ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JEAN-MARIE MORVAN

Quelques invariants topologiques en géométrie symplectique

Annales de l'I. H. P., section A, tome 38, nº 4 (1983), p. 349-370
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1983__38_4_349_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XXXVIII, n° 4, 1983, p. 349-370. *Physique théorique.*

Quelques invariants topologiques en géométrie symplectique

par

Jean-Marie MORVAN
Département de Mathématiques.
Faculté de Sciences d'Avignon, 84000 Avignon, France.

RÉSUMÉ. — Le présent travail est consacré à l'étude des invariants locaux et globaux définis en géométrie symplectique, sur les sous-variétés Lagrangiennes et les feuilletages.

Nous donnons en particulier un cadre général à l'invariant de Calabi, une interprétation Riemannienne de la classe de Maslov, et nous définissons une connexion canonique sur une variété munie de deux feuilletages Lagrangiens transverses.

Enfin, nous étudions les variétés munies d'une structure canonique (dans le sens de A. Lichnerowicz).

ABSTRACT. — This work studies local and global invariants in symplectic geometry. We give a general frame for the Calabi invariant, a Riemannian interpretation of the Maslov class, and we define a canonical connexion on a manifold endowed with two transverse Lagrangian foliations.

Finally, we study the manifolds endowed with a « structure canonique » (in the sense of A. Lichnerowicz).

Les variétés symplectiques sont le cadre naturel de la mécanique analytique classique. Nous nous intéressons ici aux invariants topologiques liés à une telle structure, introduits pour étudier différents problèmes de mécanique.

Ainsi, dans la première partie, nous généralisons l'invariant de Calabi, pour aborder l'étude des déformations des applications symplectiques.

Ce travail est une généralisation directe des techniques utilisées par Weinstein, Moser, et plus récemment, Banyaga, qui montrent des théorèmes de points fixes, pour des sous-variétés Lagrangiennes et coïsotropes. Il nous est apparu que ces techniques peuvent permettre d'étudier les points fixes des déformations symplectiques.

Dans la deuxième partie, nous étudions les sous-variétés Lagrangiennes compactes de $\mathbb{E}^{2n} \simeq C^n$, muni de sa structure symplectique canonique. Bien que l'on ne sache pas classifier de telles sous-variétés, nous en donnons des restrictions topologiques en utilisant le fait que le fibré tangent et le fibré normal d'une sous-variété Lagrangienne sont isomorphes.

Dans la troisième partie, nous nous intéressons à la classe de Maslov d'une immersion Lagrangienne à valeur dans l'espace $\mathbb{E}^{2n} \simeq C^n$. Nous relions cette classe au vecteur de courbure moyenne de l'immersion, ce qui nous permet de donner une interprétation Riemannienne de cette classe.

P. Dazord a étudié dans [Da_2] les feuilles d'un feuilletage Lagrangien. Nous complétons cette étude dans la quatrième partie, où nous montrons que l'existence de deux feuilletages Lagrangiens transverses permet de caractériser la variété ambiante, dans certains cas.

Enfin, la cinquième partie étudie les structures canoniques introduites par A. Lichnerowicz. Nous y définissons la notion de structure canonique forte, plus restrictive, et nous en donnons une caractérisation topologique, répondant ainsi à une question de C. Marle.

Certains résultats montrés ici ont été annoncés dans deux notes ([M_1], [M_2]). Je tiens à remercier les professeurs P. Dazord, J. Grifone, A. Lichnerowicz, C. Marle avec qui j'ai eu de fructueuses discussions.

Dans toute la suite, nous entendons par variété symplectique une variété différentiable C^∞-munie d'une 2-forme fermée non dégénérée Ω.

1. DÉFORMATION DES APPLICATIONS SYMPLECTIQUES

a) **Introduction.**

Un théorème classique de Weinstein, [We], affirme que deux sous-variétés Lagrangiennes compactes et simplement connexes, « assez proches », se coupent. Pour étudier les oscillateurs harmoniques en utilisant la théorie des systèmes Hamiltoniens, Moser a étendu ce résultat en étudiant les points fixes d'une déformation d'une immersion Lagrangienne ou coïsotrope d'une variété symplectique [Mo]. Puis, Banyaga, mettant en évidence l' « invariant de Calabi généralisé », a encore étendu le théorème de Moser, [Ba]. Nous tentons ici de donner un cadre général à une telle étude, en étudiant simplement les déformations d'une application quelconque à valeur dans une variété symplectique.

b) **Position du problème.**

Considérons une C^1 application f, d'une variété M dans une variété symplectique $(\tilde{M}, \Omega)$. Soient H et K deux homotopies C^1 :

$$H : [0,1] \times M \to \tilde{M},$$
$$K : [0,1] \times M \to \tilde{M},$$

telles que $H(0, m) = K(0, m) = f(m)$, $\forall m \in M$. On pose $h_t(m) = H(t, m)$ $k_t(m) = K(t, m)$, $\forall m \in M$. Nous appelons h_t et k_t des déformations de f, et

$$\dot{h}_{t_m} = \left(\frac{dh_t}{dt}\right)_m, \qquad \dot{k}_{t_m} = \left(\frac{dk_t}{dt}\right)_m$$

les champs de vecteurs de déformation. Nous nous proposons d'étudier le problème suivant : Existe-t-il des points $m \in M$ tels que les vecteurs de déformation $\dot{h}_{0_m}$ et $\dot{k}_{0_m}$ coïncident ?

REMARQUE 1. — Si les homotopies sont suffisamment régulières pour satisfaire la propriété $\dot{h}_{0_m} = \dot{k}_{0_m} \Rightarrow h_t(m) = k_t(m)$, $\forall t$, le point m est un point fixe pour la déformation. Cette propriété est en particulier vérifiée si la déformation est définie à partir d'une application exponentielle relative à une connexion quelconque sur $\tilde{M}$:

$$h_t(m) = \exp_{f(m)} t\dot{h}_0, \qquad k_t(m) = \exp_{f(m)} t\dot{k}_0 .$$

c) **Définitions et notations.**

i) *Équivalence de deux homotopies :* Nous disons que deux homotopies de f, h_t et k_t sont équivalentes si $h_1^*(\Omega) = k_1^*(\Omega)$.

ii) *Topologie sur* $\mathscr{F}_1(M, \tilde{M})$: Suivant [Mu], nous munissons l'espace $\mathscr{F}_1(M, \tilde{M})$ des applications C^1 de M dans $(\tilde{M}, \Omega)$ de la C^1-topologie, construite à partir de deux plongements arbitraires de M et $\tilde{M}$ dans un espace euclidien.

iii) *Structure canonique* sur $\tilde{M} \times \tilde{M}$: $\tilde{M}$ étant une variété symplectique, nous munissons $\tilde{M} \times \tilde{M}$ de la structure symplectique canonique $\Omega_{\tilde{M} \times \tilde{M}}$ définie par $\Omega_{\tilde{M} \times \tilde{M}} = \Pi_2^*(\Omega) - \Pi_1^*(\Omega)$, où Π_1 et Π_2 sont les projections canoniques de $\tilde{M} \times \tilde{M}$ sur $\tilde{M}$. Si Δ est la diagonale de $\tilde{M} \times \tilde{M}$, Δ est lagrangienne. Par suite, le théorème de Kostant-Souriau (cf. [We] par exemple) permet d'affirmer l'existence d'un symplectomorphisme i d'un voisinage U de Δ sur $T^*\tilde{M}$. Rappelons que, si U est un ouvert de trivialisation de $\tilde{M}$,

$(x_1 \dots x_n)$ les coordonnées d'un point de M, et $(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n)$ les coordonnées d'un covecteur de M, dans U, ω s'écrit localement

$$\omega = x_1 dy_1 + \dots + x_n dy_n$$

Posons $\beta = i^*(\omega)$. β est une 1-forme sur U, nulle sur la diagonale Δ.

iv) *1-forme deMoser :* Si h_t et k_t sont assez proches de f, au sens de la topologie de $\mathscr{F}_1(\mathrm{M}, \tilde{\mathrm{M}})$, on peut considérer que l'application μ_t de M dans $\mathrm{U} \subset \tilde{\mathrm{M}} \times \tilde{\mathrm{M}}$, (où U est défini en (*iii*)), en posant $\mu_t = (h_t, k_t)$. $\mu_t^*(\beta)$ est alors une 1-forme sur M.

Nous appelons $\mu_1^*(\beta)$ la 1-forme de Moser. (Cette forme a été construite auparavant par Moser et Banyaga ([Mo], [Ba]), lorsque ces auteurs étudient les immersions coïsotropes).

v) *Distribution de nullité :* Considérons le fibré image réciproque de f, de base M, $f^*(\mathrm{T}\tilde{\mathrm{M}})$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} f^*(\mathrm{T}\tilde{\mathrm{M}}) \arrow[rr, "v"] \arrow[dr] & & \mathrm{T}^*\mathrm{M} \arrow[dl] \\ & \mathrm{M} & \end{tikzcd}$$

où v est le morphisme de fibré vectoriel défini par

$$v(\mathrm{X}) = \Omega(\mathrm{X}, df)$$

Son noyau N est appelé *distribution de nullité* de f.

d) **L'invariant de Calabi généralisé.**

LEMME 1. —

i)
$$h_1^*(\Omega) - f^*(\Omega) = d\int_0^1 h_t^*(i(\dot{h}_t)\Omega)dt,$$
$$k_1^*(\Omega) - f^*(\Omega) = d\int_0^1 k_t^*(i(\dot{k}_t)\Omega)dt.$$

ii)
$$\frac{d}{dt}\mu_t^*(\beta) = h_t^*(i(\dot{h}_t)\Omega) - k_t^*(i(\dot{k}_t)\Omega) + d\mu_t^*(i(\dot{\mu}_t)\beta).$$

iii) *En particulier*

$$\left[\frac{d}{dt}\mu_t^*(\beta)\right]_0 = \Omega(\dot{h}_0 - \dot{k}_0, df).$$

iv)
$$\mu_1^*(\beta) = \int_0^1 h_t^*(i(\dot{h}_t)\Omega)dt - \int_0^1 k_t^*(i(\dot{k}_t)\Omega)dt + d\int_0^1 \mu_t^*(i(\dot{\mu}_t)\beta)dt.$$

Démonstration du lemme 1. — Rappelons la formule classique suivante ([G. S], p. 110) :

soit Ω_t une famille de forme à 1 paramètre sur M. Si h_t est une famille d'applications à 1 paramètre de M dans $\tilde{M}$, on a :

$$\frac{d}{dt} h_t^*(\Omega_t) = h_t^* \frac{d\Omega_t}{dt} + h_t^*(i(\dot{h}_t)d\Omega_t) + d h_t^*(i(\dot{h}_t)\Omega_t) . \quad (*)$$

i) Dans le cas qui nous intéresse, Ω_t est constant : $\Omega_t = \Omega$ pour tout t. $(*)$ s'écrit donc

$$\frac{d}{dt} h_t^*(\Omega) = h_t(i(\dot{h}_t)d\Omega) + dh_t(i(\dot{h}_t)\Omega) .$$

En intégrant sur le segment $[0, 1]$ et en utilisant le fait que $h_0 = f$, on obtient

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} h_t^*(\Omega) = h_1^*(\Omega) - f^*(\Omega) = \int_0^1 dh_t(i(\dot{h}_t)\Omega)dt = d \int_0^1 h_t^*(i(\dot{h}_t)\Omega)dt .$$

On ferait de même pour k_t.

$$ii) \ \frac{d}{dt} \mu_t^*(\beta) = \frac{d}{dt}(h_t, k_t)^*(\beta) = \frac{d}{dt}(h_t^*, k_t^*)(\beta)$$
$$= h_t^*(i(\dot{h}_t)d(\beta)) - k_t^*(i(\dot{k}_t)d(\beta)) + d\mu_t^*(i(\dot{\mu}_t)\beta)$$
$$= h_t^*(i(\dot{h}_t)\Omega) - k_t(i(\dot{k}_t)\Omega) + d\mu_t^*(i(\dot{\mu}_t)\beta) .$$

iii) et *iv*) se déduisent de (*ii*).

COROLLAIRE 1. — *Si h_t et k_t sont équivalentes, la 1-forme*

$$\int_0^1 h_t^*(i(\dot{h}_t)\Omega)dt - \int_0^1 k_t^*(i(\dot{k}_t)\Omega)dt$$

est fermée.

Démonstration du corollaire. — On déduit du lemme 1 – (*i*) que

$$h_1^*(\Omega) - k_1^*(\Omega) = d\left(\int_0^1 h_t^*(i(\dot{h}_t)\Omega)dt - \int_0^1 k_t^*(i(\dot{k}_t)\Omega)dt \right).$$

Si h_t et k_t sont équivalentes, cette quantité est nulle. Ceci nous conduit à poser la

DÉFINITION 1. — *Soit h_t et k_t deux homotopies de f, équivalentes. Nous appelons invariant de Calabi généralisé, associé à h_t et k_t, la classe de cohomologie $\chi(h_t, k_t) \in H^1(M)$ de la forme fermée*

$$\int_0^1 h_t^*(i(\dot{h}_t)\Omega)dt - \int_0^1 k_t^*(i(\dot{k}_t)\Omega)dt .$$

REMARQUE 2. — *i*) $\chi(h_t, k_t)$ ne dépend que de h_1, k_1 (cf. lemme 1 (*iv*)).

ii) Si l'on prend pour h_t une famille de difféomorphismes de M et pour k_t l'isotopie triviale : $k_t = f$ pour tout t, on retrouve l'invariant de Calabi classique (cf. aussi [Ba]).

e) Un théorème sur les déformations symplectiques.

Nous allons montrer le

THÉORÈME 1. — *Soit une application d'une variété* M *compacte dans une variété symplectique* $(\tilde{M}, \Omega)$. *Soit* h_t, k_t, *deux homotopies* C^1 *de* f, *suffisamment proche de* f *(au sens de la topologie* C^1). *On suppose que :*

(1) *L'invariant de Calabi généralisé* $\chi(h_t, k_t)$ *est nul ;*

(2) $\dot{h}_0 - \dot{k}_0$ *appartient à un sous-fibré vectoriel transverse à N dans* $f^*(T\tilde{M})$. *Alors il existe au moins 2 points* $m \in M$, *tels que* $\dot{h}_{0_m} = \dot{k}_{0_m}$.

Remarque sur le théorème. — Si l'on suppose de plus que les déformations sont exponentielles :

$$h_t(m) = (\exp t\dot{h}_0)_m, \qquad k_t(m) = (\exp t\dot{k}_0)_m,$$

et que k_t laisse $f(M)$ globalement invariant, on peut alors conclure que $h_1(M)$ et $f(M)$ ont au moins 2 points d'intersection. Le théorème de Moser [Mo] et celui de Banyaga [Ba] s'interprète donc comme un cas particulier de celui-ci :

THÉORÈME ([Ba]). — *Soit* $(\tilde{M}, \Omega)$ *une variété symplectique et* $f : M \to \tilde{M}$ *une immersion coïsotrope d'une variété compacte. Soit h une application hamiltonienne « spécialement petite ». Alors il existe au moins 2 points* $p \in M$ *tels que* $h(p) \in L_p$, *où* L_p *est la feuille passant par p définie par la distribution intégrable de nullité.*

(On se référera à [Ba] pour les notions précises d'application hamiltonienne spécialement petite).

f) Démonstration du théorème 1.

L'hypothèse 1 et le lemme 1 (*iv*) permettent d'affirmer que la forme de Moser $\mu_1^*(\beta)$ est exacte. Par conséquent, puisque M est compacte, $\mu_1^*(\beta)$ s'annule en 2 points au moins. Il reste donc à montrer le lemme suivant, dont la démonstration généralise directement celle de Moser [Mo] :

LEMME 2. — *Sous l'hypothèse* (2) *du théorème, on a*

$$\mu_1^*(\beta)_m = 0 \Rightarrow \dot{h}_{0_m} = \dot{k}_{0_m}.$$

Démonstration du lemme 2. — Munissons M d'une métrique induite par un plongement quelconque de M dans un espace euclidien, et appliquons le théorème de la moyenne à l'application

$$\left(\mu_\cdot^*(\beta)_m + t\frac{d}{dt}\mu_\cdot^*(\beta)\right)_{\substack{t=0\\m}}$$

Nous obtenons :

$$\left\| \mu_1^*(\beta) + \left(\frac{d}{dt}\mu_t^*(\beta)\right)_{t=0} - \mu_0^*(\beta) \right\|_m \leqslant \operatorname{Sup}_t \left\| \frac{d}{dt}\mu_t^*(\beta) - \left(\frac{d}{dt}\mu_0^*(\beta)\right)_{t=0} \right\|_m .$$

Utilisons le lemme 1 (*iii*). Il vient

$$\| \mu_1^*(\beta) - \mu_0^*(\beta) + \Omega(\dot{h}_0 - \dot{k}_0, df.) \|_m \leqslant \operatorname{Sup}_t \left\| \left(\frac{d}{dt}\mu_t^*(\beta)\right)_t - \Omega(\dot{h}_0 - \dot{k}_0, df.) \right\|_m .$$

Nous avons $\mu_0^*(\beta)_m = 0$. Si $\mu_1^*(\beta)_m$ est nul, nous obtenons

$$\| \Omega(\dot{h}_0 - \dot{k}_0, df. \|_m \leqslant \operatorname{Sup}_t \left\| \frac{d}{dt}\mu_t^*(\beta)_t - \Omega(\dot{h}_0 - \dot{k}_0, df.) \right\|_m .$$

D'autre part, l'hypothèse 2 du théorème permet d'affirmer l'existence d'une constante C telle que $\operatorname{Sup}_{X \in TM, \|X\| = 1} \Omega(\dot{h}_0 - \dot{k}_0, df.) \geqslant C \| \dot{h}_0 - \dot{k}_0 \|$ en tout point de M. Si les déformations sont assez petites au sens de la C^1-topologie de $\mathscr{F}_1(M, \tilde{M})$, pour que

$$\operatorname{Sup}_t \left\| \frac{d}{dt}\mu_t^*(\beta) - \Omega(\dot{h}_0 - \dot{k}_0, df.) \right\|$$

soit inférieur à $\eta \| \dot{h}_0 - \dot{k}_0 \|$, où η est strictement inférieur à C, on peut alors conclure que $\dot{h}_{0_m} = \dot{k}_{0_m}$. Le théorème est ainsi démontré.

2. SOUS-VARIÉTÉS LAGRANGIENNES. RESTRICTIONS TOPOLOGIQUES

a) Introduction et position du problème.

La géométrie symplectique est un cadre naturel de la théorie des équations aux dérivées partielles. Ainsi ont été introduites les notions de sous-variétés Lagrangiennes, feuilletages Lagrangiens, d'abord dans l'espace cotangent d'une variété, muni de sa structure symplectique canonique, puis plus généralement, dans une variété symplectique quelconque. Bien qu'on ne sache pas classifier les sous-variétés Lagrangiennes compactes de $\mathbb{E}^n \simeq \mathbb{C}^n$, nous en donnons, dans ce paragraphe, des restrictions topologiques.

b) Définition des sous-variétés Lagrangiennes.

Considérons une variété symplectique quelconque $(\tilde{M}^{2n}, \Omega)$. Donnons la

DÉFINITION 2. — *Une sous-variété* M^n *de dimension* n*, de* $\tilde{M}^{2n}$*, est dite Lagrangienne si, en tout point* m *de* M^n*, l'espace tangent* T_mM^n *satisfait :*

$$\Omega_m(X, Y) = 0 \qquad \forall X, Y \in T_mM^n .$$

c) Structure presque complexe.

Une structure presque complexe sur une variété M^{2n} de dimension $2n$ est la donnée d'un tenseur J de type $(1, 1)$ tel que $J^2 = -Id$. On sait que si Ω est une structure symplectique sur M^{2n}, il existe des métriques Riemanniennes g et des structures presque-complexes J satisfaisant

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY) \qquad \forall X, Y \in TM^{2n} .$$

g et J sont dites adaptées à Ω, [We].

d) Structure complexe.

Considérons une variété complexe M de dimension complexe n. Un système de coordonnées locales peut s'écrire $(z^1, \ldots, z^n)$ avec $z^j = x^j + iy^j$. M est naturellement munie d'une structure de variété réelle de dimension $2n$, dont un système de coordonnées locales est $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$, et d'une structure presque complexe J, qui est la multiplication par i.

En particulier, J n'a pas de torsion [K. N].

Enfin, nous utiliserons souvent, dans la suite, l'espace complexe $\mathbb{C}^n$, identifié à l'espace Euclidien $\mathbb{E}^{2n}$, muni de sa structure complexe canonique J et de sa forme symplectique canonique Ω. Si $(x_1, \ldots, x_n, Jx_1, \ldots, Jx_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{E}^{2n}$,

$$\Omega = dx_1 \Lambda d(Jx_1) + \ldots + dx_n \Lambda d(Jx_n)$$

Nous noterons $\langle , \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{E}^{2n}$.

e) Exemples de sous-variétés Lagrangiennes.

i) Considérons une variété M. Si l'on munit T^*M de sa structure symplectique canonique, l'image $s(M)$ d'une 1-forme s est Lagrangienne dans T^*M si et seulement si s est fermée.

ii) Considérons le cercle S^1 dans $\mathbb{E}^2 \simeq \mathbb{C}$. Le tore $\underbrace{S^1 x \ldots x S^1}_{n-\text{fois}} \subset \underbrace{\mathbb{C} x \ldots x \mathbb{C}}_{n-\text{fois}}$ est Lagrangien.

Les travaux de M. Kon et K. Yano, en géométrie Riemannienne, ont montré que l'on peut caractériser le tore de la façon suivante ([K. Y.]) :

THÉORÈME [K. Y]. — *Une sous-variété de dimension n, compacte, Lagrangienne de* $\mathbb{E}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$, *dont le fibré normal est plat (pour le produit scalaire canonique), est un tore* $S^1 x \ldots x S^1$.

Il est facile de montrer, en utilisant un résultat de R. Walden, [Wa], que toute surface complète, Lagrangienne, plongée dans $\mathbb{E}^4 = \mathbb{C}^2$, à seconde forme fondamentale parallèle, ([Ch]), est soit un plan, soit le produit d'un cercle par une droite, soit un tore. (Ce ne peut être une sphère à cause du corollaire 2).

iii) Le théorème de Liouville, sur les familles de fonctions en involutions permet également de construire des sous-variétés Lagrangiennes difféomorphes au tore. Rappelons que deux fonctions sont en involution si $\Omega(df, dg) = 0$.

THÉORÈME (Liouville). — *Soit* $(f_1 \ldots f_n)$ *une famille de n fonctions réelles* C^∞ *en involution, sur une variété symplectique* (M^n, Ω). *Soit a une valeur régulière de* $f = (f_1 \ldots f_n)$ *et* N_a *une composante connexe compacte non vide de* $f^{-1}(a)$. *Alors,* N_a *est une sous-variété Lagrangienne de* M^n *difféomorphe au tore* $T^n = S^1 x \ldots x S^1$.

iv) L'application $f : E^n \to E^{2n-2}$ définie par

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 2x_1x_n, \ldots, 2x_{n-1}x_n)$$

induit une immersion Lagrangienne de la sphère S^{n-1} dans E^{2n-2}. Cette immersion a un unique point d'autointersection :

$$f(0, 0, \ldots, -1) = f(0, 0, \ldots, 1),$$

ce qui est en accord avec le corollaire 2. Ce procédé de construction se généralise et permet d'obtenir des sous-variétés Lagrangiennes de l'espace cotangent d'une variété, à partir de famille de fonctions sur cette variété, [We].

f) **Les théorèmes.**

Nous allons montrer de façon très élémentaire les théorèmes suivants :

THÉORÈME 2. — *Soit* M^n *une sous-variété Lagrangienne compacte orientée de* $\mathbb{E}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$. *Notons* $\chi(M^n)$ *sa caractéristique d'Euler. Alors le nombre algébrique d'autointersections de* M^n *est égal à* $\dfrac{\chi(M^n)}{2}$.

THÉORÈME 3. — *Les classes de Stiefel-Whitney d'une sous-variété Lagrangienne compacte de* $\mathbb{E}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$ *sont toutes de carré nul.*

Du théorème 2, nous déduisons les

COROLLAIRE 2. — *La caractéristique d'Euler de toute sous-variété Lagrangienne plongée, compacte, orientée, de* $\mathbb{E}^{2n}$ *est nulle.*

COROLLAIRE 3. — *Toute surface Lagrangienne compacte orientée plongée dans* $\mathbb{E}^4 \simeq \mathbb{C}^2$ *est homéomorphe à un tore.*

g) **Démonstration des théorèmes 2 et 3.**

Notons, pour toute variété M isométriquement immergée dans $\mathbb{E}^{2n}$, $T^{\perp}M$ le fibré normal à M. Les théorèmes se déduisent facilement des lemmes suivants :

LEMME 3. — *Si* M^n *est une sous-variété Lagrangienne de* $\mathbb{E}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$, *alors* TM^n *et* $T^{\perp}M^n$ *sont isomorphes.*

En effet, l'isomorphisme J envoie TM^n sur $T^{\perp}M^n$.

LEMME 4 [Wh]. — *Le nombre algébrique d'autointersections d'une variété compacte* M^n *dans* $\mathbb{E}^{2n}$ *égale* $\frac{1}{2}\chi(T^{\perp}M^n)$.

Pour montrer le théorème 3, remarquons que

$$TM^n \oplus T^{\perp}M^n = TM^n \oplus J(TM^n)$$

est un fibré trivial. Par suite les nombres de Stiefel Whitney $\omega_i(TM^n \oplus T^{\perp}M^n)$, $0 < i \leqslant n$, sont tous nuls [M. S]. D'après le lemme 3, $\omega_i(TM^n) = \omega_i(T^{\perp}M^n)$.

Or $\omega_k(TM^n \oplus T^{\perp}M^n) = \sum_{i=0}^{k} \omega_i(TM^n).\ \omega_{k-i}(T^{\perp}M^n)$.

Par conséquent, nous obtenons

$$\omega_2(TM^n) \oplus \omega_1(TM^n)^2 \oplus \omega_2(TM^n) = 0\,.$$

Puisque les classes de Stiefel Whitney sont à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, nous en déduisons que $\omega_1(TM^n)^2 = 0$. De même,

$$\omega_4(TM^n) \oplus \omega_3(TM^n)\omega_1(TM^n) + \omega_2(TM^n)^2 + \omega_1(TM^n)\omega_3(TM^n) + \omega_4(TM^n) = 0\,.$$

D'où $\omega_2(TM^n)^2 = 0$.

Le théorème 2 s'en déduit par récurrence.

Le corollaire 3 est une conséquence immédiate du théorème 2.

3. UNE INTERPRÉTATION RIEMANNIENNE DE LA CLASSE DE MASLOV D'UNE SOUS-VARIÉTÉ LAGRANGIENNE

a) Introduction et position du problème.

Les solutions d'une équation aux dérivées partielles s'interprètent, en géométrie symplectique, comme des sous-espaces Lagrangiens L de T*M. Les singularités des projections de L sur M s'étudient grâce à la classe de Maslov, invariant cohomologique attaché à la sous-variété L. Nous donnons ici une interprétation Riemannienne de cette classe, dans le cas le plus simple, où la sous-variété L est une sous-variété Lagrangienne de $\mathbb{C}^n = \mathbb{E}^{2n}$ l'espace Euclidien muni de son produit scalaire habituel $g = \langle , \rangle$ et de sa 2-forme symplectique canonique

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^{n+1} + \ldots + \omega^n \wedge \omega^{2n},$$

(si $\omega^1 \ldots \omega^{2n}$ est une base orthonormée de $T^*\mathbb{E}^{2n}$).

b) Rappel sur les sous-variétés Riemanniennes.

Considérons $f : M^n \to (E^{2n}, g, \Omega)$ une immersion Lagrangienne d'une variété M^n de dimension n, à valeur dans $\mathbb{E}^{2n}$. Munissons M^n de la métrique $f^*(g)$. Notons encore cette métrique f est ainsi une immersion isométrique. Si $\tilde{\nabla}$ est la connexion triviale sur $\mathbb{E}^{2n}$ et ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à g sur M^n, introduisons de façon habituelle la seconde forme fondamentale σ

$$\sigma : TM^n \times TM^n \to T^{\perp}M^n$$

(tenseur symétrique à valeur dans le fibré normal pour g) par

$$\sigma(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \qquad \forall X, Y \in TM^n.$$

(Si γ est une géodésique sur M^n, $\| \sigma(\gamma', \gamma') \| = \| \tilde{\nabla}_{\gamma}, \gamma' \|$ est la courbure de la courbe γ dans $\mathbb{E}^{2n}$). On note H la trace de σ. H est le champ de vecteur normal appelé « champ de vecteur courbure moyenne ». Si H est nul, f est dite minimale (cf. [Ch] pour l'étude des sous-variétés Riemanniennes).

c) La grassmannienne Lagrangienne $L(\mathbb{E}^{2n})$ [G. S.].

Désignons par $L(\mathbb{E}^{2n})$ l'espace des n-plans Lagrangiens de $\mathbb{E}^{2n} = \mathbb{C}^n$. L'espace des transformations unitaires $U(n)$ agit transitivement sur $L(\mathbb{E}^{2n})$. De façon claire, l'ensemble des transformations unitaires conservant globalement un n-plan Lagrangien s'identifie à $O(n)$, l'espace des transformations orthogonales. Par suite $L(\mathbb{E}^{2n})$ s'identifie à l'espace homogène $U(n)/O(n)$. L'application $(\det)^2$ détermine une fibration canonique de $U(n)/O(n)$ sur S^1. Les fibres sont isomorphes à $SU(n)/SO(n)$, simplement connexe. En conséquence, le premier groupe de cohomologie de $L(\mathbb{E}^{2n})$ à valeur dans $\mathbb{Z}$, $H^1(L(\mathbb{E}^{2n}), \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

D'autre part, l'espace tangent en un point p de $L(E^{2n})$ s'identifie au quotient $\mathscr{U}(n)/\mathscr{O}(n)$ où $\mathscr{U}(n)$ désigne l'espace des matrices antihermitiennes, et $\mathscr{O}(n)$ l'espace des matrices antisymétriques.

d) **La classe de Maslov** [G. S.].

Considérons l'application de Gauss G_f d'une immersion Lagrangienne $f: M^n \to \mathbb{E}^{2n}$. G_f est une application de M^n à valeur dans $L(\mathbb{E}^{2n})$. L'image d'un point $m \in M^n$ est le plan tangent à m, $T_m M^n$, ramené à l'origine. Nous avons la suite suivante :

$$M^n - G_f \to L(E^n) \simeq U(n)/O(n) \xrightarrow{\det^2} S^1 .$$

Si $\alpha = \dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{dz}{z}$ désigne la forme volume de S^1, notons $\beta = (\det^2)^* (\alpha)$ et considérons la classe de cohomologie entière m déterminée par la forme $G_f^*(\beta)$.

Nous avons

$$m = [(G_f^* \circ (\det^2)^*)(\alpha)] \in H^1(M^n, \mathbb{Z})$$

($[\omega]$ désigne la classe de cohomologie de la forme ω).

m est la classe de Maslov de l'immersion f.

Une étude précise de cette classe montre qu'elle permet de « compter » sur un lacet de M^n le nombre de points où TM^n n'est pas transverse à un sous-espace Lagrangien fixé une fois pour toute. (cf. [Da₁] et [G. S]). Nous n'aborderons pas ce point de vue ici.

e) **Le théorème.**

Nous nous proposons de montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — *Soit* $f : (M^n, g) \to (E^{2n}, g, \Omega)$ *une immersion isométrique Lagrangienne d'une variété* M^n *dans l'espace euclidien* $\mathbb{E}^{2n}$, *muni de sa structure symplectique canonique. Alors la classe de Maslov m de l'immersion f est représentée par la 1-forme fermée* $\dfrac{1}{\pi} i(H)\Omega$, *où* H *désigne le champ de vecteur de courbure moyenne de l'immersion et i le produit intérieur.*

Nous en déduisons immédiatement les corollaires suivants :

COROLLAIRE 4. — *La classe de Maslov d'une immersion Lagrangienne minimale dans l'espace euclidien est nulle.*

COROLLAIRE 5. — *Si* (M^n, g) *est une sous-variété Lagrangienne de* $(\mathbb{E}^{2n}, \Omega)$ *de vecteur de courbure moyenne* H, $\left[\frac{1}{\pi} i(H)\Omega\right] \in H^1(M^n, \mathbb{Z})$.

f) Démonstration du théorème.

Nous utilisons les lemmes suivants :

LEMME 5. — L*'espace tangent* $T_P(L(E^{2n}))$ *au-dessus d'un n-plan* P *s'identifie à l'espace des endomorphismes* L *de* P *dans* $P^\perp$, *tels que :*

$$\langle L(X), J(Y) \rangle = \langle L(Y), J(X) \rangle, \qquad \forall X, Y \in P .$$

Démonstration du lemme 5. — $T_P(L(E^{2n}))$ s'identifie, nous l'avons vu à $\mathcal{U}(n)/\theta(n)$. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormée réelle de P, et $\theta^1, \ldots, \theta^n$ sa base duale. Une base complexe de $\mathcal{U}(n)/\theta(n)$ est constituée par l'ensemble $\{ \theta^k \otimes e_k, i\theta^1 \otimes e_m - i\theta^m \otimes e_1 \}$. L'application φ définie par :

$$\varphi(\theta^k \otimes e_k) = \theta^k \otimes Je_k ,$$
$$\varphi(i(\theta^1 \otimes e_m) - \theta^m \otimes e_1) = \theta^1 \otimes Je_k - \theta^m \otimes Je_1 .$$

permet de construire, par linéarité, un homomorphisme injectif de $T_P(L(E^{2n}))$ dans End $(P, P^\perp)$. Remarquons à présent que J peut être lui-même considéré comme un vecteur tangent invariant de $L(\mathbb{E}^{2n})$. Notons $\tilde{J}$ la 1-forme sur $L(\mathbb{E}^{2n})$ associé à J dans la dualité définie par la métrique. Nous avons le :

LEMME 6. — $\tilde{J} \in T^*(L(E^{2n}))$ *est fermée. Avec les notations de 1, nous avons :*

$$[(\det{}^2)^*(\alpha)] = \frac{1}{\pi} [\tilde{J}] .$$

Démonstration du lemme 6. — Au-dessus d'un n-plan de $L(\mathbb{E}^{2n})$, l'espace tangent $T_PL(\mathbb{E}^{2n})$ s'identifie à la somme directe orthogonale $\mathscr{A} \oplus \mathbb{R}J$, où $\mathscr{A}$ désigne l'espace des matrices antihermitiennes de trace nulle (noyau de $d(\det^2)$), et J est la matrice identité dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de P et $(Je_1, \ldots, Je_n)$ de $P^\perp$. D'autre part, l'application tangente à $\det^2$ est donnée par $d(\det^2)(Z) = 2\,\mathrm{Trace}(Z)$, $\forall Z \in \mathcal{U}(n)/\theta(n)$. Donc si :

$$X \in \mathscr{A}, \qquad (\det{}^2)^*(\alpha)(X) = 2\alpha(\mathrm{Trace}(X)) = 0 = \langle J, X \rangle = \tilde{J}(X),$$

si :

$$X = J, (\det{}^2)^*(\alpha)(J) = 2(\mathrm{Trace}(J)) = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}\langle \tilde{J}, J \rangle = \frac{1}{\pi}\tilde{J}(J) .$$

Par suite $(\det^2)^*(\alpha) = 1/\pi\, \tilde{J}$ et $\tilde{J}$ est fermée comme image réciproque d'une forme fermée. Soit maintenant $f:(\mathrm{M}^n, g) \to (\mathbb{E}^{2n}, g, \Omega)$ une immersion isométrique Lagrangienne.

LEMME 7. — *Le fibré* $\mathrm{G}_f^{-1}(\mathrm{T}(\mathrm{L}(\mathrm{E}^{2n})))$ *est isométrique au sous-espace du produit tensoriel* $\mathrm{T}^*\mathrm{M}^n \otimes \mathrm{T}^\perp\mathrm{M}^n$, *constitué par les tenseurs vérifiant :*

$$\langle \mathrm{L}(\mathrm{X}), \mathrm{J}(\mathrm{Y}) \rangle = \langle \mathrm{L}(\mathrm{Y}), \mathrm{J}(\mathrm{X}) \rangle, \qquad \forall \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{TM}^n.$$

Démonstration du lemme 7. — Plaçons-nous au-dessus d'un point $m \in \mathrm{M}^n$. D'après le lemme, l'espace tangent à $f(m)$ s'identifie à l'espace des tenseurs L de $f(m)$ dans $f(m)^\perp$ tels que $\langle \mathrm{L}(\mathrm{X}), \mathrm{J}(\mathrm{Y}) \rangle = \langle \mathrm{L}(\mathrm{Y}), \mathrm{J}(\mathrm{X}) \rangle\ \forall \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in f(m)$. Identifiant $\mathrm{T}_m\mathrm{M}^n$ et $f(m)$, le lemme 7 en découle.

LEMME 8. — *L'application* $(d\mathrm{G}_f)_m$ *tangente à* G_f, *s'identifie à la seconde forme fondamentale de f en m,* σ_m, *considérée comme application à valeur dans le sous-espace du produit tensoriel* $\mathrm{T}^*\mathrm{M}^n \otimes \mathrm{T}^\perp\mathrm{M}^n$, *constitué par les tenseurs vérifiant*

$$\langle \mathrm{L}(\mathrm{X}), \mathrm{J}(\mathrm{Y}) \rangle = \langle \mathrm{L}(\mathrm{Y}), \mathrm{J}(\mathrm{X}) \rangle \qquad \forall \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{TM}^n.$$

Démonstration du lemme 8. — D'une manière générale, il est bien connu (cf. [Vi] par exemple), que σ s'identifie à $d\mathrm{G}_f$. Puisque l'immersion est Lagrangienne, l'image de σ vérifie l'égalité du lemme 7. Notons également J la restriction de l'élément $\tilde{\mathrm{J}}$ de $\mathrm{T}^*(\mathrm{L}(\mathrm{E}^{2n}))$ à $\mathrm{T}^*(\mathrm{G}_f(\mathrm{M}^n))$. Nous avons le :

LEMME 9. — $(\mathrm{G}_f)^*(\tilde{\mathrm{J}}) = (i(\mathrm{H})\Omega)_{|\mathrm{TM}}$ *où i désigne ici le produit intérieur.*

Démonstration du lemme 9.

Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{TM}^n$. D'après le lemme 8 :

$$(\mathrm{G}_f)^*(\tilde{\mathrm{J}})(\mathrm{X}) = \mathrm{J}(\sigma_\mathrm{X})$$

(où $\sigma_\mathrm{X}(\mathrm{Y}) = \sigma(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, $\forall \mathrm{Y} \in \mathrm{TM}^n$).

Soit $(e_1, \ldots, e_n, \mathrm{J}e_1, \ldots, \mathrm{J}e_n)$ une base orthonormée telle que

$$e_1, \ldots, e_n \in \mathrm{TM}^n, \qquad (\mathrm{J}e_1, \ldots, \mathrm{J}e_n) \in \mathrm{T}^\perp\mathrm{M}^n,$$

et soit $(\theta^1, \ldots, \theta^n, -\mathrm{J}\theta^1, \ldots, -\mathrm{J}\theta^n)$ la base duale. Nous avons, localement :

$$\tilde{\mathrm{J}} = e_1 \otimes (-\mathrm{J}\theta^1), \qquad \sigma_\mathrm{X} = \sigma^k_\mathrm{X}\theta^i \otimes \mathrm{J}e_k.$$

Par suite :

$$\tilde{\mathrm{J}}(\sigma_\mathrm{X}) = \sum_i \sigma^i_i(\mathrm{X}) = \sum_i \langle \sigma(\mathrm{X}, e_i), \mathrm{J}e_i \rangle = \sum_i \langle \tilde{\nabla}_\mathrm{X} e_i, \mathrm{J}e_i \rangle =$$

$$- \sum_i \langle \nabla_{e_i}\mathrm{X}, \mathrm{J}e_i \rangle = \sum_i \langle \nabla_{e_i} e_i, \mathrm{JX} \rangle = \sum_i \langle \sigma(e_i, e_i), \mathrm{JX} \rangle = \Omega(\mathrm{H}, \mathrm{X}).$$

Donc $(\mathrm{G}_f^*)(\tilde{\mathrm{J}}) = i(\mathrm{H})\Omega_{|\mathrm{M}^n}$. Le théorème est une conséquence immédiate des lemmes 6, 8, 9.

4. FEUILLETAGES LAGRANGIENS

a) **Introduction.**

Ce paragraphe est consacré à l'étude des variétés symplectiques bi-feuilletées. Dans [Da_2], P. Dazord a précisé un résultat de Weinstein ([We]):

THÉORÈME [Da_2]. — *Si $\mathscr{F}$ est un feuilletage Lagrangien sans holonomie infinitésimale d'une variété symplectique, toute feuille est naturellement munie d'une structure Riemannienne plate.*

Nous vous proposons ici de montrer que l'existence de deux feuilletages Lagrangiens transverses sur une variété symplectique permet de définir un invariant géométrique local sur cette variété.

b) **Le théorème.**

THÉORÈME 5. — *Soit* M *une variété symplectique munie de deux feuilletages Lagrangiens transverses. Alors* M *est canoniquement munie d'une connexion linéaire sans torsion, telle que les feuilles soient parallèles et plates.*

On pourra comparer ce résultat avec l'étude, dans un cadre différent, des structures parakählériennes de P. Liebermann (Thèse Strasbourg, 1953).

REMARQUE. — On peut vérifier que la courbure de cette connexion est l'obstruction à l'existence d'un symplectomorphisme local de M sur $\mathbb{C}^n$ envoyant les deux feuilletages sur les feuilletages « horizontaux et verticaux » de $\mathbb{C}^n$ (J. Breuneval; J. Elhadad. Non publié).

c) **Démonstration du théorème.**

Notons $\{X, Y \dots\}$ les vecteurs tangents au premier feuilletage $\mathscr{F}_1$.
Notons $\{\xi, \eta \dots\}$ les vecteurs tangents au second feuilletage $\mathscr{F}_2$.
Considérons sur M la connexion ∇ définie par

$$\begin{aligned}
\Omega(\nabla_X Y, Z + \xi) &= X\Omega(Y, \xi) - \Omega(Y, [X, \xi]) \\
\Omega(\nabla_X \xi, Y + \eta) &= \Omega([X, \xi], Y) \\
\Omega(\nabla_\xi Y, Z + \eta) &= \Omega([\xi, Y], \eta) \\
\Omega(\nabla_\xi \eta, X + \mu) &= \xi\Omega(\eta, X) - \Omega(\eta, [\xi, \mu]).
\end{aligned}$$

LEMME 10. — *Les feuilles de $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont à courbure nulle.*

Démonstration :

$$R(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \qquad \forall X, Y, Z \in T\mathscr{F}_1$$

$$\Omega(R(X, Y)Z, T + \xi) = \Omega(R(X, Y)Z, \xi) \qquad \forall X, Y, Z, T \in T\mathscr{F}_1, \ \forall \xi \in T\mathscr{F}_2$$

$$\begin{aligned}
\Omega(R(X, Y)Z, \xi) &= X\Omega(\nabla_Y Z, \xi) + \Omega(\nabla_Y Z, [X, \xi]) \\
&\quad - Y\Omega(\nabla_X Z, \xi) - \Omega(\nabla_X Z, [Y, \xi]) - [X, Y]\Omega(Z, \xi) - \Omega(Z, [[X, Y], \xi]) = 0
\end{aligned}$$

d'où $R(X, Y)Z = 0$.

On ferait de même pour $R(\xi, \eta)\mu = 0 \ \forall \xi, \eta, \mu \in T\mathscr{F}_2$.

LEMME 11. — *Les distributions* $T\mathscr{F}_1$ *et* $T\mathscr{F}_2$ *sont parallèles relativement à* ∇.

Démonstration. — Il est clair que $\nabla_U X \in T\mathscr{F}_1$, $\forall U \in TM$, $\forall X \in T\mathscr{F}_1$. De même, il est clair que $\nabla_U \xi \in T\mathscr{F}_2$ $\forall U \in TM$, $\forall \xi \in T\mathscr{F}_2$.

LEMME 12. — ∇ *est sans torsion.*

Démonstration.

$$* \ \Omega(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], Z + \xi)$$
$$= X\Omega(Y, \xi) - \Omega(Y, [X, \xi]) - Y\Omega(X, \xi) + \Omega(X, [Y, \xi]) + \Omega([X, Y], \xi) = d\Omega(X, Y, \xi) = 0$$

$$* \ \Omega(\nabla_\eta \mu - \nabla_\mu \eta - [\eta, \xi], Z + \xi) = 0 \qquad \text{pour les mêmes raisons.}$$

$$* \ \Omega(\nabla_X \mu - \nabla_\mu X - [X, \mu], Z + \xi)$$
$$= \Omega([X, \mu], Z) - \Omega([\mu, X], \xi) - \Omega([X, \mu], Z + \xi) = 0 \qquad \forall X, Y, Z \in T\mathscr{F}_1, \ \forall \xi, \mu, \eta \in T\mathscr{F}_2.$$

5. STRUCTURE DE VARIÉTÉS CANONIQUES FORTES

a) Introduction.

Introduite par A. Lichnerowicz ([Li]) pour étudier globalement les systèmes dynamiques, les variétés canoniques possèdent un feuilletage dont les feuilles sont munies d'une structure symplectique. C Marle pose le problème suivant : sous quelles conditions cette structure symplectique sur les feuilles est-elle la restriction d'une 2-forme fermée globale sur la variété, dont le noyau est supplémentaire aux feuilles? Nous donnons une réponse à cette question. Rappelons-la :

DÉFINITION 3 [Li]. — *Une variété canonique* M *de dimension* $2n + 1$ *est une variété munie d'une submersion* $t : M \to \mathbb{R}$, *et d'un* 2*-tenseur* Γ *de rang* $2n$, *contravariant, tels que*

$$\begin{cases} [\Gamma, \Gamma] = 0 \\ [\Gamma, t] = 0 \end{cases}$$

(*où,* [,] *désigne le crochet de Schouten* [Li]).

REMARQUE 4. — Rappelons que si A et B sont deux tenseurs de type respectifs r et s, le crochet de Schouten de A et B est défini par :

$$i[A, B](\beta) = (-1)^{rs+s} i(A) d(i(B)\beta) + (-1)^r i(B) d(i(A)\beta)$$

pour toute $(r + s - 1)$ forme fermée β.

REMARQUE 5. — Γ détermine un sous-fibré $\mathscr{F}$ de TM :

$$\mathscr{F} = \{ X \in TM/X \wedge \Gamma^n = 0 \}.$$

De $[\Gamma, \Gamma] = 0$, on déduit que $\mathscr{F}$ est intégrable et définit donc un feuilletage de codimension 1.

De $[\Gamma, t] = 0$, on déduit que t est constant sur les feuilles. Sur chaque feuille $F_{t_0} = \{ x \in M/t(x) = t_0 \}$, le tenseur Λ induit un tenseur Λ_t non dégénéré. Λ_t induit donc un isomorphisme entre TF_t et T^*F_t, qui prolongé aux puissances extérieures, détermine une 2-forme fermée Ω_t de rang $2n$. Les feuilles sont donc canoniquement munies d'une structure symplectique.

REMARQUE 6. — (Ω_t) n'est pas une 2-forme sur M mais une section de $(\Lambda^2\mathscr{F})$. Cependant, si l'on considère la variété de dimension $2n$, $M_{\mathscr{F}}$, union disjointe des feuilles, (Ω_t) est alors une forme symplectique sur $M_{\mathscr{F}}$. (i. e. $\bar{d}\Omega_t = 0$, où $\bar{d}$ est la différentielle « le long des feuilles »).

REMARQUE 7. — Soit U une carte d'une variété canonique M. Il existe une base $(e_1, \ldots, e_{2n}, e_{2n+1} = t)$ locale de U telle que Γ s'écrit :

$$\Gamma = e_1 \wedge e_{n+1} + \ldots + e_n \wedge e_{2n}.$$

b) Position du problème.

Notons $j : M_{\mathscr{F}} \to M$ l'immersion canonique de la variété des feuilles $M_{\mathscr{F}}$ d'une variété canonique M dans M. Notons (Ω_t) la deux-forme symplectique canonique sur $M_{\mathscr{F}}$. Donnons la

DÉFINITION 4. — *Une structure canonique* Γ *sur une variété* M *est dite structure canonique forte s'il existe une 2-forme fermée* Ω *de rang* $2n$ *sur* M *telle que* $\Omega_t = j^*(\Omega)$.

Le but de ce paragraphe est d'étudier l'existence de structure canonique forte sur une variété.

c) Exemple.

i) *Une variété munie d'une structure canonique qui n'est pas forte.*

Considérons $M = T^2 \times \mathbb{R}$ où T^2 désigne le tore $S^1 \times S^1$. Munissons T^2 de la forme $\omega = d\theta_1 \wedge d\theta_2$ et considérons $\phi(t) = e^t$. Posons $\Omega_t = \phi(t)p^*\omega$ sur $T^2 \times \{ t \}$ où p désigne la projection sur $\mathbb{R}$. On voit facilement que Ω_t n'est la restriction d'aucune forme fermée sur M. (Exemple donné par C. Marle lors du congrès de géométrie symplectique de Toulouse en 1981).

ii) *Une variété feuilletée possédant une structure canonique forte.*

Considérons M_1 une variété symplectique de forme ω_1 et $M_2 \xrightarrow{p} \mathbb{R}$ une submersion d'une variété Riemannienne de dimension 3, telle que les feuilles $p^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ soient minimales (cf. [Su_2] par exemple). Notons ω_2 la forme volume des feuilles. Alors la 2-forme (ω_1, ω_2) munit $M = M_1 \times M_2$ d'une structure canonique forte. En effet, en prolongeant ω_2 à tout M_2 en posant $i(\xi)\omega_2 = 0$ si ξ est orthogonale au feuilletage, nous définissons une 2-forme *fermée* sur M_2, puisque les feuilles sont minimales, (ω_1, ω_2) est alors une 2-forme fermée non dégénérée sur $M_1 \times M_2$, dont la restriction au feuilletage $M_1 \times \mathscr{F}$ ($\mathscr{F}$ désignant feuilletage induit par p) est une forme symplectique.

iii) Pour construire des variétés à structure canonique forte, une technique consiste à immerger de façon symplectiquement régulière une variété M de dimension $2n+1$ dans une variété Kachlérienne $(\tilde{M}, g)$ de dimension $2n+2$. En termes Riemanniens, ceci signifie que nous considérons une C. R. hypersurface M de $\tilde{M}$ ([Be]). TM se décompose en somme directe orthogonale : $TM = \mathscr{D} \oplus \mathscr{D}^\perp$ ou $\dim \mathscr{D}^\perp = 1$.

Si J désigne la structure presque complexe de $\tilde{M}$, nous avons $J\mathscr{D} = \mathscr{D}$ et $J\mathscr{D}^\perp = TM^\perp$. $\mathscr{D}^\perp$ est le noyau de la 2-forme Ω sur M défini par

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY).$$

Un résultat classique ([Be]) affirme que $\mathscr{D}$ est intégrable si et seulement si la seconde forme fondamentale σ de l'immersion satisfait l'égalité

$$\sigma(X, JY) = \sigma(JX, Y) \qquad \forall X, Y \in \mathscr{D}.$$

Dans ce cas, les feuilles sont alors munies d'une structure symplectique : la restriction de Ω sur le feuilletage. De plus, la restriction à M de Ω est une 2-forme fermée. Un feuilletage étant toujours défini *localement* par une submersion, une telle variété M est *localement* munie d'une structure canonique forte.

d) L'espace des deux cycles $\mathscr{C}_2(\mathscr{F})$.

Considérons toujours $M \xrightarrow{t} \mathbb{R}$ une submersion définissant un feuilletage sur M. Notons $M_{\mathscr{F}}$ la variété des feuilles et par abus de notation, notons encore t la surjection canonique de $M_{\mathscr{F}}$ sur $\mathbb{R}$ associée à la submersion. Pour chaque feuille F, notons $\mathscr{C}_2(F)$ l'espace des 2-cycles non triviaux sur F (i. e. l'espace des 2-courants fermés sans bord sur F).

Considérons $\bigcup_{F \in \mathscr{F}} \mathscr{C}_2(F)$ et $\bar{t}$ la projection sur $\mathbb{R}$ définie de manière évidente $\bigcup_{F \in \mathscr{F}} \mathscr{C}_2(F) \xrightarrow{\bar{t}} \mathbb{R}$.

Nous appellerons $\mathscr{C}_2(\mathscr{F})$ l'espace des sections de $\bigcup_{F \in \mathscr{F}} \mathscr{C}_2(F) \xrightarrow{\bar{t}} \mathbb{R}$.

e) **L'application $\phi_E \in Z^2_{\bar{d}}(\mathscr{F})^* \otimes \mathscr{C}_2(\mathscr{F})^* \otimes \mathbb{R}$ et l'espace $S_{\mathscr{F}}$.**

Soit $M \xrightarrow{t} \mathbb{R}$ une submersion de feuilletage associé $\mathscr{F}$, défini sur variété de dimension $2n + 1$. Notons $Z^2_{\bar{d}}(\mathscr{F})$ le sous-espace de $\Lambda^2(\mathscr{F})$ constitué par les deux formes sur $\mathscr{F}$ fermées sur les feuilles (donc pour $\bar{d}$). Considérons une métrique g sur M, notons E le champ transverse à $\mathscr{F}$ dual de la 1-forme dt pour g. Si ω est une 2-forme $\bar{d}$ fermée ($\omega \in Z^2_{\bar{d}}(\mathscr{F})$), posons :

$$(\phi_E(\omega)\cdot C)_u = (\langle C, j^*(i_E d\tilde{\omega}) \rangle)_t - 1_{(u)}, \qquad \forall u \in \mathbb{R}$$

où $\tilde{\omega}$ est la 2-forme sur M définie par :

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_{|\mathscr{F}} = \omega \\ i_E\tilde{\omega} = 0 \end{cases}$$

Remarquons que ceci définit un réel sur chaque feuille et donc une fonction sur l'image $\mathbb{R}$ de la submersion t. *Par suite nous avons défini une application*

$$\phi_E : Z^2_{\bar{d}}(\mathscr{F}) \to \mathscr{C}_2(\mathscr{F})^* \otimes \mathbb{R},$$

soit un élément de $Z^2_{\bar{d}}(\mathscr{F})^* \otimes \mathscr{C}_2(\mathscr{F})^* \otimes \mathbb{R}$, localement, si $(x_1 \dots x_{2n}, t)$ est une carte, nous avons :

$$\tilde{\omega}(x, t) = a_{ij}(x, t)dx^i \wedge dx^j$$
$$d\tilde{\omega}(x, t) = \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}(x, t)dx^i \wedge dx^j \wedge dt$$

puisque $\tilde{\omega}$ est fermée sur les feuilles.

$$\langle \phi_E(\omega), C \rangle_u = \left\langle C, \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} dx^i \wedge dx^j \right\rangle_{t^{-1}(u)}$$

Rappelons qu'une 2-forme est $\mathscr{F}$ triviale si $\alpha(X_1, X_2) = 0$ $\forall X_1, X_2 \in T\mathscr{F}$. Montrons le

THÉORÈME 6. — $\omega \in \operatorname{Ker} \phi_E \Leftrightarrow \exists \alpha$, *2-forme $\mathscr{F}$ triviale sur* M, *telle que* $d\tilde{\omega} = d\alpha$.

Démonstration. — C. N. Supposons que $\phi_E(\omega) = 0$. Alors, pour tout $C \in \mathscr{C}_2(\mathscr{F})$, nous avons $\langle C, j^*(i_E d\tilde{\omega}) \rangle \equiv 0$ c'est-à-dire que sur chaque feuille F, $\langle C_{|F}, j^*_{|F}(i_E d\tilde{\omega}) \rangle = 0$. Par suite, il existe une famille de 1-forme sur M, $\gamma \in \Lambda(\mathscr{F})$ telle que $\bar{d}\gamma = j^*(i_E d\tilde{\omega})$ (où $\bar{d}$ désigne la différentielle le long des feuilles). Donc, nous avons, avec les notations précédentes :

$$i_E d\tilde{\omega} = \bar{d}\gamma = d\gamma + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_i)dx^i \wedge dt$$

D'où :

$$d\tilde{\omega} = d\gamma \wedge dt = d(\gamma \wedge dt).$$

Or $\gamma \wedge dt$ est manifestement $\mathscr{F}$ triviale. Le théorème est donc démontré en posant $\alpha = \gamma \wedge dt$.

C. S. On applique la formule de Stokes :
Si $d\tilde{\omega} = d\alpha$, α $\mathscr{F}$-triviale, alors :

$$\begin{aligned} j^*_{|F}(i_E d\tilde{\omega}) = j^*_{|F}(i_E d\alpha) &= j^*_{|F}(\bar{d}(i_E\alpha)) \\ &= \bar{d}(j^*_{|F}(i_E\alpha)) \end{aligned}$$

Si C est un *cycle* on a donc :

$$\begin{aligned} \langle C, \bar{d}(j^*_{|F}(i_E\alpha)) \rangle &= \langle \partial C, j^*_{|F}(i_E\alpha) \rangle \\ &= 0 \qquad \text{puisque } \partial C = 0 . \end{aligned}$$

DÉFINITION 5. — *Notons* $S_{\mathscr{F}} = \operatorname{Ker} \phi_E$.

REMARQUE 8. — Il est facile de voir que $S_{\mathscr{F}}$ est indépendant de E et de la métrique g. C'est d'ailleurs aussi une conséquence du théorème 6.

f) Le théorème.

THÉORÈME 7. — *Soit* $M \xrightarrow{t} \mathbb{R}$ *une submersion de feuilletage associé* $\mathscr{F}$, *définie sur une variété* M *de dimension* $2n + 1$. *Soit* Ω_t *une 2-forme fermée sur les feuilles, définie sur* $\mathscr{F}$ (i. e. $\Omega_t \in Z^2_{\bar{d}}(\mathscr{F})$).

Ω_t *est la restriction d'une 2-forme fermée sur* M *si et seulement si* $\Omega_t \in S_{\mathscr{F}}$.

Démonstration. — Soit $\tilde{\Omega}$ la 2-forme définie par $\tilde{\Omega}_{|\mathscr{F}} = \Omega_t$ et $i_E\tilde{\Omega} = 0$.

Nous avons $\phi_E(\Omega_t) = 0 \Leftrightarrow d\tilde{\Omega} = d\alpha$ où α est une 2-forme $\mathscr{F}$-triviale (cf. le théorème 6).

$\Leftrightarrow d(\tilde{\Omega} - \alpha) = 0$. Posons $\Omega = \tilde{\Omega} - \alpha$.

Ω est fermée et $\Omega_{|\mathscr{F}} = \tilde{\Omega}_{|\mathscr{F}} = \Omega_t$ puisque α est $\mathscr{F}$-triviale.

Nous pouvons maintenant donner une réponse au problème posé au *a*) : Si (Γ, t) est une structure canonique sur une variété M, considérons l'application ψ qui, à Γ, associe la 2-forme Ω_t sur les feuilles du feuilletage $\mathscr{F}$ associé à la structure. M est muni d'une structure canonique forte si et seulement si $\psi(\Gamma) \in S_{\mathscr{F}}$, d'après le théorème 7. Nous énonçons donc le :

COROLLAIRE 6. — *Soit* M *une variété munie d'une submersion* $t : M \to \mathbb{R}$, *de feuilletage associé* $\mathscr{F}$. *Un 2-tenseur contravariant de rang* $2n$ Γ *satisfaisant :*

$$\begin{cases} [\Gamma, \Gamma] = 0 \\ [\Gamma, \ t] = 0 \end{cases}$$

munit M *d'une structure canonique forte si et seulement si* $\psi(\Gamma) \in S_{\mathscr{F}}$.

REMARQUE 9. — La technique de démonstration du théorème 7 est proche de celle de Haefliger ([Ha]) employée pour déterminer l'existence d'une métrique Riemannienne sur une variété feuilletée rendant les feuilles minimales. Cependant, le résultat obtenu ici est très différent. En effet, dans notre cas, l'existence de la submersion t rend triviale la structure transverse au feuilletage. Au contraire, la structure topologique des feuilles intervient : il suffit qu'une feuille compacte F satisfasse $H_2(F) = 0$ pour qu'il n'existe pas de structure canonique sur la variété compatible avec le feuilletage ; (alors qu'Haefliger montre que l'existence d'une métrique rendant les feuilles minimales ne dépend *que* de la structure transverse).

REMARQUE 10. — Si M est muni d'une structure canonique Γ, de feuilletage associé $\mathscr{F}$, on sait que $\lambda_E = \Omega_t \wedge dt$ définit une 3-forme fermée globale sur $M([L_i])$, dépendant d'un champ E transverse à $\mathscr{F}$.

On déduit immédiatement du théorème 7 le

COROLLAIRE 7. — *Soit* M *une variété munie d'une structure canonique* Γ *de feuilletage induit* $\mathscr{F}$ *et dont la 3-forme canonique associée est* λ_E, *où* E *est un champ transverse au feuilletage* $\mathscr{F}$ ($i_E dt = 1$). *Alors*

Γ *est une structure canonique forte si et seulement si* $i_E \mathscr{L}_E \lambda_E$ *est exacte sur chaque feuille de* $\mathscr{F}$.

Démonstration. — Il suffit de constater que si $\Omega_t = a_{ij} dx^i \wedge dx^j$ (localement), $i_E \mathscr{L}_E \lambda_E = i_E d\Omega_t = \dfrac{\partial a_{ij}}{\partial t} dx^i \wedge dx^j$ et d'appliquer le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[Ba] A. BANYAGA, On fixed points of symplectic maps. (preprint).

[Be] A. BEJANCU, C-R submanifolds of Kaehler manifolds. *Proc. Amer. Math. Sco.*, t. **69**, 1978, p. 134-142.

[B. C.] D. E. BLAIR, B. Y. CHEN, On CR submanifolds of hermitian manifolds. *Israël j. of Math.*, t. **34**, n° 4, 1979, p. 353-363.

[Ch] B. Y. CHEN, *Geometry of submanifolds.* Marcel Dekker Inc., New York, 1973.

[Da_1] P. DAZORD, Invariant homotopiques attaches aux fibres symplectiques. *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. **29**, n° 2, 1979, p. 25-78.

[Da_2] P. DAZORD, Sur la géométrie des sous-fibrés et feuilletages Lagrangines. A paraître. *Ann. Inst. Fourier*, 1982.

[G. S.] V. GUILLEMIN, S. STERNBERG, Geometric asymptotics. Survey .*Amer. Math. Soc.*, t. **17**, 1977, Providence R. I.

[Ha] A. HAEFLIGER, Some remarks on Foliations with minimal leaves. *J. Diff. Geom.*, t. **15**, n° 2, 1980, p. 269-284.

[H. Z.] HAYDEN, ZEHMAN, A lagrangian Klein bottle. *Math. Proc. Cam. Phil. Soc.*, t. **89**, 1981, p. 193-200.

[K. N.] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry*. Interscience Publishers, New York, London, 1963.

[K. Y.] M. KON, K. YANO, *Antivariant submanifolds*, Marcel Dekker, New York, 1976.

[Li] A. LICHNEROWICZ, Algèbres de Lie attachées à une variété canonique. *J. Math. Pures et appl.*, t. **54**, 1975, p. 445-480.

[M_1] J. M. MORVAN, Classe de Maslov d'une immersion lagrangienne et minimalité. *C. R. A. S.*, t. **292**, 30 mars 1981, p. 633-636.

[M_2] J. M. MORVAN, Sur les déformations des applications symplectiques. *C. R. A. S.*, t. **290**, 30 juin 1980, p. 1131-1134.

[Mo] J. MOSER, A fixed point theorem in symplectic geometry. *Acta Mathematica*, t. **141**, 1978, p. 17-34.

[M. S.] J. W. MILNOR, D. J. STASHEFF, Characteristic classes. *Ann. Math. Studies*, Princeton University Press, 1974.

[Mu] J. R. MUNKRES, Elementary Differential Topology. *Ann. Math. Studies*. Princeton University Press.

[R. V.] E. A. RUH, J. VILMS, The tension field of the Gauss map. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **149**, 1970, p. 569-573.

[Su_1] D. SULLIVAN, Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds. *Inventiones Maths.*, t. **36**, 1976, p. 225-255.

[Su_2] D. SULLIVAN, A homological characterization of foliations consisting of minimal surfaces. (Preprint), *I. H. E. S.*, January 1978.

[Wa] R. WALDEN, Untermaningfaltigkeiten mit paralleler zweiter fundamentalform in Euclidischen Raumen und Sphären. *Manuscripta Math.*, t. **10**, 1973, p. 91-102.

[We] A. WEINSTEIN, Lectures on symplectic manifolds. Reg. Conf. Serie in Math., t. **29**, *Amer. Math. Soc.*, Providence, R. I., 1977.

[Wh] H. WHITNEY, The self-intersections of a n-smooth manifold in $2n$-space. *Ann. Math.*, t. **45**, 1944, p. 220-245.

(Manuscrit reçu le 9 février 1982).