ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

GÉRARD PETIAU

Sur la représentation par des systèmes différentiels non linéaires du premier ordre de modèles corpusculaires définis par l'association de champs de types microphysiques, électromagnétiques et gravitationnels

Annales de l'I. H. P., section A, tome 36, nº 2 (1982), p. 89-125
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1982__36_2_89_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XXXVI, n° 2, 1982, p. 89-125. *Physique théorique*

Sur la représentation par des systèmes différentiels non linéaires du premier ordre de modèles corpusculaires définis par l'association de champs de types microphysiques, électromagnétiques et gravitationnels

par

Gérard PETIAU
Physique théorique, Université Paris VI

SOMMAIRE. — Introduction, étude et caractérisation de modèles de représentations de structures microphysiques par des ensembles de champs associés. L'évolution spatio-temporelle des champs constituant une structure individualisée est décrite par un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires du premier ordre. Ces champs associés sont décrits par des systèmes de tenseurs irréductibles par rapport au groupe de Lorentz orthochrone propre et de préférence par des tenseurs-spineurs de Van der Waerden. Pour les modèles proposés les solutions du type ondes planes sont complètement déterminées par des systèmes de fonctions elliptiques ou hyperelliptiques.

Un modèle décrivant une structure microphysique par l'ensemble des spineurs par lesquels on caractérise à l'approximation linéaire les champs dits de spin $\hbar/2$, spin $\hbar$ et spin $2\hbar$ (champs électronique, électromagnétique ou mésique vectoriel, gravitationnel) est établi et analysé. L'ensemble de ses solutions du type ondes planes est complètement déterminé.

Dans de nombreux travaux antérieurs publiés pour la plupart de 1958 à 1965, j'ai recherché, construit et étudié les caractères les plus essentiels susceptibles d'être présentés par des modèles de structures de représentations mathématiques que j'ai appelé « modèles corpuscules-champs » et susceptibles de décrire l'évolution spatio-temporelle d'objets physiques élémentaires (« corpuscules ») uniquement par des systèmes fonctionnels représentant des champs associés.

Les évolutions spatiotemporelles de ces structures sont déterminées par les valeurs prises au cours du temps et en chaque point de l'espace physique réel à trois dimensions par un ensemble de champs constitutifs associés sans possibilité de séparation sauf en cas de dégénérescence.

Les objets physiques élémentaires ou « corpuscules » sont définis par les valeurs prises par des systèmes de champs (quantiques, électromagnétiques, gravitationnels, tensoriels plus généraux) en évolutions associées et susceptibles d'être observés et mesurés simultanément.

Les actions (interactions) d'origines extérieures au domaine d'épreuve sont introduites par des contraintes imposées aux champs associés dans tout le domaine expérimental (ou domaine d'existence de la représentation considérée).

La distinction classique entre particule active et particule passive par rapport à l'un des types de champs considéré (les autres étants présents) n'existe plus dans ces modèles. La notion de masse ou de charge électrique affectée à un point « matériel », « chargé » de l'espace physique n'est plus ici une notion primitive mais se présente éventuellement comme représentation de l'existence de configurations associées d'un champ gravitationnel et d'un champ électromagnétique dont les représentations se simplifient par l'introduction de grandeurs, valeurs principales ou moyennes, localisées et permanentes. Je présenterai plus loin l'exemple de conditions permettant de séparer des champs particuliers à caractères électrostatiques et gravitostatiques évolutifs dans une représentation générale associant champs électromagnétiques et gravitationnels.

J'ai admis que les champs dont l'association constitue un élément physique fondamental individualisé sont décrits et déterminés simultanément à partir de systèmes d'*équations aux dérivées partielles du premier ordre* essentiellement *non linéaires* et présentant une *structure tensorielle covariante* par rapport aux transformations du groupe de Lorentz orthochrone propre ($L_+^\uparrow$) ou *du groupe dit de causalité.*

Les champs associés dont *l'ensemble constitue l'objet physique* seront représentés individuellement par des systèmes de *tenseurs irréductibles* par rapport aux transformations du groupe de Lorentz propre et orthochrone (transformations linéaires, réciproques du type $x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$ avec dét $| a^\mu{}_\nu | = +1$, $a^0{}_0 = +1$, μ_0.

J'utiliserai de préférence pour représenter ces tenseurs *de façon à inclure a priori la notion de causalité* dans toutes les représentations, les *tenseurs-spineurs de Van der Waerden irréductibles* (ce qui s'écrira par la condition de symétrie entre indices spinoriels de même type).

Pour rechercher des structures représentatives de modèles de champs associés permettant une analyse des caractères de l'objet physique décrit et par suite de préciser les choix nécessaires pour la représentation des structures microphysiques naturelles les plus simples, je me suis appuyé essentiellement sur l'*existence* éventuelle et la *caractérisation complète* de *solutions particulières* de types simples et susceptibles d'être *définies et construites simultanément* pour *l'ensemble des champs associés.*

Pour cela j'ai construit et étudié des modèles « corpusculaires » admettant pour l'ensemble des champs constitutifs des solutions du type « ondes planes » et déterminées complètement.

Un système de fonctions représentatives de champs $\Phi_A(x^\mu)$ admettra des états « d'ondes planes », si l'on peut dans ce système caractériser et isoler *une famille complète* de fonctions de champs $\Phi_A(u)$ ne dépendant que d'une seule variable u définie par

(1) $$u = n_\mu x^\mu$$

n^μ étant un *vecteur unitaire du genre-temps :*

(2) $$n_\mu n^\mu \equiv (n^0)^2 - \vec{n}^2 = 1 ,$$

$$(n^\mu = (n^0, n^p), p = 1, 2, 3 ; g^{00} = +1, g^{pp} = -1, g^{pq} = g^{0p} = 0)$$

L'ensemble des champs associés $\Phi_A(x^\mu)$ déterminés à partir d'un système *d'équations aux dérivées partielles du premier ordre* deviendra un système de fonctions $\Phi_A(u)$. En application du « principe de descente » d'Hadamard, ces fonctions seront solutions d'un *système d'équations différentielles du premier ordre non linéaire.*

Chacun des éléments $\Phi_A(u)$ dépendra essentiellement de la totalité des constantes d'intégration associées à un système de valeurs initiales, aux limites, ou asymptotiques $\Phi_A(u_0)$ de la totalité des $\Phi_A(u)$.

Dans les représentations introduites et utilisées dans la mécanique quantique linéaire pour la description des états de particules et champs tous les éléments de type « ondes planes » sont exprimées par des fonctions circulaires ($\sin \omega_0 u$, $\cos \omega_0 u$, $e^{i\omega_0 u}$) ou par des combinaisons ou superposition de fonctions circulaires.

Dans les premiers modèles de corpuscules-champs que j'ai introduits et étudiés en 1958-1965, j'ai essentiellement recherché des représentations simples d'associations de tenseurs (au sens restreint $L_+^\uparrow$) par des systèmes covariants d'équations aux dérivées partielles pour lesquels les équations différentielles correspondant aux cas d'ondes planes *se déterminent complètement* et *s'expriment à partir des fonctions elliptiques de Jacobi* (ou de fonctions hyperelliptiques) en leur imposant la condition de rester d'amplitudes bornées.

Le développement de nombreux modèles que j'ai effectué et les très nombreux travaux internationaux de ces dernières années portant sur la représentation des éléments de la microphysique met en évidence la nécessité d'utiliser dans ce domaine des éléments fonctionnels rattachés aux fonctions elliptiques, à leurs extensions et dégénérescences constituant les éléments qualifiés de « solitons ».

Le premier système de champs associé que j'ai introduit et étudié est constitué par *deux scalaires* et *un vecteur*, dont l'évolution est déterminée simultanément par un *système de trois équations aux dérivées partielles du premier ordre*, non linéaires.

Deux modèles simples réalisent cette association.

Dans un premier modèle, deux scalaires $I_1(x^\lambda)$, $I_2(x^\lambda)$ et un vecteur $S^\mu(x^\lambda)$ sont associés par les trois équations

$$(S_1)\qquad \begin{aligned} \partial_\mu I_1 &= \varkappa_1 I_2 S_\mu ,\\ \partial_\mu I_2 &= -\varkappa_2 I_1 S_\mu ,\\ \partial_\mu S^\mu &= -\varkappa_0 I_1 I_2 . \end{aligned}$$

$\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_0$ sont trois constantes *réelles* et positives$\left(\partial_\mu \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\right)$.

Dans le second modèle, deux scalaires $J_1(x^\lambda)$, $J_2(x^\lambda)$ et un vecteur $S^\mu(x^\lambda)$ sont associés par les trois équations

$$(S_2)\qquad \partial_\mu J_1 = \varkappa_1 J_2 S_\mu , \qquad \partial_\mu J_2 = \varkappa_2 J_1 S_\mu , \qquad \partial_\mu S^\mu = -\varkappa_0 J_1 J_2 .$$

($\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_0$ constantes, *réelles* et positives).

Le choix des systèmes de signes $(+, -, -)(+, +, -)$ dans ces modèles, à l'exclusion des systèmes de signe $(+, +, +)$ ou $(-, -, -)$ apparaîtra ultérieurement nécessaire pour l'existence de solutions du type *ondes planes d'amplitudes bornées.*

Dans le cas d'ondes planes, les solutions de (S_1) et de (S_2) se mettront en correspondance.

Le système (S_1) admet l'intégrale première

$$\frac{1}{\varkappa_1} I_1^2 + \frac{1}{\varkappa_2} I_2^2 = \lambda_0^2 ,$$

(λ_0 constante réelle, positive, pour I_1, I_2 réels) *bornant les amplitudes des champs* $I_1(x^\lambda)$, $I_2(x^\lambda)$.

Cette relation conduit à associer *a priori* à I_1, I_2 une fonction $\Phi(x^\lambda)$ par les relations

$$\begin{aligned} I_1(x^\lambda) &= \lambda_0\sqrt{\varkappa_1}\,\sin\Phi(x^\lambda) ,\\ I_2(x^\lambda) &= \lambda_0\sqrt{\varkappa_2}\,\cos\Phi(x^\lambda) \end{aligned}$$

et permet de ramener le système (S_1) *aux deux équations aux dérivées partielles du premier ordre*

$$(3)\qquad \partial_\mu\Phi = \sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}\,S_\mu , \qquad \partial_\mu S^\mu = -\varkappa_0\lambda_0^2\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}\,\sin\Phi\cos\Phi .$$

Par suite $\Phi(x^\lambda)$ sera *associé aux solutions* de l'équation *du second ordre*

$$(4)\qquad \partial_\mu\partial^\mu\Phi + \lambda_0^2\varkappa_0\varkappa_1\varkappa_2\,\sin\Phi\cos\Phi = 0$$

Cette équation *dans le cas de deux ou trois dimensions d'espace* a été très étudiée dans le développement de la *théorie des surfaces applicables.*

G. Darboux lui a consacré plusieurs chapitres de sa Théorie des surfaces (T. III, Chap. XII, XIII, XIV) en développant notamment les travaux de J. Weingarten (1887, 1891) et d'Enneper.

Dans le cas du système (S_2) une intégrale première du même type s'écrit

$$\frac{J_1^2}{\varkappa_1} - \frac{J_2^2}{\varkappa_2} = \lambda_0^2$$

(avec une indexation d'ordre convenable pour les scalaires J_1, J_2). Cette relation conduit à écrire *a priori pour* $J_1 \neq J_2$,

$$J_1(x^\lambda) = \lambda_0\sqrt{\varkappa_1}\,\mathrm{ch}\,\Phi(x^\lambda), \qquad J_2(x^\lambda) = \lambda_0\sqrt{\varkappa_2}\,\mathrm{sh}\,\Phi(x^\lambda)$$

et permet de réduire le système (S_2) *aux deux équations*

$$(S_2') \qquad \partial_\mu\Phi = \sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}\,S_\mu, \qquad \partial_\mu S^\mu = -\varkappa_0\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}\,\lambda_0^2\,\mathrm{sh}\,\Phi\,\mathrm{ch}\,\Phi.$$

La fonction $\Phi(x^\lambda)$ sera *associée* aux *solutions de l'équation du second ordre*

$$(5) \qquad \partial_\mu\partial^\mu\Phi + \lambda_0^2\varkappa_0\varkappa_1\varkappa_2\,\mathrm{sh}\,\Phi\,\mathrm{ch}\,\Phi = 0$$

Les systèmes (S_2) ou (S_2') admettent une *dégénérescence simple* correspondant au cas $\lambda_0 = 0$. Soit

$$(6) \qquad \frac{J_1}{\sqrt{\varkappa_1}} = \frac{J_2}{\sqrt{\varkappa_2}} = J_0\,.$$

(S_2) sera alors réduit aux deux équations

$$(7) \qquad \partial_\mu J_0 = \sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}\,J_0 S_\mu, \qquad \partial_\mu S^\mu = -\varkappa_0\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}\,J_0^2,$$

et en posant

$$(8) \qquad J_0(x^\lambda) = K_0 e^{K_1\Phi(x^\lambda)},$$

$\Phi(\varkappa^\lambda)$ sera déterminé par le système

$$(9) \qquad \partial_\mu\Phi = \frac{\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}}{K_1}S_\mu, \qquad \partial_\mu S^\mu = -x_0\sqrt{x_1x_2}\,K_0^2 e^{2K_1\Phi}.$$

$\Phi(\varkappa^\lambda)$ sera déterminé *à partir des solutions* de l'équation du second ordre

$$(10) \qquad \partial_\mu\partial^\mu\Phi + \varkappa_0\varkappa_1\varkappa_2\frac{K_0^2}{K_1}e^{2K_1\Phi} = 0\,.$$

On retrouve donc *ici l'équation de Liouville* dont il a donné *la solution générale* dans le cas de deux dimensions (t et z) (J. Liouville, *C. R. Acad. Sci.*, t. **36**, 28 février 1853, p. 371-373; *J. de Math. pures et appliquées*, 1re série, t. **18**, 1853, p. 71).

Nous préciserons plus loin cette solution dans *le cas du système du premier ordre* considéré ici.

Les solutions complètes des systèmes (S_1), (S_2), de leurs formes associées ou dégénérées, sont facilement obtenus dans le cas des « ondes planes », avec $u = n_\mu x^\mu$, $n_\mu n^\mu = +1$. On posera dans le cas du système (S_1)

$$
(11) \qquad
\begin{aligned}
I_1 &\to I_1(u) = \frac{1}{\sqrt{\varkappa_0 \varkappa_2}} Y_1(u), \\
I_2 &\to I_2(u) = \frac{1}{\sqrt{\varkappa_0 \varkappa_1}} Y_2(u), \\
S^\mu &\to n^\mu S_0(u) = \frac{n^\mu}{\sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2}} Y_3(u).
\end{aligned}
$$

Les trois fonctions $Y_1(u)$, $Y_2(u)$, $Y_3(u)$ seront déterminées par le système que je prendrai pour *système principal*

$$
\text{Y)} \qquad \frac{dY_1}{du} = Y_2 Y_3, \qquad \frac{dY_2}{du} = -\, Y_1 Y_3, \qquad \frac{dY_3}{du} = -\, Y_1 Y_2 .
$$

Ce système admet les *deux intégrales premières principales*

$$
(12) \qquad
\begin{aligned}
Y_1^2 + Y_2^2 &= \lambda_1^2 = (Y_1^0)^2 + (Y_2^0)^2, \\
Y_1^2 + Y_3^2 &= \lambda_2^2 = (Y_1^0)^2 + (Y_3^0)^2 .
\end{aligned}
$$

Nous admettrons $\lambda_2^2 > \lambda_1^2$ (ce qui correspond au choix de l'indexation I_1. I_2).

On en déduit une troisième intégrale première

$$
(13) \qquad Y_3^2 - Y_2^2 = \lambda_2^2 - \lambda_1^2 = \lambda_3^2 = (Y_3^0)^2 - (Y_2^0)^2 \geqslant 0
$$

et par suite

$$
0 \leqslant Y_1^2 \leqslant \lambda_1^2, \qquad 0 \leqslant Y_2^2 \leqslant \lambda_1^2, \qquad \lambda_3^2 \leqslant Y_3^2 \leqslant \lambda_2^2 .
$$

Introduisant ces constantes λ_1, λ_2, λ_3, on obtient *pour un voisinage convenable* d'un système de trois valeurs $Y_1(u)$, $Y_2(u)$, $Y_3(u)$, *positives*, les relations différentielles

$$
(14) \qquad \frac{dY_1(u)}{du} = + \sqrt{(\lambda_1^2 - Y_1^2)(\lambda_2^2 - Y_1^2)},
$$

$$
\frac{dY_2(u)}{du} = -\sqrt{(\lambda_1^2 - Y_2^2)(\lambda_3^2 + Y_2^2)}, \qquad \frac{dY_3(u)}{du} = -\sqrt{(\lambda_2^2 - Y_3^2)(Y_3^2 - \lambda_3^2)}
$$

Par suite $Y_1(u)$, $Y_2(u)$, $Y_3(u)$ *seront déterminées par l'inversion des intégrales elliptiques de première espèce*

$$
(15) \qquad u = \int_{Y_1^0}^{Y_1} \frac{dy}{\sqrt{(\lambda_1^2 - y^2)(\lambda_2^2 - y^2)}},
$$

$$
u = \int_{Y_2}^{Y_2^0} \frac{dy}{\sqrt{(\lambda_1^2 - y^2)(\lambda_3^2 + y^2)}}, \qquad u = \int_{Y_3}^{Y_3^0} \frac{dy}{\sqrt{(\lambda_2^2 - y^2)(y^2 - \lambda_3^2)}} .
$$

Ces intégrales se *mettent en correspondance* avec les *intégrales elliptiques définissant les fonctions de Jacobi.*

Ces fonctions, soient

$$
\begin{array}{llll}
(16) & y_1 = \mathrm{sn}(u, k), & y_2 = \mathrm{cn}(u, k), & y_3 = \mathrm{dn}(u, k), \\
 & 0 \leqslant k \leqslant 1, & 1 - k^2 = k'^2, & 0 \leqslant k' \leqslant 1.
\end{array}
$$

sont définies par l'inversion des intégrales

$$
(17) \qquad u = \int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}},
$$

$$
u = \int_{y_2}^{1} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(k'^2 + k^2 y^2)}}, \qquad u = \int_{y_3}^{1} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(y^2 - k'^2)}}.
$$

Ces fonctions sont associées par les relations

$$
(18) \qquad \mathrm{sn}^2 (u, k) + \mathrm{cn}^2 (u, k) = 1,
$$

$$
k^2 \,\mathrm{sn}^2 (u, k) + \mathrm{dn}^2 (u, k) = 1, \qquad \mathrm{dn}^2 (u, k) - k^2 \,\mathrm{cn}^2 (u, k) = k'^2
$$

et les relations différentielles

$$
(19) \qquad
\begin{aligned}
\frac{d}{du} \mathrm{sn}\, (u, k) &= \mathrm{cn}\, u \,\mathrm{dn}\, u, \\
\frac{d}{du} \mathrm{cn}\, (u, k) &= -\, \mathrm{sn}\, u \,\mathrm{dn}\, u, \\
\frac{d}{du} \mathrm{dn}\, (u, k) &= -\, k^2 \,\mathrm{sn}\, u \,\mathrm{cn}\, u.
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{sn}\, (0, k) = 0, \qquad \mathrm{cn}\, (0, k) = 1, \qquad \mathrm{dn}\, (0, k) = 1.
$$

Écrivant les intégrales définissant les fonctions Y_1, Y_2, Y_3 sous la forme

$$
(20) \qquad \lambda_2 u = \int_{\frac{Y_1^0}{\lambda_1}}^{\frac{Y_1}{\lambda_1}} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)\left(1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} y^2\right)}},
$$

avec ici

$$
(21) \qquad
\begin{aligned}
&\lambda_1^2 = (Y_1^0)^2 + (Y_2^0)^2, \ \lambda_2^2 = (Y_3^0)^2 + (Y_1^0)^2, \\
&\lambda_3^2 = (Y_2^0)^2 - (Y_3^0)^2, \ \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} = \frac{(Y_1^0)^2 + (Y_2^0)^2}{(Y_3^0)^2 + (Y_1^0)^2} < 1,
\end{aligned}
$$

nous avons donc *pour les valeurs initiales particulières*

$$
Y_1^0 = 0, \quad Y_2^0, Y_3^0, \quad \lambda_1^2 = (Y_2^0)^2, \quad \lambda_2^2 = (Y_3^0)^2, \quad \lambda_3^2 = (Y_2^0)^2 - (Y_3^0)^2
$$

et par suite

$$(22)\quad \begin{aligned} Y_1(u\,;0,Y_2^0,Y_3^0) &= \lambda_1 \operatorname{sn}\left(\lambda_2 u, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = Y_2^0 \operatorname{sn}\left(Y_3^0 u, \frac{Y_2^0}{Y_3^0}\right), \\ Y_2(u\,;0,Y_2^0,Y_3^0) &= \lambda_1 \operatorname{cn}\left(\lambda_2 u, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = Y_2^0 \operatorname{cn}\left(Y_3^0 u, \frac{Y_2^0}{Y_3^0}\right), \\ Y_3(u\,;0,Y_2^0,Y_3^0) &= \lambda_2 \operatorname{dn}\left(\lambda_2 u, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = Y_3^0 \operatorname{dn}\left(Y_3^0 u, \frac{Y_2^0}{Y_3^0}\right). \end{aligned}$$

Dans le cas de trois valeurs initiales Y_1^0, Y_2^0, Y_3^0 *positives* la solution générale va encore s'exprimer en fonction de Jacobi en associant aux trois valeurs Y_1^0, Y_2^0, Y_3^0 *un argument initial unique* u_0, défini par

$$(23)\quad Y_1^0 = \lambda_1 \operatorname{sn}\left(\lambda_2 u_0, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right),$$
$$Y_2^0 = \lambda_1 \operatorname{cn}\left(\lambda_2 u_0, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right), \qquad Y_3^0 = \lambda_2 \operatorname{dn}\left(\lambda_2 u_0, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right).$$

On en déduit les expressions générales

$$(24)\quad \begin{aligned} Y_1(u\,;Y_1^0,Y_2^0,Y_3^0) &= \lambda_1 \operatorname{sn}\left[\lambda_2(u+u_0), \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right], \\ Y_2(u\,;Y_1^0,Y_2^0,Y_3^0) &= \lambda_1 \operatorname{cn}\left[\lambda_2(u+u_0), \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right], \\ Y_3(u\,;Y_1^0,Y_2^0,Y_3^0) &= \lambda_2 \operatorname{dn}\left[\lambda_2(u+u_0), \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right]. \end{aligned}$$

L'application des formules d'addition conduit à la *solution générale du* système (Y)

$$(25)\quad \begin{aligned} Y_1(u\,;Y_1^0,Y_2^0,Y_3^0) &= \frac{\lambda_2\left[Y_2^0Y_3^0 \operatorname{sn}\left(\lambda_2 u, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) + \lambda_2 Y_1^0 \operatorname{cn}(\lambda_2 u)\operatorname{dn}(\lambda_2 u)\right]}{\lambda_2^2 - (Y_1^0)^2 \operatorname{sn}^2\left(\lambda_2 u, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)} \\ Y_2(u\,;Y_1^0,Y_2^0,Y_3^0) &= \frac{\lambda_2\left[\lambda_2 Y_2^0 \operatorname{cn}\left(\lambda_2 u, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) - Y_1^0Y_3^0 \operatorname{sn}(\lambda_2 u)\operatorname{dn}(\lambda_2 u)\right]}{\lambda_2^2 - (Y_1^0)^2 \operatorname{sn}^2\left(\lambda_2 u, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)} \\ Y_3(u\,;Y_1^0,Y_2^0,Y_3^0) &= \frac{\lambda_2\left[\lambda_2 Y_3^0 \operatorname{dn}\left(\lambda_2 u, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) - Y_1^0Y_2^0 \operatorname{sn}(\lambda_2 u)\operatorname{cn}(\lambda_2 u)\right]}{\lambda_2^2 - (Y_1^0)^2 \operatorname{sn}^2\left(\lambda_2 u, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)} \end{aligned}$$

Dans ces expressions le dénominateur est susceptible des formes équivalentes

$$\lambda_2^2 - (Y_1^0)^2 \operatorname{sn}^2(\lambda_2 u, k) = (Y_1^0)^2 + (Y_3^0)^2 - (Y_1^0)^2 \operatorname{sn}^2(\lambda_2 u, k)$$

$$(26) \qquad = (Y_1^0)^2 \operatorname{cn}^2(\lambda_2 u, k) + (Y_3^0)^2 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\left[(Y_1^0)^2 \operatorname{dn}^2(\lambda_2 u, k) + (Y_2^0)^2\right].$$

$$\left(k = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{(Y_1^0)^2 + (Y_2^0)^2}{(Y_1^0)^2 + (Y_3^0)^2}}\right).$$

Nous avons présenté ici explicitement ces expressions pour *mettre en évidence l'intervention des combinaisons des valeurs initiales des trois fonctions* dans chacune des fonctions et montrer nettement la *non possibilité de leur approche par des méthodes de perturbations* souvent utilisées.

Les fonctions elliptiques $y_1(u) = \operatorname{sn}(u, k)$, $y_2(u) = \operatorname{cn}(u, k)$ ont la période réelle $4K(k)$ et $y_3(u) = \operatorname{dn}(u, k)$ la période réelle $2K(k)$, $K(k)$ étant défini par l'intégrale

$$F(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1\end{matrix}; k^2\right].$$

$\left({}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha, \beta \\ \gamma\end{matrix}; z\right]\right.$ fonction hypergéométrique de Gauss$\left.\right)$.

La représentation (25) des fonctions $Y(u)$ introduit les fonctions

$$\operatorname{sn}\left(\lambda_2 u, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right), \qquad \operatorname{cn}\left(\lambda_2 u, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right), \qquad \operatorname{dn}\left(\lambda_2 u, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right),$$

fonctions périodiques, de périodes pour la variable u et Y_1, Y_2.

$$(27) \qquad 4K\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1\end{matrix}; \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\right]$$

Les solutions ondes planes du système J, (S_2), se mettent en correspondance simple avec celles du système (Y).

Écrivant pour les solutions ondes planes du système (J)

$$J_1(x^\lambda) \to J_1(u) = \frac{1}{\sqrt{\varkappa_0\varkappa_2}} L_1(u),$$

$$J_2(u) = \frac{1}{\sqrt{\varkappa_0\varkappa_1}} L_2(u), \qquad S^\mu(u) = \frac{n^\mu}{\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}} L_3(u),$$

les fonctions $L(u)$ sont solutions du système

$$(L) \qquad \frac{dL_1}{du} = L_2L_3, \qquad \frac{dL_2}{du} = L_1L_3, \qquad \frac{dL_3}{du} = -L_1L_2.$$

Ce système admet les intégrales premières

$$L_2^2 + L_3^2 = (l_2^0)^2 + (l_3^0)^2 = \mu_1^2, \qquad L_1^2 + L_3^2 = (l_1^0)^2 + (l_3^0)^2 = \mu_2^2$$

et avec (pour une indexation convenable) $\mu_2^2 > \mu_1^2$

$$(L_1(u))^2 - (L_2(u))^2 = \mu_2^2 - \mu_1^2 = \mu_3^2 > 0 .$$

Le système (L) est en correspondance avec le système Y par les relations

$$\begin{gathered} L_3 \to -Y_1, \qquad L_1 \to -Y_3, \qquad L_2 \to -Y_2, \\ \mu_1^2 = \lambda_1^2, \qquad \mu_2^2 = \lambda_2^2, \qquad \mu_3^2 = \lambda_3^2 . \\ L_3(0) = l_3^0 = -Y_1^0, \qquad l_1^0 = -Y_3^0, \qquad l_2^0 = -Y_2^0 . \end{gathered} \tag{28}$$

Ici les valeurs particulières

$$l_3^0 = 0, \qquad l_2^0 = \mu_1, \qquad l_1^0 = \mu_2$$

conduisent à la solution

$$\begin{aligned} L_1(u; 0, l_1^0, l_2^0) &= -\mu_2 \operatorname{dn}\left(\mu_2 u; \frac{\mu_1}{\mu_2}\right) = -l_1^0 \operatorname{dn}\left(l_1^0 u, \frac{l_2^0}{l_1^0}\right), \\ L_2(u; 0, l_1^0, l_2^0) &= -\mu_1 \operatorname{cn}\left(\mu_2 u; \frac{\mu_1}{\mu_2}\right), \\ L_3(u; 0, l_1^0, l_2^0) &= -\mu_1 \operatorname{sn}\left(\mu_2 u; \frac{\mu_1}{\mu_2}\right). \end{aligned} \tag{29}$$

Nous avons signalé la *dégénérescence importante du système* (J) qui admet l'intégrale première

$$\frac{J_1^2}{\varkappa_1} - \frac{J_2^2}{\varkappa_2} = \lambda_0^2$$

et qui pour $\lambda_0 = 0$, conduit en écrivant ($\varepsilon = \pm 1$)

$$\frac{J_1}{\sqrt{\varkappa_1}} = \varepsilon \frac{J_2}{\sqrt{\varkappa_2}} = J_0(x^\lambda)$$

au système réduit

$$\partial_\mu J_0 = \varepsilon\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}\, J_0 S_\mu, \qquad \partial_\mu S^\mu = -\varepsilon\varkappa_0\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}\, J_0^2 \tag{30}$$

et en notant

$$J_0^2 = K_0, \qquad K^\mu = 2\varepsilon\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}\, S^\mu,$$

$$\partial_\mu K_0(x^\lambda) = K_0 K_\mu(x^\lambda), \qquad \partial_\mu K^\mu(x^\lambda) = -2\varkappa_0\varkappa_1\varkappa_2 K_0(x^\lambda) \tag{K}$$

Ce système, équivalent à l'équation de Liouville, prend une forme simple dans le cas des ondes planes.

$$K_0(x^\lambda) \to K_0(u), \qquad K^\mu = n^\mu K_1(u)$$

conduit au système

$$\frac{d}{du}\mathrm{K}_0(u) = \mathrm{K}_0\mathrm{K}_1\,, \qquad \frac{d}{du}\mathrm{K}_1(u) = -\,\mathrm{K}_0^2\,. \tag{31}$$

Les valeurs initiales $\mathrm{K}_0(u_0)$, $\mathrm{K}_1(u_0)$ étant associées par l'intégrale première

$$\mathrm{K}_0^2(u) + \mathrm{K}_1^2(u) = \lambda_1^2 = \mathrm{K}_0^2(u_0) + \mathrm{K}_1^2(u_0)$$

l'*intégrale générale* s'écrit

$$\mathrm{K}_0(u) = \frac{\lambda_1}{\mathrm{ch}\,[\lambda_1(u-u_0)]}, \qquad \mathrm{K}_1(u) = -\,\lambda_1\,\mathrm{th}\,[\lambda_1(u-u_0)] \tag{32}$$

avec

$$\mathrm{K}_0(0) = \frac{\lambda_1}{\mathrm{ch}\,\lambda_1 u_0}, \qquad \mathrm{K}_1(0) = \lambda_1\,\mathrm{th}\,\lambda_1 u_0\,,$$

Cette solution correspond dans le cas général à la *dégénérescence des fonctions elliptiques de Jacobi* pour la valeur du module $k = 1$,

$$\mathrm{sn}\,(u\,;1) = \mathrm{th}\,u\,, \qquad \mathrm{cn}\,(u\,;1) = \mathrm{dn}\,(u\,;1) = \frac{1}{\mathrm{ch}\,u}\,. \tag{33}$$

La *solution générale de Liouville du cas de deux dimensions* (t, z) se retrouve facilement pour le système $(\mathrm{K}_0, \mathrm{K}_\mu)$.

La *théorie de Liouville* considère, selon d'Alembert, les variables u, v associés à t, z par

$$u = \frac{1}{2}(t+z)\,, \qquad v = \frac{1}{2}(t-z)$$

conduisant à

$$\partial^\mu\partial_\mu \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\,.$$

Plus généralement, afin de mettre en évidence la *correspondance entre variables u et v et spineurs* $\overset{.}{x}{}^{1\dot{1}}$, $x^{2\dot{2}}$, nous introduirons ici *deux vecteurs isotropes* n'^μ, n''^μ avec $n'_\mu n'^\mu = 0$, $n''_\mu n''^\mu = 0$, $n'_\mu n''^\mu = \frac{1}{2}$.

Posant

$$u_1 = n'_\mu x^\mu\,, \qquad u_2 = n''_\mu x^\mu\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = n'_\mu\frac{\partial}{\partial u_1} + n''_\mu\frac{\partial}{\partial u_2}, \qquad \frac{\partial}{\partial u_1} = 2n''^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad \frac{\partial}{\partial u_2} = 2n'^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

nous sommes conduit à associer au vecteur K^μ, deux fonctions $\mathrm{K}_1(u_1, u_2)$, $\mathrm{K}_2(u_1, u_2)$ par $\mathrm{K}^\mu(x^\lambda) = \mathrm{K}_1 n'^\mu + \mathrm{K}_2 n''^\mu$. Le système (K) s'écrit avec $\mathrm{K}_0(u_1, u_2)$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{K}_0}{\partial u_1} = \mathrm{K}_0\mathrm{K}_1\,, \qquad \frac{\partial \mathrm{K}_0}{\partial u_2} = \mathrm{K}_0\mathrm{K}_2\,, \\ &\frac{\partial \mathrm{K}_2}{\partial u_1} + \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial u_2} = -\,4\varkappa_0\varkappa_1\varkappa_2\mathrm{K}_0(u_1, u_2)\,. \end{aligned} \tag{34}$$

La *solution générale de Liouville* est retrouvée en écrivant *a priori*

$$\text{(35)} \qquad K_0(u_1, u_2) = \frac{\lambda A_1(u_1)A_2(u_2)}{[C_1(u_1) + C_2(u_2)]^\alpha}$$

(λ, α à déterminer).

On en déduit

$$\frac{1}{K_0}\frac{\partial K_0}{\partial u_1} = \frac{A_1'}{A_1} - \frac{\alpha C_1'}{C_1 + C_2} = K_1(u_1, u_2)$$

$$\frac{1}{K_0}\frac{\partial K_0}{\partial u_2} = \frac{A_2'}{A_2} - \frac{\alpha C_2'}{C_1 + C_2} = K_2(u_1, u_2)$$

et par la seconde équation,

$$\alpha = 2, \qquad \lambda = -\frac{1}{\varkappa_0\varkappa_1\varkappa_2},$$

$$\text{(36)} \qquad \begin{aligned} K_0(u_1, u_2) &= -\frac{C_1'(u_1)C_2'(u_2)}{\varkappa_0\varkappa_1\varkappa_2(C_1 + C_2)^2}, \\ K_1(u_1, u_2) &= \frac{C_1''(u_1)}{C_1'(u_1)} - \frac{2C_1'(u_1)}{C_1(u_1) + C_2(u_2)}, \\ K_2(u_1, u_2) &= \frac{C_2''(u_2)}{C_2'(u_2)} - \frac{2C_2'(u_2)}{C_1(u_1) + C_2(u_2)}. \end{aligned}$$

Un modèle voisin de celui étudié jusqu'ici est constitué par l'association d'un invariant $I(x^\lambda)$ et des *fonctions de champs* associées à la description des *champs électromagnétiques* ou *mésiques vectoriels* soient un *vecteur* A^μ et un tenseur *antisymétrique* du *second* ordre *autodual* $F^{\mu\nu}$.

Avec un choix des signes adapté, ces trois grandeurs sont associées par les trois équations

$$\text{(37)} \qquad \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \varkappa_1 I F_{\mu\nu}, \qquad \partial_\lambda F^{\mu\lambda} = \varkappa_2 I A^\mu, \qquad \partial_\mu I = \varepsilon_0 \varkappa_0 F_{\mu\lambda} A^\lambda .$$

($\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_0$, constantes réelles et *positives* ($\varepsilon_0 = \pm 1$)).

Ce système entraîne $\partial_\mu(IA^\mu) = 0$ et par suite $\partial_\mu A^\mu = 0$.

Les *solutions particulières du type ondes planes* s'exprimeront encore au moyen de *fonctions elliptiques de Jacobi.*

Posant

$$A^\mu(u) = \frac{1}{\sqrt{\varkappa_2\varkappa_0}} a^\mu Y_1(u), \qquad F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa_1\varkappa_0}} f^{\mu\nu} Y_2(u),$$

$$I(u) = \frac{1}{\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}} Y_3(u), \qquad (u = n_\mu x^\mu, \quad n_\mu n^\mu = 1),$$

les fonctions $Y(u)$ satisfont aux relations

$$(n_\mu a_\nu - n_\nu a_\mu)\frac{dY_1}{du} = f_{\mu\nu}Y_2Y_3\,, \qquad n_\lambda f^{\mu\lambda}\frac{dY_2}{du} = -\,a^\mu Y_1Y_3\,,$$
$$n_\mu\frac{dY_3}{du} = \varepsilon_0 f_{\mu\lambda}a^\lambda Y_1Y_2 \qquad \text{et} \qquad n_\mu a^\mu = 0\,.$$

Déterminant $f_{\mu\nu}$ à partir de a_μ par $f_{\mu\nu} = n_\mu a_\nu - n_\nu a_\mu$ et réciproquement

$$n_\lambda f^{\mu\lambda} = a^\mu\,,$$

cette définition entraîne

$$f_{\mu\lambda}a^\lambda = n_\mu(a_\lambda a^\lambda)\,.$$

Les fonctions $Y_j(u)$ sont alors associées par le système

$$\frac{dY_1}{du} = Y_2Y_3\,, \qquad \frac{dY_2}{du} = -\,Y_1Y_3\,, \qquad \frac{dY_3}{du} = \varepsilon_0(a_\lambda a^\lambda)Y_1Y_2\,. \tag{38}$$

Ici le *genre espace ou temps du vecteur* a^μ et par suite de A^μ *va jouer un rôle important.*

Dans la théorie des ondes électromagnétiques, le potentiel vecteur A^μ est du genre espace ($A_\mu A^\mu < 0$) ce qui conduit à la *transversalité du champ électromagnétique.*

Ici $F^{\mu\nu}(u)$ sera du type *transversal* si nous choisissons *a priori*

$$a_\lambda a^\lambda = -\,1\,.$$

Dans ce cas $\varepsilon_0 = +\,1$, nous redonnera pour $Y_1(u)$, $Y_2(u)$, $Y_3(u)$, les expressions en *fonctions elliptiques de Jacobi* obtenues précédemment. Avec

$$Y_1^2 + Y_2^2 = \lambda_1^2\,, \qquad Y_1^2 + Y_3^2 = \lambda_2^2\,,$$
$$Y_1(u) = \lambda_1 \operatorname{sn}\left(\lambda_2(u+u_0), \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right),$$
$$Y_2(u) = \lambda_1 \operatorname{cn}\left(\lambda_2(u+u_0), \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right),$$
$$Y_3(u) = \lambda_2 \operatorname{dn}\left(\lambda_2(u+u_0), \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right),$$

λ_1, λ_2, u_0 s'exprimant à partir des valeurs initiales.

Mais si en conservant $\varepsilon_0 = +\,1$, le *vecteur* A^μ *est du genre temps*

$$a_\lambda a^\lambda = +\,1\,,$$

le système se réduit aux équations

$$Y_1' = Y_2Y_3\,, \qquad Y_2' = -\,Y_1Y_3\,, \qquad Y_3' = +\,Y_1Y_2\,,$$

La condition

$$A_\mu A^\mu > 0 \qquad \text{d'où} \qquad a_\mu a^\mu = +\,1$$

est rencontrée en *électrodynamique quantique* et pour les *mésons vectoriels* pour les *interactions associées à l'absorption-réémission d'ondes longitudinales, nécessaires* pour servir d'intermédiaires aux *interactions dites statiques.*

Pour ce cas, les équations ci-dessus nous redonnent les expressions en fonctions elliptiques de Jacobi que nous avons rencontrées pour le système (J). Les *fonctions elliptiques représentatives* de A^{μ} et de $F^{\mu\nu}$ *se sont échangées.*

Dans les deux cas on retrouve pour les ondes planes, les solutions dégénérées que nous avons rencontrées dans les cas précédents.

J'ai introduit et étudié de nombreuses extensions des modèles présentés jusqu'ici et susceptibles de décrire des éléments microphysiques plus complexes, *définis par l'association de système de champs* représentés par des groupes de tenseurs ou de tenseurs spineurs.

Les plus simples de ces structures conduisent pour les ondes planes associées à des fonctions définies par *l'inversion d'intégrales hyperelliptiques.* Un modèle de ce type de structure considère le champ décrit par l'association de n invariants (pour $L_+^\uparrow$) $I_1(x^{\lambda}), \ldots, I_n(x^{\lambda})$ et *d'un vecteur* $S^{\mu}(x^{\lambda})$ par l'intermédiaire du système d'équations non linéaires

$$(39)\qquad \begin{aligned} \partial_{\mu}I_1 &= \varkappa_1 I_2 I_3 \ldots I_n S_{\mu}, \\ \partial_{\mu}I_2 &= -\varkappa_2 I_1 I_3 \ldots I_n S_{\mu}, \\ &\vdots \\ \partial_{\mu}I_n &= -\varkappa_n I_1 I_2 \ldots I_{n-1} S_{\mu}, \\ \partial_{\mu}S^{\mu} &= -\varkappa_0 I_1 I_2 \ldots I_n, \end{aligned}$$

($\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n, \varkappa_0$ constantes réelles positives).

Ce système admet des solutions du type ondes planes soient

$$I_j(x^{\lambda}) \to Y_j(u), \qquad S^{\mu}(x^{\lambda}) \to n^{\mu}Y_0(u),$$
$$(u = n_{\mu}x^{\mu}, \qquad n_{\mu}n^{\mu} = 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces fonctions sont associées par le système différentiel

$$(40)\quad Y_1Y_1' = -Y_2Y_2' = \ldots = -Y_nY_n' = -Y_0Y_0' = (Y_1Y_2 \ldots Y_n)\cdot Y_0,$$

qui admet les n intégrales premières (associées aux valeurs initiales des Y_j, Y_0)

$$Y_1^2 + Y_2^2 = \lambda_1^2, \qquad Y_1^2 + Y_j^2 = \lambda_{j-1}^2,$$
$$Y_1^2 + Y_n^2 = \lambda_{n-1}^2, \qquad Y_1^2 + Y_0^2 = \lambda_0^2.$$

Les fonctions $Y_j(u)$ et $Y_0(u)$ sont donc déterminées à *partir de l'équation différentielle*

$$(41)\qquad (Y_1')^2 = (\lambda_0^2 - Y_1^2)\left[\prod_{j=1}^{n-1}(\lambda_j^2 - Y_1^2)\right]$$

Avec un *choix d'indexation* conduisant à l'ordre des valeurs des λ_j^2

$$\lambda_0^2 > \lambda_{n-1}^2 > \ldots > \lambda_j^2 > \ldots > \lambda_1^2,$$

la fonction $Y_1(u)$ est définie par l'*inversion de l'intégrale hyperelliptique*

$$u = \int_{Y_1^0}^{Y_1} \frac{dy}{\sqrt{(\lambda_0^2 - y^2)(\lambda_1^2 - y^2)\ldots(\lambda_{n-1}^2 - y^2)}}. \tag{42}$$

On en déduit l'ensemble des fonctions Y_1, Y_2, Y_n, Y_0 *sous réserve d'une uniformisation associée à une caractérisation plus complète des objets physiques représentés.* La *non uniformité* d'une représentation *constitue une dégénérescence de la représentation susceptible d'être levée par la considération d'une qualité de l'objet physique* non prise en considération dans le premier modèle.

Toutefois dans le cas d'un système de quatre fonctions $Y_1(u)$, $Y_2(u)$, $Y_3(u)$, $Y_0(u)$ *la représentation des fonctions peut encore être effectuée complètement par des fonctions elliptiques de Jacobi.*

Je vais préciser les *éléments de cette correspondance qui sera essentielle* dans la seconde partie de ce travail.

Nous partirons de quatre fonctions $Y_1(u)$, $Y_2(u)$, $Y_3(u)$, $Y_0(u)$, associées dans le système différentiel

$$\begin{aligned} &\frac{dY_1}{du} = Y_2Y_3Y_0, \qquad &&\frac{dY_2}{du} = -Y_1Y_3Y_0, \\ &\frac{dY_3}{du} = -Y_1Y_2Y_0, \qquad &&\frac{dY_0}{du} = -Y_1Y_2Y_3, \end{aligned} \tag{43}$$

avec les intégrales premières

$$Y_1^2 + Y_2^2 = \lambda_1^2, \qquad Y_1^2 + Y_3^2 = \lambda_2^2, \qquad Y_1^2 + Y_0^2 = \lambda_0^2,$$
$$\lambda_0^2 > \lambda_2^2 > \lambda_1^2.$$

Posant

$$Z_0 = \frac{1}{Y_0^2}, \qquad Z_1 = \frac{Y_1}{Y_0}, \qquad Z_2 = \frac{Y_2}{Y_0}, \qquad Z_3 = \frac{Y_3}{Y_0},$$

les fonctions Z sont associées par le système

$$\begin{gathered} Z_1' = \lambda_0^2 Z_2Z_3, \qquad Z_2' = -(\lambda_0^2 - \lambda_1^2)Z_1Z_3, \qquad Z_3' = -(\lambda_0^2 - \lambda_2^2)Z_1Z_2, \\ Z_0' = 2Z_1Z_2Z_3 = \frac{2}{\lambda_0^2} Z_1Z_1'. \end{gathered} \tag{44}$$

Les intégrales premières précédentes s'écrivent

$$Z_0 = \frac{1}{\lambda_0}(1 + Z_1^2) = \frac{1}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2}(1 - Z_2^2) = \frac{1}{\lambda_0^2 - \lambda_2^2}(1 - Z_3^2)$$

et par suite

$$\frac{Z_1^2}{\lambda_0^2} + \frac{Z_2^2}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0^2(\lambda_0^2 - \lambda_1^2)} = v_1^2,$$

$$\frac{Z_1^2}{\lambda_0^2} + \frac{Z_3^2}{\lambda_0^2 - \lambda_2^2} = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_0^2(\lambda_0^2 - \lambda_2^2)} = v_2^2.$$

L'analyse précédente nous conduit aux expressions

$$Z_1(u) = \lambda_0 v_1 \operatorname{sn}\left[v_2(u + u_0)\,;\frac{v_1}{v_2}\right]$$

$$Z_2(u) = \sqrt{\lambda_0^2 - \lambda_1^2}\,v_1 \operatorname{cn}\left[v_2(u + u_0)\,;\frac{v_1}{v_2}\right]$$

$$Z_3(u) = \sqrt{\lambda_0^2 - \lambda_1^2}\,v_2 \operatorname{dn}\left[v_2(u + u_0)\,;\frac{v_1}{v_2}\right]$$

et

$$Z_0 = \frac{1}{\lambda_0^2} + v_1^2 \operatorname{sn}^2\left[v_2(u + u_0), \frac{v_1}{v_2}\right]$$

Ici le *module des fonctions elliptiques* est défini par

$$k_1 = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\sqrt{\frac{\lambda_0^2 - \lambda_2^2}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2}}.$$

La définition $Z_0 = \dfrac{1}{Y_0^2}$ donne successivement pour les fonctions Y

$$Y_0(u) = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 + \lambda_0^2 v_1^2 \operatorname{sn}^2\left[v_2(u + u_0), \frac{v_1}{v_2}\right]}},$$

$$(45)\qquad Y_1(u) = Z_1 Y_0 = \frac{Z_1}{\sqrt{Z_0}} = \frac{\lambda_0^2 v_1 \operatorname{sn}\,[v_2(u + u_0)\,; k_1]}{\sqrt{1 + \lambda_0^2 v_1^2 \operatorname{sn}^2\,[v_2(u + u_0), k_1]}},$$

$$Y_2(u) = Z_2 Y_0 = \frac{Z_2}{\sqrt{Z_0}} = \frac{\lambda_1 \operatorname{cn}\,[v_2(u + u_0), k_1]}{\sqrt{1 + \lambda_0^2 v_1^2 \operatorname{sn}^2\,[v_2(u + u_0), k_1]}},$$

$$Y_3(u) = Z_3 Y_0 = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_0}} = \frac{\lambda_2 \operatorname{dn}\,[v_2(u + u_0), k_1]}{\sqrt{1 + \lambda_0^2 v_1^2 \operatorname{sn}^2\,[v_2(u + u_0), k_1]}}.$$

Les constantes λ_0^2, λ_1^2, λ_2^2 et u_0 par suite v_1^2, v_2^2, k_1, sont définies par *les valeurs initiales* (ou *maximales*) des fonctions Y.

Le *théorème d'addition des fonctions elliptiques* donnera l'expression complète des fonctions Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 à partir de ces valeurs pour $u = 0$.

Le *système associant les quatre fonctions* exprimées en fonctions de Jacobi admet une *dégénérescence particulièrement importante.*

Pour $k_1 = \dfrac{\nu_1}{\nu_2} = 1$, on aura $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$, soit $Y_2^2 = Y_3^2$.

Pour $Y_2 = Y_3$, le système (43) se réduit aux trois équations

$$(46) \qquad Y_1' = Y_2^2 Y_0, \qquad Y_2' = -Y_1 Y_2 Y_0, \qquad Y_0' = -Y_1 Y_2^2$$

associées par les intégrales premières

$$Y_1^2 + Y_2^2 = \lambda_1^2, \qquad Y_1^2 + Y_0^2 = \lambda_0^2.$$

Nous admettrons encore $\lambda_0^2 > \lambda_1^2$ (soit $Y_0^2 > Y_2^2$).

Ce *système s'intègre* facilement en *fonctions hyperboliques :*

$$(47) \qquad \begin{aligned} Y_0(u) &= \frac{\lambda_0\sqrt{\lambda_0^2 - \lambda_1^2}\ \mathrm{ch}\ [\nu_1(u + u_0)]}{\sqrt{\lambda_0^2\ \mathrm{ch}^2\ [\nu_1(u + u_0)] - \lambda_1^2}}, \\ Y_1(u) &= \frac{\lambda_0\lambda_1\ \mathrm{sh}\ [\nu_1(u + u_0)]}{\sqrt{\lambda_0^2\ \mathrm{ch}^2\ [\nu_1(u + u_0)] - \lambda_1^2}}, \\ Y_2(u) &= \frac{\lambda_1\sqrt{\lambda_0^2 - \lambda_1^2}}{\sqrt{\lambda_0^2\ \mathrm{ch}^2\ \nu_1(u + u_0) - \lambda_1^2}}, \\ \nu_1 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_0\sqrt{\lambda_0^2 - \lambda_1^2}}. \end{aligned}$$

Ces *solutions particulières constituent* une « *onde solitaire* » associée aux équations (39) déterminant les fonctions de champs I_1, I_2, I_3, S^μ dans le cas $I_2 = I_3$ et écrites sous la forme générale

$$(48) \quad \partial_\mu I_1 = \varkappa_1 I_2^2 S_\mu, \qquad \partial_\mu I_2 = -\varkappa_2 I_1 I_2 S^\mu, \qquad \partial_\mu S^\mu = -\varkappa_0 I_1 I_2^2.$$

Les modèles de structures de champs associés dont j'ai présenté très brièvement les caractères les plus simples *ont été construits de façon à conduire à des solutions ondes planes complètement déterminées* et *définies par inversion des intégrales elliptiques de seconde espèce de Legendre* ou de leurs prolongements hyperelliptiques adaptés à la représentation par des fonctions elliptiques de Jacobi.

Dans l'étude de structures plus complexes, j'ai été conduit à caractériser des *systèmes covariants* d'équations aux dérivées partielles du premier ordre *admettant des solutions ondes planes définies par inversion d'intégrales elliptiques de troisième espèce.*

Dans le cas d'association de champs définis par des tenseurs, des structures simples conduisent à ce type de solutions ondes planes.

Le plus simple de ces modèles associe un vecteur $A^\mu(x^\lambda)$, un tenseur antisymétrique du second ordre $F^{\mu\nu}(x^\lambda)$ (champs de type électromagnétique ou mésique vectoriel) avec un invariant $I(x^\lambda)$ et un vecteur $S^\mu(x^\lambda)$ constituant un champ de type « spin 0 » le plus simple.

Ce système associant ces tenseurs s'écrit

$$(49)\quad \begin{aligned} &\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \varkappa_1(S_\lambda S^\lambda) I F_{\mu\nu}, \qquad \partial_\lambda F^{\mu\lambda} = \varkappa_2(S_\lambda S^\lambda) I A^\mu, \\ &\partial_\mu I = \varkappa_3(S_\lambda S^\lambda) F_{\mu\lambda} A^\lambda, \qquad \partial_\lambda S^\lambda = -\frac{1}{2}\varkappa_0 I F_{\rho\sigma}(A^\rho S^\sigma - A^\sigma S^\rho). \end{aligned}$$

$\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, $\varkappa_0$ sont trois constantes *a priori* positives et les signes introduits ont été choisis pour faciliter le classement et le choix ultérieur de solutions susceptibles d'être associées à des objets physiques.

Pour l'onde plane $u = n_\mu x^\mu$ (avec $n_\mu n^\mu = 1$), j'écrirai

$$A^\mu = a^\mu Y_1(u), \qquad F^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} Y_2(u), \qquad I(u) = Y_3(u), \qquad S^\mu = m^\mu Y_0(u).$$

La substitution conduit au système

$$\begin{gathered} (n_\mu a_\nu - n_\nu a_\mu) Y_1' = \varkappa_1(m_\lambda m^\lambda) f_{\mu\nu} Y_0^2 Y_2 Y_3, \qquad n_\lambda f^{\mu\lambda} Y_2' = \varkappa_2(m_\lambda m^\lambda) a^\mu Y_0^2 Y_1 Y_3, \\ n_\mu Y_3' = \varkappa_3(m_\lambda m^\lambda) f_{\mu\lambda} a^\lambda Y_0^2 Y_1 Y_2, \\ (n_\lambda m^\lambda) Y_0' = -\frac{1}{2}\varkappa_0 f_{\rho\sigma}(a^\rho m^\sigma - a^\sigma m^\rho) Y_1 Y_2 Y_3 Y_0. \end{gathered}$$

Ces relations exigent la condition d'orthogonalité

$$n_\mu a^\mu = 0$$

associant $f_{\mu\nu}$ et a_μ par les relations constitutives

$$f_{\mu\nu} = K(n_\mu a_\nu - n_\nu a_\mu)$$

d'où

$$\begin{gathered} n_\lambda f^{\mu\lambda} = -K a^\mu, \qquad f_{\mu\lambda} a^\lambda = K n_\mu (a_\lambda a^\lambda), \\ f_{\rho\sigma}(a^\rho m^\sigma - a^\sigma m^\rho) = -2K(a_\lambda a^\lambda)(n_\mu m^\mu). \end{gathered}$$

Nous obtenons le système différentiel :

$$(50)\quad \begin{aligned} Y_1' &= \varkappa_1 K (m_\lambda m^\lambda) Y_0^2 Y_2 Y_3, \\ Y_2' &= -\frac{\varkappa_2}{K}(m_\lambda m^\lambda) Y_0^2 Y_1 Y_3, \\ Y_3' &= \varkappa_3 K (m_\lambda m^\lambda)(a_\lambda a^\lambda) Y_0^2 Y_1 Y_2, \\ Y_0' &= \varkappa_0 K (a_\lambda a^\lambda) Y_1 Y_2 Y_3 Y_0, \end{aligned}$$

sous la condition $n_\lambda m^\lambda \neq 0$.

Le choix pour m^λ et a^λ de vecteurs unitaires

$$(m_\lambda m^\lambda) = \varepsilon_1, \qquad (a_\lambda a^\lambda) = \varepsilon_0$$

et avec $K = 1$, réduit ce système à la forme

$$(51)\quad \begin{aligned} Y_1' &= \varepsilon_1 \varkappa_1 Y_0^2 Y_2 Y_3, \\ Y_2' &= -\varepsilon_1 \varkappa_2 Y_0^2 Y_1 Y_3, \\ Y_3' &= \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varkappa_3 Y_0^2 Y_1 Y_2, \\ Y_0' &= \varepsilon_0 \varkappa_0 Y_1 Y_2 Y_3 Y_0. \end{aligned}$$

Pour $a_\lambda a^\lambda = \varepsilon_0 = -1$, *onde de type transversal* (et avec un changement d'échelle simple) ce système s'écrit

$$(52)\qquad \begin{aligned} Y_1' &= \varepsilon_1 Y_0^2 Y_2 Y_3, & Y_2' &= -\varepsilon_1 Y_0^2 Y_1 Y_3, \\ Y_3' &= -\varepsilon_1 Y_0^2 Y_1 Y_2, & Y_0' &= -Y_1 Y_2 Y_3 Y_0. \end{aligned}$$

Avec $\varepsilon_1 = +1$, S^μ du genre temps, ce système admet les intégrales premières

$$Y_1^2 + Y_2^2 = \lambda_1^2, \qquad Y_1^2 + Y_3^2 = \lambda_2^2, \qquad Y_0^2 + Y_1^2 = \lambda_0^2.$$

Admettant $\lambda_0^2 > \lambda_2^2 > \lambda_1^2$, on obtient pour $Y_1(u)$

$$\left(\frac{dY_1}{du}\right)^2 = (\lambda_1^2 - Y_1^2)(\lambda_2^2 - Y_1^2)(\lambda_0^2 - Y_1^2)^2.$$

$Y_1(u)$ *sera donc défini par inversion de l'intégrale elliptique de troisième espèce*

$$(53)\qquad u = \int_{Y_1^0}^{Y_1} \frac{dy}{(\lambda_0^2 - y^2)\sqrt{(\lambda_1^2 - y^2)(\lambda_2^2 - y^2)}}$$

(pour $|Y_1| < \lambda_1$).

Dans le cas $\varepsilon_0 = +1$ (A^μ, $F^{\mu\nu}$ de type longitudinal (cas statique)) le système réduit à

$$(54)\qquad \begin{aligned} Y_1' &= \varepsilon_1 \varkappa_1 Y_0^2 Y_2 Y_3, & Y_2' &= -\varepsilon_1 \varkappa_2 Y_0^2 Y_1 Y_3, \\ Y_3' &= \varepsilon_1 \varkappa_3 Y_0^2 Y_1 Y_2, & Y_0' &= \varkappa_0 Y_1 Y_2 Y_3 Y_0, \end{aligned}$$

conduit encore (pour $\varepsilon_1 = +1$) à une solution du même type mais avec échange des fonctions Y_1 et Y_2.

De nombreux modèles de champs associés par l'intermédiaire de leurs énergies sont décrits par des structures fonctionnelles de ce type.

Une structure de champs associés très voisine de celles présentées jusqu'ici *correspond à de nombreuses études effectuées en partant a priori d'équations aux dérivées partielles du second ordre.*

Je partirai du système décrivant un champ de « spin 0 » défini par $I(x^\lambda)$ et $S^\mu(x^\lambda)$ *en autocouplage* et associés par les *équations du premier ordre*

$$(55)\qquad \partial_\mu I = [\alpha_1 + \beta_1 I^2] S_\mu, \qquad \partial_\mu S^\mu = -[\alpha_2 + \beta_2 (S_\lambda S^\lambda)] I.$$

α_1, α_2, β_1, β_2 sont des constantes données *a priori*. Avec

$$S_\mu = \frac{\partial_\mu I}{\alpha_1 + \beta_1 I^2},$$

I satisfait à l'équation du second ordre

$$\partial_\mu \partial^\mu I = -\alpha_2(\alpha_1 + \beta_1 I^2) I + (2\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 + \beta_1 I^2)(S_\mu S^\mu) I$$

ou

$$(56)\qquad \partial_\mu \partial^\mu I = -\alpha_2(\alpha_1 + \beta_1 I^2) I + \frac{(2\beta_1 - \beta_2)}{\alpha_1 + \beta_1 I^2} (\partial_\mu I)(\partial^\mu I) I.$$

La condition entre constantes

$$\beta_2 = 2\beta_1 \tag{57}$$

réduit le système à

$$\partial_\mu \mathrm{I} = (\alpha_1 + \beta_1 \mathrm{I}^2)\mathrm{S}_\mu, \qquad \partial_\mu \mathrm{S}^\mu = -\ [\alpha_2 + 2\beta_1(\mathrm{S}_\lambda \mathrm{S}^\lambda)]\mathrm{I}, \tag{58}$$

et I satisfait à l'équation du second ordre

$$\partial_\mu \partial^\mu \mathrm{I} + \alpha_1\alpha_2 \mathrm{I} + \beta_1\alpha_2 \mathrm{I}^3 = 0. \tag{59}$$

Les solutions ondes planes du système (55) sont encore obtenues en écrivant

$$u = n_\mu x^\mu, \qquad \mathrm{I} = \mathrm{Y}_1(u), \qquad \mathrm{S}^\mu = n^\mu \mathrm{Y}_2(u)$$

On a alors

$$\frac{d\mathrm{Y}_1}{du} = (\alpha_1 + \beta_1 \mathrm{Y}_1^2)\mathrm{Y}_2, \qquad \frac{d\mathrm{Y}_2}{du} = -\ (\alpha_2 + \beta_2 \mathrm{Y}_2^2)\mathrm{Y}_1. \tag{60}$$

Ce système admet l'intégrale première

$$(\alpha_1 + \beta_1 \mathrm{Y}_1^2)^{\frac{\beta_2}{\beta_1}}(\alpha_2 + \beta_2 \mathrm{Y}_2^2) = \lambda_0^2.$$

Nous en déduisons pour $\mathrm{Y}_1(u)$ l'équation différentielle

$$\left(\frac{d\mathrm{Y}_1}{du}\right)^2 = \frac{1}{\beta_2}\left[\lambda_0^2(\alpha_1 + \beta_1 \mathrm{Y}_1^2)^{2-\frac{\beta_2}{\beta_1}} - \alpha_2(\alpha_1 + \beta_1 \mathrm{Y}_1^2)^2\right]. \tag{61}$$

Nous *retrouverons une intégrale elliptique* définissant pour $\mathrm{Y}_1(u)$ une *fonction elliptique de Jacobi* pour $\beta_2 = 2\beta_1$ et pour $\beta_2 = \beta_1$.

Pour $\beta_2 = 2\beta_1$, il reste

$$\left(\frac{d\mathrm{Y}_1}{du}\right)^2 = \frac{1}{2\beta_1}\left[\lambda_0^2 - \alpha_1^2\alpha_2 - 2\alpha_1\alpha_2\beta_1 \mathrm{Y}_1^2 - \alpha_2\beta_1^2 \mathrm{Y}_1^4\right] \tag{62}$$

et pour $\beta_2 = \beta_1$

$$\left(\frac{d\mathrm{Y}_1}{du}\right)^2 = \frac{1}{\beta_1}(\alpha_1 + \beta_1 \mathrm{Y}_1^2)(\lambda_0^2 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\beta_1 \mathrm{Y}_1^2). \tag{63}$$

Suivant les valeurs des constantes et des valeurs initiales associées par λ_0^2, $\mathrm{Y}_1(u)$, $\mathrm{Y}_2(u)$ (et par suite $\mathrm{S}^\mu(u)$) se représenteront à partir des fonctions $\mathrm{sn}\,(\omega u, k)$, $\mathrm{cn}\,(\omega u, k)$, $\mathrm{dn}\,(\omega u, k)$ et *éventuellement de leurs dégénérescences.*

Je vais prolonger les résultats précédents en introduisant, et en déterminant complètement les solutions du type « ondes planes » pour *un modèle de « corpuscule-champs »* dans lequel *l'objet physique est reconnu et décrit* par *l'association de champs* appartenant aux *types que la mécanique* *quantique linéaire associe aux particules* de spin $\frac{\hbar}{2}$, (états de type « électroniques »), *aux particules de spin* $\hbar$ (états électromagnétiques ou « mésiques vectoriels ») *et aux particules de spin* $2\hbar$ (états gravitationnels).

Les systèmes de champs partiels dont l'association définit l'objet physique considéré seront représentés dans l'espace-temps (coordonnées $x^0, \vec{x}$) par des *tenseurs-spineurs de Van der Waerden* et décrits par *des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires du premier ordre* prolongeant les équations d'ondes de la théorie générale des particules à spin et *associant*, sans séparation possible sauf dégénérescence, *l'ensemble des champs constitutifs.*

Dans le modèle que nous étudions ici, *l'objet physique étant défini* par *trois systèmes de champs partiels*, la représentation s'en effectuera par trois groupes de tenseurs-spineurs symétriques par rapport aux indices de chacun des deux types).

Ces systèmes de spineurs seront associés et leur évolution s'effectuera globalement. Chacune des équations aux dérivées partielles du premier ordre relative à l'un des types de champs partiels contiendra un seul terme, *invariant spinoriel*, associant l'ensemble des spineurs décrivant les champs des deux autres types.

Le premier type de champs $\left(\text{états de spin } \frac{\hbar}{2}\right)$ introduit *deux spineurs de rang un :* $\xi^m(x^\mu)$, $\eta^{\dot{l}}(x^\mu)$, associés dans le cas linéaire par les équations de Dirac écrites en formalisme spinoriel.

J'utiliserai pour les *spineurs de Van der Waerden* la connexion spinorielle usuelle notée ici

$$\text{(64)}\qquad \begin{gathered} \xi_m = \varepsilon_{mr}\xi^r = -\varepsilon_{rm}\xi^r, \qquad \xi^m = \varepsilon^{mr}\xi_r, \\ \eta_{\dot{l}} = \varepsilon_{\dot{l}\dot{s}}\eta^{\dot{s}} = -\varepsilon_{\dot{s}\dot{l}}\eta^{\dot{s}}, \qquad (\xi_1 = -\xi^2, \xi_2 = -\xi^1) \\ \varepsilon_{m_1m_2} = -\varepsilon_{m_2m_1} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \varepsilon_{\dot{m}_1\dot{m}_2} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \varepsilon^{mr}\varepsilon_{rs} = \delta^m{}_s, \qquad \varepsilon^m{}_m = 2, \qquad \varepsilon_m{}^m = -2. \end{gathered}$$

L'association entre le vecteur A^μ (au sens restreint du groupe $L_+^\uparrow$) et le spineur du second rang $A^{\dot{l}m}$ s'effectuera par la correspondance réciproque

$$\text{(65)}\qquad \begin{gathered} A^{\dot{l}m} = (g_\mu)^{\dot{l}m}A^\mu, \qquad A^\mu = \frac{1}{2}(g^\mu)_{\dot{l}m}A^{\dot{l}m} = \frac{1}{2}(g^\mu)^{\dot{l}m}A_{\dot{l}m} \\ [(g^0)^{\dot{l}m} \equiv \|\sigma_0\|, \qquad (g^p)^{\dot{l}m} \equiv \|\sigma_p\|, \\ \sigma_p\sigma_q = i\sigma_r, \qquad \sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \\ \sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \qquad \sigma_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}] \end{gathered}$$

Les opérateurs $(g^\mu)^{\dot{l}m}$ sont associés par les relations

$$
\begin{aligned}
(66)\qquad && (g^\mu)^{\dot{r}}{}_l(g^\nu)_{\dot{r}m} + (g^\nu)^{\dot{r}}{}_l(g^\mu)_{\dot{r}m} &= 2g^{\mu\nu}\varepsilon_{lm}\,, \\
&& (g^\mu)_{\dot{l}}{}^{r}(g^\nu)_{\dot{m}r} + (g^\nu)_{\dot{l}}{}^{r}(g^\mu)_{\dot{m}r} &= 2g^{\mu\nu}\varepsilon_{\dot{l}\dot{m}}\,, \\
&& (g^\mu)_{\dot{l}r}(g_\mu)_{\dot{m}s} &= 2\varepsilon_{\dot{l}\dot{m}}\varepsilon_{rs}\,.
\end{aligned}
$$

Ces relations entraînent pour le « vecteur » $(A^\mu, A^{\dot{l}m})$ les relations

$$
(67)\qquad A^{\dot{r}}{}_l A_{\dot{r}m} = (A_\mu A^\mu)\varepsilon_{lm}\,, \qquad A_{\dot{l}}{}^{r}A_{\dot{m}r} = (A_\mu A^\mu)\varepsilon_{\dot{l}\dot{m}}\,, \qquad A_{\dot{r}l}A^{\dot{r}l} = 2(A_\mu A^\mu)\,.
$$

et pour deux vecteurs $(A^\mu, A^{\dot{l}m})$, $(B^\mu, B^{\dot{l}m})$ les relations

$$
A^{\dot{r}}{}_l B_{\dot{r}m} - A^{\dot{r}}{}_m B_{\dot{r}l} = 2(A^\mu B_\mu)\varepsilon_{lm}\,, \qquad A_{\dot{r}l}B^{\dot{r}l} = 2(A_\mu B^\mu)\,.
$$

Au vecteur x^μ sera associé le spineur $x^{\dot{l}m}$ par

$$
(68)\qquad x^{\dot{l}m} = (g_\mu)^{\dot{l}m}x^\mu\,, \qquad x^\mu = \frac{1}{2}(g^\mu)_{\dot{l}m}x^{\dot{l}m}\,.
$$

A l'opérateur $\partial_\mu \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ sera associé l'opérateur noté $\partial_{\dot{l}m}$

$$
(69)\qquad \partial_{\dot{l}m} = (g^\mu)_{\dot{l}m}\frac{\partial}{\partial x^\mu} = 2\frac{\partial}{\partial x^{\dot{l}m}} \qquad \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2}(g_\mu)^{\dot{l}m}\partial_{\dot{l}m}\,.
$$

L'opérateur d'Alembertien $\square \equiv \partial_\mu\partial^\mu$ se représentera par la combinaison

$$
\partial^{\dot{r}}{}_l\partial_{\dot{r}m} = \varepsilon_{lm}\partial^\mu\partial_\mu = \varepsilon_{lm}\square\,, \qquad \partial^{\dot{r}l}\partial_{\dot{r}l} = 2\square\,.
$$

Le premier sous-système de champs partiels (en théorie linéaire, états isolés de spin $\hbar/2$) sera constitué à partir de *deux spineurs de rang un* $\xi^m(x^\lambda)$, $\eta^{\dot{l}}(x^\lambda)$, *associés par un système prolongeant les équations de Dirac* et écrit

$$
(E_1)\qquad \partial^{\dot{l}}{}_r\xi^r = \Omega_1\eta^{\dot{l}}\,, \qquad \partial_{\dot{r}}{}^{m}\eta^{\dot{r}} = \Omega_1\xi^m\,.
$$

Ω_1 sera un *invariant spinoriel défini à partir de l'ensemble des spineurs représentant les deux autres systèmes de champs* et dont je préciserai plus loin la structure.

Le second sous-système de champs partiels est un prolongement des équations d'ondes de la théorie linéaire des particules de spin $\hbar$ (champ électromagnétique ou champs mésiques vectoriels).

Ces équations d'ondes écrites en formalisme spinoriel (tenseurs adaptés au groupe $L\updownarrow$) associent un spineur (potentiel vecteur) $A^{\dot{l}m}$ et deux tenseurs-spineurs *symétriques* du second ordre

$$
F^{\underline{m_1m_2}}(x^\lambda) \equiv F^{\underline{m_2m_1}}(x^\lambda)\,, \qquad G^{\underline{\dot{l}_1\dot{l}_2}} \equiv G^{\underline{\dot{l}_2\dot{l}_1}}
$$

(restrictions à $L\updownarrow$ de A^μ et $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ *autodual*).

Dans la théorie linéaire la plus générale, ces tenseurs-spineurs sont associés par le système d'équations du premier ordre

$$
(70)\qquad
\begin{aligned}
\partial_{\dot r m_1} A^{\dot r}{}_{m_2} + \partial_{\dot r m_2} A^{\dot r}{}_{m_1} &= \varkappa_1 F_{\underline{m_1 m_2}} ,\\
\partial_{\dot l}{}^{r} F_{\underline{rm}} + \partial^{\dot r}{}_{m} G_{\underline{\dot r \dot l}} &= - \varkappa_1 A_{\dot l m} ,\\
\partial_{\dot l_1 r} A_{\dot l_2}{}^{r} + \partial_{\dot l_2 r} A_{\dot l_1}{}^{r} &= \varkappa_1 G_{\underline{\dot l_1 \dot l_2}}
\end{aligned}
$$

Ce système se réduit à deux équations par la restriction (équivalente à *la réalité* des tenseurs A^{μ}, $F^{\mu\nu}$,

$$
A_{\dot l m} = A_{m \dot l} , \qquad G_{\underline{m_1 m_2}} = F_{\underline{m_1 m_2}}
$$

soit

$$
(71)\qquad \partial_{\dot r m_1} A^{\dot r}{}_{m_2} + \partial_{\dot r m_2} A^{\dot r}{}_{m_1} = \varkappa_1 F_{\underline{m_1 m_2}} \qquad \partial^{\dot l}{}_{r} F^{\underline{rm}} + \partial_{\dot r}{}^{m} F^{\underline{\dot r \dot l}} = \varkappa_1 A^{\dot l m}
$$

($\varkappa_1$ constante).

Ce système sera prolongé et le champ ($A^{\dot l m}$, $F^{\underline{m_1 m_2}}$) sera associé aux autres champs partiels dans un système plus général que nous écrirons

$$
(E_2)\qquad
\begin{aligned}
\partial_{\dot r m_1} A^{\dot r}{}_{m_2} + \partial_{\dot r m_2} A^{\dot r}{}_{m_1} &= 2\Omega_2 F_{\underline{m_1 m_2}} ,\\
\partial^{\dot l}{}_{r} F^{\underline{rm}} + \partial_{\dot r}{}^{m} F^{\underline{\dot r \dot l}} &= 2\Omega_2 A^{\dot l m} .
\end{aligned}
$$

Ω_2 sera ici un *second invariant spinoriel* construit *symétriquement* avec les *tenseurs-spineurs des deux autres sous-systèmes.*

Les équations (71) du cas linéaire entraînent sur $A^{\dot l m}$ la condition

$$
(72)\qquad \partial_{\dot r m_1} A^{\dot r}{}_{m_2} - \partial_{\dot r m_2} A^{\dot r}{}_{m_1} = 0 ,
$$

homologue de la relation du cas électromagnétique $\partial_{\mu} A^{\mu} = 0$.

Pour le système (E_2) cette relation se prolonge et s'écrit

$$
(73)\qquad \partial_{\dot r m_1}(\Omega_2 A^{\dot r}{}_{m_2}) - \partial_{\dot r m_2}(\Omega_2 A^{\dot r}{}_{m_1}) = 0
$$

d'où

$$
\partial_{\dot l m}(\Omega_2 A^{\dot l m}) = 0 .
$$

Le troisième sous-système associé à la notion de champ gravitationnel, champ constitutif essentiel de toute particule massique, sera écrit à partir des tenseurs-spineurs irréductibles de la *théorie quantique linéaire des particules de spin 2ℏ.*

La théorie générale définit ce type de champs par un système de *5 tenseurs-spineurs :*

$$
\Phi_{(0)}^{\underline{\dot l_1 \dot l_2, m_1 m_2}} , \qquad \Phi_{(1)}^{\underline{\dot l, m_1 m_2 m_3}} , \qquad \Phi_{(2)}^{\underline{m_1 m_2 m_3 m_4}} , \qquad \Phi_{(3)}^{\underline{\dot l_1 \dot l_2 \dot l_3, m}} , \qquad \Phi_{(4)}^{\underline{\dot l_1 \dot l_2 \dot l_3 \dot l_4}}
$$

(9, 8, 5, 8, 5 soit au total 35 composantes complexes) et ceux-ci sont associés par les équations aux dérivées partielles

$$
(74)\qquad
\begin{aligned}
\partial_{\dot r}{}^{\lfloor m_1}\Phi_{(1)}^{\dot r,\underline{m_2 m_3 m_4}\rfloor} &= \varkappa_0 \Phi_{(2)}^{\underline{m_1 m_2 m_3 m_4}}\,,\\
\partial^{\dot l}{}_{,r}\Phi_{(2)}^{\underline{r m_1 m_2 m_3}} + \partial_{\dot r,}{}^{\lfloor m_1}\Phi_{(0)}^{\dot r \dot l,\underline{m_2 m_3}\rfloor} &= \varkappa_0 \Phi_{(1)}^{\dot l,\underline{m_1 m_2 m_3}}\,,\\
\partial^{\lfloor \dot l_1}{}_{,r}\Phi_{(1)}^{\dot l_2\rfloor,\underline{r m_1 m_2}} + \partial_{\dot r,}{}^{\lfloor m_1}\Phi_{(3)}^{\underline{\dot l_1 \dot l_2 \dot r},\underline{m_2}\rfloor} &= \varkappa_0 \Phi_{(0)}^{\underline{\dot l_1 \dot l_2},\underline{m_1}\rfloor}\,,\\
\partial^{\lfloor \dot l_1}{}_{,r}\Phi_{(0)}^{\dot l_2 \dot l_3\rfloor,\underline{rm}} + \partial_{\dot r,}{}^{m}\Phi_{(4)}^{\underline{\dot l_1 \dot l_2 \dot l_3 \dot r}} &= \varkappa_0 \Phi_{(3)}^{\underline{\dot l_1 \dot l_2 \dot l_3},m}\,,\\
\partial^{\lfloor \dot l_1}{}_{,r}\Phi_{(3)}^{\dot l_1 \dot l_2 \dot l_3\rfloor,r} &= \varkappa_0 \Phi_{(4)}^{\underline{\dot l_1 \dot l_2 \dot l_3 \dot l_4}}\,.
\end{aligned}
$$

Dans ces relations j'ai noté les *opérations de symétrie* sur les *indices* en *soulignant les indices associés* et dans le *cas de symétrie sur groupes partiels*, j'ai noté

$$
\begin{aligned}
A^{\lfloor \dot L_1, M_1}B^{\dot L_2\rfloor, M_2} &\equiv A^{\dot L_1, M_1}B^{\dot L_2, M_2} + A^{\dot L_2, M_1}B^{\dot L_1, M_2},\\
A^{\dot L_1, \lfloor M_1}B^{\dot L_2, M_2\rfloor} &\equiv A^{\dot L_1, M_1}B^{\dot L_2, M_2} + A^{\dot L_1, M_2}B^{\dot L_2, M_1}.
\end{aligned}
$$

Pour l'*association de cette représentation* avec une *théorie macroscopique* décrite par des *tenseurs réels*, j'admettrai la *réduction des cinq tenseurs* à trois par la correspondance

$$
(75)\qquad
\begin{aligned}
\Phi_{(1)}^{\dot l,\underline{m_1 m_2 m_3}} &\equiv \Phi_{(3)}^{\dot l,\underline{m_1 m_2 m_3}}\\
\Phi_{(2)}^{\underline{m_1 m_2 m_3 m_4}} &\equiv \Phi_{(4)}^{\underline{m_1 m_2 m_3 m_4}}
\end{aligned}
$$

Le système ci-dessus *du cas linéaire* réduit aux trois équations

$$
(76)\qquad
\begin{aligned}
\partial_{\dot r,}{}^{\lfloor m_1}\Phi_{(1)}^{\dot r,\underline{m_2 m_3 m_4}\rfloor} &= \varkappa_0 \Phi_{(2)}^{\underline{m_1 m_2 m_3 m_4}}\,,\\
\partial^{\dot l}{}_{,r}\Phi_{(2)}^{\underline{r m_1 m_2 m_3}} + \partial_{\dot r,}{}^{\lfloor m_1}\Phi_{(0)}^{\dot r \dot l,\underline{m_2 m_3}\rfloor} &= \varkappa_0 \Phi_{(1)}^{\dot l,\underline{m_1 m_2 m_3}}\,,\\
\partial^{\lfloor \dot l_1}{}_{,r}\Phi_{(1)}^{\dot l_2\rfloor,\underline{r m_1 m_2}} + \partial_{\dot r,}{}^{\lfloor m_1}\Phi_{(1)}^{\underline{\dot l_1 \dot l_2 \dot r},\underline{m_2}\rfloor} &= \varkappa_0 \Phi_{(0)}^{\underline{\dot l_1 \dot l_2}.\underline{m_1 m_2}}\,.
\end{aligned}
$$

Dans la théorie corpusculaire générale que nous proposons ce système sera prolongé en introduisant au lieu de la constante $\varkappa_0$, *un invariant spinoriel* construit symétriquement sur l'ensemble des tenseurs-spineurs associés aux champs partiels de spin $\hbar/2$ et $\hbar$.

L'évolution des composantes du champ gravitationnel associée à celle des autres champs partiels sera donc décrite à partir des équations

$$
(E_3)\qquad
\begin{aligned}
\partial^{\lfloor \dot l_1}{}_{,r}\Phi_{(1)}^{\dot l_2\rfloor,\underline{r m_1 m_2}} + \partial_{\dot r,}{}^{\lfloor m_1}\Phi_{(1)}^{\underline{\dot r \dot l_1 \dot l_2},\underline{m_2}\rfloor} &= \Omega_0 \Phi_{(0)}^{\underline{\dot l_1 \dot l_2},\underline{m_1 m_2}}\,,\\
\partial_{\dot r,}{}^{\lfloor m_1}\Phi_{(0)}^{\dot r \dot l,\underline{m_2 m_3}\rfloor} + \partial^{\dot l}{}_{,r}\Phi_{(2)}^{\underline{r m_1 m_2 m_3}} &= \Omega_0 \Phi_{(1)}^{\dot l,\underline{m_1 m_2 m_3}}\,,\\
\partial_{\dot r,}{}^{\lfloor m_1}\Phi_{(1)}^{\dot r,\underline{m_2 m_3 m_4}\rfloor} &= \Omega_0 \Phi_{(2)}^{\underline{m_1 m_2 m_3 m_4}}\,.
\end{aligned}
$$

Ce système conduit aux conditions sur $\Phi_{(0)}^{\underline{\dot{l}_1\dot{l}_2},\underline{m_1m_2}}$

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\dot{r},}{}^{m_i}\left(\Omega_0\Phi_{(0)}^{\underline{\dot{r}\dot{l}},\underline{m_jm_k}}\right) = \partial_{\dot{r}}{}^{m_j}\left(\Omega_0\Phi^{\underline{\dot{r}\dot{l}},\underline{m_im_k}}\right), \\
(77)\qquad &\partial^{\dot{l}_i}{}_{,r}\left(\Omega_0\Phi_{(0)}^{\underline{\dot{l}_j\dot{l}_k},\underline{rm}}\right) = \partial^{\dot{l}_j}{}_{,r}\left(\Omega_0\Phi^{\underline{\dot{l}_k\dot{l}_i},\underline{rm}}\right) \\
&(i, j, k = 1, 2, 3).
\end{aligned}
$$

Ω_1, Ω_2, Ω_0 sont *trois invariants spinoriels* (a priori *réels*) construits sur trois tenseurs-spineurs (du type vecteur (pour $L_+^\uparrow$) associés respectivement à chacun des champs principaux) :

$$
(78)\qquad
\begin{aligned}
\Omega_1 &= E_{\dot{l}m}G^{\dot{l}m}, \\
\Omega_2 &= j_{\dot{l}m}G^{\dot{l}m}, \\
\Omega_0 &= j_{\dot{l}m}E^{\dot{l}m}.
\end{aligned}
$$

$j^{\dot{l}m}$ sera l'homologue du vecteur « courant » dans la théorie linéaire de la particule de spin $\hbar/2$:

$$
(79)\qquad j^{\dot{l}m} = \xi^{\dot{l}}\xi^m + \eta^{\dot{l}}\eta^m
$$

et satisfaisant à l'équation dite de continuité (Ω_1 est réel)

$$
\partial_{\dot{l}m}j^{\dot{l}m} = 0
$$

$E^{\dot{l}m}$ sera défini à partir des composantes $A^{\dot{l}m}$ et $F^{\underline{m_1m_2}}$ par la combinaison hermitienne (réelle)

$$
(80)\qquad E_{\dot{l}m} = F_{\underline{\dot{l}\dot{r}}}A^{\dot{r}}{}_m + F_{\underline{rm}}A_{\dot{l}}{}^r,
$$

(homologue spinoriel du vecteur $E_\mu = F_{\mu\lambda}A^\lambda$)

$G^{\dot{l}m}$ construit sur les composantes du *champ gravitationnel* sera défini par la combinaison

$$
(81)\qquad G_{\dot{l}m} = \Phi_{(1)\underline{\dot{l}\dot{r}_1\dot{r}_2},}{}^s\Phi_{(0)}^{\underline{\dot{r}_1\dot{r}_2},}{}_{\underline{sm}} + \Phi^{\dot{s}}_{(1),\underline{r_1r_2m}}\Phi_{(0)\underline{\dot{s}\dot{l}},}{}^{\underline{r_1r_2}}
$$

(une seconde forme possible serait construite à partir de

$$
\Phi_{(1)}^{\dot{l},\underline{m_1m_2m_3}} \qquad \text{et} \qquad \Phi_{(2)}^{\underline{m_1m_2m_3m_4}}.
$$

L'analyse qui va suivre montrera l'identité des deux choix.

Partant du système (E_1), (E_2), (E_3) déterminant l'*évolution associé des trois systèmes de champs constituant l'objet physique* je vais en déterminer complètement les *solutions ondes planes.*

Une composante de champs « onde plane » sera ici une composante de tenseur-spineur fonction de la variable unique u, invariante par rapport aux transformations du groupe spinoriel ($L_+^\uparrow$) soit $u = n_\mu x^\mu$, n_μ étant un vecteur unitaire et du *genre temps* $n_\mu n^\mu = 1$.

Les relations d'association entre spineurs et tenseurs (au sens restreint à $L_+^\uparrow$) nous conduisent à prendre pour homologue du vecteur de propagation n^μ un spineur $n^{\dot{l}m}$(hermitien : $n^{\dot{l}m} = n^{m\dot{l}}$) associé à n^μ par les relations

$$n^{\dot{l}m} = (g_\mu)^{\dot{l}m} n^\mu\,, \qquad n^\mu = \frac{1}{2}(g^\mu)_{\dot{l}m} n^{\dot{l}m}\,,$$
$$n^{\dot{r}}{}_l n_{\dot{r}m} = (n_\mu n^\mu)\varepsilon_{lm} = \varepsilon_{lm}\,,$$
$$n_{\dot{l}}{}^{r} n_{\dot{m}r} = \varepsilon_{\dot{l}\dot{m}}\,.$$

Avec

$$x^{\dot{l}m} = (g_\mu)^{\dot{l}m} x^\mu\,, \qquad x^\mu = \frac{1}{2}(g^\mu)_{\dot{l}m} x^{\dot{l}m}\,,$$

on en déduit

$$\begin{aligned} n^{\dot{r}}{}_l(x)_{\dot{r}m} - n^{\dot{r}}{}_m(x)_{\dot{r}l} &= 2(n_\mu x^\mu)\varepsilon_{lm} \\ &= 2u\varepsilon_{lm} \end{aligned}$$

d'où

(82)
$$u = \frac{1}{2} n_{\dot{l}m} x^{\dot{l}m}\,.$$

Pour une fonction de champ $\Phi_A(x^\mu)$ réduite à une onde plane

(83)
$$\begin{aligned} &\Phi_A(x^\mu) \to \Phi_A(n_\mu x^\mu) \to \Phi_A(u)\,, \\ &\partial_{\dot{l}m}\Phi_A(u) = (g^\mu)_{\dot{l}m}\partial_\mu\Phi_A \\ &\qquad = 2\frac{\partial}{\partial x^{\dot{l}m}}\Phi_A(u) = \eta_{\dot{l}m}\frac{\partial}{\partial u}\Phi_A(u)\,. \end{aligned}$$

Dans le système (E_1), (E_2), (E_3) l'ensemble des tenseurs-spineurs sera pris fonction d'une seule variable u et par suite ramené à un *système d'équations différentielles.* Ω_1, Ω_2, Ω_0 seront exprimés par des fonctions de u et *constitueront les termes de couplage, essentiellement non linéaires, entre les trois systèmes partiels.*

Le système (E_1) se réduit à

(84)
$$\begin{aligned} n^{\dot{l}}{}_r \frac{d}{du}\xi^r(u) &= \Omega_1(u)\eta^{\dot{l}}\,, \\ n_{\dot{r}}{}^m \frac{d}{du}\eta^{\dot{r}}(u) &= \Omega_1(u)\xi^m(u)\,, \end{aligned}$$

Cette forme conduit à associer à $\xi^m(u)$, $\eta^{\dot{l}}(u)$, *deux fonctions réelles* $Y_1(u)$, $Y_2(u)$ par les relations

$$\xi^m(u) = \alpha^m Y_1(u)\,, \qquad \eta^{\dot{l}}(u) = \beta^{\dot{l}} Y_2(u)\,.$$

La substitution conduit à

$$n^{\dot{l}}{}_r\alpha^r \frac{dY_1}{du} = \Omega_1(u)\beta^{\dot{l}} Y_2\,, \qquad n_{\dot{r}}{}^m\beta^{\dot{r}}\frac{d}{du}Y_2 = \Omega_1\alpha^m Y_1(u)\,,$$

et en introduisant une constante λ_0, arbitraire, par

$$\beta_l = \lambda_0 n_{l\cdot r}\alpha^r .$$

réduit le système à la forme

$$\frac{dY_1}{du} = \lambda_0 \Omega_1(u) Y_2(u) , \qquad \frac{dY_2}{du} = -\frac{1}{\lambda_0}\Omega_1(u)Y_1(u) . \tag{85}$$

Dans le cas des équations linéaires (particules de Dirac de spin $\hbar/2$) Ω_1 est constant, $\Omega_1 = \mu_0$, et ce système entraîne

$$Y_1'' = \lambda_0\mu_0 Y_2' = -\mu_0^2 Y_1 .$$

Au champ partiel ξ^m, $\eta^{\dot l}$, nous avons associé le « courant »

$$j^{\dot l} = \xi^{\dot l}\xi^m + \eta^{\dot l}\eta^m .$$

Il s'écrit ici avec

$$\begin{gathered} \xi^m = \alpha^m Y_1(u) , \qquad \eta^{\dot l} = \lambda_0 n^{\dot l}{}_r \alpha^r Y_2(u) , \\ j^{\dot l m}(u) = \alpha^{\dot l}\alpha^m (Y_1(u))^2 + \lambda_0^2 n^{\dot l}{}_r n_s^{\cdot m}\alpha^{\dot s}\alpha^r (Y_2(u))^2 . \end{gathered} \tag{86}$$

Le système $(Y_1(u), Y_2(u))$ a pour conséquence

$$Y_1 Y_1' = -\lambda_0^2 Y_2 Y_2' .$$

Par suite $Y_1Y_1' + \lambda_0^2 Y_2 Y_2' = 0$. On a donc *indépendamment de la forme de* Ω_1

$$Y_1^2 + \lambda_0^2 Y_2^2 = \mathrm{Cte} .$$

Pour le sous-système (E_2) nous écrirons les ondes planes sous la forme

$$A^{\dot l m} = a^{\dot l m} Z_1(u) , \qquad F^{\underline{m_1 m_2}} = f^{\underline{m_1 m_2}} Z_2(u) ,$$

$Z_1(u)$, $Z_2(u)$ étant des fonctions réelles.

La substitution conduit aux relations

$$\begin{gathered} (n_r^{\cdot m_1} a^{\dot r m_2} + \eta_r^{\cdot m_2} a^{\dot r m_1}) \frac{dZ_1}{du} = 2\Omega_2(u) f^{\underline{m_1 m_2}} Z_2(u) , \\ (n^{\dot l}{}_r f^{\underline{rm}} + n_r^{\cdot m} f^{\underline{r \dot l}}) \frac{dZ_2}{du} = 2\Omega_2(u) a^{\dot l m} Z_1(u) , \end{gathered} \tag{87}$$

et avec (73)

$$(n_{\dot r m_1} a^{\dot r}{}_{m_2} - n_{\dot r m_2} a^{\dot r}{}_{m_1}) \frac{d}{du}(\Omega_2 Z_1) = 0 ,$$

d'où pour les coefficients $a^{\dot l m}$ la relation structurale

$$n_{\dot r m_1} a^{\dot r}{}_{m_2} = n_{\dot r m_2} a^{\dot r}{}_{m_1} . \tag{88}$$

Ces relations conduisent à *associer les amplitudes* $f^{\underline{m_1 m_2}}$, $a^{\dot l m}$ par les relations

$$\begin{gathered} f^{\underline{m_1 m_2}} = C_1 (n_r^{\cdot m_1} a^{\dot r m_2} + n_r^{\cdot m_2} a^{\dot r m_1}) , \\ n^{\dot l}{}_r f^{\underline{rm}} = -2C_1 a^{\dot l m} , \end{gathered}$$

C_1 étant une constante réelle arbitraire, $Z_1(u)$, $Z_2(u)$ sont alors associées par le système différentiel

$$(89) \qquad \begin{aligned} \frac{dZ_1}{du} &= 2C_1\Omega_2(u)Z_2(u), \\ \frac{dZ_2}{du} &= -\frac{1}{2C_1}\Omega_2(u)Z_1(u). \end{aligned}$$

Le terme de couplage $E^{\dot{l}m}$ s'écrit pour l'onde plane

$$(90) \quad E_{\dot{l}m} = E_{\dot{l}m}(u) = (f_{\dot{l}\dot{r}}a^{\dot{r}}{}_m + f_{rm}a_{\dot{l}}{}^{\dot{r}})Z_1(u)Z_2(u) = 4C_1 n_{\dot{r}s}(a_{\dot{l}}{}^{s}a^{\dot{r}}{}_m)Z_1Z_2 .$$

Cette expression conduit notamment pour le produit $n_{\dot{l}m}E^{\dot{l}m}(u)$ à l'expression

$$n_{\dot{l}m}E^{\dot{l}m}(u) = -4C_1(a_{\dot{r}s}a^{\dot{r}s})Z_1(u)Z_2(u),$$

Pour le vecteur a^μ associé à $a^{\dot{l}m}$ nous avons $a_{\dot{l}m}a^{\dot{l}m} = 2(a_\mu a^\mu)$ et par suite

$$(91) \qquad n_{\dot{l}m}E^{\dot{l}m}(u) = -8C_1(a_\mu a^\mu)Z_1(u)Z_2(u)$$

Ce *terme dépend donc du genre espace ou temps du vecteur* a^μ.

La relation $n_{\dot{r}}{}^{m_1}a^{\dot{r}m_2} - n_{\dot{r}}{}^{m_2}a^{\dot{r}m_1} = 0$ exprime l'*orthogonalité* de a^μ et de n^μ soit $n_\mu a^\mu = 0$.

Dans la théorie linéaire, de type électromagnétique,

$$E^\mu = F^{\mu\lambda}A_\lambda \to f^{\mu\lambda}a_\lambda Z_1Z_2 = (n^\mu a^\lambda - n^\lambda a^\mu)a_\lambda Z_1Z_2 = n^\mu(a_\lambda a^\lambda)Z_1(u)Z_2(u).$$

$E^\mu(u)$ *dépend du genre espace ou temps du vecteur* $A^\mu(u)$ orthogonal à n^μ. Par suite le *genre espace ou temps de* A^μ conduit à *distinguer les ondes transversales avec* $a_\mu a^\mu = -1$, A^μ *du genre espace*, et les *ondes longitudinales avec* $a_\mu a^\mu = +1$, A^μ du genre temps.

En mécanique quantique linéaire, les interactions par échange de « particules de spin $\hbar$ », conduisent à considérer des interactions par ondes transversales, $a^\mu a_\mu < 0$ et à associer aux *interactions statiques* (électrostatiques ou statiques nucléaires) les *interactions par échange d'ondes longitudinales* $a_\mu a^\mu > 0$.

Nous avons défini Ω_0 par $\Omega_0 = j_{\dot{l}m}E^{\dot{l}m}$.

Pour les états d'ondes planes

$$(92) \qquad \Omega_0(u) = 4C_1 n_{\dot{r}s}a^{\dot{r}m}a^{\dot{l}s}\alpha_{\dot{l}}\alpha_m[Y_1^2 + \lambda_0^2Y_2^2]Z_1Z_2 .$$

Nous écrivons ce terme

$$\Omega_0 = 4C_1\,\omega_0(Y_1^2 + \lambda_0^2Y_2^2)Z_1Z_2$$

avec

$$\omega_0 = n_{\dot{r}s}a^{\dot{r}m}a^{\dot{l}s}\alpha_{\dot{l}}\alpha_m .$$

Nous déterminerons les solutions ondes planes du système (E_3) en posant

$$
\begin{aligned}
\Phi_{(0)}^{\underline{\dot{i}_1\dot{i}_2},\underline{m_1m_2}}(u) &= g^{\underline{\dot{i}_1\dot{i}_2},\underline{m_1m_2}}\mathrm{H}_1(u)\,,\\
\Phi_{(1)}^{\dot{i},\underline{m_1m_2m_3}} &= h^{\dot{i},\underline{m_1m_2m_3}}\mathrm{H}_2(u)\,,\\
\Phi_{(2)}^{\underline{m_1m_2m_3m_4}} &= k^{\underline{m_1m_2m_3m_4}}\mathrm{H}_3(u)\,.
\end{aligned}
\tag{93}
$$

La substitution dans (E_3) conduit aux expressions

$$
(n^{\lfloor \dot{i}_1}{}_r h^{\dot{i}_2\rfloor,\underline{rm_1m_2}} + n_{\dot{r},}{}^{\lfloor m_1}h^{\dot{r}\,\dot{i}_1\dot{i}_2,m_2\rfloor})\frac{d\mathrm{H}_2}{du} = \Omega_0(u)g^{\underline{\dot{i}_1\dot{i}_2},\underline{m_1m_2}}\mathrm{H}_1(u)
$$

$$
n_{\dot{r}}{}^{\lfloor m_1}g^{\dot{r}\,\dot{i}_1,\underline{m_2m_3}\rfloor}\frac{d\mathrm{H}_1}{du} + n^{\dot{i}_1}{}_r k^{\underline{rm_1m_2m_3}}\frac{d\mathrm{H}_3}{du} = \Omega_0 h^{\dot{i},\underline{m_1m_2m_3}}\mathrm{H}_2(u)\,,
$$

$$
n_{\dot{r}}{}^{\lfloor m_1}h^{\dot{r},\underline{m_2m_3m_4}\rfloor}\frac{d\mathrm{H}_2}{du} = \Omega_0 k^{\underline{m_1m_2m_3m_4}}\mathrm{H}_3(u)
$$

et par

$$
n_{\dot{r}}{}^{m_i}g^{\underline{\dot{r}\,\dot{i}},\underline{m_jm_k}} = \eta_{\dot{r}}{}^{m_j}g^{\underline{\dot{r}\,\dot{i}},\underline{m_km_i}}\,.
$$

Ces expressions nous conduisent à *associer les amplitudes* par les relations

$$
\begin{aligned}
g^{\underline{\dot{i}_1\dot{i}_2},\underline{m_1m_2}} &= \mathrm{C}_0[n^{\lfloor \dot{i}_1}{}_r h^{\dot{i}_2\rfloor,\underline{rm_1m_2}} + n_{\dot{r}}{}^{\lfloor m_1}h^{\dot{r}\,\dot{i}_1\dot{i}_2,m_2\rfloor}]\,,\\
k^{\underline{m_1m_2m_3m_4}} &= \mathrm{C}_0 n_{\dot{r}}{}^{\lfloor m_1}h^{\dot{r},\underline{m_2m_3m_4}\rfloor}\,,
\end{aligned}
\tag{94}
$$

Celles-ci entraînent les relations entre fonctions

$$
\frac{d\mathrm{H}_2}{du} = \mathrm{C}_0\Omega_0\mathrm{H}_1(u)\,,\qquad \frac{d\mathrm{H}_2}{du} = \mathrm{C}_0\Omega_0\mathrm{H}_3(u)
\tag{95}
$$

et par suite

$$
\mathrm{H}_1(u) \equiv \mathrm{H}_3(u)
$$

La seconde relation se réduit alors à

$$
[n_{\dot{r}}{}^{\lfloor m_1}g^{\dot{r}\,\dot{i}_1,\underline{m_2m_3}\rfloor} + \mathrm{C}_0 n^{\dot{i}_1}{}_r n_{\dot{s}}{}^{\lfloor m_1}h^{\dot{s},\underline{m_2m_3m_4}\rfloor}]\frac{d\mathrm{H}_1}{du} = \Omega_0 h^{\dot{i}_1,\underline{m_1m_2m_3}}\mathrm{H}_2(u)
\tag{96}
$$

On en déduit compte tenu de cette relation

$$
h^{\dot{i}_1,\underline{m_1m_2m_3}} = -\frac{1}{2\mathrm{C}_0}n_{\dot{r}}{}^{\lfloor m_1}g^{\dot{r}\,\dot{i},\underline{m_2m_3}\rfloor}\,,
$$

Les fonction $\mathrm{H}_1(u)$, $\mathrm{H}_2(u)$ sont alors associées par le système

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{du}\mathrm{H}_1(u) &= -\frac{1}{\mathrm{C}_0}\Omega_0(u)\mathrm{H}_2(u)\,,\\
\frac{d}{du}\mathrm{H}_2(u) &= \mathrm{C}_0\Omega_0(u)\mathrm{H}_1(u)\,.
\end{aligned}
\tag{97}
$$

Avec les expressions ci-dessus des amplitudes, on évalue le facteur de couplage

$$\mathrm{G}_{\dot{l}m}(u) = -\frac{1}{2\mathrm{C}_0}\left[n_{\dot{l}r}\, g_{\underline{\dot{r}_1\dot{r}_2}}{}^{\underline{rs}}\, g^{\underline{\dot{r}_1\dot{r}_2}}{}_{.\underline{sm}} + n_{\dot{r}m}\, g^{\underline{\dot{r}\dot{s}}}{}_{.\underline{r_1 r_2}}\, g_{\underline{\dot{s}\dot{l}_1}}{}^{\underline{r_1 r_2}}\right]\mathrm{H}_1(u)\mathrm{H}_2(u)\,.$$

J'écrirai cette expression

$$\mathrm{G}_{\dot{l}m}(u) = g_{\dot{l}m}\mathrm{H}_1(u)\mathrm{H}_2(u) \tag{98}$$

Les expressions de $j_{\dot{l}m}$, $\mathrm{E}_{\dot{l}m}$, $\mathrm{G}_{\dot{l}m}$ nous permettent l'évaluation des termes de couplage $\Omega_1(u)$, $\Omega_2(u)$, $\Omega_0(u)$. Avec

$$j^{\dot{l}m} = \alpha^{\dot{l}}\alpha^m \mathrm{Y}_1^2(u) + \lambda_0^2 n^{\dot{l}}{}_r n_{\dot{s}}{}^m \alpha^{\dot{s}}\alpha^r \mathrm{Y}_2^2(u)\,,$$
$$\mathrm{E}_{\dot{l}m} = 4\mathrm{C}_1 n_{\dot{r}s} a_{\dot{l}}{}^s a^{\dot{r}}{}_m \mathrm{Z}_1(u)\mathrm{Z}_2(u)$$

tenant compte des relations (78) et en définissant les invariants a_0 et g_0 par

$$a_{\dot{r}l}a^{\dot{r}}{}_m = a_0\varepsilon_{lm}\,, \qquad a_0 = \frac{1}{2}(a_{\dot{r}}{}^s a^{\dot{r}}{}_s) = -(a_\mu a^\mu) \tag{99}$$
$$g_0 = g_{\underline{\dot{l}_1\dot{l}_2}.\underline{m_1 m_2}}\, g^{\underline{\dot{l}_1\dot{l}_2}.\underline{m_1 m_2}}$$

On obtient pour

$$\Omega_1(u) = \mathrm{E}_{\dot{l}m}\mathrm{G}^{\dot{l}m} = -2\frac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}_0}a_0 g_0 \mathrm{Z}_1\mathrm{Z}_2\mathrm{H}_1\mathrm{H}_2\,, \tag{100}$$

a_0 et g_0 sont positifs ou négatifs suivant le *genre espace ou temps* du vecteur a^μ associé à $a^{\dot{l}m}$ et du *tenseur symétrique du second ordre* $t^{\mu,\nu}$ (de trace nulle) associé à $g^{\underline{\dot{l}_1\dot{l}_2}.\underline{m_1 m_2}}$

$$(g_0 = t^{\mu,\nu}t_{\mu,\nu}\,,\ t^\mu{}_\mu = 0)\,.$$

Pour $\Omega_2(u) = j_{\dot{l}m}\mathrm{G}^{\dot{l}m}$ on obtient après réduction

$$\Omega_2(u) = -\frac{\omega_2}{\mathrm{C}_0}\left[\mathrm{Y}_1^2(u) + \lambda_0^2\mathrm{Y}_2^2(u)\right]\mathrm{H}_1\mathrm{H}_2 \tag{101}$$

avec

$$\omega_2 = g^{\underline{\dot{r}_1\dot{r}_2}.\underline{s_1 s_2}}\left[n_{\dot{l}s_1}\, g_{\underline{\dot{r}_1\dot{r}_2}.\underline{ms_2}} + n_{\dot{r}_1 m}\, g_{\underline{\dot{l}\dot{r}_2}.s_1 s_2}\right]\alpha^{\dot{l}}\alpha^m \tag{102}$$

Avec ces différentes expressions les six fonctions $\mathrm{Y}_1(u)$, $\mathrm{Y}_2(u)$, $\mathrm{Z}_1(u)$, $\mathrm{Z}_2(u)$, $\mathrm{H}_1(u)$, $\mathrm{H}_2(u)$ sont associées dans le système différentiel

$$\begin{aligned}
&\frac{d\mathrm{Y}_1(u)}{du} = \lambda_0\Omega_1(u)\mathrm{Y}_2(u)\,, && \frac{d\mathrm{Y}_2(u)}{du} = -\frac{1}{\lambda_0}\Omega_1(u)\mathrm{Y}_1(u)\\
&\frac{d\mathrm{Z}_1(u)}{du} = 2\mathrm{C}_1\Omega_2(u)\mathrm{Z}_2(u)\,, && \frac{d\mathrm{Z}_2(u)}{du} = -\frac{1}{2\mathrm{C}_1}\Omega_2(u)\mathrm{Z}_1(u)\\
&\frac{d\mathrm{H}_1(u)}{du} = -\frac{1}{\mathrm{C}_0}\Omega_0(u)\mathrm{H}_2(u)\,, && \frac{d\mathrm{H}_2(u)}{du} = \mathrm{C}_0\Omega_0(u)\mathrm{H}_1(u)
\end{aligned} \tag{103}$$

avec

$$(104)\qquad \begin{aligned} \Omega_1 &= -2\frac{C_1}{C_0} a_0 g_0 Z_1 Z_2 H_1 H_2 , \\ \Omega_2 &= -\frac{\omega_2}{C_0}[Y_1^2 + \lambda_0^2 Y_2^2] H_1 H_2 , \\ \Omega_0 &= 4C_1\omega_0(Y_1^2 + \lambda_0^2 Y_2^2) Z_1 Z_2 \end{aligned}$$

Les facteurs de proportionnalité λ_0, C_0, C_1 étant arbitraires, nous effecturons le choix simplificateur

$$\lambda_0 = 1 , \qquad C_1 = \frac{1}{2}, \qquad C_0 = -1$$

donnant

$$(105)\qquad \begin{aligned} \Omega_1 &= a_0 g_0 Z_1 Z_2 H_1 H_2 , \\ \Omega_2 &= \omega_2(Y_1^2 + Y_2^2) H_1 H_2 , \\ \Omega_0 &= 2\omega_0(Y_1^2 + Y_2^2) Z_1 Z_2 \end{aligned}$$

et le système différentiel

$$(106)\qquad \begin{aligned} Y_1' &= \Omega_1 Y_2 , & Y_2' &= -\Omega_1 Y_1 , \\ Z_1' &= \Omega_2 Z_2 , & Z_2' &= -\Omega_2 Z_1 , \\ H_1' &= \Omega_0 H_2 , & H_2' &= -\Omega_0 H_1 \end{aligned}$$

Ce système sera simplifié en remarquant que les équations en (Y_1, Y_2) admettent l'intégrale première

$$Y_1^2 + Y_2^2 \equiv (Y_1^0)^2 + (Y_2^0)^2 = v_0^2$$

(et par suite v_0 *borne* $|Y_1|$ et $|Y_2|$).

Le système précédent se décompose alors en deux sous-systèmes associés par la constante v_0^2

$$(107)\qquad \begin{aligned} Y_1' &= a_0 g_0(Z_1 Z_2 H_1 H_2) Y_2 , \\ Y_2' &= -a_0 g_0(Z_1 Z_2 H_1 H_2) Y_1 , \end{aligned}$$

$$(108)\qquad \begin{aligned} Z_1' &= \omega_2 v_0^2 H_1 H_2 Z_2 , \\ Z_2' &= -\omega_2 v_0^2 H_1 H_2 Z_1 , \\ H_1' &= 2\omega_0 v_0^2 Z_1 Z_2 H_2 \\ H_2' &= -2\omega_0 v_0^2 Z_1 Z_2 H_2 . \end{aligned}$$

Dans ce système les constantes $a_0 g_0$, ω_0, ω_2 sont positives ou négatives mais l'échange dans leurs signes correspond uniquement à l'échange des indices 1 et 2 dans chacune des paires de fonctions associées aux tenseurs principaux.

Nous allons déterminer complètement la solution générale de ce système en nous plaçant *a priori* dans le cas $a_0 g_0 > 0$, $\omega_2 > 0$, $\omega_0 > 0$.

Les fonctions $Y_1(u)$, $Y_2(u)$ se détermineront complètement à partir des fonctions Z et H.

Posant

$$Y_1 = v_0 \sin \Phi(u) , \qquad Y_2 = v_0 \cos \Phi(u) , \tag{109}$$

$\Phi(u)$ est déterminé par

$$\frac{d\Phi}{du} = a_0 g_0 Z_1 Z_2 H_1 H_2 = \frac{a_0 g_0}{\omega_2 v_0^2} Z_1 Z_1' = \frac{a_0 g_0}{2\omega_0 v_0^2} H_1 H_1'$$

et par suite

$$\Phi(u) = \frac{a_0 g_0}{\omega_2 v_0^2} Z_1^2 + \varphi_0 , \tag{110}$$

φ_0 sera *une phase* associée aux *valeurs initiales de l'ensemble de fonctions.*

L'intégration du système (Z, H) sera effectuée en introduisant les nouvelles fonctions associées

$$\varphi_1(u) = v_0\sqrt{2\omega_0}Z_1(u) , \qquad \varphi_2(u) = v_0\sqrt{2\omega_0}Z_2(u) ,$$
$$\psi_1(u) = v_0\sqrt{\omega_2}H_1(u) , \qquad \psi_2(u) = v_0\sqrt{\omega_2}H_2(u) ,$$

conduisant au système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \varphi_1'(u) &= (\psi_1\psi_2)\varphi_2(u) , \qquad & \varphi_2'(u) &= -(\psi_1\psi_2)\varphi_1(u) \\ \psi_1'(u) &= (\varphi_1\varphi_2)\psi_2(u) , \qquad & \psi_2'(u) &= -(\varphi_1\varphi_2)\psi_1(u) \end{aligned} \tag{111}$$

Ce système admet *trois intégrales premières principales*

$$\begin{aligned} \varphi_1^2 + \varphi_2^2 &= \lambda_1^2 = 2\omega_0 v_0^2(Z_1^2 + Z_2^2) , \\ \psi_1^2 + \psi_2^2 &= \lambda_2^2 = \omega_2 v_0^2(H_1^2 + H_2^2) , \\ \varphi_1^2 + \psi_2^2 &= \mu_1^2 = v_0^2(2\omega_0 Z_1^2 + \omega_2 H_2^2) \end{aligned} \tag{112}$$

et les intégrales associées

$$\begin{aligned} \psi_1^2 + \varphi_2^2 &= v_0^2(\omega_2 H_1^2 + 2\omega_0 Z_2^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \mu_1^2 = \mu_2^2 > 0 \\ \psi_1^2 - \varphi_1^2 &= v_0^2(Z_1^2 - H_1^2) = \lambda_2^2 - \mu_1^2 = \mu_0^2 \end{aligned} \tag{113}$$

Nous avons choisi ici $\lambda_2^2 - \mu_1^2 = \mu_0^2 > 0$ d'où

$$\mu_2^2 = \mu_0^2 + \lambda_1^2$$

Ces relations permettent de représenter simplement les fonctions φ et ψ par des *intégrales hyperelliptiques.*

$\varphi_1(u)$ et $\psi_1(u)$ se déduisent de

$$\left(\frac{d\varphi_1}{du}\right)^2 = (\lambda_1^2 - \varphi_1^2)(\mu_0^2 + \varphi_1^2)(\mu_1^2 - \varphi_1^2) ,$$
$$\left(\frac{d\psi_1}{du}\right)^2 = (\lambda_2^2 - \psi_1^2)(\psi_1^2 - \mu_0^2)(\mu_2^2 - \psi_1^2) .$$

Nous avons montré dans la première partie que ce type de relations conduit à des fonctions s'exprimant complètement par des fonctions elliptiques de Jacobi.

Nous allons adapter cette correspondance générale au cas rencontré ici.

Nous remarquerons d'abord que les intégrales premières associant les valeurs initiales des fonctions $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, $\psi_1(u)$, $\psi_2(u)$ (ou Z_1, Z_2, H_1, H_2) permettent de ramener celles-ci à *trois fonctions indépendantes.*

Nous poserons

$$\text{(114)}\quad \begin{aligned} K_0(u) &= \frac{1}{(\psi_1(u))^2} > 0\,, & K_1(u) &= \mu_2\lambda_2\frac{\varphi_1(u)}{\psi_1(u)} \\ K_2(u) &= \mu_0\lambda_2\frac{\varphi_2(u)}{\psi_1(u)}\,, & K_3(u) &= \mu_0\mu_2\frac{\psi_2(u)}{\psi_1(u)} \end{aligned}$$

et réciproquement

$$\varphi_1 = \frac{1}{\mu_2\lambda_2}\frac{K_1}{\sqrt{K_0}}\,, \qquad \varphi_2 = \frac{1}{\mu_0\lambda_2}\frac{K_2}{\sqrt{K_0}}\,, \qquad \psi_2 = \frac{1}{\mu_0\mu_2}\frac{K_3}{\sqrt{K_0}}$$

K_1, K_2, K_3 étant associés par

$$K_1^2 + K_2^2 = \lambda_1^2\lambda_2^2\,, \qquad K_1^2 + K_3^2 = \mu_1^2\mu_2^2\,,$$

$K_0(u)$ est déterminé à partir des fonctions $K_1(u)$ ou $K_2(u)$ ou $K_3(u)$ par les expressions

$$\text{(115)}\quad \mu_0^2\mu_2^2\lambda_2^2K_0(u) = \mu_2^2\lambda_2^2 - K_1^2 = \mu_0^2\lambda_2^2 + K_2^2 = \mu_0^2\mu_2^2 + K_3^2\,.$$

Le système (φ, ψ) conduit pour $K_1(u)$, $K_2(u)$, $K_3(u)$ au système différentiel

$$\text{(116)}\quad \begin{gathered} \frac{dK_1}{du} = K_2K_3\,, \qquad K_2' = -K_1K_3\,, \qquad K_3' = -K_1K_2\,, \\ K_1^2 + K_2^2 = \lambda_1^2\lambda_2^2\,, \qquad K_1^2 + K_3^2 = \mu_1^2\mu_2^2\,. \end{gathered}$$

Celui-ci détermine les fonctions $K(u)$ par des *fonctions elliptiques de Jacobi* de module k tel que

$$k^2 = \frac{\mu_1^2\mu_2^2}{\lambda_1^2\lambda_2^2}$$

La condition nécessaire $0 \leqslant k^2 \leqslant 1$ nous montre que les *choix de signes effectués* nous imposent ici les conditions

$$\mu_1^2 < \lambda_1^2 + \lambda_2^2\,, \qquad \lambda_1^2 < \mu_1^2$$

soient

$$0 < 2\omega_0Z_2^2 + \omega_2H_1^2\,, \qquad 2\omega_0Z_2^2 < \omega_2H_2^2\,.$$

L'étude générale précédente nous conduit à l'expression des fonctions K_1, K_2, K_3, K_0 en fonctions elliptiques de Jacobi d'arguments

$$\omega(u + u_0) = \mu_1\mu_2(u + u_0)$$

et de module

$$k = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2}$$

(117)
$$\begin{aligned} K_1(u) &= \lambda_1 \lambda_2 \text{ sn } [\omega(u + u_0), k], \\ K_2(u) &= \lambda_1 \lambda_2 \text{ cn } [\omega(u + u_0), k], \\ K_3(u) &= \mu_1 \mu_2 \text{ dn } [\omega(u + u_0), k] \end{aligned}$$

et

$$K_0(u).$$

Les formules réciproques

$$\begin{aligned} Z_1(u) &= \frac{1}{v_0\sqrt{2\omega_0}} \varphi_1(u) = \frac{1}{v_0\sqrt{2\omega_0 \mu_2 \lambda_2}} \frac{K_1(u)}{\sqrt{K_0(u)}}, \\ Z_2(u) &= \frac{1}{v_0\sqrt{2\omega_0}} \varphi_2(u) = \frac{1}{v_0\sqrt{2\omega_0 \mu_0 \lambda_2}} \frac{K_2(u)}{\sqrt{K_0(u)}} \\ H_1(u) &= \frac{1}{v_0\sqrt{\omega_2}} \psi_1 = \frac{1}{v_0\sqrt{\omega_2}} \frac{1}{K_0(u)}, \\ H_2(u) &= \frac{1}{v_0\sqrt{\omega_2}} \psi_2(u) = \frac{1}{v_0\sqrt{\omega_2}} \frac{1}{\mu_0 \mu_2} \frac{K_3(u)}{\sqrt{K_0(u)}} \end{aligned}$$

et

$$Y_1(u) = v_0 \sin \Phi(u), \qquad Y_2 = v_0 \cos \Phi(u)$$

avec

$$\Phi(u) = \frac{a_0 g_0}{\omega_2 v_0^2} Z_1^2 + \varphi_0$$

nous donnent l'expression complète de l'ensemble des solutions ondes planes représentant les champs associés. Ceux-ci sont représentés par des *fonctions elliptiques de Jacobi* dont les *paramètres* sont définis par des *valeurs initiales ou maximales des champs associés.*

Toutefois pour $k = 1$, *ces fonctions deviennent apériodiques.*

Cette condition s'exprime par

(118)
$$\lambda_1 \lambda_2 = \mu_1 \mu_2$$

soit

$$(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2) = (\varphi_1^2 + \psi_2^2)(\psi_1^2 + \varphi_2^2),$$

Cette condition se vérifie soit pour

$$\psi_1^2 = \varphi_1^2, \qquad \lambda_2^2 = \mu_1^2$$

et $\lambda_1^2 = \mu_2^2$, soit pour

$$\psi_2^2 = \varphi_2^2 \qquad \text{d'où} \qquad \mu_1^2 = \lambda_1^2. \qquad \mu_2^2 = \lambda_2^2,$$

Considérant le premier cas avec $\psi_1 = \varphi_1$ le système (111) s'écrit

$$\varphi_1'(u) = (\varphi_1\varphi_2)\psi_2\,, \qquad \varphi_2' = -\varphi_1^2\psi_2\,, \qquad \psi_2' = -\varphi_1^2\varphi_2 \tag{119}$$

avec

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \lambda_1^2\,, \qquad \varphi_1^2 + \psi_2^2 = \lambda_2^2\,, \qquad \psi_2^2 - \varphi_2^2 = \lambda_2^2 - \lambda_1^2 = \lambda_3^2\,,$$

et conduit aux fonctions

$$\begin{aligned} \varphi_1(u) &\equiv \psi_1(u) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{\lambda_3^2 \operatorname{ch}^2(\lambda_1\lambda_2 u) + \lambda_1^2}} \\ \varphi_2(u) &= -\frac{\lambda_1\lambda_3 \operatorname{sh}(\lambda_1\lambda_2 u)}{\sqrt{\lambda_3^2 \operatorname{ch}^2(\lambda_1\lambda_2 u) + \lambda_1^2}} \\ \psi_2(u) &= \frac{\lambda_2\lambda_3 \operatorname{ch}(\lambda_1\lambda_2 u)}{\sqrt{\lambda_3^2 \operatorname{ch}^2(\lambda_1\lambda_2 u) + \lambda_1^2}} \end{aligned} \tag{120}$$

Cette solution apériodique conduit aux fonctions

$$\begin{aligned} Z_1(u) &= \frac{1}{v_0\sqrt{2\omega_0}}\varphi_1(u)\,, \qquad & Z_2(u) &= \frac{1}{v_0\sqrt{2\omega_0}}\varphi_2(u)\,, \\ H_1(u) &= \frac{1}{v_0\sqrt{\omega_2}}\varphi_1(u)\,, \qquad & H_2(u) &= \frac{1}{v_0\sqrt{\omega_2}}\psi_2(u)\,. \end{aligned} \tag{121}$$

Nous avons donc obtenu par ces différentes expressions l'ensemble des fonctions de champs ($Y_1(u)$, $Y_2(u)$, $Z_1(u)$, $Z_2(u)$, $H_1(u)$, $H_2(u)$) et par suite des tenseurs

$$\xi^m, \quad \eta^i, \quad A^{im}, \quad F^{\underline{m_1m_2}}, \quad \Phi^{\underline{l_1l_2,m_1m_2}}_{(0)}, \quad \Phi^{\underline{l,m_1m_2m_3}}_{(1)}, \quad \Phi^{\underline{m_1m_2m_3m_4}}_{(2)},$$

dans le cas des solutions du type ondes planes.

Celles-ci mettent nettement en évidence des classes d'états de champs associées à des classes d'états physiques observables et séparées pour un même type corpusculaire.

Les représentations ondes planes obtenues admettent des lois de composition et d'association entre systèmes de valeurs initiales ou maximales. Ces lois sont essentiellement déduites des formules dites d'addition ou de composition des fonctions elliptiques de Jacobi et des transformations associant des fonctions de Jacobi de périodes différentes constituant ou prolongeant simplement ici les transformations de Gauss ou de Landen de la théorie générale des fonctions elliptiques.

Ces transformations nécessaires ici et très fortement non linéaires montrent la nécessité de considérer dans la recherche de la représentation des phénomènes microphysiques des types de groupes de transformations associés à des lois de composition non linéaires.

BIBLIOGRAPHIE

a) *Sur les généralisations non linéaires des équations d'ondes de la mécanique quantique et la représentation des éléments corpusculaires par des systèmes de champs associés*, G. PETIAU.

1957 — *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **244**, 1er avril 1957, p. 1890-1893.
C. R. Ac. Sc. Paris, t. **244**, 20 mai 1957, p. 2580-2583.

1958 — *Nuovo Cimento Supplemento, al.*, t. **9**, série X, 1958, p. 542-568.
C. R. Acad. Sci. Paris, t. **246**, 5 mai 1958, p. 2581-2583.

1959 — *J. de Physique*, t. **20**, octobre 1959, p. 784-796, Sur certains types d'équations d'ondes non linéaires généralisant les équations de la théorie des particules à spin.
C. R. Acad. Sci. Paris, t. **248**, 23 février 1959, p. 1129-1132.
C. R. Acad. Sci. Paris, t. **248**, 16 mars 1959, p. 1620-1622.
Cahiers de Physique, t. **13**, n° 111, novembre 1959, p. 429-462. Sur quelques modèles simples de corpuscules-champs en théorie non linéaire des particules à spin.

1960 — *Cahiers de Physique*, t. **14**, n° 113, janvier 1960, p. 1-24. Les généralisations non linéaires des équations d'ondes de la mécanique ondulatoire.

1961 — *Cahiers de Physique*, t. **15**, n° 128, avril 1961, p. 157-170.
Conférence Internationale d'Aix en Provence sur les particules élémentaires, t. **I**, p. 171-181; Étude d'un modèle susceptible de donner une représentation unifiée du système de particules élémentaires.

1962 — *Cahiers de Physique*, t. **16**, n° 148, novembre 1962, p. 491-516.

1965 — *Nuovo Cimento*, série X, t. **40**, 1er novembre 1965, p. 84-101, Sur les théories quantiques des champs associées à des modèles simples d'équations d'ondes non linéaires.

1965 — *Annales Institut Henri Poincaré*, A, t. **III**, n° 3, 1965, p. 127-159, Les équations d'ondes non linéaires d'un système spin 0, spin 2 h et la théorie quantique des champs associée.
C. R. Acad. Sci. Paris, t. **260**, 25 janvier 1965, p. 1107-1110.

1968 — *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **267**, B, 15 juillet 1968, p. 169-171.

1969 — *Annales Institut Henri Poincaré*, A, t. **X**, n° 4, 1969, p. 381-417. Sur un modèle général de théorie des particules fondamentales et la quantification des masses propres.

b) *Sur le formalisme spinoriel général et son application dans la représentation des champs quantiques électromagnétiques et gravitationnels.*

[*1*] G. PETIAU, Le formalisme spinoriel et ses applications en mécanique quantique relativiste, *Cours de 3e Cycle*, Université Paris VI, 1972-1977, multigraphié.

[*2*] G. PETIAU, Sur certains aspects de l'emploi des spineurs dans la représentation des grandeurs et des équations de l'électromagnétisme, *Symposia Mathematica* Bologna, t. **XVIII**, 1976, p. 369-388.

[*3*] G. PETIAU, *Formulation d'une théorie macroscopique spinorielle des champs de gravitation généralisée prolongeant la théorie quantique microscopique des champs de*

spin 2 h. Communication présentée à la Conférence sur la Gravitation et la Relativité Générale, août 1977. Université de Waterloo, Canada.

[4] G. Petiau, *Sur la représentation, par des systèmes différentiels non linéaires du premier ordre, de modèles corpusculaires, association de champs microphysiques, électromagnétiques et gravitationnels.* Communication présentée à la 9^e^ Conférence Internationale sur la Relativité Générale et la Gravitation, juillet 1980, Friedrich Schiller University, Iena D. D. R.

(Manuscrit reçu le 3 juillet 1981)