ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

J. BRYANT

Le formalisme de contact en mécanique classique et relativiste

Annales de l'I. H. P., section A, tome 38, nº 2 (1983), p. 121-152

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1983__38_2_121_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXXVIII, n° 2, 1983, p. 121-152.

Section A :
Physique théorique.

Le formalisme de contact en mécanique classique et relativiste

par

J. BRYANT
Laboratoire de Mécanique Théorique,
Faculté des Sciences et des Techniques,
Université de Besançon, 25030, Besançon Cedex

RÉSUMÉ. — On peut donner une formulation plus générale de la mécanique hamiltonienne en utilisant la notion de variété canonique exacte introduite par Lichnerowicz. Un problème traditionnel, le problème des N-Corps, est considéré sous cet aspect. De plus la mécanique relativiste peut être formulée dans ce cadre.

ABSTRACT. — A more general formulation of Hamiltonian mechanics can be given using the notion of exact canonical manifold introduced by Lichnerowicz. A traditionnal problem, the N-Body problem, is considered from this view point. Furthermore, relativistic mechanics can be formulated in this framework.

INTRODUCTION

En analyse traditionnelle [*4*], comme plus récemment en géométrie différentielle [*5*], le formalisme de contact va de pair avec le formalisme symplectique. L'idée vient alors d'essayer de transposer ceci à la mécanique. Pour cela on est tenté de suivre une démarche traditionnelle, qui part de la variété $N = T^*Q$ munie de la 2-forme $\omega = dp_i \wedge dq^i$ pour introduire l'espace temps $N \times R$. Nous avons alors à notre disposition la 1-forme de Cartan-Poincaré $\alpha = p_i dq^i - Hdt$ et le couple $(N \times R, \alpha)$ définit la structure de contact recherchée (du moins lorsque H n'est pas homogène de degré 1 en p_i ; dans ce cas α n'est pas de classe maximale).

Cette structure convient plus particulièrement lorsqu'on veut inclure la mécanique non conservative. Elle a cependant l'inconvénient de dépendre du hamiltonien H, donc du mouvement particulier considéré ; et à ma connaissance cette structure ne débouche pas sur une formulation qu'on pourrait qualifier de hamiltonienne de la relativité et qui aurait justifié son introduction.

Dans ce travail nous procédons autrement. Nous nous donnons au départ une structure qui s'avère être un cas particulier de *variété canonique exacte* [7] (elle-même cas particulier de structure de contact). Sur cette variété la mécanique hamiltonienne est représentée par les champs de vecteurs qui *conservent* la 1-forme de la structure. Le lien avec la structure symplectique classique apparaît dans le cadre de la *réduction* qui est ici synonyme de *projection* de champs de vecteurs. Un exemple frappant est donné par *le problème des* N-Corps dont les réductions successives font passer d'une variété de contact à une variété symplectique et *vice versa.*

L'aspect le plus intéressant est cependant le prolongement qu'on peut faire en relativité. Il apparaît que le mouvement de la particule relativiste peut être représenté sur une variété canonique par un champ de vecteurs particulier appelé *champ de contact*, et dans cette optique la *masse propre* reçoit une définition intrinsèque, tout en jouant le rôle de $2n+1^{e}$ variable. Nous obtenons ainsi une formulation hamiltonienne de la relativité différente de la formulation lagrangienne habituelle.

I. LA NOTION DE FEUILLETAGE ADAPTÉ A UN CHAMP DE VECTEURS

1) Soit M une variété C^{∞} de dimension n et Z un champ de vecteurs régulier sur M. Nous supposons que le quotient $\overline{M}$ de M par le flot de Z (N. B. Toutes les variétés que nous considérons sont supposées séparées) est une variété C^{∞} et que la projection p de M sur $\overline{M}$ est une submersion.

Soit maintenant un champ de vecteurs X sur M tel que [X, Z] soit colinéaire à Z. On dit alors que Z admet la transformation infinitésimale X et cela se traduit par le fait que X est *projetable* par Z. Il existe sur $\overline{M}$ un champ de vecteurs $\overline{X}$ unique tel que :

$$\overline{X}(p(x)) = Tp \cdot X(x)$$

($Tp \cdot X$ a donc la même valeur pour tous les points d'une même trajectoire de Z).

Remarquons que si X est projetable par Z, X est projetable par μZ, et que le crochet de Lie de deux champs projetables par Z est encore projetable par Z (d'après l'identité de Jacobi).

2) Inversement, un champ de vecteurs sur la variété quotient $\overline{M}$ étant donné, il est possible de le relever sur M lorsqu'on sait construire un *feuille-*

tage adapté à Z. Par définition, il s'agit d'un feuilletage régulier de M dont chaque feuille est transverse au flot de Z (Z est alors *sécable*). Chaque feuille est nécessairement de dimension $n-1$ et définit une carte locale de $\overline{\mathrm{M}}$.

Il est clair que tout champ de vecteurs sur $\overline{\mathrm{M}}$ induit un champ de vecteurs sur *chaque* feuille, et par conséquent sur toute la variété M.

D'après ce qui précède, si un champ Z possède un feuilletage adapté, nous pouvons affirmer que la variété quotient $\overline{\mathrm{M}}$ possède une structure de variété C^∞ (puisque le feuilletage définit un atlas de $\overline{\mathrm{M}}$) et que la projection $p : \mathrm{M} \to \overline{\mathrm{M}}$ est bien une submersion.

Nous avons encore les propriétés suivantes :

a) Tout champ X sur M projetable par Z se décompose de manière unique en :

$$\mathrm{X}(x) = \tilde{\mathrm{X}}(x) + \lambda \mathrm{Z}(x)$$

où $\tilde{\mathrm{X}}$ est un champ projetable par Z tangent au feuilletage.

b) Étant donné deux champs X et Y projetables par Z nous savons que [X, Y] est projetable par Z. Nous pouvons écrire :

$$\mathrm{X} = \tilde{\mathrm{X}} + \lambda \mathrm{Z}\,; \qquad \mathrm{Y} = \tilde{\mathrm{Y}} + \mu \mathrm{Z}\,; \qquad [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = \widetilde{[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]} + \nu \mathrm{Z}$$

et un calcul direct montre que :

$$[\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{Y}}] = \widetilde{[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]}$$

c) Une r-forme α étant donnée sur M, une condition nécessaire et suffisante pour que α soit un invariant intégral absolu de Z est que :

$$i_{\mathrm{Z}}\alpha = 0\,; \qquad i_{\mathrm{Z}} d\alpha = 0$$

Il est équivalent de dire que α est l'image réciproque d'une r-forme $\overline{\alpha}$ sur $\overline{\mathrm{M}}$. Connaissant un feuilletage adapté à Z, une expression *locale* de $\overline{\alpha}$ est obtenue en prenant la restriction de α à une feuille P : $\mathrm{X}_1^{\mathrm{P}}, \ldots, \mathrm{X}_r^{\mathrm{P}}$ étant r champs sur P se déduisant comme nous le savons de r champs $\overline{\mathrm{X}}_1, \ldots, \overline{\mathrm{X}}_r$ sur $\overline{\mathrm{M}}$, nous avons, en posant $\alpha|_{\mathrm{P}} = \alpha_{\mathrm{P}}$:

$$\overline{\alpha}(\overline{\mathrm{X}}_1, \ldots, \overline{\mathrm{X}}_r) = \alpha_{\mathrm{P}}(\mathrm{X}_1^{\mathrm{P}}, \ldots, \mathrm{X}_r^{\mathrm{P}})$$

3) Une illustration de tout ceci est donnée par la formulation de la mécanique hamiltonienne (conservative). Soit (N, ω) une variété symplectique et $\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{H}}$ un champ hamiltonien sur N. Nous avons donc :

$$i_{\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{H}}}\omega = -\,d\mathrm{H}$$

Considérons maintenant la variété $\mathrm{M} = \mathrm{N} \times \mathrm{R}$ appelée « espace-temps » et désignons par $p : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ la projection $p(x, t) = x$. Autrement dit, p est la projection suivant le champ de vecteurs $\mathrm{Z} = \dfrac{\partial}{\partial t}$, qui admet pour feuilletage adapté les surfaces $t = k$. Sur M nous pouvons considérer le champ de vecteurs régulier :

$$X_H = \overline{X}_H + \frac{\partial}{\partial t}$$

qui vérifie $Tp \cdot X_H = \overline{X}_H$; $dt(X_H) = 1$.

X_H admet encore les surfaces $t = k$ comme feuilletage adapté. Donc, d'après ce qui précède, le quotient de M par les trajectoires de X_H a encore une structure de variété C^∞ que l'on appelle « espace des mouvements » et que nous désignons par N_0 (voir [9]). Soit p_0 la projection correspondante (qui est encore une submersion). Tout champ X sur M se décompose de manière unique en $X = \tilde{X} + \lambda X_H$ où $\tilde{X}$ est un champ tangent au feuilletage.

Une 2-forme « canonique » α peut alors être construite sur M, qui est en même temps un invariant intégral absolu de X_H.

Nous définissons d'abord α pour des champs tangents au feuilletage en posant :

$$\alpha(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) = (p^*\omega)(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$$

Nous supposons ensuite que α est nulle pour tout champ colinéaire à X_H. c'est-à-dire :

$$i_{X_H}\alpha = 0$$

Le calcul de α pour deux champs quelconques X_1 et X_2 (que l'on décompose en $\tilde{X}_1 + \lambda_1 X_H$ et $\tilde{X}_2 + \lambda_2 X_H$) donne alors l'expression générale suivante de α :

$$\alpha = p^*\omega - d\tilde{H} \wedge dt \qquad (\text{où } \tilde{H} = p^*H)$$

Nous avons $d\alpha = dp^*\omega = p^*d\omega = 0$ puisque ω est fermée par hypothèse, donc α est bien un invariant intégral absolu de X_H (Nous reconnaissons dans α la forme de Cartan-Poincaré) α est l'image réciproque par p_0 de la 2-forme ω_0 dont l'expression locale est donnée par :

$$\omega_0(X_1^0, X_2^0) = \alpha_P(X_1^P, X_2^P) = (p^*\omega)_P(X_1^P, X_2^P)$$

où X_1^P, X_2^P sont deux champs sur la feuille P et où $X_1^0 = T_{P_0} \cdot X_1^P$; $X_2^0 = T_{P_0} \cdot X_2^P \cdot (M_0, \omega_0)$ a. donc une structure de variété symplectique déduite de celle de (N, ω). Récapitulons dans le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge] & M = N \times R \arrow[dl, "p"', "Z=\frac{\partial}{\partial t}"] \arrow[dr, "p_0", "X_H"'] & \\ (N, \omega) & & (N_0, \omega_0) \end{tikzcd}$$

$$X_H = \overline{X}_H + \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\alpha = p^*\omega - d\tilde{H} \wedge dt = p_0^*\omega_0$$

$\overline{X}_H$

II. VARIÉTÉS DE CONTACT ET CHAMPS D'HOMOTHÉTIE

1) Par définition, une variété de contact M est une variété C^∞ de dimension impaire $2n + 1$ munie d'une 1-forme Ω de classe constante $2n + 1$.

On montre [1] [5] qu'il existe un champ de vecteurs régulier Z sur (M, Ω), appelé *champ caractéristique* (ou Champ de Reeb) tel que :

$$i_Z d\Omega = 0 ; \qquad i_Z \Omega = 1$$

Le champ Z est donc attaché à la structure de contact. Notons que $d\Omega$ est un invariant intégral absolu pour Z.

2) Nous allons maintenant nous intéresser à un certain type de champ de vecteurs défini sur une variété de contact et que nous appelons *champ d'homothétie.* Par définition, il s'agit d'un champ de vecteurs Y tel que :

$$L_Y \Omega = \Omega$$

Une première propriété des champs d'homothétie est d'être *projetables par* Z. En effet, nous avons :

$$i_{[Y,Z]}\Omega = L_Y i_Z \Omega - i_Z L_Y \Omega = - i_Z \Omega = - 1$$
$$i_{[Y,Z]}d\Omega = L_Y i_Z d\Omega - i_Z L_Y d\Omega = - i_Z d\Omega = 0$$

d'où :

$$i_{([Y,Z]+Z)}\Omega = 0 ; \qquad i_{([Y,Z]+Z)}d\Omega = 0$$

En utilisant l'hypothèse faite sur la classe de Ω, ceci entraîne $[Y, Z]+Z=0$. $[Y, Z]$ est colinéaire à Z donc Y est projetable par Z.

3) La formule de Cartan permet d'écrire :

$$\Omega = dF - \Pi$$

où nous avons posé : $F = i_Y\Omega$; $\Pi = - i_Y d\Omega$.

Cette décomposition de Ω va entraîner des propriétés remarquables pour la structure de contact (M, Ω).

En effet, nous voyons d'une part que l'application $F : M \to R$ est de rang 1, puisque Ω est de classe $2n + 1$, et Π est de même classe que $d\Omega$, c'est-à-dire $2n$ (puisque $d\Pi = - d\Omega$). Donc les surfaces $F =$ constante forment un feuilletage régulier de dimension $2n$ de M et *ce feuilletage est adapté à* Z : en effet, comme : $i_Z\Omega=1$; $i_Z\Pi=-i_Z i_Y d\Omega=i_Y i_Z d\Omega=0$, nous avons : $L_Z F = i_Z dF = i_Z(\Omega + \Pi) = 1 \neq 0$ et chaque feuille est *transverse* à Z. Nous voyons d'autre part que la 1-forme Π est *un invariant intégral absolu de* Z, puisque $i_Z\Pi = 0$ et $i_Z d\Pi = - i_Z d\Omega = 0$.

Nous pouvons donc affirmer que le quotient $\overline{M}$ de M par les trajectoires de Z a une structure de variété C^∞, et qu'il existe une 1-forme $\overline{\Pi}$ sur $\overline{M}$ de classe $2n$ telle que $\Pi = p^*\overline{\Pi}$ (où p désigne la projection de M sur $\overline{M}$). Par conséquent $(\overline{M}, \overline{\Pi})$ *a une structure de variété symplectique exacte.*

4) Considérons maintenant la projection $\overline{Y}$ de Y sur $\overline{M}$ ($\overline{Y} = Tp \cdot Y$) et calculons $i_{\overline{Y}} d\overline{\Pi}$ pour un champ de vecteurs quelconque $\overline{X}$ sur $\overline{M}$:

$$i_{\overline{Y}} d\overline{\Pi}(\overline{X}) = d\overline{\Pi}(\overline{Y}, \overline{X}) = d\overline{\Pi}(Tp \cdot Y, Tp \cdot \tilde{X})$$

où $\tilde{X}$ est le champ tangent au feuilletage tel que $\overline{X} = \overline{T}p \cdot \tilde{X}$. Donc :

$$\begin{aligned} i_{\overline{Y}} d\overline{\Pi}(\overline{X}) &= p^* d\overline{\Pi}(Y, \tilde{X}) = dp^*\overline{\Pi}(Y, \tilde{X}) \\ &= d\Pi(Y, \tilde{X}) = - d\Omega(Y, \tilde{X}) \\ &= - i_Y d\Omega(\tilde{X}) = \Pi(\tilde{X}) \\ &= p^*\overline{\Pi}(\tilde{X}) = \overline{\Pi}(Tp \cdot \tilde{X}) \\ i_{\overline{Y}} d\overline{\Pi}(\overline{X}) &= \overline{\Pi}(\overline{X}) \qquad \forall \overline{X} \in \mathscr{V}(\overline{M}) \end{aligned}$$

Nous en déduisons que $i_{\overline{Y}} d\overline{\Pi} = \overline{\Pi}$, c'est-à-dire que $\overline{Y}$ est le *champ fondamental* [7] de la structure symplectique $(\overline{M}, \overline{\Pi})$. Notons que $i_{\overline{Y}}\overline{\Pi} = 0$; $L_{\overline{Y}}\overline{\Pi} = \overline{\Pi}$.

Supposons que $\overline{M}$ soit une variété connexe et paracompacte et soit M′ le quotient de $\overline{M}$ par les trajectoires de $\overline{Y}$. A. Lichnerowicz montre alors que, moyennant l'hypothèse que la projection $\overline{p}$ de $\overline{M}$ sur M′ est une submersion et munit M′ d'une structure de variété différentiable de dimension $2n - 1$, il existe une fonction $\overline{w}$ sur $\overline{M}$ ($\overline{w} > 0$) telle que la 1-forme $\dfrac{\overline{\Pi}}{\overline{w}}$ soit un invariant intégral absolu de $\overline{Y}$ ($\overline{w}$ vérifie $L_{\overline{Y}}\overline{w} = \overline{w}$).

(L'hypothèse sur $\overline{p}$ est vérifiée en particulier lorsqu'il existe un feuilletage adapté à $\overline{Y}$ comme nous le savons.)

Il existe alors une 1-forme σ' de classe $2n - 1$ sur M′ telle que $\overline{\Pi} = \overline{w}\overline{p}^*\sigma'$ donc (M′ σ') *est une variété de contact de dimension 2n − 1.*

L'existence d'un champ d'homothétie sur une variété de contact (M, Ω) de dimension $2n + 1$ implique donc l'existence d'une variété symplectique $(\overline{M}, \overline{\Pi})$ de dimension $2n$ quotient de M par Z, et implique aussi, avec une hypothèse adéquate sur $\overline{Y}$, l'existence d'une nouvelle variété de contact (M′, σ') de dimension $2n - 1$, quotient de $\overline{M}$ par $\overline{Y}$. Le triplet (M, Ω, Y) constitue un cas particulier de ce que A. Lichnerowicz appelle une *variété canonique exacte.* C'est ce terme que nous emploierons par la suite, étant entendu qu'il s'agira d'un triplet du type précédent.

5) Posons-nous maintenant la question de l'existence d'un champ d'homothétie sur (M, Ω).

En prenant le produit intérieur par Z des deux membres de l'égalité $dF - \Pi = \Omega$ nous obtenons :

$$L_Z F = i_Z dF = i_Z \Omega = 1$$

en utilisant les propriétés de Π et Z.

Inversement, supposons que nous connaissions une fonction F partout de rang 1 solution de l'équation $L_Z F = 1$. Les surfaces $F =$ constante définissent un feuilletage adapté à Z.

Posons $\Pi' = dF - \Omega$. Nous avons :

$$i_Z \Pi' = i_Z dF - i_Z \Omega = 0 \,; \qquad i_Z d\Pi' = - i_Z d\Omega = 0$$

donc Π' est un invariant intégral absolu pour Z; par conséquent Π' est l'image réciproque d'une 1-forme $\overline{\Pi}'$ sur le quotient $\overline{M}$ de M par le flot de Z. $(\overline{M}, \overline{\Pi}')$ étant une variété symplectique exacte, il existe un champ de vecteurs unique $\overline{Y}$ sur $\overline{M}$ tel que $i_{\overline{Y}} d\overline{\Pi}' = \overline{\Pi}'$ (en vertu de l'isomorphisme existant entre $T\overline{M}$ et $T^*\overline{M}$ grâce à $d\overline{\Pi}'$). $\overline{Y}$ induit sur chaque feuille $F =$ constante un champ de vecteurs tangent, donc induit sur M un champ de vecteurs $\tilde{Y}$ tangent au feuilletage. Nous cherchons ensuite Y tel que :

$$Y = \tilde{Y} + \alpha Z \,; \qquad i_Y \Omega = F$$

Comme :

$$i_{\tilde{Y}} \Omega = - i_{\tilde{Y}} \Pi' = - i_{\overline{Y}} \overline{\Pi}' = 0 \,; \qquad i_Y \Omega = i_{\alpha Z} \Omega = \alpha i_Z \Omega = \alpha$$

nous avons $\alpha = F$; $Y = \tilde{Y} + FZ$ et il est facile de vérifier que nous avons bien $L_Y \Omega = \Omega$.

Y est donc parfaitement déterminé par la connaissance d'une fonction F, solution de $L_Z F = 1$.

6) Traitons les exemples suivants :

a) Dans R^3 euclidien, considérons :

$$\Omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 \,; \qquad V = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

où $a_1 a_2 a_3$ sont des fonctions de $x_1 x_2 x_3$ de classe C^2, Ω est de classe maximale 3 si $V \cdot \text{rot}\, V \neq 0$.

Le champ caractéristique de Ω est :

$$Z = \frac{\text{rot}\, V}{V \cdot \text{rot}\, V}$$

F est solution de $L_Z F = 1$ soit :

$$\text{rot}\, V \cdot \text{grad}\, F = A_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} = V \cdot \text{rot}\, V$$

où $A_1 A_2 A_3$ sont les composantes de rot V.

F est donc solution d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre *non homogène* (On sait que sa résolution se ramène à celle d'une équation du premier ordre homogène). Une fois cette équation résolue, nous cherchons Y tel que $L_Y \Omega = i_Y d\Omega + dF = \Omega$, ce qui se traduit par :

$$\text{rot}\, V \times Y = V - \text{grad}\, F$$

Posons $Y = \tilde{Y} + \alpha Z$ avec : $dF(\tilde{Y}) = \operatorname{grad} F \cdot \tilde{Y} = 0$ ($\tilde{Y}$ est donc tangent au feuilletage). Nous avons :

$$\operatorname{rot} V \times \tilde{Y} = V - \operatorname{grad} F$$

d'où par division vectorielle :

$$\tilde{Y} = \frac{(V - \operatorname{grad} F) \times \operatorname{rot} V}{\| \operatorname{rot} V \|^2} + \lambda \operatorname{rot} V$$

λ est déterminé par $\operatorname{grad} F \cdot \tilde{Y} = 0$, soit :

$$\lambda \operatorname{rot} V \cdot \operatorname{grad} F = - \frac{(V, \operatorname{rot} V, \operatorname{grad} F)}{\| \operatorname{rot} V \|^2}$$

et comme : $\operatorname{rot} V \cdot \operatorname{grad} F = V \cdot \operatorname{rot} V$ nous avons :

$$\tilde{Y} = \frac{1}{\| \operatorname{rot} V \|^2} \left[(V - \operatorname{grad} F) \times \operatorname{rot} V - \frac{(V, \operatorname{rot} V, \operatorname{grad} F)}{V \cdot \operatorname{rot} V} \operatorname{rot} V \right]$$

Nous pouvons vérifier ensuite que $i_{\tilde{Y}}\Omega = \tilde{Y} \cdot V = 0$ donc $\alpha = F$ et :

$$Y = \tilde{Y} + \frac{F}{V \cdot \operatorname{rot} V} \operatorname{rot} V$$

b) Dans 2^{n+1} muni des coordonnées (z, x_i, y^i) considérons : $\Omega = dz - x_i dy^i$. Nous avons $Z = \frac{\partial}{\partial z}$ donc une solution de $L_Z F = \frac{\partial F}{\partial z} = 1$ se met sous la forme : $F = z + V(x_i y^i)$.

En posant : $Y = Y_z \frac{\partial}{\partial z} + Y_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + Y_{y^i} \frac{\partial}{\partial y^i}$ l'égalité $L_Y\Omega = i_Y d\Omega + dF = \Omega$ donne :

$$Y_{x_i} = \frac{\partial V}{\partial y^i} + x_i \; ; \qquad Y_{y^i} = - \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

De l'égalité $i_Y \Omega = F$ nous tirons :

$$Y_z = - x_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + V + z .$$

Y est donc déterminé par la donnée d'une fonction $V(x_i y^i)$. Notons que

$$\Pi = dF - \Omega = dV + x_i dy^i .$$

7) De façon générale, nous pouvons appliquer le théorème de Darboux à la 1-forme Π qui est de classe constante $2n$: au voisinage de tout x de M tel que $\Pi \neq 0$ (c'est-à-dire tel que $\overline{\Pi} \neq 0$ ou encore $\overline{Y} \neq 0$), il existe $2n$ quantités p_i, q^i telles que :

$$\Pi = p_i dq^i \qquad \text{avec} \qquad p_1(x) \neq 0 .$$

Posons alors $s = F$. Nous avons :

$$\Omega = ds - p_i dq^i$$

et nous dirons que les $2n + 1$ quantités s, p_i, q^i définissent *un système de coordonnées locales adaptées à* (M, Ω, Y). Dans ce système :

$$Z = \frac{\partial}{\partial s}; \qquad Y = s\frac{\partial}{\partial s} + p_i \frac{\partial}{\partial p_i}; \qquad \tilde{Y} = p_i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

Reprenons l'exemple de R^{2n+1} muni de $\Omega = dz - x_i dy^i$ et considérons le champ d'homothétie suivant (que nous rencontrerons encore par la suite) défini par : $V = -2x_1 y^1$, d'où :

$$\left\{ \begin{array}{lll} Y_{x_1} = \dfrac{\partial V}{\partial y^1} + x_1 = -x_1 ; & Y_{x_\alpha} = \dfrac{\partial V}{\partial y^\alpha} + x_\alpha = x_\alpha & \\ & & (\alpha = 2, \ldots, n) \\ Y_{y^1} = -\dfrac{\partial V}{\partial x_1} = 2y^1 ; & Y_{y^\alpha} = -\dfrac{\partial V}{\partial x_\alpha} = 0 & \\ Y_z = -y^i \dfrac{\partial V}{\partial y^i} + V + z = z & & \end{array} \right.$$

et :
$$\Pi = dV + x_i dy^i = -x_1 dy^1 - 2y^1 dx_1 + x_\alpha dy^\alpha.$$

Supposons maintenant que $y^1 > 0$. Nous pouvons alors écrire :

$$\Pi = -2\sqrt{y^1}\, d(x_1\sqrt{y^1}) + x_\alpha dy^\alpha$$

et choisir comme coordonnées adaptées :

$$\begin{array}{lll} p_1 = -2\sqrt{y^1} (< 0) ; & & p_\alpha = x_\alpha \\ q^1 = x_1\sqrt{y^1} & ; & q^\alpha = y^\alpha \\ s = z - 2x_1 y^1 & & \end{array}$$

d'où :
$$\Pi = p_i dq^i \qquad \text{et} \qquad \Omega = ds - p_i dq^i.$$

Soit alors :
$$U = \{ (s, p_i q^i) \in R^{2n+1} / p_1 < 0 \}.$$

Le quotient $\overline{U}$ de U par les trajectoires de $Z = \dfrac{\partial}{\partial s}$ peut être identifié à l'intersection de U avec la surface $s = 0$ et nous pouvons écrire :

$$\overline{\Pi} = \Pi |_{s=0} = p_i dq^i ; \qquad \overline{Y} = Y |_{s=0} = p_i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

Nous avons :
$$\overline{\Pi} = \overline{w}\sigma' = \overline{w}(ds' - p'_\alpha dq^\alpha)$$

avec :
$$\overline{w} = -p_1 ; \qquad s' = -q^1 ; \qquad p'_\alpha = \frac{p_\alpha}{p_1}.$$

Comme $L_Y\overline{w} = \overline{w} > 0$ par hypothèse, les surfaces $w = -p_1 =$ constante définissant un feuilletage adapté à $\overline{Y}$. En désignant par U′ la variété quotient de $\overline{U}$ par les trajectoires de $\overline{Y}$, nous pouvons affirmer que (U', σ') a une structure de variété de contact de dimension $2n-1$. Cette variété va jouer un rôle fondamental dans la réduction du problème des N-corps, comme nous le verrons par la suite. Avant cela nous devons étudier les propriétés de deux types de champs de vecteurs que l'on peut définir sur une variété canonique : les *champs hamiltoniens* et les *champs de contact.*

III. CHAMPS DE VECTEURS SUR UNE VARIÉTÉ CANONIQUE

1) Un *champ hamiltonien* sur une variété canonique (M, Ω, Y) est un champ X tel que : $L_X\Omega = 0$.

Le *hamiltonien* de X est la fonction H telle que : $i_X\Omega = -H$. Notons que si H est constant, X est colinéaire au champ caractéristique Z.

La terminologie employée va être justifiée par les propriétés suivantes :

a) X est *projetable* par Z. En effet :

$$i_{[X,Z]}\Omega = L_X i_Z\Omega - i_Z L_X\Omega = 0$$
$$i_{[X,Z]}d\Omega = L_X i_Z d\Omega - i_Z L_X d\Omega = 0$$

Donc $[X, Z] = 0$. De plus, H est intégrale première de Z puisque :

$$L_Z H = -L_Z i_X\Omega = -i_X L_Z\Omega = 0.$$

b) Soit $\overline{X}$ la projection de X sur la variété quotient $\overline{M}$. Nous allons montrer que $\overline{X}$ *est un champ hamiltonien* ordinaire sur la variété symplectique exacte $(\overline{M}, \overline{\Pi})$. Pour celà, calculons la valeur de $i_{\overline{X}}d\overline{\Pi}$ pour un champ de vecteurs quelconque $\overline{V}$ sur $\overline{M}$:

$$i_{\overline{X}}d\overline{\Pi}(\overline{V}) = d\overline{\Pi}(\overline{X}, \overline{V}) = d\overline{\Pi}(Tp\cdot X, Tp\cdot\tilde{V})$$

où $\tilde{V}$ est le champ tangent au feuilletage tel que $\overline{V} = Tp\cdot\tilde{V}$. Donc :

$$\begin{aligned} i_{\overline{X}}d\overline{\Pi}(\overline{V}) &= p^*d\overline{\Pi}(X, \tilde{V}) = d\Pi(X, \tilde{V}) \\ &= i_X d\Pi(\tilde{V}) = -i_X d\Omega(\tilde{V}) \\ &= -dH(\tilde{V}) \end{aligned}$$

puisque : $L_X\Omega = i_X d\Omega - dH = 0$. Comme H est intégrale première de Z, il existe $\overline{H}$ sur $\overline{M}$ telle que $H = p^*\overline{H}$ et nous pouvons écrire :

$$i_{\overline{X}}d\overline{\Pi}(\overline{V}) = -p^*d\overline{H}(\tilde{V}) = -d\overline{H}(\overline{V})$$

et ceci quel que soit le champ $\overline{V}$ sur $\overline{M}$. Nous en déduisons que $i_{\overline{X}}d\overline{\Pi} = -d\overline{H}$, donc $\overline{X}$ est un champ hamiltonien sur $(\overline{M}, \overline{\Pi})$, de hamiltonien $\overline{H}$.

c) Le champ X peut s'écrire : $X = \tilde{X} + \lambda Z$ où $\tilde{X}$ est un champ tangent au feuilletage. D'après ce qui précède, $\tilde{X}$ apparaît comme un champ hamiltonien ordinaire défini sur chaque feuille $F = i_Y\Omega$ = constante, et induit par $\overline{X}$. Dans un système de coordonnées locales adaptées nous avons :

$$\Omega = ds - p_i dq^i\,; \qquad Z = \frac{\partial}{\partial s}\,; \qquad Y = s\frac{\partial}{\partial s} + p_i\frac{\partial}{\partial p_i}$$

avec : $L_Z H = \partial H/\partial s = 0$. Les formules : $L_X\Omega = i_X d\Omega - dH = 0$; $i_X\Omega = -H$ entraînent

$$\begin{cases} X_{p_i} = \tilde{X}_{p_i} = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}\,; \qquad X_{q^i} = \tilde{X}_{q^i} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ X_s = \lambda = p_i X_{q^i} - H = p_i\dfrac{\partial H}{\partial p_i} - H \end{cases}$$

La variable $s\,(= F)$ joue le rôle de *l'action* et la fonction λ s'interprète comme *la fonction de Lagrange.* Notons que ces quantités, tout comme le hamiltonien H, sont intrinsèquement définies.

2) Il est maintenant possible de reprendre la formulation de la mécanique hamiltonienne, cette fois dans le cadre plus général des variétés canoniques : (M, Ω, Y) définit la structure de base, *indépendamment* des champs hamiltoniens, que l'on se donne ensuite par $L_X\Omega = 0$. Par projection suivant Z, on obtient la structure symplectique exacte $(\overline{M}, \overline{\Pi})$ sur laquelle est définie le champ hamiltonien ordinaire $\overline{X} = Tp\cdot X$. Le feuilletage adapté est défini par les surfaces *d'action constante* (le temps t garde son rôle de paramètre indépendant, mais ne joue plus en même temps de rôle de variable).

$$\begin{array}{ccccc} & & (M, \Omega, Y) & & \\ & & L_X\Omega = 0 & & L_X F = \lambda : \text{si } \lambda \neq 0 \\ s = F = \text{constante}: & \swarrow{\scriptstyle p}\,{\scriptstyle Z} & & {\scriptstyle p_0}\,{\scriptstyle Z}\searrow & s = F = \text{constante}: \\ \text{feuilletage adapté} & & & & \text{feuilletage adapté} \\ (\overline{M}, \overline{\Pi}) & & & & (N_0, \omega_0) \\ i_{\overline{X}} d\overline{\Pi} = -\,d\overline{H} & & & & p_0^*\omega_0 = d(-\,\Omega/H)(H \neq 0) \end{array}$$

De manière analogue à la formulation classique on peut chercher à définir sur l'espace quotient de M par les trajectoires de X une structure de variété symplectique (N_0, ω_0) que l'on appellera encore *espace des mouvements.*

Comme : $L_X F = L_{\tilde{X}} F + L_{\lambda Z} F = \lambda$, nous pouvons affirmer que, dans le cas où $\lambda \neq 0$, les surfaces d'action constante définissent un feuilletage adapté à X, ce qui dote N_0 d'une structure de variété différentiable (de dimension $2n$).

Il reste à définir sur N_0 une 2-forme fermée ω_0 de classe $2n$, ou ce qui revient au même, une 2-forme fermée α de classe $2n$ sur M qui soit *invariant intégral absolu de* X. Or, X étant champ hamiltonien sur (M, Ω, Y), on peut montrer que X est le champ caractéristique de la 1-forme $-\Omega/H$ (où nous supposons $H \neq 0$).

En effet :

$$i_X(-\Omega/H) = 1\ ;$$

$$i_X d(-\Omega/H) = -\frac{i_X d\Omega}{H} + i_X\frac{dH \wedge \Omega}{H^2} = -\frac{dH}{H} + \frac{i_X dH}{H^2} - \frac{(i_X\Omega)dH}{H^2}$$

$$= -\frac{dH}{H} + \frac{L_X H}{H^2} + \frac{dH}{H} = 0; \qquad (L_X H = -L_X i_X \Omega = -i_X L_X \Omega = 0)$$

La 2-forme $\alpha = d(-\Omega/H)$ est fermée et de classe $2n$; de plus α est un invariant intégral absolu de X, puisque $i_X\alpha = 0$; $i_X d\alpha = 0$. Donc lorsque $H \neq 0$ il existe sur N_0 une 2-forme fermée ω_0, de classe $2n$, telle que : $\alpha = p_0^*\omega_0$ (p_0 désignant la projection de M sur N_0), et (N_0, ω_0) a une structure de variété symplectique.

Il reste à envisager les cas particuliers où λ est identiquement nulle d'une part et où $H = 0$ d'autre part (et qui s'avèrent être les cas les plus intéressants).

a) Supposons d'abord que λ soit identiquement nulle, c'est-à-dire que X soit partout tangent au feuilletage (puisque $X = \tilde{X}$). Dans ce cas $L_X F = 0$ et :

$$i_{[X,Y]}\Omega = L_X i_Y \Omega - i_Y L_X \Omega = L_X F = 0\ ;$$

comme de plus :

$$L_{[X,Y]}\Omega = L_X L_Y \Omega - L_Y L_X \Omega = L_X \Omega = 0,$$

nous pouvons affirmer que $[X, Y] = 0$ donc que X *est projetable par* Y ; cette propriété reste vraie si l'on considère les projections $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ de X et Y par Z. Comme $i_{\overline{X}} d\overline{\Pi} = -d\overline{H}$; $i_{\overline{Y}} d\overline{\Pi} = \overline{\Pi}$ nous avons encore :

$$L_{\overline{X}} d\overline{\Pi} = d i_{\overline{X}} d\overline{\Pi} = d(-d\overline{H}) = 0$$

et : $\quad L_{\overline{X}}\overline{\Pi} = L_{\overline{X}} i_{\overline{Y}} d\overline{\Pi} = i_{\overline{Y}} L_{\overline{X}} d\overline{\Pi} \qquad$ (puisque $[\overline{X}, \overline{Y}] = 0$)

soit : $\quad L_{\overline{X}}\overline{\Pi} = 0$

Enfin pour déterminer $i_{\overline{X}}\overline{\Pi}$, nous calculons $p^*(i_{\overline{X}}\overline{\Pi})$

$$p^*(i_{\overline{X}}\overline{\Pi}) = i_X(p^*\overline{\Pi}) = i_X\Pi$$

$$= -i_X\Omega \qquad (\text{puisque } \Omega = dF - \Pi \text{ et } dF(X) = 0)$$

d'où : $\quad p^*(i_{\overline{X}}\overline{\Pi}) = H = p^*\overline{H}$

et : $\quad i_{\overline{X}}\overline{\Pi} = \overline{H}$

Il s'ensuit que $\overline{X}$ définit un *système hamiltonien homogène*, de *hamiltonien homogène* $\overline{H}$. En effet, traduisons les propriétés précédentes dans un système de coordonnées locales adaptées ; dans un voisinage U d'un point x de M nous avons $\Omega\,|_{\mathrm{U}} = ds - p_i dq^i$; $\Pi\,|_{\mathrm{U}} = p_i dq^i$, et nous identifions localement $\overline{\mathrm{M}}$ à la feuille d'action constante passant par x, que nous désignons par V ; il en résulte :

$$\overline{\Pi} = \Pi\,|_{\mathrm{V}} = p_i dq^i \,;$$
$$\overline{\mathrm{X}} = \mathrm{X}\,|_{\mathrm{V}} = \mathrm{X}_{p_i}\frac{\partial}{\partial p_i} + \mathrm{X}_{q^i}\frac{\partial}{\partial q^i} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} \qquad (\mathrm{X}_s \equiv 0)$$
$$\overline{\mathrm{H}} = \mathrm{H}(p_i, q^i)$$

L'égalité $i_{\overline{\mathrm{X}}}\overline{\Pi} = \overline{\mathrm{H}}$ se traduit par :

$$p_i \mathrm{X}_{q^i} = p_i \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i} = \mathrm{H}$$

c'est-à-dire H *est homogène de degré* 1 *par rapport aux* p_i.

Nous appliquerons ceci au problème des N-corps que nous pourrons mettre sous forme homogène.

Une conséquence en sera la *réduction* de ce problème (correspondant à la projection de $\overline{\mathrm{X}}$ par $\overline{\mathrm{Y}}$) et le champ réduit (ou projeté) sera un exemple de *champ de contact* dont l'étude sera abordée plus loin.

b) Supposons maintenant que $\mathrm{H} = 0$. On montre classiquement que les trajectoires du champ X sur $\mathrm{H} = 0$ sont celles du champ hamiltonien X', de hamiltonien H', sur $\mathrm{H}' = 0$ à condition que $\mathrm{H}' = 0$ et $\mathrm{H} = 0$ définissent la *même* sous-variété. Dans ce cas $\mathrm{X}' = \mu \mathrm{X}$, μ étant une fonction sur M.

Ceci peut être mis à profit localement, en résolvant $\mathrm{H} = 0$ pour une des variables ; supposons qu'au point x, $\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p^1} \neq 0$. Alors dans un voisinage de x nous avons :

$$\mathrm{H} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{H}' = p_1 + \mathrm{H}_1(p_\alpha, q^i) = 0 \qquad (\alpha = 2, \ldots, n)$$

Il faut remplacer X par $\mathrm{X}' = \mu \mathrm{X}$ avec $\mu = 1/(\partial \mathrm{H}/\partial p_1)$ et nous obtenons alors le système hamiltonien :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{X}'_{q^1} = \dfrac{\partial \mathrm{H}'}{\partial p_1} = 1 \,; \qquad \mathrm{X}'_{q^\alpha} = \dfrac{\partial \mathrm{H}'}{\partial p_\alpha} = \dfrac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial \mathrm{P}_\alpha} \\ \mathrm{X}'_{p_1} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}'}{\partial q^1} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial q_1} \,; \qquad \mathrm{X}'_{p_\alpha} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}'}{\partial q^\alpha} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial q^\alpha} \\ \mathrm{X}'_s = p_i \dfrac{\partial \mathrm{H}'}{\partial p_i} - \mathrm{H}' = p_\alpha \dfrac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial p_\alpha} - \mathrm{H}_1 \end{array}\right.$$

Les $2n - 2$ équations en p_α, q^α définissent un système hamiltonien *non conservatif*, H_1 correspondant à un hamiltonien « dépendant du temps » en identifiant q^1 à la variable indépendante.

Cependant, au lieu de procéder ainsi, il est possible de transformer le champ hamiltonien sur $H = 0$ en un champ de contact sur une variété de dimension $2n - 1$ [7].

Notons pour finir que les deux cas précédents se combinent lorsqu'on étudie un système hamiltonien homogène sur la sous-variété $H = 0$; dans le cas du problème des N-corps, cela correspond à l'étude de la *variété de collision.* Nous aurons l'occasion d'y revenir par la suite.

3) Un *champ de contact* sur une variété canonique (M, Ω, Y) est un champ X tel que :

$$L_X\Omega = \lambda\Omega$$

où λ est une fonction sur M. Le *hamiltonien de contact* [2] de X est la fonction K telle que : $i_X\Omega = -K$.

Notons que si λ est identiquement nulle, X est un champ hamiltonien, et que si $\lambda \equiv 1$ X est un champ d'homothétie.

Donnons quelques propriétés des champs de contact :

a) Nous avons :

$$L_X\Omega = i_X d\Omega - dK = \lambda\Omega$$

donc :

$$i_Z i_X d\Omega - i_Z dK = \lambda i_Z\Omega$$

Comme :

$$i_Z d\Omega = 0\,; \qquad i_Z\Omega = 1, \qquad L_Z K = -\lambda$$

b) Calculons $i_{[X,Z]}\Omega$ et $L_{[X,Z]}\Omega$:

$$i_{[X,Z]}\Omega = L_X i_Z\Omega - i_Z L_X\Omega = -\lambda$$
$$L_{[X,Z]}\Omega = L_X L_Z\Omega - L_Z L_X\Omega = (-L_Z\lambda)\Omega.$$

Donc sauf si $\lambda \equiv$ constante, $[X, Z]$ n'est pas colinéaire à Z, c'est-à-dire X *n'est pas projetable par* Z.

c) Dans un système de coordonnées adaptées, nous avons : $\Omega = ds - p_i dq^i$; $Z = \dfrac{\partial}{\partial s}$; $\lambda = -\dfrac{\partial K}{\partial s}$ et les égalités :

$$\begin{aligned} L_X\Omega &= i_X d\Omega - dK \\ &= i_X(-dp_i \wedge dq^i) - dK = -X_{p_i}dq^i + X_{q^i}dp_i - dK \\ &= -\frac{\partial K}{\partial s}(ds - p_i dq^i) \end{aligned}$$

$$i_X\Omega = X_s - p_i X_{q^i} = -K(s, p_i, q^i)$$

entraînent

$$\begin{cases} X_{p_i} = -\dfrac{\partial K}{\partial q^i} - p_i\dfrac{\partial K}{\partial s}\,; \qquad X_{q^i} = \dfrac{\partial K}{\partial p_i} \\ X_s = p_i\dfrac{\partial K}{\partial p_i} - K \end{cases}$$

Ces $2n+1$ équations forment le *système de contact.*

d) Nous avons :

$$L_X K = - L_X i_X \Omega = - i_X L_X \Omega = - \lambda i_X \Omega$$

Donc : $L_X K = \lambda K$. Le hamiltonien de contact K n'est pas intégrale première du système de contact, par *contre la sous-variété d'équation* $K = 0$ *est une variété invariante.*

Écrivons les équations du système de contact sur $K = 0$ sous la forme :

$$\frac{dp_i}{-\dfrac{\partial K}{\partial q^i} - p_i \dfrac{\partial K}{\partial s}} = \frac{ds}{p_i \dfrac{\partial K}{\partial p_i}} = \frac{dq^i}{\dfrac{\partial K}{\partial p_i}}$$

Nous reconnaissons dans ce système le système des caractéristiques de l'équation des dérivées partielles du premier ordre :

$$K\left(V, \frac{\partial V}{\partial q^i}, q^i\right) = 0$$

où nous avons posé : $s = V(q^i)$; $p_i = \dfrac{\partial V}{\partial q^i}$.

La solution du système de contact sur $K = 0$ pourra donc être localement interprétée comme une famille de surfaces dans R^{n+1} muni des coordonnées (s, q^i). Ces surfaces seront engendrées par les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles précédente.

Un exemple classique de ceci est fourni par *l'équation de Hamilton-Jacobi* qui correspond à un hamiltonien de contact de la forme : $K = p_t + H(p_\lambda, q^\lambda, t)$; $(\partial K/\partial s = 0)$. L'équation aux dérivées partielles associée s'écrit en effet :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(\frac{\partial V}{\partial q^\lambda}, q^\lambda, t\right) = 0.$$

(Le système de contact se réduisant ici à un système hamiltonien).

4) Les définitions et propriétés précédentes restent valables pour une variété de contact ordinaire (M', σ') sur laquelle on ne se donne pas un champ d'homothétie ; on ne peut plus cependant parler de coordonnées adaptées. Par contre le théorème de Darboux permet d'affirmer qu'il existe, au voisinage de tout point x' de M', un système de coordonnées locales (s', p'_i, q'_i) telles que :

$$\sigma' = ds' - p'_i dq'^i$$

et dans ces coordonnées le système de contact aura une expression analogue à celle donnée précédemment.

Nous avons déjà rencontré une telle variété de contact lorsque nous avons considéré la variété quotient de la variété symplectique exacte $(\overline{M}, \overline{\Pi})$

par son champ fondamental $\overline{Y}$ (nous supposons que la structure de variété quotient existe et nous faisons certaines hypothèses sur $\overline{Y}$ et la projection correspondante $\overline{p}$).

Nous savons qu'il existe alors une fonction $\overline{w} > 0$ sur M vérifiant $L_{\overline{Y}}\overline{w} = \overline{w}$ et telle que :

$$\overline{\Pi} = \overline{w}\overline{\sigma} \qquad \text{avec :} \qquad \overline{\sigma} = \overline{p}^*\sigma'$$

($\overline{\sigma}$ est donc un invariant intégral absolu de $\overline{Y}$).

Soit alors un champ hamiltonien $\overline{X}$ sur $(\overline{M}, \overline{\Pi})$ qui commute avec $\overline{Y}$, c'est-à-dire qui définit un système hamiltonien homogène comme nous le savons. Alors $\overline{X}$ est projetable par $\overline{Y}$ et il existe un champ X′ sur (M′, σ′) tel que : $X' = T\overline{p}\cdot\overline{X}$. Nous allons maintenant voir que X′ *est un champ de contact sur* (M′, σ′) par une démonstration analogue à celle donnée en [*7*].

En effet, nous savons que $L_{\overline{X}}\overline{\Pi} = 0$ donc $L_{\overline{X}}(\overline{w}\overline{\sigma}) = 0$ et $L_{\overline{X}}\overline{\sigma} = -\left(\dfrac{L_{\overline{X}}\overline{w}}{\overline{w}}\right)\overline{\sigma} = \overline{\lambda}\overline{\sigma}$

De plus : $L_{\overline{Y}}\overline{\lambda} = -\dfrac{L_{\overline{Y}}L_{\overline{X}}\overline{w}}{\overline{w}} + \dfrac{(L_{\overline{X}}\overline{w})(L_{\overline{Y}}\overline{w})}{\overline{w}^2} = -\dfrac{L_{\overline{X}}L_{\overline{Y}}\overline{w}}{\overline{w}} + \dfrac{L_{\overline{X}}\overline{w}}{\overline{w}} = 0$ et il il existe λ′ sur (M′, σ′) telle que : $\overline{\lambda} = \overline{p}^*\lambda'$.

Nous allons montrer que $L_{X'}\sigma' = \lambda'\sigma'$. Pour cela nous calculons $\overline{p}^*(L_{X'}\sigma')$:

$$\begin{aligned}\overline{p}^*(L_{X'}\sigma') &= \overline{p}^*(i_{X'}d\sigma' + di_{X'}\sigma') = i_{\overline{X}}d(\overline{p}^*\sigma') + di_{\overline{X}}(\overline{p}^*\sigma') \\ &= i_{\overline{X}}d\overline{\sigma} + di_{\overline{X}}\overline{\sigma} = L_{\overline{X}}\overline{\sigma} = \overline{\lambda}\overline{\sigma} \\ &= \overline{p}^*(\lambda'\sigma')\end{aligned}$$

d'où il résulte que : $L_{X'}\sigma' = \lambda'\sigma'$ et X′ est bien un champ de contact sur (M′, σ′).

Le hamiltonien de contact K′ de X′ est par définition égal à $-i_{X'}\sigma'$ d'où :

$$\begin{aligned}\overline{p}^*K' &= -\overline{p}^*i_{X'}\sigma' = -i_{\overline{X}}\overline{p}^*\sigma' \\ &= -i_{\overline{X}}\overline{\sigma} = -i_{\overline{X}}(\overline{\Pi}/\overline{w})\end{aligned}$$

et :
$$\overline{p}^*K' = -\overline{H}/\overline{w}$$

où $\overline{H} = i_{\overline{X}}\overline{\Pi}$ est le hamiltonien (homogène) de $\overline{X}$ comme nous le savons.

5) Soit (M, Ω) une variété de contact (non nécessairement une variété canonique) et X un champ de contact sur (M, Ω) donc tel que $L_X\Omega = \lambda\Omega$. La condition pour qu'un champ W commute avec X est équivalente aux égalités :

$$i_{[X,W]}\Omega = 0 \; ; \qquad L_{[X,W]}\Omega = 0$$

Considérons d'abord la première. En posant $i_W\Omega = G$ elle s'écrit : $L_XG = \lambda G$. Compte tenu de $L_XK = \lambda K$, K étant le hamiltonien de contact de X, nous pouvons affirmer que si un champ W est tel que $i_{[X,W]}\Omega = 0$ alors G/K *est intégrale première du champ de contact* X (en supposant $K \neq 0$).

Ceci peut être considéré comme la forme du *théorème de Noether* valable pour les champs de contact (Notons que lorsque X est un champ hamiltonien, c'est-à-dire $\lambda \equiv 0$, alors $L_X G = 0$ et G est intégrale première).

Il est possible de préciser les choses si W est lui-même un champ de contact. En effet, nous avons en écrivant $L_W \Omega = \mu\Omega$:

$$\begin{aligned} L_{[X,W]}\Omega &= (L_X\mu - L_W\lambda)\Omega \\ i_{[X,W]}\Omega &= L_X G - \lambda G \\ &= - L_W K + \mu K \end{aligned}$$

Nous voyons donc que lorsque

$$L_W\Omega = \mu\Omega\,; \qquad L_W K = \mu K$$

alors $L_X G = \lambda G$ et il s'ensuit, puisque $L_X K = \lambda K$ et $L_W G = \mu G$, que G/K *est intégrale première commune à* X *et* W (toujours en supposant $K \neq 0$).

Si de plus $L_X\mu - L_W\lambda = 0$, alors $L_{[X,W]}\Omega = 0$ d'où on déduit que $[X, W] = 0$ et X est projetable par W.

Un cas particulier important est celui où W est un champ d'homothétie c'est-à-dire $\mu \equiv 1$. Dans ce cas $L_X\mu = 0$, et la condition $L_W K = K$ entraîne (Z étant le champ caractéristique de Ω) :

$$L_W\lambda = - L_W L_Z K = L_{[Z,W]}K - L_Z L_W K = 0$$

puisque $[Z, W] = Z$ d'après une propriété des champs d'homothétie, et il en résulte que $L_{[X,W]}\Omega = 0$.

Donc les conditions :

$$L_W\Omega = \Omega\,; \qquad L_W K = K$$

entraînent *en même temps* que G/K est intégrale première commune à X et W *et* que $[X, W] = 0$.

En revenant à une variété canonique (M, Ω, Y) nous avons déjà vu l'intérêt que présentent les champs hamiltoniens qui commutent avec Y et qui donnent naissance aux systèmes hamiltoniens homogènes. Nous en aurons un exemple concret lorsque nous étudierons *la réduction du problème des* N-*corps.*

De façon plus générale, il se trouve que les champs de contact qui commutent avec Y présentent un intérêt tout aussi grand. En effet nous verrons que la description de *la particule libre relativiste* rentre dans ce cadre.

L'étude de ces deux exemples va maintenant faire l'objet de la dernière partie de ce travail.

IV. LA RÉDUCTION DU PROBLÈME DES N-CORPS

1) Toutes les notions que nous venons de voir permettent une formulation « intrinsèque » du problème des N-corps liée à la « géométrie » du problème, et la réduction que nous pourrons faire en découlera directement. Pour fixer les idées nous donnerons comme illustration concrète un cas particulier du problème des 3-corps, le « *problème keplerien géné-*

ralisé » qui recouvre le problème keplerien classique ainsi que le problème rectiligne des 3-corps et le problème plan isocèle des 3-corps.

Comme point de départ, nous considérons R^{2n+1} muni des coordonnées (z, x_i, y^i) et de la 1-forme canonique $\Omega = dz - x_i dy^i$ comme en (II-6-*b*). Nous nous donnons en même temps le champ d'homothétie Y déjà rencontré en (II-7) dont nous rappelons l'expression : Avec $V = -2x_1 y^1$ nous avions :

$$\left\{\begin{array}{ll} Y_{x_1} = \dfrac{\partial V}{\partial y^1} + x_1 = - x_1 \, ; & Y_{x_\alpha} = \dfrac{\partial V}{\partial y^\alpha} + x_\alpha = x_\alpha \\ Y_{y^1} = - \dfrac{\partial V}{\partial x_1} = 2y^1 \, ; & Y_{y^\alpha} = - \dfrac{\partial V}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 2, \ldots, n) \\ Y_z = - y^i \dfrac{\partial V}{\partial y^i} + V + z = z & \end{array}\right.$$

et $\Omega = dF - \Pi$ avec :

$$F = i_Y \Omega = z - 2x_1 y^1 \, ; \qquad \Pi = - i_Y d\Omega = - x_1 dy^1 - 2y^1 dx_1 + x_\alpha dy^\alpha .$$

Ensuite, nous prenons une sous-variété ouverte M de dimension $2n+1$ de R^{2n+1} définie par :

$$M = \{ (z, x_i, y^i) \in R^{2n+1} / y^1 > 0 \, ; \qquad a^\alpha < y^\alpha < b^\alpha \}$$

où les a^α, b^α sont des constantes données à l'avance.

$(M, \Omega|_M, Y|_M)$ que nous notons plus simplement (M, Ω, Y), définit notre variété canonique. Pour le problème des N-corps, y^1 s'interprétera comme le *rayon d'inertie* des N-corps par rapport au centre de gravité que nous prendrons pour origine. Les y^α seront des variables *angulaires* fixant la configuration (dans l'espace physique) des N-corps. Les x_i correspondront aux variables conjuguées des y^i. En particulier x_1 sera égal à $\dfrac{dy^1}{dt}$ et parmi les x_i figurera en général le *moment cinétique* des N-corps. Certaines des bornes sur les y^i correspondront aux singularités de *collision*, que nous écartons. En particulier $y^1 = 0$ signifiera que les N-corps rentrent en collision à l'origine.

2) Le mouvement des N-corps est déterminé par la donnée d'un champ hamiltonien sur (M, Ω, Y) qui vérifie donc $L_X\Omega = 0$ avec $H = - i_X\Omega$. Tel qu'on le donne habituellement, H vérifie la relation :

$$L_Y H = - 2H$$

qui traduit l'homogénéïté de degré -1 par rapport à y^1 du potentiel newtonien. Il en résulte :

$$\begin{aligned} L_{[X,Y]}\Omega &= L_X L_Y \Omega = L_X \Omega = 0 \\ i_{[X,Y]}\Omega &= - i_{[Y,X]}\Omega = - L_Y i_X \Omega + i_X L_Y \Omega \\ &= L_Y H - H \\ &= - 3H \end{aligned}$$

Par conséquent $[X, Y] = 3X$, donc X ne commute pas avec Y. Nous allons voir comment remplacer X par un champ hamiltonien X_0 qui commute avec Y, donc qui définit un système hamiltonien homogène. Pour celà nous posons :

$$X_0 = \nu X + \alpha Z$$

et nous déterminons ν et α par les relations

$$[X_0, Y] = 0 \,; \qquad L_{X_0}\Omega = 0$$

d'où les équations :

$$\nu[X, Y] - (L_Y\nu)X + \alpha[Z, Y] - (L_Y\alpha)Z = 0$$

$$(i_X\Omega)d\nu + (i_Z\Omega)d\alpha = 0 \qquad (\text{puisque } L_X\Omega = 0 \,;\, L_Z\Omega = 0)$$

En tenant compte des relations $[Z, Y] = Z$; $i_Z\Omega = 1$ nous obtenons :

$$L_Y\nu = 3\nu \,; \qquad L_Y\alpha = \alpha \,; \qquad d\alpha = \mathrm{H}d\nu$$

Le choix de ν va dépendre du signe de H :

Si $H > 0$ nous pouvons prendre :

$$\nu = \frac{H^{-3/2}}{2}$$

Si $H < 0$ nous pouvons prendre :

$$\nu = \frac{(-H)^{-3/2}}{2}$$

Le cas $H = 0$ sera envisagé plus loin.

Le choix de ν détermine alors α :

Si $H > 0$ nous avons :

$$\alpha = \frac{3}{2}H^{-1/2}$$

Si $H < 0$ nous avons :

$$\alpha = -\frac{3}{2}(-H)^{-1/2}$$

Le champ $X_0 = \nu X + \alpha Z$ que nous venons de construire est un champ hamiltonien qui commute avec Y, de hamiltonien :

$$H_0 = -i_{X_0}\Omega = \nu H - \alpha$$

soit :

$$H_0 = -H^{-1/2} \quad \text{si} \quad H > 0$$

$$H_0 = (-H)^{-1/2} \quad \text{si} \quad H < 0$$

La connaissance des trajectoires du champ X_0 conduit à la connaissance de celles du champ X. En effet les $2n$ équations différentielles en x_i, y^i des deux systèmes différentiels associés sont équivalentes au changement temporel $d\tau = vdt$ près ; les équations en z ne nécessitent ensuite que des quadratures. Elles s'écrivent en effet :

$$\frac{dz}{dt} = x_i \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i} - \mathrm{H} \,; \qquad \frac{dz}{d\tau} = x_i \frac{\partial \mathrm{H}_0}{\partial x_i} - \mathrm{H}_0$$

H et H_0 ne dépendant que des x_i, y^i.

Notons, puisque $[\mathrm{X}_0, \mathrm{Y}] = 0$, que la quantité $i_{\mathrm{Y}}\Omega = \mathrm{F} = z - 2x_i y^i$ est *intégrale première de* X_0 (d'après III-5). De même, puisque :

$$\begin{aligned} \mathrm{L_X F} &= \mathrm{L_X} i_{\mathrm{Y}}\Omega = i_{[\mathrm{X},\mathrm{Y}]}\Omega = 3 i_{\mathrm{X}}\Omega \\ &= -\,3\mathrm{H} \,; \\ \mathrm{L_X H} &= 0 \end{aligned}$$

la quantité $\mathrm{F} + 3\mathrm{H}t$ est *intégrale première* (*dépendant du temps*) *de* X.

3) Dans un système de coordonnées adaptées (s, p_i, q^i) nous savons que H_0 sera homogène de degré 1 en p_i. Nous pouvons choisir, d'après (II-7) les coordonnées adaptées suivantes :

$$\begin{cases} p_1 = -\,2\sqrt{y^1} (< 0) \,; & p_\alpha = x_\alpha \\ q^1 = x_1 \sqrt{y^1} \quad ; & q^\alpha = y^\alpha \\ s = \mathrm{F} = z - 2x_1 y^1 & \end{cases}$$

d'où : $\Pi = p_i dq^i$; $\Omega = ds - p_i dq^i$.

En particulier pour le problème keplerien généralisé on se place dans R^5 muni des coordonnées : z, $y^1 = r$, $y^2 = \theta$, $x_1 = p_r$, $x_2 = p_\theta$. Nous avons :

$$\Omega = dz - p_r dr - p_\theta d\theta \,; \qquad \mathrm{V} = -\,2p_r r$$

$$\mathrm{Y}_r = 2r \,; \qquad \mathrm{Y}_\theta = 0$$

$$\mathrm{Y}_{p_r} = -\,p_r \,; \qquad \mathrm{Y}_{p_\theta} = p_\theta$$

$$\mathrm{F} = z - 2p_r r \,; \qquad \Pi = -\,p_r dp_r - 2r dp_r + p_\theta d\theta$$

$$\mathrm{M} = \{\, (z, p_r, p_\theta, r, \theta) \in \mathrm{R}^5 / r > 0 \,; \qquad a < \theta < b \,\}$$

Le hamiltonien H sur M est égal à :

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}(p_r^2 + p_\theta^2/r^2) - \mu(\theta)/r$$

où μ est une fonction donnée de θ. Si $\mu \equiv$ constante, nous retrouvons le problème keplerien classique, p_θ étant alors le moment cinétique. Nous vérifions facilement que $\mathrm{L_Y H} = -\,2\mathrm{H}$.

Pour $\mathrm{H} > 0$, nous avons : $\quad \mathrm{H}_0 = -\left(\dfrac{p_r^2}{2} + \dfrac{p_\theta^2}{2r^2} - \dfrac{\mu(\theta)}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Pour $\mathrm{H} < 0$, nous avons : $\quad \mathrm{H}_0 = \left(-\dfrac{p_r^2}{2} - \dfrac{p_\theta^2}{2r^2} + \dfrac{\mu(\theta)}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}$

En exprimant H_0 dans les coordonnées adaptées définies par :

$$\left\{\begin{array}{l} p_1 = -2\sqrt{r}\,; \quad p_2 = p_\theta \\ q^1 = p_r\sqrt{r} \quad ; \quad q^2 = \theta \\ s = z - 2p_r r \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{array}{l} r = p_1^2/4 \qquad ; \quad \theta = q^2 \\ p_r = -2q^1/p_1\,; \quad p_\theta = p_2 \\ z = s - p_1 q^1 \end{array}\right.$$

nous obtenons :

Pour $H > 0$:

$$H_0 = p_1\left[2(q^1)^2 + 8\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 - 4\mu(q^2)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Pour $H < 0$:

$$H_0 = -p_1\left[-2(q^1)^2 - 8\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 + 4\mu(q^2)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

fonctions qui sont bien homogènes de degré 1 en p_1, p_2.

4) En coordonnées adaptées, le champ caractéristique Z est le champ $\dfrac{\partial}{\partial s}$.

Nous pouvons identifier $\overline{M}$, quotient de M par les trajectoires de Z, à la surface $s = 0$. Sur cette surface sont définis les champs $\overline{X}_0$ et $\overline{Y}$ projections de X_0 et Y par Z ; comme $[X_0, Y]=0$, nous avons également $[\overline{X}_0, \overline{Y}]=0$.

Or nous savons que $L_{\overline{Y}}p_1 = p_1 < 0$ donc les surfaces $\overline{w} = -p_1 =$ constante définissent un feuilletage de $\overline{M}$ adapté à $\overline{Y}$. Le quotient M′ de $\overline{M}$ par les trajectoires de $\overline{Y}$ a donc une structure de variété C^∞, et il s'agit d'une variété de contact, la 1-forme σ' étant définie par : $\overline{\Pi} = \overline{wp}^*\sigma'$. En coordonnées adaptées celà donne :

$$\begin{aligned} \overline{\Pi} = \Pi|_{s=0} &= p_i dq^i = p_1 dq^1 + p_\alpha dq^\alpha \\ &= -p_1\left(-dq^1 - \frac{p_\alpha}{p_1} dq^\alpha\right) \\ &= \overline{wp}^*\sigma' \end{aligned}$$

En identifiant M′ à une surface $\overline{w} = -p_1 =$ constante, nous pouvons écrire :

$$\sigma' = ds' - p'_\alpha dq'^\alpha \quad \text{avec :} \quad s' = -q^1\,; \qquad p'_\alpha = \frac{p_\alpha}{p_1}\,; \qquad q'^\alpha = q^\alpha.$$

Comme nous le savons, le champ $\overline{X}_0$ se projette sur (M', σ') en un champ de contact X'_0 dont le hamiltonien de contact K′ est égal à $-H_0/\overline{w}$. Dans le problème keplerien généralisé nous avons :

$$s' = -q^1 = -p_r\sqrt{r}\,; \qquad p' = \frac{p_2}{p_1} = -\frac{p_\theta}{2\sqrt{r}}\,; \qquad q' = q^2 = \theta$$

et, lorsque $H < 0$:

$$K' = H_0/p_1 = -[-2s'^2 - 8p'^2 + 4\mu(q')]^{-\frac{1}{2}}$$

Nous en déduisons *le système de contact d'ordre trois* :

$$\begin{cases} \dfrac{ds'}{d\tau} = p'\dfrac{\partial K'}{\partial p'} - K' = 2K'^3(s'^2 + 8p'^2 - 2\mu(q')) \\ \dfrac{dp'}{d\tau} = -\dfrac{\partial K'}{\partial q'} - p'\dfrac{\partial K'}{\partial s'} = 2K'^3(\mu'(q') - p's') \\ \dfrac{dq'}{d\tau} = \dfrac{\partial K'}{\partial p'} = 8K'^3 p' \end{cases} \tag{IV-4}$$

Lorsque $H > 0$, nous obtenons un système analogue avec :

$$K' = [2s'^2 + 8p'^2 - 4(q')]^{-\frac{1}{2}}$$

Signalons qu'un système équivalent a été obtenu par Mc Gehee [*8*] par un calcul direct.

A la base de cette réduction du problème keplerien généralisé (que l'on peut bien sûr étendre au problème général des N-corps) est la propriété d'homogénéïté du hamiltonien se traduisant par la relation $L_Y H = -2H$.

Le champ d'homothétie Y généralise la notion habituelle de transformation infinitésimale laissant invariant H (c'est dans ce cadre qu'ont lieu les réductions classiques qui correspondent à des champs *hamiltoniens*). Nous avons cependant vu, comme dans les cas classiques, qu'il existe une *intégrale première associée à* Y (mais qui n'est pas du type classique puisqu'elle dépend de la variable z) (voir (IV-2)).

5) Pour trouver les trajectoires de $\overline{X}_0$ à partir de celles de X'_0 obtenues par intégration du système de contact, nous utilisons le fait que $\overline{X}_0$ se décompose en $\overline{X}_0 = \tilde{X}_0 + \overline{\lambda Y}$, où $\tilde{X}_0$ est un champ tangent au feuilletage $\overline{w} =$ constante dont les trajectoires se déduisent de celles de X'_0, et où $\overline{\lambda} = \dfrac{L_{\overline{X}_0}\overline{w}}{\overline{w}}$ (puisque $L_{\overline{X}_0}\overline{w} = \overline{\lambda} L_{\overline{Y}}\overline{w}_0 = \overline{\lambda}\overline{w}_0$).

Connaissant les trajectoires de $\tilde{X}_0$ il reste à déterminer $\overline{w}$ en fonction du temps pour avoir celles de $\overline{X}_0$; or il se trouve que $\overline{w}$ est donnée directement par l'égalité $K' = -H_0/\overline{w}$, soit : $\overline{w} = -H_0/K'$, puisque K' après intégration est une fonction connue du temps et H_0 est égal soit à $-h^{-1/2}$ soit à $(-h)^{-1/2}$ (h = constante).

Illustrons ceci par le problème keplerien classique qui est intégrable comme nous le savons. Le système de contact correspondant à $h < 0$ est le système (IV-4) dans lequel nous faisons μ = constante, soit :

$$\begin{cases} \dfrac{ds'}{d\tau} = 2K'^3(s'^2 + 8p'^2 - 2\mu) \\ \dfrac{dp'}{d\tau} = -2K'^3 p's' \ ; \qquad \dfrac{dq'}{d\tau} = 8K'^3 p' \end{cases}$$

Puisque $\dfrac{\partial K'}{\partial q'} = 0$, nous avons l'intégrale première $p'/K' = \text{Cte}$ soit :

$$s'^2 = -4p'^2 + 2\mu - k^2/2p'^2 \qquad (k = \text{constante})$$

et le système s'intègre en :

$$p'^2 = \frac{\mu}{4}(1 + e\cos q')\,; \qquad tg\frac{q'}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,tg\frac{\psi}{2}$$

avec : $$\psi - e\sin\psi = \frac{\sqrt{2}}{\mu}(\tau - \tau_0)\,; \qquad e = \sqrt{1 - \frac{2k^2}{\mu}}$$

Nous en déduisons p_1, p_2, q^1, q^2 par :

$$\left\{\begin{aligned} p_1 &= -\overline{w} = \frac{H_0}{K'} = \frac{(-h)^{-1/2}}{K'}\,; \\ p_2 &= p_1p' = (-h)^{-1/2}\frac{p'}{K'} = (-h)^{-1/2}k = c = \text{constante} \\ q^2 &= q' \\ (q^1)^2 &= s'^2 = -4p'^2 + 2\mu - \frac{k^2}{2p'^2} \end{aligned}\right.$$

Nous obtenons enfin r, p_r, θ, p_θ par :

$$\left\{\begin{aligned} r &= \frac{p_1^2}{4} = \frac{p_2^2}{4p'^2} = \frac{c^2/\mu}{1 + e\cos\theta}\,; \qquad \theta = q^2\,; \qquad p_\theta = p_2 = c \\ p_r^2 &= \frac{(q^1)^2}{r} = \frac{s'^2}{r} = \frac{1}{r}\left[-4\left(-\frac{p_\theta}{2\sqrt{r}}\right)^2 + -2\mu - \frac{k^2}{2}\left(-\frac{2\sqrt{r}}{p_\theta}\right)^2\right] \\ &= -\frac{p_\theta^2}{2r^2} + \frac{2\mu}{r} - \frac{2k^2}{p_\theta{}^2} \end{aligned}\right.$$

La dernière égalité donne, avec :

$$\frac{2k^2}{p_\theta^2} = -2h$$

$$\frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} = \frac{\mu}{r} + h$$

Des résultats analogues s'obtiennent pour $h > 0$ avec l'intégrale première

$$s'^2 = -4p'^2 + 2\mu + \frac{k^2}{2p'^2}$$

6) Traitons à présent le cas $H = 0$. Nous savons que, H et $\tilde{H}$ étant deux fonctions sur M, si les équations $H = 0$ et $\tilde{H} = 0$ définissent la *même* sous-variété, alors les trajectoires des systèmes hamiltoniens correspondants

sont les mêmes sur cette sous-variété (seul les lois horaires sont différentes).

Dans le cas présent l'égalité $L_Y H = -2H$ traduit le fait qu'en coordonnées adaptées, H est homogène de degré -2 par rapport aux p_i.

Il s'ensuit, puisque $L_Y p_1 = p_1$, que la fonction $\tilde{F} = p_1^2 H$ est homogène de degré 0 par rapport aux p_i.

Choisissons pour $\tilde{H}$ la fonction : $\tilde{H} = p_1 \tilde{F}$: comme par hypothèse $p_1 \neq 0$, nous avons bien $H = 0 \Leftrightarrow \tilde{F} = 0 \Leftrightarrow \tilde{H} = 0$. $\tilde{H}$ *est homogène de degré 1* par rapport aux p_i, donc définit un système hamiltonien homogène *équivalent* au système d'origine sur $H = 0$. Ce dernier est donc encore réductible, lorsque $H = 0$, à un système de contact, le hamiltonien de contact étant cette fois la fonction :

$$\tilde{F} = \frac{\tilde{H}}{p_1} = -\frac{\tilde{H}}{w}$$

Dans le cas du problème keplerien généralisé celà donne :

$$H = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{\mu(\theta)}{r} = \frac{1}{p_1^2}\left[2(q^1)^2 + 8\left(\frac{p_2}{p^1}\right)^2 - 4\mu(q^2)\right]$$

d'où, avec toujours $s' = -q^1$; $p' = \dfrac{p_2}{p^1}$; $q' = q^2$

$$\tilde{F} = p_1^2 H = 2s'^2 + 8p'^2 - 4\mu(q') \qquad (= 0)$$

Nous en déduisons le système de contact d'ordre 3 suivant sur la surface $\tilde{F} = 0$:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{ds'}{d\tau'} = p'\frac{\partial\tilde{F}}{\partial p'} = 16p'^2 ; \qquad \frac{dq'}{d\tau'} = \frac{\partial\tilde{F}}{\partial p'} = 16p' \\ &\frac{dp'}{d\tau'} = -\frac{\partial\tilde{F}}{\partial q'} - p'\frac{\partial\tilde{F}}{\partial s'} = 4(\mu'(q') - p's') \end{aligned}\right. \tag{IV-6}$$

Les *positions d'équilibre* de ce système (déterminées par : $p' = 0$; $\mu'(q') = 0$) correspondent aux *solutions par homothétie* d'énergie nulle qui commencent ou finissent par la collision totale. Pour cette raison la variété $\tilde{F} = 0$ est appelée *variété de collision.* (Les autres trajectoires correspondent aux mouvements généraux d'énergie nulle). Une étude détaillée du mouvement sur cette variété peut être trouvée dans [*6*] et [*8*].

Remarquons que le système précédent s'obtient à partir du système (IV-4) (correspondant à $H < 0$) en faisant d'abord le changement temporel $d\tau' = \dfrac{K'3}{2} d\tau$ (ne modifiant pas les trajectoires) d'où :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{ds'}{d\tau'} = 4(s'^2 + 8p'^2 - 2\mu(q')) ; \qquad \frac{dq'}{d\tau'} = 16p' \\ &\frac{dp'}{d\tau'} = 4(\mu'(q') - p's') \end{aligned}\right.$$

Nous constatons ensuite que la surface $\tilde{F} = 2s'^2 + 8p'^2 - 4\mu = 0$ est invariante, et que la restriction de ce système à $\tilde{F} = 0$ est justement le système (IV-6).

De manière analogue le système (IV-6) s'obtient à partir du système de contact correspondant au cas $H > 0$.

Nous en concluons que la surface $\tilde{F} = 0$ (correspondant à $H = 0$) est une frontière entre les deux mouvements correspondant à $H < 0$ et $H > 0$, et que surtout, les deux champs de contact correspondants *se prolongent sur* $\tilde{F} = 0$ après changement temporel.

7) Au lieu de considérer le système (IV-6) nous pouvons considérer l'équation aux dérivées partielles associée : $\tilde{F}\left(V, \frac{\partial V}{\partial q'}, q'\right) = 0$ avec : $s' = V(q')\,p' = \frac{\partial V}{\partial q'}$ qui se réduit ici à une équation différentielle ordinaire (déjà trouvée par Euler [*6*]) à savoir :

$$V^2 + 4\left(\frac{dV}{dq'}\right)^2 = 2\mu(q')$$

(que l'on peut évidemment déduire directement du système (IV-6)).

Ce point de vue devient très intéressant pour des problèmes particuliers des N-corps *d'ordre supérieur*, par exemple *le problème plan des 3 corps avec moment cinétique nul* (cette dernière condition étant nécessaire pour qu'il y ait collision triple.) On part alors d'un hamiltonien d'ordre 6 avec pour paramètres le rayon d'inertie r et *deux* variables angulaires α, β fixant la configuration des 3 corps.

Ce problème se réduit à un système de contact d'ordre 5, et le mouvement sur la variété de collision triple est un problème d'ordre 4.

En désignant par s', α', β', p'_α, p'_β les 5 variables de contact, l'équation aux dérivées partielles correspondante sera de la forme :

$$\tilde{F}\left(V, \frac{\partial V}{\partial \alpha'}, \frac{\partial V}{\partial \beta'} \alpha', \beta'\right) = 0 \quad \text{où} \quad s' = V(\alpha', \beta')\,; \quad p'_\alpha = \frac{\partial V}{\partial \alpha'}\,; \quad p'_\beta = \frac{\partial V}{\partial \beta'},$$

c'est-à-dire que nous pouvons « visualiser » le mouvement sur la variété de collision triple en considérant les surfaces solution *dans* R^3 de l'équation précédente (Voir [*3*]).

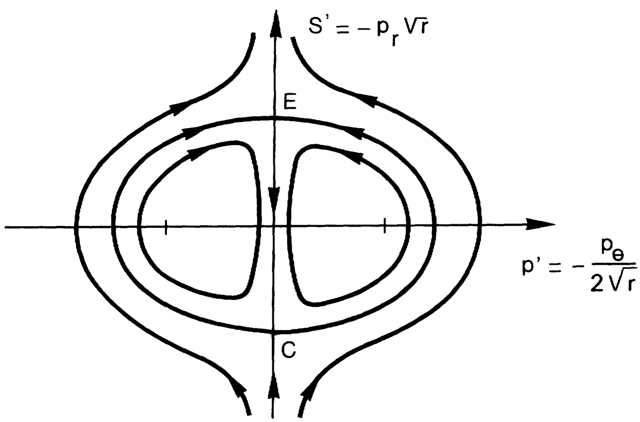
8) Toutes ces considérations restent valables (sous une forme simplifiée) pour le problème keplerien classique (μ = constante). En outre ce problème admet une *réduction supplémentaire* à l'ordre deux, puisque $\frac{\partial K'}{\partial q'} = 0$, c'est-à-dire le champ X' commute avec le champ $Z' = \frac{\partial}{\partial q'}$. Projetons X' sur une surface $q' = \theta$ = constante que nous appelons la variété M'' et

que nous identifions à R^2. Nous obtenons une représentation *dans* R^2 de *tous* les types de mouvement du problème keplerien.

Pratiquement, les trajectoires du champ projeté sont données par l'intégrale première

$$s'^2 = -4p'^2 + 2\mu \pm \frac{k^2}{2p'^2}$$

($k = 0$ correspond à la variété de collision) d'où la figure suivante :



Les points E et C représentent les mouvements rectilignes d'expansion et de collision à énergie nulle. L'ellipse $s'^2 + 4p'^2 = 2\mu$ correspond aux mouvements paraboliques ($h = 0$). A l'intérieur de l'ellipse nous avons des trajectoires fermées correspondant au mouvement elliptique ($h < 0$) avec deux points d'équilibre représentant le mouvement circulaire. A l'extérieur de l'ellipse nous avons les trajectoires correspondant au mouvement hyperbolique ($h > 0$). Enfin la droite $p' = 0$ nous donne les mouvements rectilignes d'expansion ou de collision à énergie non nulle.

Signalons enfin que le système réduit à l'ordre 2, où nous supposons $p' \neq 0$ est un *système hamiltonien.* En effet, soit la 1-forme :

$$\Omega' = -\frac{1}{p'}\sigma' = -\frac{1}{p'}ds' + dq'$$

Le champ $Z' = \frac{\partial}{\partial q'}$ est le champ caractéristique de Ω' et le champ

$$Y' = q'\frac{\partial}{\partial q'} + s'\frac{\partial}{\partial s'}$$

est un champ d'homothétie. Nous avons :

$$L_{X'_0}\Omega' = L_{X'_0}\left(-\frac{\sigma'}{p'}\right) = -\frac{\lambda'\sigma'}{p'} + \frac{\sigma'}{p'^2}L_{X'_0}p' = 0$$

puisque :
$$\frac{L_{X'_0}p'}{p'} = \frac{L_{X'_0}K'}{K'} = \lambda'$$

La projection X''_0 de X'_0 sur M″ par $\frac{\partial}{\partial q'}$ est un champ hamiltonien ordinaire sur M″ muni de la 1-forme $\Pi'' = - i_{Y'}d\Omega'$ et le hamiltonien H′ est égal à $- i_{X'}\Omega'$ soit : $H' = - \frac{K'}{p'}$. En posant $p'' = s'$; $q'' = - \frac{1}{p'}$ celà donne $\Pi'' = p''dq''$ et :

$$H' = q''\left[2p''^2 + \frac{8}{q''^2} - 4\mu\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (H > 0)$$

L'intégration du problème keplerien classique apparaît ainsi comme le résultat d'une « cascade » de projections, suivant le schéma :

$$\begin{array}{ccccccc}
(M, \Omega, Y) & \to & (\overline{M}, \overline{\Pi}) & \to & (M', \sigma') & & \\
 & & & & (M', \Omega', Y') & \to & (M'', \Pi'') \\
X_0 & \longrightarrow & \overline{X}_0 & \longrightarrow & X'_0 & \longrightarrow & X''_0
\end{array}$$

V. CHAMPS DE CONTACT ET RELATIVITÉ

1) Pour la description de la particule relativiste nous pourrons encore utiliser le cadre d'une variété canonique (M, Ω, Y) au lieu de l'espace-temps habituel. Cette démarche va prolonger celle déjà employée dans la formulation de la mécanique hamiltonienne.

Ce faisant nous serons conduits à donner une signification physique précise à la quantité $s = F = i_Y\Omega$ intrinsèquement définie sur une variété canonique. Dans le cadre hamiltonien, s s'interprète comme *l'action*; dans le cadre relativiste s pourra s'interpréter (au produit d'une certaine constante près) comme la *masse propre* de la particule.

Cette nouvelle variable est d'une *nature différente* des variables physiques habituelles que l'on regroupe en couples conjugués (en général positions-vitesses ou angles-actions). En effet, il n'est pas associé à s de variable conjuguée. Un autre point fondamental est que le temps n'aura pas un double rôle de paramètre indépendant et de variable comme dans l'espace-temps ; seul subsiste le rôle habituel de paramètre indépendant. Ceci permettra une grande simplicité dans la présentation (et même dans l'interprétation). En faisant appel à toutes les notions que nous venons de voir, voyons maintenant comment il faut procéder.

2) Rappelons qu'un champ de contact sur (M, Ω, Y) est un champ X sur M tel que $L_X\Omega = \lambda\Omega$. Nous savons que, contrairement aux champs hamiltoniens, un champ de contact ne se projette pas suivant le champ caractéristique Z.

Dans la suite nous nous occuperons uniquement d'un certain type de champs de contact, à savoir ceux qui commutent avec le champ d'homothétie Y. Nous pourrons les appeler *champs de contact homogènes*. En effet, $K = -i_X\Omega$ étant le hamiltonien de contact, nous avons, puisque $[Y, X] = 0$:

$$\begin{aligned} L_{[Y,X]}\Omega &= L_Y i_X\Omega - i_X L_Y\Omega \\ &= -L_Y K + K \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où $L_Y K = K$, c'est-à-dire, en coordonnées adaptées, que K *est homogène de degré 1 par rapport aux* s, p_i.

Une conséquence immédiate est que lorsque $s = i_Y\Omega$ est différent de zéro, $\frac{K}{s}$ est intégrale première de X, puisque

$$L_X K = \lambda K \; ; \qquad L_X s = L_X i_Y \Omega = i_Y L_X \Omega = \lambda i_Y \Omega = \lambda s.$$

(Réciproquement, nous savons que si $L_Y K = K$ alors en même temps $[X, Y] = 0$ et $\frac{K}{s}$ est intégrale première.)

Puisque $[X, Y] = 0$, X est projetable par Y ; pour feuilletage adapté à Y nous pouvons choisir les surfaces s = constante puisque $L_Y s = s$ (en supposant toujours $s \neq 0$). Soit M^* la variété M privée de la surface $s = 0$. Désignons par $\overline{M}$ l'espace quotient de M^* par les trajectoires de Y ; l'existence du feuilletage adapté assure que $\overline{M}$ a une structure de variété C^∞ comme nous le savons.

Soit maintenant la 1-forme : $\Omega' = \frac{\Omega}{s}$ ($s \neq 0$). Le champ caractéristique de Ω' est Y puisque :

$$L_Y\Omega' = \frac{L_Y\Omega}{s} - \frac{\Omega}{s^2} L_Y s = 0 \; ; \qquad i_Y\Omega' = 1$$

Il s'ensuit que $d\Omega'$ est un invariant intégral absolu de Y, donc il existe sur $\overline{M}$ une 2-forme fermée ω de classe $2n$ telle que $d\Omega' = p^*\omega$ (où p est la projection $M \to \overline{M}$). $(\overline{M}, \omega)$ est donc une variété symplectique (non exacte). De plus le champ X vérifie :

$$L_X\Omega' = \frac{L_X\Omega}{s} - \frac{\Omega}{s^2} L_X s = 0$$

Soit alors la fonction $H' = -i_X\Omega' = \frac{K}{s}$. Nous avons $L_Y H' = 0$, donc il existe sur $\overline{M}$ une fonction $\overline{H}$ telle que $H' = p^*\overline{H}$. $\overline{X}$ étant la projection de X sur $\overline{M}$, un calcul analogue à (III-1) montre alors que : $i_{\overline{X}}\omega = d\overline{H}$. $\overline{X}$ *définit donc un système hamiltonien ordinaire sur* $(\overline{M}, \omega)$.

Dans un système de coordonnées adaptées, K est homogène de degré 1 en p_i, s. Désignons par u_i les quantités $\frac{p_i}{s}$ (ce sont donc des intégrales premières du champ d'homothétie Y). K est de la forme : $K = sH'(u_i, q^i)$.

De plus $\Omega' = \frac{ds}{s} - u_i dq^i$, d'où : $d\Omega' = - du_i \wedge dq^i$. En identifiant $\overline{M}$ à une surface $s = s_0 =$ constante ($s_0 \neq 0$) nous pouvons écrire :

$$\omega = d\Omega'|_{s=s_0} = - du_i \wedge dq^i \, ; \qquad \overline{H} = H'(u_i, q^i)$$

En posant : $\overline{X} = \overline{X}_{u_i} \frac{\partial}{\partial u_i} + \overline{X}_{q^i} \frac{\partial}{\partial q^i}$, nous aurons alors : $\overline{X}_{u_i} = - \frac{\partial \overline{H}}{\partial q^i}$; $X_{q^i} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial u_i}$.

3) Le champ de contact X peut se décomposer en $X = \tilde{X} + \alpha Y$ où $\tilde{X}$ est un champ tangent au feuilletage se déduisant de X comme nous le savons. Nous avons : $L_X s = L_{\tilde{X}+\alpha Y} s = \alpha L_Y s = \alpha s$. Comme d'autre part $L_X s = \lambda s$, nous avons $\alpha = \lambda$. Il en résulte que, de même qu'en (III-1), nous pouvons considérer λ comme le *lagrangien* du mouvement. Ceci peut se voir directement en coordonnées adaptées en utilisant le fait que $\lambda = -L_Z K$ soit:

$$\lambda = - \frac{\partial K}{\partial s} = \frac{1}{s}\left(- K + p_i \frac{\partial K}{\partial p_i}\right) \left(\text{puisque } K = s \frac{\partial K}{\partial s} + p_i \frac{\partial K}{\partial p_i}\right)$$

d'où :

$$\lambda = u_i \frac{\partial \overline{H}}{\partial u_i} - \overline{H}$$

et nous retrouvons la définition habituelle du lagrangien. Signalons enfin que λ est intégrale première de Y. En effet :

$$L_Y \lambda = - L_Y L_Z K = L_{[Z,Y]} K - L_Z L_Y K = 0$$

puisque :

$$[Z, Y] = Z \, ; \qquad L_Y K = K$$

4) Le cas $s = 0$ nécessite une étude à part, le champ de contact X et le champ d'homothétie Y étant alors tous les deux tangents à la surface $s = 0$.

Dans la pratique nous aurons seulement à envisager le cas où $\lambda|_{s=0} = 0$. Nous aurons alors $L_X \Omega = 0$ sur $s = 0$, et le champ X apparaîtra comme la restriction à $s = 0$ d'un champ hamiltonien (homogène) X_0 sur (M, Ω, Y) de hamiltonien homogène $H_0 = K|_{s=0}$.

5) Supposons maintenant que la variété canonique (M, Ω, Y) soit R^7 muni de la 1-forme canonique $\Omega = ds - p_i dq^i$ et du champ d'homothétie $Y = s \frac{\partial}{\partial s} + p_i \frac{\partial}{\partial p_i}$.

Un champ de contact homogène est alors déterminé par la donnée d'une fonction homogène de degré 1 en s, p_i qui joue le rôle du hamiltonien de contact K. Prenons pour K la fonction

$$K = c\sqrt{s^2 + \Sigma p_i^2} \qquad (c = \text{constante})$$

Il lui correspond le champ de contact :

$$\left\{\begin{aligned} X_s &= \frac{ds}{dt} = p_i\frac{\partial K}{\partial p_i} - K = -s\frac{\partial K}{\partial s} = \frac{-cs^2}{\sqrt{s^2+\Sigma p_i^2}} \\ X_{p_i} &= \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial q^i} - p_i\frac{\partial K}{\partial s} = \frac{-cp_is}{\sqrt{s^2+\Sigma p_i^2}} \\ X_{q^i} &= \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_i} = \frac{cp_i}{\sqrt{s^2+\Sigma p_i^2}} \end{aligned}\right.$$

a) Supposons d'abord $s \neq 0$. Nous avons :

$$\frac{1}{c^2}\Sigma\left(\frac{dq^i}{dt}\right)^2 = \frac{v^2}{c^2} = \frac{\Sigma p_i^2}{s^2+\Sigma p_i^2}$$

donc :

$$\frac{v^2}{c^2} < 1.$$

En désignant par u_i les quantités p_i/s, le champ de contact se projette sur une surface $s = s_0$ en un champ hamiltonien $\overline{X}$ de hamiltonien

$$\overline{H} = \frac{K}{s} = c\sqrt{1+\Sigma u_i^2},$$

et d'équations :

$$\overline{X}_{u_i} = \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial\overline{H}}{\partial q^i} = 0\,; \qquad \overline{X}_{q^i} = \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial\overline{H}}{\partial u_i} = \frac{cu_i}{\sqrt{1+\Sigma u_i^2}}$$

Nous pouvons donc interpréter les trajectoires du champ $\overline{X}$ comme celles d'une *particule relativiste libre* de masse propre non nulle $m_0 = s_0/c$.

La fonction $K|_{s=s_0} = c\sqrt{s_0^2+\Sigma p_i^2} = c\sqrt{m_0c^2+\Sigma p_i^2}$ est égale à l'énergie totale mc^2 de la particule. Comme $m\dfrac{dq^i}{dt} = p_i = m_0cu_i$, les p_i sont les composantes de l'impulsion de la particule et les u_i sont les composantes spatiales de la quadri-vitesse.

Enfin la fonction : $\lambda = -\dfrac{\partial K}{\partial s} = \dfrac{-cs}{\sqrt{s^2+\Sigma p_i^2}} = \dfrac{-c}{\sqrt{1+\Sigma u_i^2}}$ soit :

$$\lambda = -c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

est bien le lagrangien du mouvement.

b) Supposons maintenant que $s = 0$. Nous avons :

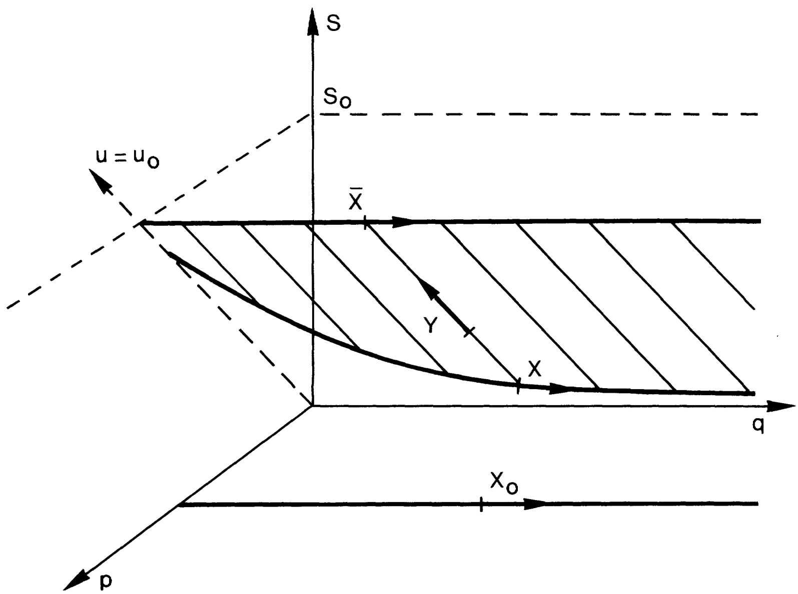
$$K|_{s=0} = c\sqrt{\Sigma p_i^2}\,; \qquad \left.\frac{\partial K}{\partial s}\right|_{s=0} = 0$$

et les équations du champ de contact s'écrivent :

$$\frac{ds}{dt} = X_s = 0\ ; \qquad \frac{dp_i}{dt} = X_{p_i} = 0\ ; \qquad \frac{dq^i}{dt} = X_{q^i} = \frac{cp_i}{\sqrt{\Sigma p_i^2}}$$

Ce champ apparaît comme la restriction sur $s = 0$ du champ hamiltonien X_0 de hamiltonien $H_0 = c\sqrt{\Sigma p_i^2}$. Nous avons : $\Sigma\left(\frac{dq^i}{dt}\right)^2 = v^2 = c^2$. Les trajectoires du champ X_0 sur $s = 0$ s'interprètent comme celles d'une particule relativiste de masse propre nulle (à savoir un photon) se déplaçant à la vitesse constante c. c s'interprète donc comme la vitesse de la lumière.

Lorsque $M = R^3$, nous avons la représentation suivante du mouvement de la particule libre relativiste sur une droite :



D'autres formes de la fonction K sont bien sûr possibles, correspondant par exemple au modèle relativiste d'une particule chargée dans un champ électro-magnétique. Nous nous proposons d'étudier cet exemple avec d'autres dans un travail ultérieur.

RÉFÉRENCES

[1] R. ABRAHAM et J. MARSDEN, *Foundations of Mechanics*. Benjamin-Cummings, Reading Mass, 1978.

[2] V. ARNOLD, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Mir, Moscou, 1976.

[3] J. BRYANT, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A*, t. **291**, 1980, p. 205-208.

[4] C. CARATHÉODORY, *Calculus of variations and partial differential equations*. Holden-Day, San Francisco, 1965.
[5] C. GODBILLON, *Géométrie différentielle et mécanique analytique*. Hermann, Paris, 1969.
[6] M. IRIGOYEN, *Cel. Mech.*, t. **9**, 1974, p. 491-506.
[7] A. LICHNEROWICZ, Variétés symplectiques, variétés canoniques et systèmes dynamiques dans *Topics in differential geometry*. Academic Press, New York, 1976.
[8] R. MCGEHEE, Triple collision in Newtonian gravitational systems dans *Lecture Notes in physics*, Springer, New York, t. **38**, 1975.
[9] J. M. SOURIAU, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1970.

(Manuscrit reçu le 1er juin 1981)