories des champs, les travaux de M. Modugno [*14*]-[*16*] sur les connexions généralisées et leur rôle dans les théories physiques et, enfin, notre travail [*17*] sur les théories relativistes de la gravitation.

La raison de cet intérêt pour les objets géométriques est due au fait qu'ils généralisent d'une façon convenable les tenseurs et qu'ils permettent ainsi d'introduire intrinsèquement une notion de *covariance générale* qui est très fructueuse dans les applications physiques. Au niveau intuitif, les objets géométriques sont *grosso modo* des objets définis sur une variété différentielle M, dont on connaît la loi de transformation par un changement arbitraire de coordonnées locales dans M. Les tenseurs sont naturellement des objets géométriques, mais on sait qu'il existe des objets plus généraux (par exemple, les connexions linéaires) qui font intervenir dans leur loi de transformation les dérivées partielles d'ordre supérieur des changements de coordonnées locales. Une définition rigoureuse et intrinsèque des objets géométriques a été donnée par J. Haantjes et G. Laman [*18*] [*19*], qui ont perfectionné les travaux antérieurs de J. A. Schouten et J. Haantjes [*20*]. Une formulation alternative et plus élégante, basée sur la notion de prolongement d'un fibré différentiable introduite par C. Ehresmann [*21*]-[*25*], a été développée par N. H. Kuiper et K. Yano [*26*]. Une méthode encore plus générale, basée sur des propriétés fonctorielles, a été récemment développée par S. Salvioli [*27*], qui a généralisé les résultats précédents de A. Nijenhuis [*28*].

Dans cette Note, nous nous proposons de reprendre la question, particulièrement en vue de ses applications à la Physique Mathématique. On donnera ici une méthode directe qui adapte les définitions de Haantjes et Laman au langage moderne de la géométrie des fibrés différentiels. Notre méthode est essentiellement équivalente à la formulation donnée par Kuiper et Yano, mais elle se distingue de cette dernière par l'emploi systématique que nous faisons des jets d'ordre fini et par une définition plus intuitive des fonctions de transition pour les fibrés d'objets géométriques. Nous trouverons ainsi une classe d'objets géométriques qui semble plus restreinte que celle définie dans [*26*] et [*27*], mais, comme il a été démontré par R. Palais et C.-L. Terng dans [*29*], cette classe contient tous les fibrés d'objets géométriques qui ont des applications en physique. D'autre part, nous obtiendrons une méthode constructive qui permet de construire de façon explicite les foncteurs de relèvement pour les difféomorphismes locaux de la variété de base et, par conséquent, de donner l'expression explicite pour la dérivée de Lie d'un champ d'objets géométriques.

Les résultats mathématiques présentés dans cette Note ont été développés plus en détail dans [*30*]. Dans cette Note, nous rappellerons de façon schématique la méthode présentée dans [*30*] et nous étudierons plus en détail la notion d'*équivalence entre fibrés d'objets géométriques* et un exemple concret d'application physique où la notion d'équivalence joue un rôle essentiel. Dans cet exemple, le groupe structural est le groupe unitaire U(1) qui opère comme groupe de jauge dans une théorie unitaire du champ de gravitation et du champ électromagnétique récemment développée par M. Ferraris et J. Kijowski [*31*]. En particulier, on montrera que à certains fibrés principaux de groupe structural U(1), qui sont aussi des fibrés d'objets géométriques sur l'espace-temps et qui ne sont pas équivalents entre eux comme fibrés d'objets géométriques, correspond une possible caractérisation géométrique de la charge électrique. Nos résultats convergent avec ceux de M. Flato et A. Lichnerowicz [*32*] qui correspondent à une approche purement cohomologique.

2. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Nous rappelons ici quelques définitions qui seront nécessaires dans la suite.

Un *fibré* (*différentiable*) *avec groupe structural* G au-dessus d'une variété différentielle M est une quintuple $\mathbb{B} \equiv (\mathrm{B}, \mathrm{M}, \pi ; \mathrm{F}, \mathrm{G})$ où : B (la *variété totale*) et F (la *fibre type*) sont des variétés différentielles de classe C^∞, G (le *groupe structural*) est un groupe de Lie qui opère différentiablement et fidèlement à gauche sur F et $\pi : \mathrm{B} \to \mathrm{M}$ (la *projection*) est une submersion de classe C^∞ qui vérifie les conditions suivantes :

i) il existe un recouvrement ouvert (U_α) de M, et pour chaque indice α il existe un difféomorphisme $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(\mathrm{U}_\alpha) \to \mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{F}$ (la trivialisation locale au-dessus de U_α) tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(\mathrm{U}_\alpha) \arrow[r, "\varphi_\alpha"'] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{F} \arrow[d] \\ & \mathrm{U}_\alpha \end{tikzcd}$$

soit commutatif;

ii) pour toute couple d'indices (α, β) tels que $\mathrm{U}_{\alpha\beta} = \mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta \neq \varnothing$, il existe une application $m_{\alpha\beta} : \mathrm{U}_{\alpha\beta} \to \mathrm{G}$, de classe C^∞, telle qu'on ait : $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(p, f) = (p, m_{\alpha\beta}(p) \cdot f)$, pour chaque $p \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ et chaque $f \in \mathrm{F}$.

Remarquons que les applications $m_{\alpha\beta}$ (les fonctions de transition) définissent un cocycle sur M, à valeurs dans le faisceau des germes des fonctions différentiables locales de M dans G.

Un G-*fibré principal* sur M est un fibré au-dessus de M, avec groupe structural G, où la fibre type coïncide avec le groupe structural G et l'action de G sur lui-même est l'action naturelle par translations à gauche. Pour chaque G-fibré principal $\mathbb{P} \equiv (\mathrm{P}, \mathrm{M}, \pi ; \mathrm{G})$ sur M, le groupe structural G opère différentiablement et librement à droite sur la variété totale P par l'action canonique $P \times G \rightarrow P$ induite par les translations à droite de G dans lui-même.

Soient $\mathbb{P} \equiv (P, M, \pi ; G)$ un G-fibré principal sur M, F une variété différentielle et $\rho : G \rightarrow \mathrm{Diff}(F)$ un homomorphisme de groupes tel que l'application $G \times F \ni (g, f) \mapsto \rho(g)(f) \in F$ soit de classe C^∞. En composant l'homomorphisme ρ avec les fonctions de transition de $\mathbb{P}$ on peut définir un fibré $(B, M, \pi_\rho ; \rho(G), F)$ sur M qu'on appelle *fibré des objets de type ρ associé à $\mathbb{P}$*. La variété totale B de ce fibré est canoniquement difféomorphe à la variété quotient $P \times_\rho F$ de la variété produit $P \times F$ par l'action à droite de G définie par

$$(P \times F) \times G \ni ((p, f), g) \mapsto (p \cdot g, \rho(g^{-1})(f)) \in P \times F .$$

Le fibré des objets de type ρ associé à $\mathbb{P}$ sera indiqué par

$$\mathbb{P} \times_\rho F \equiv (P \times_\rho F, M, \pi_F) ,$$

où $\pi_F : P \times_\rho F \rightarrow M$ est la projection canonique. On dit que le fibré $\mathbb{P} \times_\rho F$ est un *fibré d'objets trivial* si on a $\rho(G) = \{ id_F \}$; dans ce cas la variété totale est la variété produit $M \times F$.

Remarquons que chaque fibré $\mathbb{B} \equiv (B, M, \pi ; G, F)$ de groupe structural G sur une variété M peut être pensé comme fibré d'objets associé à un certain fibré principal sur M. En effet, si $\mathbb{P} \equiv (P, M, \pi ; G)$ est le fibré principal sur M ayant les mêmes fonctions de transition que $\mathbb{B}$, le fibré d'objets cherché sera le fibré $\mathbb{P} \times_\rho F$ où $\rho : G \rightarrow \mathrm{Diff}(F)$ dénote l'homomorphisme associé à l'action à gauche de G sur F.

Soient $\mathbb{P} \equiv (P, M, \pi ; G)$ et $\mathbb{P}' \equiv (P', M, \pi' ; G')$ deux fibrés principaux au-dessus de la même variété M. On dit que (Φ, φ) est un *morphisme de fibrés principaux* sur M si : (*i*) $\Phi : P \rightarrow P'$ est une application de classe C^∞ telle que $\pi' \circ \Phi = \pi$, (*ii*) $\varphi : G \rightarrow G'$ est un homomorphisme de groupes de Lie, (*iii*) les applications φ et Φ vérifient la condition $\Phi(p \cdot g) = \Phi(p) \cdot \varphi(g)$ pour chaque $(p, g) \in P \times G$. On dira que le morphisme $(\Phi, \varphi) : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ est un isomorphisme de fibrés principaux sur M si les applications Φ et φ sont des difféomorphismes. Étant donné un morphisme $(\Phi, \varphi) : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$, l'application Φ est injective (resp. surjective) si et seulement si l'homomorphisme φ est injectif (resp. surjectif). Lorsque $G = G'$ et l'homomorphisme φ est l'identité, on dira simplement que Φ est un isomorphisme de fibrés principaux, de groupe structural G, sur M.

Soient $\mathbb{P} \equiv (P, M, \pi ; G)$, $\mathbb{P}' \equiv (P', M, \pi' ; G')$ deux fibrés principaux sur la même variété M, et soient

$$\mathbb{P} \times_\rho F = (P \times_\rho F, M, \pi_F), \qquad \mathbb{P}' \times_{\rho'} F' = (P' \times_{\rho'} F', M, \pi_{F'})$$

deux fibrés d'objets associés respectivement à $\mathbb{P}$ et à $\mathbb{P}'$. Étant donnés un morphisme $(\Phi, \varphi) : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ et une application $\psi : F \rightarrow F'$ telle que $\psi(g \cdot f) = \varphi(g) \cdot \psi(f)$ pour tout $(g, f) \in G \times F$, il existe une application

$\Psi : \mathrm{P} \times_\rho \mathrm{F} \to \mathrm{P}' \times_{\rho'} \mathrm{F}'$ et une seule telle que $\pi_{\mathrm{F}'} \circ \Psi = \pi_\mathrm{F}$ et que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{P} \times \mathrm{F} & \xrightarrow[\Phi \times \psi]{} & \mathrm{P}' \times \mathrm{F}' \\ {\scriptstyle \pi_\rho} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \pi_{\rho'}} \\ \mathrm{P} \times_\rho \mathrm{F} & \xrightarrow{\Psi} & \mathrm{P}' \times_{\rho'} \mathrm{F}' \end{array}$$

où π_ρ et $\pi_{\rho'}$ sont les projections canoniques, soit commutatif. La couple (Ψ, ψ) prend le nom de *morphisme de fibrés d'objets*, au-dessus de (Φ, φ). Étant donné un morphisme (Ψ, ψ) de fibrés d'objets, l'application Ψ est injective (resp. surjective) si et seulement si l'application ψ est injective (resp. surjective). Si (Ψ, ψ) est un morphisme de fibrés d'objets tel que l'application ψ soit un difféomorphisme, et donc Ψ aussi, on dira que (Ψ, ψ) est un *isomorphisme de fibrés d'objets* au-dessus de (Φ, φ). Lorsque $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$ et (Φ, φ) est l'isomorphisme $(id_\mathrm{P}, id_\mathrm{G})$, on dira simplement que (Ψ, ψ) est un morphisme, ou un isomorphisme, de fibrés d'objets associés au fibré principal $\mathbb{P}$. Remarquons que (Ψ, ψ) est un isomorphisme de fibrés d'objets associés à $\mathbb{P}$ si et seulement si on a $\rho'(g) = \psi \circ \rho(g) \circ \psi^{-1}$ pour tout $g \in \mathrm{G}$; ou, en d'autres termes, si et seulement si les deux représentations ρ et ρ' sont équivalentes.

3. FIBRES D'OBJETS GÉOMÉTRIQUES

Dans cette section nous allons présenter les notions fondamentales de la théorie des objets géométriques à l'aide d'une formulation qui, comme on a dit dans l'introduction, est très proche de celle de Kuiper et Yano [*26*].

Soit maintenant $\mathscr{P}_0(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R}^n)$ le pseudo-groupe formé par toutes les applications $\psi : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^n$, définies dans un voisinage ouvert U de $\underline{0} \in \mathbb{R}^n$, telles que $\psi(\underline{0}) = \underline{0}$ et que l'application linéaire $\mathrm{D}\varphi(\underline{0}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ soit inversible. Nous indiquons par $\mathrm{G}^k(n ; \mathbb{R})$ l'ensemble des jets d'ordre k (en $\underline{0}$) des éléments de $\mathscr{P}_0(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R}^n)$. L'ensemble $\mathrm{G}^k(n ; \mathbb{R})$ est un groupe de Lie par la loi naturelle $j^k(\psi_1) \cdot j^k(\psi_2) = j^k(\psi_1 \circ \psi_2)$. Il y a un isomorphisme canonique entre le groupe de Lie $\mathrm{G}^1(n ; \mathbb{R})$ et le groupe linéaire général $\mathrm{Gl}(n ; \mathbb{R})$.

Soient M une variété de dimension n, $\mathscr{U} = \{ (\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha) \}$ un atlas pour M et $\Phi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta) \to \varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta)$ les changements de coordonnées locales associées à $\mathscr{U}$. Pour chaque $\Phi_{\alpha\beta}$ et chaque $p \in \mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta$, nous définissons une fonction $\tilde{\Phi}_{\alpha\beta}(p) \in \mathscr{P}_0(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R}^n)$ à l'aide de la formule $[\tilde{\Phi}_{\alpha\beta}(p)](x) = \Phi_{\alpha\beta}[x + \varphi_\beta(p)] - \varphi_\alpha(p)$, pour tous les $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $x + \varphi_\beta(p) \in \varphi_\beta(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta)$. Les applications $\Phi^k_{\alpha\beta} : \mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta \to \mathrm{G}^k(n ; \mathbb{R})$ définies par $\Phi^k_{\alpha\beta}(p) = j^k[\tilde{\Phi}_{\alpha\beta}(p)]$ sont de classe C^∞ et forment un cocycle à valeurs dans le groupe $G^k(n;\mathbb{R})$.

Lorsque $G \subset \mathrm{Diff}(F)$ est un groupe de Lie qui opère différentiablement et fidèlement à gauche sur une variété F et $\rho : G^k(n;\mathbb{R}) \to G$ est un homomorphisme de groupes de Lie, les fonctions composées $m_{\alpha\beta} = \rho \circ \Phi^k_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ nous donnent les fonctions de transition pour un fibré sur M. Ce fibré est indiqué par $(B, M, \pi; F, G; \rho, k)$ et on l'appelle *fibré des objets géométriques de type ρ et d'ordre k* sur la variété M.

Soit $\mathscr{P}_0(\mathbb{R}^n; M)$ l'ensemble des applications $l : U \to M$, définies dans un voisinage ouvert U de $\underline{0} \in \mathbb{R}^n$ telles que l soit un difféomorphisme de U dans le sous-ensemble ouvert $l(U)$ de M. L'ensemble $L^k(M)$ des jets d'ordre k (en $\underline{0} \in \mathbb{R}^n$) des éléments de $\mathscr{P}_0(\mathbb{R}^n; M)$ est doué d'une structure naturelle de fibré principal sur M (le *fibré des k-repères* dans M) ayant $G^k(n;\mathbb{R})$ comme groupe structural et $\pi^k : j^k(l) \mapsto l(\underline{0})$ pour projection. En effet, le fibré principal $L^k(M)$ coïncide avec le fibré sur M ayant les $\Phi^k_{\alpha\beta}$ comme fonctions de transition. L'action canonique à droite de $G^k(n;\mathbb{R})$ sur $L^k(M)$ est l'action définie par $(j^k(l), j^k(\psi)) \mapsto j^k(l \circ \psi)$ pour tout $j^k(l) \in L^k(M)$ et tout $j^k(\psi) \in G^k(n;\mathbb{R})$.

On démontre aisément que chaque fibré d'objets géométriques de type ρ et d'ordre k est le fibré $L^k(M) \times_\rho F$ des objets de type ρ associé au fibré principal $L^k(M)$ au moyen de l'homomorphisme $\rho : G^k(n;\mathbb{R}) \to G \subset \mathrm{Diff}(F)$. On dit alors qu'un fibré d'objets géométriques d'ordre k est un *fibré d'objets géométriques trivial* s'il est un fibré trivial comme fibré d'objets associé à $L^k(M)$.

Étant donnés deux nombres entiers h et k tels que $0 < h \leqslant k$, soit $\Phi^{h,k} : L^k(M) \to L^h(M)$ l'application surjective de classe C^∞ définie par $\Phi^{h,k}[j^k(l)] = j^h(l)$, et soit $\varphi^{h,k} : G^k(n;\mathbb{R}) \to G^h(n;\mathbb{R})$ l'homomorphisme surjectif de groupes de Lie défini par $\varphi^{h,k}[j^k(\psi)] = j^h(\psi)$, où on adopte la convention que pour tout nombre entier k, $\Phi^{k,k}$ et $\varphi^{k,k}$ sont les applications identiques. Chacune des couples $(\Phi^{h,k}, \varphi^{h,k})$ est un morphisme surjectif de fibrés principaux sur M qu'on appelle *morphisme canonique* de $L^k(M)$ sur $L^h(M)$. Toutes les fois qu'on parlera de morphismes ou isomorphismes entre fibrés d'objets géométriques on sous-entend qu'il s'agit de morphismes au-dessus d'un des morphismes canoniques.

On donnera dans la suite quelques exemples de fibrés d'objets géométriques d'ordre 1 et 2 ; pour les détails nous renvoyons à [*30*].

EXEMPLE 1. — Lorsque V est un espace vectoriel de dimension finie et $\rho : G^1(n;\mathbb{R}) \to Gl(V)$ est une représentation linéaire de $G^1(n;\mathbb{R})$ dans V, le fibré $L^1(M) \times_\rho V$ est un fibré vectoriel d'objets géométriques sur M. En particulier, lorsque ρ est le produit tensoriel de la puissance tensorielle p-ème de la représentation fondamentale de $G^1(n;\mathbb{R})$ dans $Gl(n;\mathbb{R})$ et de la puissance tensorielle q-ème de sa représentation duale, le fibré $L^1(M) \times_\rho V$ coïncide avec le fibré tensoriel $T^p_q(M)$. En composant les représentations tensorielles avec les puissances tensorielles de l'homomorphisme $\Delta : \mathrm{Gl}(n;\mathbb{R}) \ni g \mapsto \det(g) \in \mathbb{R}^*$, ou de son dual

$$\Delta^* : \mathrm{Gl}(n;\mathbb{R}) \ni g \mapsto [\det(g)]^{-1} \in \mathbb{R}^*,$$

on obtient tous les fibrés de densités tensorielles sur M.

EXEMPLE 2. — Soit $T^1_2(\mathbb{R}^n)$ l'espace des tenseurs une fois contravariants et deux fois covariants sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et soit

$$\rho : G^2(n;\mathbb{R}) \to \mathrm{Diff}\,[T^1_2(\mathbb{R}^n)]$$

l'homomorphisme défini par

$$Y^\alpha_{\beta\mu}[\rho(g)(t)] = x^\alpha_{\alpha'}(g)Y^{\alpha'}_{\beta'\mu'}(t)x^{\beta'}_\beta(g^{-1})x^{\mu'}_\mu(g^{-1}) + x^\alpha_\sigma(g)x^\sigma_{\beta\mu}(g^{-1})$$

pour tout $(g, t) \in G^2(n;\mathbb{R}) \times T^1_2(\mathbb{R}^n)$, où $x^\alpha_\beta, x^\alpha_{\beta\mu}$ sont les coordonnées canoniques dans $G^2(n;\mathbb{R})$ et $Y^\alpha_{\beta\mu}$ sont les coordonnées canoniques dans $T^1_2(\mathbb{R}^n)$. L'action ainsi définie est une action affine et le fibré d'objets $L^2(M) \times_\rho T^1_2(\mathbb{R}^n)$ coïncide avec le fibré des connexions linéaires sur la variété M, qui est donc un fibré affine d'objets géométriques d'ordre 2. Lorsqu'on considère la restriction de l'action définie ci-dessus au sous-espace invariant $T^1_0(\mathbb{R}^n) \otimes S^0_2(\mathbb{R}^n) \subset T^1_2(\mathbb{R}^n)$ des tenseurs symétriques sur $\mathbb{R}^n$, on obtient le fibré des connexions linéaires sans torsion sur M.

EXEMPLE 3. — Considérons maintenant l'homomorphisme induit par la trace de l'action de l'exemple précédent. C'est-à-dire, considérons l'homomorphisme $\bar\rho : G^2(n;\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{Diff}\,[T^0_1(\mathbb{R}^n)]$ défini par

$$A_\mu[\bar\rho(g)(t)] = A_{\mu'}(t)x^{\mu'}_\mu(g^{-1}) + x^\beta_\alpha(g)x^\alpha_{\beta\mu}(g^{-1})$$

pour tout $(g, t) \in G^2(n;\mathbb{R}) \times T^0_1(\mathbb{R}^n)$, où $x^\alpha_\beta, x^\alpha_{\beta\mu}$ sont les coordonnées canoniques dans $G^2(n;\mathbb{R})$ et A_μ sont les coordonnées canoniques dans $T^0_1(\mathbb{R}^n)$. On voit alors que le fibré $L^2(M) \times_{\bar\rho} T^0_1(\mathbb{R}^n)$ d'objets géométriques d'ordre 2 ainsi défini, coïncide avec le fibré des connexions linéaires sur le fibré vectoriel $\Lambda^n T(M)$.

EXEMPLE 4. — Un autre exemple d'objets géométriques d'ordre 2 qui ont des applications en géométrie et en physique est représenté par les classes d'équivalence projective de connexions ou, plus simplement, par les connexions projectives. Le fibré d'objets géométriques des connexions projectives sur une variété M est défini comme le fibré d'objets associé à $L^2(M)$ au moyen de l'homomorphisme $\rho^* : G^2(n;\mathbb{R}) \to \mathrm{Diff}\,[\overset{*}{S}{}^1_2(\mathbb{R}^n)]$, où $\overset{*}{S}{}^1_2(\mathbb{R}^n) \subset T^1_0(\mathbb{R}^n) \otimes S^0_2(\mathbb{R}^n)$ est le sous-espace des tenseurs à trace nulle, défini par

$$Z^\alpha_{\beta\mu}[\rho^*(g)(t)] = x^\alpha_{\alpha'}(g)Z^{\alpha'}_{\beta'\mu'}(t)x^{\beta'}_\beta(g^{-1})x^{\mu'}_\mu(g^{-1}) + x^\alpha_\sigma(g)x^\sigma_{\beta\mu}(g^{-1}) - \frac{1}{n+1}x^\tau_\sigma(g)[x^\sigma_{\tau\mu}(g^{-1})\delta^\alpha_\beta + x^\sigma_{\tau\beta}(g^{-1})\delta^\alpha_\mu]$$

pour tout $(g, t) \in \mathrm{G}^2(n\,; \mathbb{R}) \times \overset{*}{\mathrm{S}}{}^1_2(\mathbb{R}^n)$, où $\mathrm{Z}^\alpha_{\beta\mu}$ sont les coordonnées canoniques dans $\overset{*}{\mathrm{S}}{}^1_2(\mathbb{R}^n)$.

Dans la Section 5 on donnera des exemples de fibrés d'objets géométriques d'ordre 1, qui sont aussi des fibrés principaux de groupe structural U(1) sur l'espace-temps.

4. RELÈVEMENTS ET DÉRIVÉE DE LIE

Nous sommes alors ramenés à construire explicitement les foncteurs covariants qui relèvent les difféomorphismes locaux de la variété de base M à isomorphismes locaux de fibrés d'objets géométriques sur M. La construction qui sera présentée ici, et qui est très intéressante pour les applications, a été suggérée par des idées analogues développées par Krupka dans *[10]*, où nous renvoyons pour de plus amples détails.

Soit $\theta : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un difféomorphisme entre deux ouverts X et Y de la variété M. Le difféomorphisme local θ se relève de façon naturelle à un difféomorphisme $\mathrm{L}^k(\theta) : \mathrm{L}^k(\mathrm{X}) \to \mathrm{L}^k(\mathrm{Y})$ entre les sous-fibrés ouverts $\mathrm{L}^k(\mathrm{X}) = (\pi^k)^{-1}(\mathrm{X})$ et $\mathrm{L}^k(\mathrm{Y}) = (\pi^k)^{-1}(\mathrm{Y})$ du fibré $\mathrm{L}^k(\mathrm{M})$. Le relèvement canonique est donné par

$$\mathrm{L}^k(\theta) : j^k(l) \mapsto j^k(\theta \circ l)$$

pour chaque élément $j^k(l) \in \mathrm{L}^k(\mathrm{X})$. On vérifie aisément que L^k est un foncteur covariant.

Pour étendre cette définition à un fibré quelconque $\mathrm{L}^k(\mathrm{M}) \times_\rho \mathrm{F}$ d'objets géométriques, de type ρ et d'ordre k, nous raisonnons comme suit. Soient $\pi_\rho : \mathrm{L}^k(\mathrm{M}) \times \mathrm{F} \to \mathrm{L}^k(\mathrm{M}) \times_\rho \mathrm{F}$ et $\pi_\mathrm{F} : \mathrm{L}^k(\mathrm{M}) \times_\rho \mathrm{F} \to \mathrm{M}$ les projections canoniques. Alors, le relèvement du difféomorphisme local $\theta : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ à un difféomorphisme $\rho(\theta) : \rho(\mathrm{X}) \to \rho(\mathrm{Y})$ entre les sous-fibrés ouverts $\rho(\mathrm{X}) = (\pi_\mathrm{F})^{-1}(\mathrm{X})$ et $\rho(\mathrm{Y}) = (\pi_\mathrm{F})^{-1}(\mathrm{Y})$ du fibré $\mathrm{L}^k(\mathrm{M}) \times_\rho \mathrm{F}$, est défini par

$$\rho(\theta) : \pi_\rho(j^k(l), f) \mapsto \pi_\rho(j^k(\theta \circ l), f) = \pi_\rho(\mathrm{L}^k(\theta)[j^k(l)], f)$$

pour tous les $j^k(l) \in \mathrm{L}^k(\mathrm{X})$ et tous les $f \in \mathrm{F}$. On démontre aussi que $\rho(\theta)$ est l'unique difféomorphisme tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{L}^k(\mathrm{X}) \times \mathrm{F} \arrow[rrr, "\mathrm{L}^k(\theta) \times id_\mathrm{F}"'] \arrow[dr] \arrow[ddd, "\pi_\rho"'] & & & \mathrm{L}^k(\mathrm{Y}) \times \mathrm{F} \arrow[dl] \arrow[ddd, "\pi_\rho"] \\
& \mathrm{L}^k(\mathrm{X}) \arrow[r, "\mathrm{L}^k(\theta)"'] \arrow[d, "\pi^k"'] & \mathrm{L}^k(\mathrm{Y}) \arrow[d, "\pi^k"] & \\
& \mathrm{X} \arrow[r, "\theta"] & \mathrm{Y} & \\
\rho(\mathrm{X}) \arrow[ur] \arrow[rrr, "\rho(\theta)"] & & & \rho(\mathrm{Y}) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. On voit que cette construction donne un foncteur covariant ρ qui généralise le foncteur L^k. On a $\rho = L^k$ si la fibre type F est le groupe $G^k(n; \mathbb{R})$ et si l'homomorphisme ρ vient de l'action naturelle par translations à gauche.

Enfin, si $\xi \in \mathscr{X}(M)$ est un champ de vecteurs sur M et si $\beta : X \to \rho(X)$ est une section locale de classe C^∞, au-dessus d'un ouvert $X \subseteq M$, d'un fibré d'objets géométriques $(L^k(M) \times_\rho F, M, \pi_F)$, on peut définir la dérivée de Lie $L_\xi(\beta)(x)$, de β en un point $x \in X$ suivant le champ de vecteurs ξ, par

$$L_\xi(\beta)(x) = \frac{d}{dt}\{ \rho(\varphi_{-t})[\beta \circ \varphi_t(x)] \} |_{t=0}$$

où φ_t est le groupe à un paramètre de difféomorphismes locaux de M engendré par la coulée du champ de vecteurs ξ.

Une exposition plus détaillée a été présentée dans [*30*].

5. EXEMPLES D'APPLICATIONS PHYSIQUES

D'après les récents développements de la Physique Mathématique, on a compris que si on veut décrire d'une façon correcte le champ électromagnétique et ses transformations de jauge, on doit représenter le potentiel du champ au moyen d'une connection A sur un fibré principal $\mathbb{P}$, de groupe structural U(1), sur l'espace-temps M. Les champs chargés seront alors des sections de certains fibrés vectoriels complexes sur M, qui sont les fibrés des objets de type ρ associés à $\mathbb{P}$, où $\rho : U(1) \to Gl(m, \mathbb{C})$ est une représentation unitaire, de dimension finie m, du groupe U(1).

Lorsque M est une variété différentielle quelconque, on sait qu'on peut avoir plusieurs fibrés principaux $\mathbb{P}$ sur M, avec groupe structural U(1), qui ne sont pas isomorphes entre eux et que le nombre de fibrés principaux de ce type qui ne sont pas isomorphes dépend de la topologie de la variété M. Par conséquent, en général, on ne peut pas choisir univoquement le fibré principal $\mathbb{P}$ où sont définies les connexions A qui représentent tous les champs électromagnétiques physiquement admissibles sur un espace-temps donné. D'autre part, si on veut construire le tenseur d'impulsion-énergie du champ électromagnétique, on doit nécessairement supposer que le potentiel A est un objet géométrique. Cette dernière condition est certainement vérifiée lorsque le fibré principal $\mathbb{P}$ est aussi un fibré d'objets géométriques sur l'espace-temps M.

On peut donc se demander s'il y a des fibrés principaux $\mathbb{P}$, de groupe structural U(1), qui soient aussi des fibrés d'objets géométriques sur l'espace-temps. La réponse à cette question est positive. En effet, pour chaque variété M et pour chaque nombre réel r, on peut définir le fibré $U(M; r) = L^1(M) \times \rho_r U(1)$ des objets géométriques associés à $L^1(M)$

au moyen de l'homomorphisme $\rho_r : \mathrm{Gl}(n; \mathbb{R}) \to \mathrm{Diff}\,[\mathrm{U}(1)]$ défini par l'action

$$\tilde{\rho}_r : \mathrm{Gl}(n; \mathbb{R}) \times \mathrm{U}(1) \ni (g, u) \mapsto \exp\,[-\, ir \log |\det(g)|\,] u \in \mathrm{U}(1)$$

On vérifie alors aisément que chaque fibré U(M ; r) est doué d'une structure naturelle de fibré principal sur M, avec groupe structural U(1). Nous appellerons *fibré unitaire* (*canonique*) *associé à* M le fibré principal U(M) = U(M ; 1). Une définition différente, et plus compliquée, des fibrés U(M ; r) a été donnée par Haantjes et Laman dans [*19*], où ces fibrés ont été étudiés dans un contexte purement mathématique.

Remarquons que, pour chaque variété M et pour chaque nombre réel r, le fibré principal U(M ; r) est doué de sections globales, et il est donc isomorphe au fibré principal trivial M $\times$ U(1). En effet, lorsqu'on donne une forme volume au signe près $\omega_f = \pm |f(x)|\, d^n x$ sur la variété M (ce qui est toujours possible aussi dans le cas où M n'est pas orientable), on peut définir une section globale du fibré principal U(M ; r) à l'aide de

$$\sigma_{r,f} : \mathrm{M} \ni x \mapsto (x, \exp\,[ir \log |f(x)|\,]) \in \mathrm{U}(\mathrm{M}\,;\, r)$$

Même s'ils sont tous isomorphes entre eux comme fibrés principaux sur M, les fibrés principaux U(M ; r) ne sont pas équivalents comme fibrés d'objets géométriques sur M. A ce propos, il suffit d'observer que $(\Psi, \psi) : \mathrm{U}(\mathrm{M}, r) \to \mathrm{U}(\mathrm{M}, s)$ est un morphisme de fibrés d'objets géométriques si et seulement si l'application $\psi : \mathrm{U}(1) \to \mathrm{U}(1)$ vérifie la condition : $\psi(z^r u) = z^s \psi(u)$, pour tout $(z, u) \in \mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$. Pour trouver toutes les applications ψ qui vérifient la condition demandée, il faut distinguer entre les quatre cas suivants : (*i*) $r = 0$ et $s = 0$, dans ce cas toutes les applications ψ vérifient la condition demandée ; (*ii*) $r = 0$ et $s \neq 0$, dans ce cas il n'y a pas d'applications qui vérifient la condition demandée ; (*iii*) $r \neq 0$ et $s = 0$, dans ce cas seulement les applications constantes vérifient la condition demandée ; (*iv*) $r \neq 0$ et $s \neq 0$, dans ce cas il existe des applications qui vérifient la condition demandée si et seulement si $s/r = p \in \mathbb{Z}$ et on a nécessairement $\psi : u \mapsto u_p \psi(1)$. On a donc que les fibrés U(M ; r) et U(M ; s) sont isomorphes comme fibrés d'objets géométriques si et seulement si on a $r = \pm s$. Dans le cas où $1 < |s/r| = p \in \mathbb{Z}$, chaque morphisme est un revêtement à p feuillets ou, autrement dit, $\mathrm{U}(\mathrm{M}\,;\, r) \xrightarrow{\Psi} \mathrm{U}(\mathrm{M}\,;\, s)$ est un fibré principal avec groupe structural $\mathbb{Z}_p$. En résumé, nous avons une famille à un paramètre réel $\{\mathrm{U}(\mathrm{M}\,;\, r)\}_{r \geqslant 0}$ de fibrés d'objets géométriques qui ne sont pas équivalents et qui sont aussi des fibrés principaux de groupe structural U(1). Dans cette famille seul le fibré U(M ; 0) est un fibré d'objets géométriques trivial.

Lorsque $r \neq 0$, on peut démontrer que pour chaque connexion A sur le fibré U(M ; r) il y a au moins une connexion Γ sur $\mathrm{L}^1(\mathrm{M})$, et donc une connexion linéaire sur M, telle qu'on ait : $\mathrm{A} = ir\, \underline{\mathrm{tr}}(\Gamma)$, où $\underline{\mathrm{tr}}(\ \ )$ dénote l'opération de trace dans l'algèbre de Lie de $\mathrm{Gl}(n; \mathbb{R})$.

Dans les applications physiques, on porte beaucoup d'intérêt aux fibrés vectoriels complexes associés aux fibrés principaux U(M ; r), au moyen des représentations linéaires de U(1) sur $\mathbb{C}$. On sait que toutes les représentations linéaires de ce type viennent des homomorphismes

$$\bar{\rho}_k : \mathrm{U}(1) \ni u \mapsto u^{-k} \in \mathrm{U}(1) \subset \mathrm{Gl}(1 ; \mathbb{C})$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. Nous indiquerons par $\Phi_k(\mathrm{M} ; r)$ le fibré vectoriel $\mathrm{U}(\mathrm{M} ; r) \times_{\bar{\rho}_k} \mathbb{C}$ associé au fibré principal U(M ; r) au moyen de l'homomorphisme $\bar{\rho}_k$. Chaque fibré vectoriel $\Phi_k(\mathrm{M} ; r)$ est isomorphe comme fibré vectoriel d'objets géométriques au fibré vectoriel associé à $\mathrm{L}^1(\mathrm{M})$ au moyen de l'homomorphisme

$$\bar{\bar{\rho}}_s : \mathrm{Gl}(n ; \mathbb{R}) \ni g \mapsto \exp\left[-is \log |\det(g)|\right] \in \mathrm{U}(1) \subset \mathrm{Gl}(1 ; \mathbb{C})$$

où $s = kr$. Par analogie avec les densités scalaires de poids $p \in \mathbb{Z}$, nous dirons que les sections de $\Phi_k(\mathrm{M} ; r)$ sont des *densités scalaires de poids imaginaire* $p = ikr$. Étant donnée une connection Γ sur L(M) on a un opérateur de dérivation covariante

$$\nabla\varphi = d\varphi - ikr\, \underline{\mathrm{tr}}(\Gamma)\varphi$$

pour les sections φ des fibrés $\Phi_k(\mathrm{M} ; r)$. Du point de vue physique, on peut donc supposer que les champs scalaires chargés φ sont les sections des fibrés $\Phi_k(\mathrm{M} ; r)$.

Lorsque $\underline{e}$ est une charge élémentaire, on peut supposer que les champs scalaires chargés de charge $q = n\underline{e}\,(n \in \mathbb{Z})$ sont représentés par des densités scalaires de poids imaginaire $p = in$, c'est-à-dire par les sections de $\Phi_n(\mathrm{M} ; 1)$. Quand on change arbitrairement l'unité de mesure pour les charges électriques et on change aussi la convention pour les signes des charges, au lieu de la charge élémentaire $\underline{e}$ on aura une charge élémentaire $\underline{e}' = \underline{e}/r$ où $r \in \mathbb{R}^*$. On aura alors que les champs de charge $n\underline{e}$ seront représentés par les sections du fibré vectoriel $\Phi_n(\mathrm{M} ; r)$. On voit donc que, au choix près de l'unité de charge et du signe de la charge de l'électron, les champs scalaires chargés seront représentés par les sections des puissances tensorielles $\Phi_k(\mathrm{M} ; 1)\,(k \in \mathbb{Z})$ des fibrés vectoriels $\Phi_1(\mathrm{M} ; 1)$ et $\Phi_1(\mathrm{M} ; -1)$.

Remarquons que $\{ \Phi_k(\mathrm{M} ; 1) \}$ $(k \in \mathbb{Z})$ est un module abélien libre $\mathscr{A}(1)$ engendré sur $\mathbb{Z}$ par le fibré unitaire canonique U(M). Changer $\underline{e}$ en $\underline{e}' = \underline{e}/r$ correspond à changer le module libre $\mathscr{A}(1)$ avec le module libre $\mathscr{A}(r)$ engendré par U(M ; r).

Avoir supposé que les fibrés principaux avec groupe structural U(1) sont aussi des fibrés d'objets géométriques associés à $\mathrm{L}^1(\mathrm{M})$, nous a permis de donner une interprétation géométrique de la charge électrique qui ne peut pas être déduite si on considère seulement la structure différentielle de ces fibrés. En effet, même si les fibrés U(M ; r), et tous leurs fibrés vectoriels associés $\Phi_k(\mathrm{M} ; r)$, ont leur première classe de Chern nulle (et donc en termes physiques, ont une charge topologique nulle), ces fibrés ne sont pas équivalents entre eux comme fibrés d'objets géométriques. Ces fibrés sont engendrés par des représentations du groupe $Gl(n ; \mathbb{R})$ dans le groupe unitaire U(1); le poids de cette représentation détermine de façon univoque, au choix des unités de mesure près, la charge électrique du champ.

Enfin, on peut donc supposer que tous les champs électromagnétiques physiquement admissibles sur l'espace-temps M sont représentés par les connexions sur le fibré unitaire canonique U(M). Ce choix a récemment conduit à l'unification géométrique du champ électromagnétique et du champ de gravitation (voir [*31*]).

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] D. KRUPKA, A. TRAUTMAN, General Invariance of Lagrangian Structures: *Bulletin Acad. Polon. Sci., Math. astr. phys.*, t. **22**, 1974, p. 207-211.

[*2*] D. KRUPKA, A Setting for Generally Invariant Lagrangian Structures in Tensor Bundles; *Bulletin Acad. Polon. Sci., Math. astr. phys.*, t. **22**, 1974, p. 967-972.

[*3*] D. KRUPKA, A Geometric Theory of Ordinary First Order Variational Problems in Fibered Manifolds. I. Critical Sections. *Journal of Math. Anal. and Appl.*, t. **49**, 1975, p. 180-206.

[*4*] D. KRUPKA, A Theory of Generally Invariant Lagrangians for the Metric Fields. II. *Internat. J. of Theor. Phys.*, t. **15**, 1976, p. 949-959.

[*5*] D. KRUPKA, A Theory of Generally Invariant Lagrangians for the Metric Fields. I. *Internat. J. of Theor. Phys.*, t. **17**, 1978, p. 359-368.

[*6*] D. KRUPKA, Elementary Theory of Differential Invariants. *Arch. Math. 4, Scripta Fac. Sci. Nat. Ujep Brunensis*, t. **14**, 1978, p. 207-214.

[*7*] D. KRUPKA, Mathematical Theory of Invariant Interaction Lagrangians. *Czech. J. Phys.*, t. **B 29**, 1979, p. 300-303.

[*8*] D. KRUPKA, Reducibility Theorem for Differentiable Liftings in Fiber Bundles. *Arch. Math. 2, Scripta Fac Sci. Nat. Ujep Brunensis*, t. **15**, 1979, p. 93-106.

[*9*] D. KRUPKA, On the Lie Algebra of Higher Differential Groups. *Bulletin Acad. Polon. Sci. Math.*, t. **27**, 1979, p. 235-339.

[*10*] D. KRUPKA, *Differential Invariants* (preprint). University of Brno, Czechoslovakia, 1979.

[*11*] D. KRUPKA, *Natural Lagrangian Structures* (preprint). University of Brno, Czechoslovakia, 1979.

[*12*] J. F. POMMARET, *Systems of Partial Differential Equations and Lie Pseudogroups*. Gordon and Breach, New York, 1978.

[*13*] J. KIJOWSKI, W. M. TULCZYJEW, A Symplectic Framework for Field Theories. *Lecture Notes in Physics*, t. **107**, 1979, Springer-Verlag, Berlin.

[*14*] M. MODUGNO, Formulation of Analytical Mechanics in General Relativity. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **21**, 1974, p. 147-174.

[*15*] M. MODUGNO, On the Structure of Classical Kinematics. Absolute Dynamics. *Riv. Mat. Univ. Parma*, t. **5**, 1979, p. 249-264.

[*16*] M. MODUGNO, R. RAGIONIERI, G. STEFANI, Differential Pseudoconnections and Field theories. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **34**, 1981, p. 465-496.

[*17*] M. FERRARIS, M. FRANCAVIGLIA, C. REINA, Variational Principles and Geometric Theories of Gravitation (en préparation) 1983.

[*18*] J. HAANTJES, G. LAMAN. On the Definition of Geometric Objects. I. *Indag. Math.*, t. **15**, 1953, p. 208-215.

[19] J. HAANTJES, G. LAMAN, On the Definition of Geometric Objects. II. *Indag. Math.*, t. **15**, 1953, p. 216-222.

[20] J. A. SCHOUTEN, J. HAANTJES, On the Theory of Geometric Objects. *Proc. London Math. Soc.*, t. **42**, 1936, p. 356-376.

[21] C. EHRESMANN, Les prolongements d'une variété différentiable. I, II, III, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, t. **233**, 1951, p. 598-600, 777-779, 1081-1083.

[22] C. EHRESMANN, Structures locales et structures infinitésimales. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, t. **234**, 1952, p. 587-589.

[23] C. EHRESMANN, Les prolongements d'une variété différentiable. IV, V. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, t. **234**, 1952, p. 1028-1030, 1424-1425.

[24] C. EHRESMANN, Extension du calcul des jets aux jets non holonomes. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, t. **239**, 1954, p. 1762-1764.

[25] C. EHRESMANN, Les prolongements d'un espace fibré différentiable. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, t. **240**, 1955, p. 1755-1757.

[26] N. H. KUIPER, K. YANO, On Geometric Objects and Lie Groups of Transformations. *Indag. Math.*, t. **17**, 1955, p. 411-420.

[27] S. SALVIOLI, On the Theory of Geometric Objects. *J. Diff. Geom.*, t. **17**, 1972, p. 257-278.

[28] A. NIJENHUIS, *Theory of Geometric Objects.* Doctoral Thesis, Amsterdam, 1952.

[29] R. S. PALAIS, C.-L. TERNG, *Natural Bundles have Finite Order.* Topology, 1977, p. 271-277.

[30] M. FERRARIS, M. FRANCAVIGLIA, C. REINA, A Constructive Approach to Bundles of Geometric Objects on a Differentiable Manifold. *J. Math. Phys.*, t. **24**, 1983, p. 120-124.

[31] M. FERRARIS, J. KIJOWSKI, Unified Geometric Theory of Electromagnetic and Gravitational Interactions. *Journal of Gen. Rel. Grav.*, t. **14**, 1982, p. 37-47.

[32] M. FLATO, A. LICHNEROWICZ. Cohomologie des représentations définies par la dérivation de Lie et à valeurs dans les formes, de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs d'une variété différentiable. Premiers espaces de cohomologie. Applications. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, t. **291 A**, 1980, p. 331-335.

(Manuscrit reçu le 26 mars 1982)