ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

M. BRAY

Quelques solutions décrites par des métriques conformes à celle de Taub en relativité générale

Annales de l'I. H. P., section A, tome 35, nº 1 (1981), p. 37-54
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1981__35_1_37_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XXXV, n° 1, 1981, p. 37-54. *Physique théorique.*

Quelques solutions décrites par des métriques conformes à celle de Taub en relativité générale

par

M. BRAY
657, rue de Robbé, 02120 Guise

ABSTRACT. — On some gravitational fields described by metrics of the form

$$ds^2 = e^{2\omega}[ds^2 \text{ Taub}].$$

I

La métrique de Taub $ds^2 = e^{2\alpha}[(dx^0)^2 - (dx^1)^2] - e^{2\gamma}[(dx^2)^2 + (dx^3)^2]$ avec

$$\alpha \equiv \tilde{\alpha}(x^0, x^1) + \omega(u) \; ; \quad \gamma \equiv \tilde{\gamma}(x^0, x^1) + \omega(u) \; ; \quad u \equiv \varepsilon x^0 + \lambda x^1 \; ; \quad \varepsilon, \lambda : \mathrm{c}^{\mathrm{tes}}.$$

peut être considérée comme conforme à la métrique de même nature $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\gamma}$.

Les composantes du tenseur de Ricci

$$R_{\alpha\beta} = R^{\nu}_{\cdot\alpha\beta\nu} = -\partial_\beta(\Gamma_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\nu}) + \partial_\nu(\Gamma_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta}) - \Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\nu}\Gamma_{\sigma}{}^{\nu}{}_{\beta} + \Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta}\Gamma_{\sigma}{}^{\nu}{}_{\nu}$$

seront écrites $R_{\alpha\beta} = \tilde{R}_{\alpha\beta} - X_{\alpha\beta}$, $\tilde{R}_{\alpha\beta}$ désignant celles du tenseur de Ricci de $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\gamma}$.

Ce sont R_{00}, R_{11}, $R_{22} = R_{33}$ et R_{01}.

Pour tout champ gravitationnel du vide $R_{\alpha\beta} = 0 \rightleftharpoons \tilde{R}_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta}$.

Dans les équations d'Einstein

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = \chi\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\alpha\beta}T\right) ; \qquad \chi > 0$$

posons $T_{\alpha\beta} = \sigma k_\alpha k_\beta$; $k^\alpha k_\alpha = 0$; $\sigma > 0$: schéma radiation pure. Il vient

$$\tilde{R}_{\alpha\alpha} = \chi\sigma(k_\alpha)^2 \; ; \qquad \tilde{R}_{01} = \chi\sigma k_0 k_1$$

$$k_0 k_2 = 0 \; ; \qquad k_0 k_3 = 0 \; ; \qquad k_1 k_2 = 0 \; ; \qquad k_1 k_3 = 0 \; ; \qquad k_2 k_3 = 0$$

$$e^{-2\tilde{\alpha}}[k_0^2 - k_1^2] - e^{-2\tilde{\gamma}}[k_2^2 + k_3^2] = 0 \;\rightarrow\; \text{isotropie de } \vec{k}$$

On en tire $k_2 = k_3 = 0$; $k_1 = \delta k_0$ avec $\delta^2 = 1$.

Portant ces valeurs dans les équations $\tilde{R}_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta}$ nous obtenons le système

$$\text{I}' \quad \omega''(3\varepsilon^2 - \lambda^2) + 2\omega'[\varepsilon(\tilde{\gamma}_0 - \tilde{\alpha}_0) - \lambda(\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\gamma}_1)] - 2\lambda^2\omega'^2 = \chi\sigma k_0^2$$

$$\text{II}' \quad \omega''(3\lambda^2 - \varepsilon^2) + 2\omega'[-\varepsilon(\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\gamma}_0) + \lambda(\tilde{\gamma}_1 - \tilde{\alpha}_1)] - 2\varepsilon^2\omega'^2 = \chi\sigma k_1^2$$

$$\text{III}' \quad \omega''(\lambda^2 - \varepsilon^2) + 4\omega'[\lambda\tilde{\gamma}_1 - \varepsilon\tilde{\gamma}_0] + 2\omega'^2(\lambda^2 - \varepsilon^2) = 0$$

$$\text{IV}' \quad 2\langle \varepsilon\lambda\omega'' - \omega'[\varepsilon\tilde{\alpha}_1 + \lambda\tilde{\alpha}_0] - \varepsilon\lambda\omega'^2 \rangle = \chi\sigma k_0 k_1 .$$

$k_1 = \delta k_0$; on a posé $\omega' \equiv \dfrac{d\omega}{du}$.

Il est commode de transcrire le système sous la forme équivalente

$$\text{I} \equiv \text{I}' \; ; \qquad \text{II} \rightleftharpoons \text{I}' = \text{II}' \; ; \qquad \text{III} \equiv \text{III}' \; ; \qquad \text{IV} \rightleftharpoons \text{I}' = \delta\text{IV}'$$

Additionnant II et III nous avons

$$\omega'[(\lambda^2 - \varepsilon^2)\omega' + 2(\lambda\tilde{\gamma}_1 - \varepsilon\tilde{\gamma}_0)] = 0$$

D'autre part la combinaison $4\text{II} + \text{III} = 0$ donne la relation $\omega''(\varepsilon^2 - \lambda^2) = 0$ d'où l'alternative $\omega'' = 0$ ou $\varepsilon^2 = \lambda^2$.

Considérons d'abord l'hypothèse $\varepsilon^2 = \lambda^2$; II s'écrit alors $\omega'[\varepsilon\tilde{\gamma}_0 - \lambda\tilde{\gamma}_1] = 0$ soit en écartant le cas trivial $\omega' = 0$: $\varepsilon\tilde{\gamma}_0 = \lambda\tilde{\gamma}_1$. Or $\lambda = \zeta\varepsilon$; $\zeta = \pm 1$ puisque $\lambda^2 = \varepsilon^2$; donc $\tilde{\gamma}_0 = \zeta\tilde{\gamma}_1$. L'équation IV :

$$(1 - \delta\zeta)\{\varepsilon[\omega'' - \omega'^2] - \omega'[\tilde{\alpha}_0 - \delta\tilde{\alpha}_1]\} = 0$$

peut être satisfaite en posant $\delta\zeta = 1$ ou $\varepsilon[\omega'' - \omega'^2] = \omega'[\tilde{\alpha}_0 - \delta\tilde{\alpha}_1]$. Pour éviter de restreindre la forme de ω, il est avantageux de choisir $\delta = \zeta$. Nous avons dans ce cas $\tilde{R}_{00} = \chi\sigma k_0^2$; $\tilde{\alpha}_{00} - \tilde{\alpha}_{11} = 0$; $\tilde{\gamma}_{00} - \tilde{\gamma}_{11} + 2\tilde{\gamma}_0^2 - 2\tilde{\gamma}_1^2 = 0$.

D'après $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(v)$ avec $v \equiv \varepsilon(\zeta x^0 + x^1)$ l'équation en $\tilde{\gamma}$ est identiquement satisfaite (en vertu de $\delta\zeta = 1$). La relation $\tilde{R}_{00} = \delta\tilde{R}_{01}$ se réduit à $\tilde{\alpha}_{00} - \tilde{\alpha}_{11} = 0$.

Compte tenu de $\tilde{\alpha}_{00} - \tilde{\alpha}_{11} = 0$ et de $\tilde{\gamma}_0 = \zeta\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{R}_{00} - \chi\sigma k_0^2 = 0$ s'écrit

$$\varepsilon[\omega'' + \tilde{\gamma}''] + \varepsilon[(\tilde{\gamma}')^2 - \omega'^2] - [\omega' + \zeta\tilde{\gamma}'][\tilde{\alpha}_0 + \zeta\tilde{\alpha}_1] = 0$$

Remarquant que $v = \zeta u$ nous avons

$$\frac{d}{du}\tilde{\gamma} = \zeta\tilde{\gamma}' \rightleftharpoons \tilde{\gamma}' \equiv \frac{d\tilde{\gamma}}{dv} = \zeta\frac{d\tilde{\gamma}}{du}$$

d'où

$$\varepsilon\gamma'' + \gamma'\left[\varepsilon\left(\frac{d\tilde{\gamma}}{du} - \omega'\right) - (\tilde{\alpha}_0 + \zeta\tilde{\alpha}_1)\right] = 0$$

Cette équation admet la solution évidente $\gamma = c^{te}$.
Ensuite $\tilde{\alpha} = \phi(X) + \psi(Y)$; $X \equiv x^0 + x^1$; $Y \equiv x^0 - x^1$.
Si l'on abandonne l'hypothèse $\delta\zeta = 1$, IV exige

$$\varepsilon[\omega'' - \omega'^2] - \omega'[\tilde{\alpha}_0 - \delta\tilde{\alpha}_1] = 0 .$$

Soit

$$\frac{d}{du}[\log\omega' - \omega] = \left(\frac{1-\delta}{\varepsilon}\right)\phi' + \left(\frac{1+\delta}{\varepsilon}\right)\psi' .$$

Posons par exemple $\varepsilon = \zeta = 1$ (d'où $u \equiv X$) et $\psi = \frac{C}{2}Y$, C : c^{te}.
Alors $\log\omega' - \omega = Cu \rightarrow Ce^{-\omega} = KC - e^{Cu}$, K : c^{te}

$$e^{2\alpha} = \frac{C^2 e^{2\phi(X)+CY-2CX}}{[KCe^{-CX} - 1]^2} ; \qquad e^{2\gamma} = \frac{C^2 e^{2\tilde{\gamma}(X)-2CX}}{[KCe^{-CX} - 1]^2} .$$

Les trajectoires de $\vec{k}$ sont des lignes autoparallèles qu'un choix convenable du paramètre affine ramène à des géodésiques nulles. Dans ce cas l'équation $\tilde{\nabla}_\beta(\sigma k^\beta) = 0$ ou équivalemment $\partial_\beta(\sqrt{-\tilde{g}}\sigma k^\beta) = 0$ nous donne

$$Z = Z(\delta x^0 + x^1) \qquad \text{avec} \quad Z \equiv \sqrt{-\tilde{g}}\sigma k^0 .$$

Les expressions σk_0 et σk_0^2 permettent de déduire k_0 ; σ doit être positive.
Les considérations précédentes étaient fondées sur $\varepsilon^2 = \lambda^2$.
Si $\varepsilon^2 - \lambda^2 \neq 0$ il faut assurer $\omega'' = 0 \rightarrow \omega = Ku$; en outre

$$K[(\lambda^2 - \varepsilon^2)K + 2(\lambda\tilde{\gamma}_1 - \varepsilon\tilde{\gamma}_0)] = 0 ;$$

écartant K = 0 il reste

$$\lambda\tilde{\gamma}_1 - \varepsilon\tilde{\gamma}_0 = \left(\frac{\varepsilon^2 - \lambda^2}{2}\right)K \equiv L$$

La relation IV prend la forme

$$(\lambda\delta - \varepsilon)\left[(\tilde{\alpha}_0 - \delta\tilde{\alpha}_1) - \frac{K}{2}(\lambda\delta - \varepsilon)\right] = 0 .$$

Si $\lambda\delta - \varepsilon = 0$, $\lambda^2 = \varepsilon^2$; nous supposerons donc

$$\tilde{\alpha}_0 - \delta\tilde{\alpha}_1 = \frac{K}{2}(\lambda\delta - \varepsilon) \equiv \overset{*}{L}$$

Selon que $\delta = -1$ ou $+1$, on a $2\tilde{\alpha} = \overset{*}{L}(x^0 + x^1)$ ou $2\tilde{\alpha} = \overset{*}{L}(x^0 - x^1)$.
Il reste à examiner l'expression de σk_0^2.
Si $\lambda^2 = \varepsilon^2$, $\chi\sigma k_0^2 = 2\varepsilon^2(\omega'' - \omega'^2) - 2\varepsilon\omega'(\tilde{\alpha}_0 + \zeta\tilde{\alpha}_1)$.

La nécessité de postuler $\sigma k_0^2 \neq 0$ nous force à prendre $\lambda\zeta = 1 \rightleftarrows \lambda = \zeta$ comme solution de l'équation IV.

Il vient, puisque $\tilde{\alpha}_{00} = \tilde{\alpha}_{11} \rightarrow \tilde{\alpha} = \phi(\mathrm{X}) + \psi(\mathrm{Y})$.

$$- 2\varepsilon^2[\tilde{\gamma}'' + \tilde{\gamma}'^2] + 2\varepsilon\tilde{\gamma}'[\phi'(\zeta + 1) + \psi'(\zeta - 1)] = 2\varepsilon^2(\omega'' - \omega'^2) - 2\varepsilon\omega'[\phi'(\zeta + 1) + \psi'(1 - \zeta)]$$

Posant $\zeta = 1$ d'où $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\zeta u) = \tilde{\gamma}(u)$ nous avons une équation en u pour déterminer ω, la solution étant astreinte à vérifier la condition de positivité. Si $\omega'' = 0 \rightarrow \omega = \mathrm{K}u$ on obtient

$$\chi\sigma k_0^2 = 2\mathrm{K} \langle \varepsilon(\tilde{\gamma}_0 - \tilde{\alpha}_0) - \lambda(\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\gamma}_1) \rangle - 2\lambda^2\mathrm{K}^2 ;$$

en outre

$$\mathrm{K} \langle (\lambda^2 - \varepsilon^2)\mathrm{K} + 2(\lambda\tilde{\gamma}_1 - \varepsilon\tilde{\gamma}_0) \rangle = 0$$

et

$$(\varepsilon - \lambda\delta)\left\langle \tilde{\alpha}_0 - \delta\tilde{\alpha}_1 + \frac{\mathrm{K}}{2}(\varepsilon - \lambda\delta) \right\rangle = 0$$

Soit $\tilde{\alpha}_0 - \delta\tilde{\alpha}_1 = \overset{*}{\mathrm{L}}$ puisque le choix $\varepsilon = \lambda\delta$ nous ramènerait au cas $\lambda^2 = \varepsilon^2$ avec toutes ses conséquences.

On établirait de même les solutions

$$\tilde{\gamma}_0 = -\frac{\mathrm{K}}{2}(\lambda\delta + \varepsilon) ; \qquad \tilde{\gamma}_1 = -\frac{\mathrm{K}\delta}{2}(\lambda\delta + \varepsilon) ;$$
$$\tilde{\gamma} = -\frac{\mathrm{K}}{2}(\lambda\delta + \varepsilon)(x^0 + \delta x^1) .$$

Portons ces valeurs dans l'expression $\chi\sigma k_0^2$; on trouve :

$$\chi\sigma k_0^2 = 2\mathrm{K} \langle - [\lambda\tilde{\gamma}_1 - \varepsilon\tilde{\gamma}_0] - \varepsilon\tilde{\alpha}_0 - \lambda\tilde{\alpha}_1 - \lambda^2\mathrm{K} \rangle$$
$$= 2\mathrm{K}\left\langle \frac{\mathrm{K}}{2}(\lambda^2 - \varepsilon^2) - \frac{\varepsilon}{2}\overset{*}{\mathrm{L}} + \frac{\lambda\delta}{2}\overset{*}{\mathrm{L}} - \lambda^2\mathrm{K} \right\rangle$$

$$\chi\sigma k_0^2 = 2\mathrm{K}^2\left\langle \frac{(\lambda^2 - \varepsilon^2)}{2} + \left(\frac{\lambda^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\lambda\delta}{4}\right) - \lambda^2 \right\rangle$$

$$\chi\sigma k_0^2 = -\frac{\mathrm{K}^2}{2}(\lambda\delta + \varepsilon)^2 < 0$$

On voit que cette éventualité est à rejeter.

Étudions enfin le tenseur de courbure de la métrique initiale.

Les seules composantes covariantes non nulles s'écrivent :

$$\mathrm{R}_{0101} = e^{2\alpha}[-\alpha_{00} + \alpha_{11}] ; \quad \mathrm{R}_{0202} = -e^{2\gamma}[\gamma_{00} + \gamma_0^2 - \alpha_0\gamma_0 - \alpha_1\gamma_1]$$
$$\mathrm{R}_{0212} = -e^{2\gamma}[\gamma_{01} + \gamma_0\gamma_1 - \alpha_1\gamma_0 - \alpha_0\gamma_1] ; \quad \mathrm{R}_{0303} = -e^{2\gamma}[\gamma_{00} + \gamma_0^2 - \alpha_0\gamma_0 - \alpha_1\gamma_1]$$
$$\mathrm{R}_{0331} = e^{2\gamma}[\gamma_{01} + \gamma_0\gamma_1 - \alpha_1\gamma_0 - \alpha_0\gamma_1] ; \quad \mathrm{R}_{2323} = -e^{-2\alpha+4\gamma}[\gamma_1^2 - \gamma_0^2]$$
$$\mathrm{R}_{3131} = -e^{2\gamma}[\gamma_{11} + \gamma_1^2 - \alpha_0\gamma_0 - \alpha_1\gamma_1] ; \quad \mathrm{R}_{1212} = -e^{2\gamma}[\gamma_{11} + \gamma_1^2 - \alpha_0\gamma_0 - \alpha_1\gamma_1]$$

$$\text{Soit } \mathscr{K} = \left\{ \begin{array}{l} R^{0101}R_{0101} + R^{0202}R_{0202} + R^{0303}R_{0303} + R^{2323}R_{2323} \\ + R^{3131}R_{3131} + R^{1212}R_{1212} + 2R^{0212}R_{0212} + 2R^{0331}R_{0331} \end{array} \right\}$$

La métrique devant satisfaire les équations $R_{\alpha\beta} = 0$, l'invariant de courbure se réduit à $\mathscr{K} = e^{-4\alpha} \langle 8[\gamma_{00} + \gamma_0^2 - \alpha_0\gamma_0 - \alpha_1\gamma_1]^2 + [\gamma_1^2 - \gamma_0^2]^2 \rangle$.

L'hypothèse $\omega'' = 0$ entraînant $\sigma k_0^2 < 0$ il suffit de considérer

$$\lambda^2 = \varepsilon^2 \rightleftharpoons \lambda = \zeta\varepsilon$$

Le calcul montre alors que $\mathscr{K} = 0$; il n'y a donc pas de singularité essentielle. On peut envisager l'éventualité $\lambda = 0 \to u \equiv \varepsilon x^0$. On obtient dans ce cas le système

$$\chi\sigma k_0^2 = 3\varepsilon^2\omega'' + 2\varepsilon\omega'(\tilde{\gamma}_0 - \tilde{\alpha}_0) \quad (1) ;$$
$$4\varepsilon^2\omega'' + 4\varepsilon\omega'\tilde{\gamma}_0 + 2\varepsilon^2\omega'^2 = 0 \quad (2) ;$$
$$- \varepsilon^2\omega'' - 4\varepsilon\omega'\tilde{\gamma}_0 - 2\varepsilon^2\omega'^2 = 0 \quad (3) ;$$
$$3\varepsilon^2\omega'' + 2\varepsilon\omega'(\tilde{\gamma}_0 - \tilde{\alpha}_0) = - 2\varepsilon\delta\omega'\tilde{\alpha}_1 \quad (4).$$

Additionnant (2) et (3) il vient $\varepsilon^2\omega'' = 0 \to \omega'' = 0$.
Puis

$$\tilde{\gamma}_0 = - \varepsilon k \to \tilde{\gamma} = - \varepsilon k x^0 + A(x^1) ; \qquad k \equiv \frac{K}{2}$$
$$\tilde{\alpha}_0 - \delta\tilde{\alpha}_1 = - \varepsilon k ; \qquad \tilde{\alpha} = \delta\varepsilon k x^1 + \delta\phi(x^0 + \delta x^1).$$
$$\chi_0 k_0^2 = - 4\varepsilon k(\varepsilon k + \delta\phi')$$

Le système d'Einstein exige ensuite

$$A'^2 = \varepsilon^2 k^2 ; \qquad \varepsilon^2 k^2 + \phi'[A' + \delta\varepsilon k] + \delta\varepsilon k A' = 0$$

En posant $A' = \zeta\varepsilon k$, il vient $\varepsilon^2 k^2(1 + \delta\zeta) + \phi'\varepsilon k(\delta + \zeta) = 0$.
Relation qu'on peut satisfaire identiquement en prenant $\delta = - \zeta$.

L'étude de l'hypothèse $\varepsilon = 0 \to u \equiv \lambda x^1$ conduit à des résultats analogues.

Notamment

$$\omega'' = 0, \quad \tilde{\gamma}_1 = - \lambda k ; \qquad \omega = 2ku,$$

d'où

$$\tilde{\gamma} = - \lambda k x^1 + B(x^0) ; \qquad \tilde{\alpha} = - \lambda k x^1 + \phi(x^0 + \delta x^1).$$

Dans ce cas $\chi\sigma k_0^2 = - 4\lambda k\delta\phi'$ expression soumise à la contrainte de positivité :

$$B'^2 = \lambda^2 k^2 ; \qquad - 2B'^2 + 2B'\phi' + 2\lambda^2 k^2 + 2\phi'\delta\lambda k = 0 \rightleftharpoons 2\phi'[B' + \delta\lambda k] = 0$$

Donc $\phi = C^{te}$ ou $B' = - \delta\lambda k \to B = - \delta\lambda k x^0 + B_0$.

II

Considérons la métrique

$$ds^2 = e^{2\omega} \langle e^{2\alpha}[(dx^0)^2 - (dx^1)^2] - e^{2\gamma}[(dx^2)^2 + (dx^3)^2] \rangle$$

avec α, $\gamma(x^0, x^1)$; $\omega \equiv \omega(x^2)$ ou $ds^2 = e^{2\omega} ds_*^2$ en désignant par ds_*^2 la métrique de Taub définie par α et γ.

Le calcul du tenseur de Ricci fait apparaître les composantes covariantes non nulles

$$R_{\alpha\alpha}, \quad R_{01}, R_{02}, R_{12}\,; \qquad \alpha = 0, 1, 2, 3\,.$$

dans lesquelles nous isolerons les composantes $\mathscr{R}_{\alpha\beta}$ de la métrique de Taub. Les équations du vide $R_{\alpha\beta} = 0$ s'écrivent

$$\mathscr{R}_{00} + e^{2\alpha - 2\gamma}[\omega'' + 2\omega'^2] = 0\,; \quad \mathscr{R}_{11} - e^{2\alpha - 2\gamma}[\omega'' + 2\omega'^2] = 0\,; \quad \mathscr{R}_{22} - 3\omega'' = 0$$

$$\mathscr{R}_{33} - [\omega'' + 2\omega'^2] = 0\,;$$

$$\mathscr{R}_{01} = 0\,; \quad \gamma_0\omega' = 0 \rightleftharpoons R_{02} = 0\,; \quad \gamma_1\omega' = 0 \rightleftharpoons R_{12} = 0\,.$$

Supposant $\omega' \neq 0$ nous avons $\gamma_0 = \gamma_1 = 0 \to \gamma = 0$ d'où

$$\mathscr{R}_{01} \equiv 0\,; \qquad \mathscr{R}_{22} = \mathscr{R}_{33} \equiv 0$$

ce qui entraîne $\omega'' = 0$, $\omega'^2 = 0$ et nous ramène au cas exclu *a priori*. Donc il n'existe pas de champ gravitationnel du vide décrit par la métrique ds^2. Pour un schéma radiation pure les équations d'Einstein prennent la forme

$$R_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}\,; \qquad T_{\alpha\beta} = \sigma k_\alpha k_\beta\,; \qquad k^\alpha k_\alpha = 0\,.$$

Soit en choisissant $k_2 = k_3 = 0$:

$$\begin{cases} R_{00} = \chi\sigma k_0^2\,; & R_{11} = \chi\sigma k_1^2\,; \quad R_{22} = 0\,; \quad R_{33} = 0 \\ R_{01} = \chi\sigma k_0 k_1\,; & R_{02} = 0\,; \quad R_{12} = 0 \end{cases}$$

L'isotropie de $\vec{k}$ entraîne en outre $k_1 = \delta k_0$; $\delta^2 = 1$; on peut écrire

$$R_{00} = \chi\sigma k_0^2\,; \quad R_{11} - R_{00} = 0\,; \quad R_{22} = 0\,;$$

$$R_{33} = 0\,; \quad R_{00} = \delta R_{01}\,; \quad R_{02} = 0\,; \quad R_{12} = 0$$

$\omega' \neq 0$ exige $\gamma = 0$ d'après les deux dernières équations.

Alors $R_{01} = 0 \to R_{00} = 0$; $k_0 = k_1 = 0$: dégénérescence totale.

Choisissons donc $k_3 = k_1 = 0$; nous obtenons le système

$$R_{00} = \chi\sigma k_0^2\,; \quad R_{11} = 0\,; \quad R_{22} = \chi\sigma k_2^2\,; \quad R_{33} = 0\,;$$

$$R_{01} = 0\,; \quad R_{02} = \chi\sigma k_0 k_2\,; \quad R_{12} = 0$$

$$k^\alpha k_\alpha = 0 \rightleftharpoons e^{-2\alpha}k_0^2 = e^{-2\gamma}k_2^2$$

D'après $R_{12} = 0$, $\gamma_1 = 0 \to \gamma = \gamma(x^0)$; dans ces conditions $R_{01} = 0$

entraîne $\alpha_1\gamma_0 = 0$; la seule solution non dégénérée est $\alpha_1 = 0$; la métrique de Taub est alors une métrique du type de Ricci. Nous avons explicitement :

$$
\begin{aligned}
&-\alpha_{00} - 2\gamma_{00} - 2\gamma_0^2 + 2\alpha_0\gamma_0 + e^{2\alpha-2\gamma}[\omega'' + 2\omega'^2] = \chi\sigma k_0^2\\
&-\alpha_{00} - 2\alpha_0\gamma_0 + e^{2\alpha-2\gamma}[\omega'' + 2\omega'^2] = 0\\
&e^{-2\alpha}[\gamma_{00} + 2\gamma_0^2] - 3e^{-2\gamma}\omega'' = \chi\sigma e^{-2\gamma}k_2^2 = \chi\sigma e^{-2\alpha}k_0^2\\
&e^{-2\alpha}[\gamma_{00} + 2\gamma_0^2] - [\omega'' + 2\omega'^2] = 0 ; \qquad 2\gamma_0\omega' = \chi\sigma k_0 k_2
\end{aligned}
$$

ou en transcrivant sous forme équivalente :

$$
\begin{gathered}
-2\gamma_{00} - 2\gamma_0^2 + 4\alpha_0\gamma_0 = \chi\sigma k_0^2 \quad (1)\\
e^{-2\alpha+2\gamma}[\alpha_{00} + 2\alpha_0\gamma_0] = \omega'' + 2\omega'^2 \quad (2)\\
e^{-2\alpha+2\gamma}[\gamma_{00} + 2\gamma_0^2] = \omega' + 2\omega'^2 \quad (3) ;\\
-2\omega'' + 2\omega'^2 = \chi\sigma k_2^2 \quad (4)\\
2\gamma_0\omega' = \delta e^{-\alpha+\gamma}(\chi\sigma k_0^2) \quad (5) ;\\
k_2 = \delta e^{-\alpha+\gamma}k_0 \quad (6) ; \qquad \delta^2 = 1
\end{gathered}
$$

Nécessairement $-\omega'' + \omega'^2 = \mathrm{K}$; K : $\mathrm{c^{te}}$; d'après (2) et (3) : $\omega'' + 2\omega'^2 = \mathrm{L}$.
Donc $\omega' = l$; $\mathrm{K} = l^2$; $\mathrm{L} = 2l^2$.
De (5) on déduit $\gamma_0 = \delta l e^{\alpha-\gamma}$ et en vertu de (3) : $\gamma_{00} = 0$.
Par conséquent $\alpha - \gamma = \mathrm{c^{te}}$; prenant $\alpha = \gamma$ on obtient :

$$ds^2 = e^{2(nx^0 + lx^2)} \langle (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \rangle .$$

Soit une métrique conforme à celle de Minkowski

$$\chi\sigma k_0^2 = 2l^2 = \chi\sigma k_2^2$$

En imposant la condition $\nabla_\beta(\sigma k^\beta) = 0$ les trajectoires du champ $\vec{k}$ deviennent des géodésiques nulles.
Or $\nabla_\beta(\sigma k^\beta) = 0 \rightleftharpoons \partial_\beta(\sqrt{-g}\,\sigma k^\beta) = 0$ soit puisque $k^2 = g^{22}k_2 = -\delta e^{-\alpha-\gamma-2\omega}k_0$,

$$\partial_0 \langle e^{2\gamma+2\omega}\sigma k_0 \rangle - \delta\partial_2 \langle e^{\alpha+\gamma+2\omega}\sigma k_0 \rangle = 0$$

Soit en développant dans le cas $\alpha = \gamma$:

$$\partial_0(\sigma k_0) - \delta\partial_2(\sigma k_0) + 2\sigma k_0[\gamma_0 - \delta\omega'] = 0$$

Mais $\gamma_0 = \delta l e^{\alpha-\gamma} = \delta l$ et $\gamma_0 - \delta\omega' = 0$.
Ceci nous donne $\sigma k_0 = \phi(x^0 + \delta x^2)$; on en tire $k_0 = \dfrac{2l^2}{\chi\phi}$; $\sigma = \dfrac{\chi\phi^2}{2l^2}$.

Dans les équations d'Einstein $\mathrm{R}_{\alpha\beta} = \chi\left[\mathrm{T}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\mathrm{T}\right] + \Lambda g_{\alpha\beta}$ nous posons maintenant : $\mathrm{T}_{\alpha\beta} = \theta_\alpha\theta_\beta - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(\theta^\nu\theta_\nu)$: champ mésonique vectoriel.

Si $\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = 0$ les équations $R_{02} = R_{12} = 0$ exigent $\gamma = 0$; il reste

$$- \alpha_{00} + \alpha_{11} + e^{2\alpha}(\omega'' + 2\omega'^2) = \Lambda e^{2\alpha+2\omega} ;$$
$$3\omega'' = \Lambda e^{2\omega} ; \qquad \chi\theta_3^2 = \Lambda e^{2\omega} - (\omega'' + 2\omega'^2)$$
$$(- \alpha_{00} + \alpha_{11})e^{-2\alpha} = 2(\omega'' - \omega'^2) ; \qquad 3\omega'' = \Lambda e^{2\omega} ; \qquad \chi\theta_3^2 = 2(\omega'' - \omega'^2)$$

On doit poser

$$e^{-2\alpha}(-\alpha_{00}+\alpha_{11}) = 2K^2 ; \qquad \omega''-\omega'^2 = K^2 \rightarrow \chi\theta_3^2 = 2K^2 ; \qquad 3\omega'' = \Lambda e^{2\omega}$$

Λ est alors nécessairement positive. On trouve aisément la solution

$$\omega = - \log \langle \cos Kx^2 \rangle \quad \text{d'où} \quad 3\omega'' = 3[K^2+\omega'^2] = \Lambda e^{2\omega} = \Lambda \left[\frac{K^2+\omega'^2}{K^2}\right]$$

Le choix $\Lambda = 3K^2$ assure donc la compatibilité.

L'équation $\alpha_{11} - \alpha_{00} = 2K^2 e^{2\alpha}$ peut s'intégrer facilement en posant

$$\alpha = \phi(u) ; \qquad u \equiv (x^0 + \varepsilon x^1)$$

Il vient $(\varepsilon^2 - 1)\phi'' = 2K^2 e^{2\phi} \rightleftharpoons \phi'' = v^2 e^{2\phi}$; $v^2 \equiv \dfrac{2K^2}{(\varepsilon^2 - 1)}$ avec $\varepsilon^2 > 1$, d'où la solution particulière $\phi = - \log [\cos vu]$.

Finalement nous obtenons la métrique :

$$g_{00} = - g_{11} = (\cos vu)^{-2} (\cos Kx^2)^{-2} ;$$
$$g_{22} = g_{33} = - (\cos Kx^2)^{-2} ; \qquad \chi\theta_3^2 = 2K^2$$

En examinant l'hypothèse $\theta_2 = \theta_3 = 0$ on met en évidence (par addition des équations d'indices 00 et 11) la relation $\theta_0^2 + \theta_1^2 = 0$ correspondant à la disparition du champ mésonique.

Posons maintenant $\theta_1 = \theta_3 = 0$. Le système d'Einstein

$$\begin{cases} R_{00} = \chi\theta_0^2 + \Lambda g_{00} ; \quad R_{11} = \Lambda g_{11} ; \quad R_{22} = \chi\theta_2^2 + \Lambda g_{22} ; \quad R_{33} = \Lambda g_{33} \\ R_{01} = 0 ; \quad R_{02} = \chi\theta_0\theta_2 ; \quad R_{12} = 0 \end{cases}$$

entraîne $\gamma_1\omega' = 0$ ($R_{12} = 0$) soit $\gamma_1 = 0$ pour éviter la solution banale $\omega' = 0$.

D'après $R_{01} = 0$, $\alpha_1\gamma_0 = 0 \rightleftharpoons \alpha_1 = 0$ ou $\gamma_0 = 0$.

Avec $\gamma_0 = 0 \rightarrow \gamma = 0$, on trouve $\theta_0 = 0$ et $\chi\theta_2^2 = \Lambda e^{2\omega} - 3\omega'' = -2\omega'' + 2\omega'^2$.

Il reste deux équations : $\alpha_{00} - \alpha_{11} = 0$ et $\omega'' + 2\omega'^2 = \Lambda e^{2\omega}$.

On tire de la première $\alpha = \phi(x^0 + x^1) + \psi(x^0 - x^1)$; ϕ, ψ fonctions arbitraires.

Quant à la seconde, on peut l'écrire $Z'' = 2\Lambda Z^2$ avec $Z = e^{2\omega}$

$$\frac{d}{dx^2}\left[(Z')^2 - \frac{4\Lambda}{3}Z^3\right] = 0 \rightarrow (Z')^2 = C + \frac{4\Lambda}{3}Z^3 ; \qquad C : c^{te}$$
$$\left[C + \frac{4\Lambda}{3}Z^3\right]^{-1/2} dZ = \pm\, dx^2 \rightarrow Z = \mathscr{A}(x^2)$$

En particulier, si $C = 0$ on a $Z^{-3/2}Z' = \pm \sqrt{\dfrac{4\Lambda}{3}}$; $\quad \Lambda > 0$.

Soit $-2Z^{-1/2} = \pm\sqrt{\frac{4\Lambda}{3}}x^2 - A \rightleftharpoons Z^{-1/2} = a \pm bx^2$.

Toutefois on vérifie que dans ce cas la composante θ_2 s'annule aussi.

Pour $\Lambda = 0$, $Z'' = 0 \to Z = kx^2 + l = e^{2\omega}$; $\chi\theta_2^2 = 3k^2/2(kx^2 + l)^2$.

Si l'on postule $\gamma_0 \neq 0$, α_1 doit s'annuler.

Dans ce cas on peut mettre le système d'Einstein sous la forme :

$$-2\gamma_{00} - 2\gamma_0^2 + 4\alpha_0\gamma_0 = \chi\theta_0^2 \quad (1)\,;$$
$$\alpha_{00} + 2\alpha_0\gamma_0 - e^{2\alpha-2\gamma}(\omega'' + 2\omega'^2) = -\Lambda e^{2\alpha+2\omega} \quad (2)$$
$$-2\omega'' + 2\omega'^2 = \chi\theta_2^2 \quad (3)\,;$$
$$e^{-2\alpha+2\gamma}[\gamma_{00} + 2\gamma_0^2] - (\omega'' + 2\omega'^2) = -\Lambda e^{2\gamma+2\omega} \quad (4)$$
$$2\gamma_0\omega' = \chi\theta_0\theta_2 \quad (5)$$

De (5) on déduit $\frac{2}{\chi} = \left(\frac{\theta_0}{\gamma_0}\right)\left(\frac{\theta_2}{\omega'}\right)$; or $\theta_0 = \theta_0(x^0)$ et $\theta_2 = \theta_2(x^2)$ d'où

$$\frac{\theta_0}{\gamma_0} = K\,; \qquad \frac{\theta_2}{\omega'} = L\,; \qquad KL = \frac{2}{\chi} > 0\,.$$

Posant $\chi K^2 \equiv 2v^2$ et $\chi L^2 \equiv 2\mu^2 \to \mu^2 v^2 = 1$, nous avons :

$$\gamma_{00} + (1 + v^2)\gamma_0^2 - 2\alpha_0\gamma_0 = 0 \quad (1)'\,; \qquad \omega'' + \omega'^2(\mu^2 - 1) = 0 \quad (3)'$$

De (3)' on tire $\omega = -\frac{1}{k}\log(l - kx^2)$ avec $k \equiv 1 - \mu^2$; l : c^{te}.

D'après (1)' :

$$2\alpha_0 = \frac{\gamma_{00}}{\gamma_0} + (1 + v^2)\gamma_0 \to 2\alpha = \log(\gamma_0) + (1 + v^2)\gamma + c^{te}$$
$$e^{2\alpha} = \gamma_0 e^{(1+v^2)\gamma + C}$$

D'autre part l'équation $\alpha_{00} + 2\alpha_0\gamma_0 = \gamma_{00} + 2\gamma_0^2$ déduite de (2) et (4) s'écrit aussi

$$\frac{d}{dx^0}\left\{2e^{2\gamma}\alpha_0 - \frac{d}{dx^0}(e^{2\gamma})\right\} = 0 \rightleftharpoons 2e^{2\gamma}(\alpha_0 - \gamma_0) = 2C\,, \qquad C : c^{te}$$
$$\alpha_0 = \gamma_0 + Ce^{-2\gamma}\,.$$

Cette relation fournit l'équation en γ, savoir :

$$\frac{\gamma_{00}}{\gamma_0} + (1 + v^2)\gamma_0 = 2\gamma_0 + 2Ce^{-2\gamma} \to \frac{\gamma_{00}}{\gamma_0} + (v^2 - 1)\gamma_0 = 2Ce^{-2\gamma}$$

laquelle admet l'intégrale $\gamma = \frac{1}{2}\log(x^0)$ pourvu que $v^2 - 3 = 4C$, d'où

$$\alpha = \left(\frac{v^2 - 1}{4}\right)\log x^0\,.$$

Reste à vérifier l'équation (4). Or nous avons $\gamma_{00} + 2\gamma_0^2 = 0$.

On doit donc avoir $\omega'' + 2\omega'^2 = \Lambda e^{2\gamma+2\omega}$; ceci nous montre que Λ doit être nulle.

Donc $\omega'' + 2\omega'^2 = 0$; pour identifier cette équation à (3)' il suffit de poser $\mu^2 = 3$.

Alors $\omega = \frac{1}{2} \log (l + 2x^2)$; nous aboutissons à la métrique :

$$g_{00} = - g_{11} = (l + 2x^2)(x^0)^{-1/3} \, ; \qquad g_{22} = g_{33} = (l + 2x^2)x^0$$

$$\theta_0 = \mathrm{K}\gamma_0 = \frac{\mathrm{K}}{2x^0} \, ; \qquad \theta_2 = \mathrm{L}\omega' = \frac{\mathrm{L}}{(l + 2x^2)}$$

On déduit

$$(\theta^\nu\theta_\nu) = e^{-2\omega} \langle e^{-2\alpha}\theta_0^2 - e^{-2\gamma}\theta_2^2 \rangle = \frac{1}{\Delta}\left\{ (x^0)^{1/3} \frac{\mathrm{K}^2}{4(x^0)^2} - \frac{1}{x^0}\frac{\mathrm{L}^2}{\Delta^2} \right\}$$

avec $\Delta \equiv (l + 2x^2)$.

$$\text{Soit}\,(\theta^\nu\theta_\nu) = \frac{1}{x^0\Delta}\left\langle \frac{\mathrm{K}^2}{4(x^0)^{2/3}} - \frac{\mathrm{L}^2}{\Delta^2} \right\rangle = \left[\frac{\mathrm{K}^2\Delta^2 - 4\mathrm{L}^2(x^0)^{2/3}}{4\Delta^3(x^0)^{5/3}} \right].$$

Sans écrire les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel nous nous contenterons de mentionner la forme générale de l'invariant de courbure :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} = e^{-4\alpha-4\omega} \langle & (\alpha_{11} - \alpha_{00})^2 + 2(\gamma_{00} + \gamma_0^2 - \alpha_0\gamma_0 - \alpha_1\gamma_1)^2 \\
& + 2(\gamma_{11} + \gamma_1^2 - \alpha_0\gamma_0 - \alpha_1\gamma_1)^2 + (\gamma_0^2 - \gamma_1^2)^2 - 4[\gamma_{01} + \gamma_0\gamma_1 - \alpha_0\gamma_1 - \alpha_1\gamma_0]^2 \rangle \\
& + 3e^{-4\gamma-4\omega} \langle (\omega'')^2 + (\omega')^4 \rangle - 2\omega'' e^{-2\alpha-2\gamma-4\omega} \langle \gamma_{00} - \gamma_{11} + 2(\gamma_0^2 - \gamma_1^2) \rangle \\
& - 2\omega'^2 e^{-2\alpha-2\gamma-4\omega} \langle (\alpha_{00} - \alpha_{11}) + (\gamma_{00} - \gamma_{11}) + 3(\gamma_0^2 - \gamma_1^2) \rangle
\end{aligned}$$

III

Nous considérons à présent une métrique conforme à celle de Taub :

$$ds^2 = e^{2\omega} \langle e^{2\alpha}[(dx^0)^2 - (dx^1)^2] - e^{2\gamma}[(dx^2)^2 + (dx^3)^2] \rangle$$

avec α, $\gamma(x^0, x^1)$; $\omega(x^2, x^3)$.

Cette métrique donne naissance aux dix composantes du tenseur de Ricci $\mathrm{R}_{\alpha\beta}$.

Supposant essentiellement $\omega_2\omega_3 \neq 0$ (le cas $\omega_3 = 0$ fait l'objet du paragraphe II), on examine en premier lieu les équations du vide $\mathrm{R}_{\alpha\beta} = 0$.

Les équations $\mathrm{R}_{02} = 0$, $\mathrm{R}_{03} = 0$, $\mathrm{R}_{12} = 0$, $\mathrm{R}_{13} = 0$ exigent alors $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$, nous poserons $\gamma = 0$.

Le système s'écrit dans ces conditions

$$-\alpha_{00}+\alpha_{11}+e^{2\alpha}[\omega_{22}+\omega_{33}+2\omega_2^2+2\omega_3^2]=0 \quad (R_{00}=0 \rightleftarrows R_{11}=0)\,;$$
$$3\omega_{22}+\omega_{33}+2\omega_3^2=0 \quad (R_{22}=0)\,; \quad 3\omega_{33}+\omega_{22}+2\omega_2^2=0 \quad (R_{33}=0)\,;$$
$$-\omega_{23}+\omega_2\omega_3=0 \quad (R_{23}=0)\,.$$

$R_{01} \equiv 0$; $R_{02} = R_{03} = R_{12} = R_{13} = 0$ en vertu de $\gamma = 0$.

Par addition des équations E_{22} et E_{33} on déduit

$$2[\omega_{22}+\omega_{33}]+\omega_2^2+\omega_3^2=0$$

Ceci permet d'écrire E_{11} sous la forme

$$e^{-2\alpha}[\alpha_{00}-\alpha_{11}]=\omega_{22}+\omega_{33}+2\omega_2^2+2\omega_3^2=\frac{3}{2}[\omega_2^2+\omega_3^2]$$

$$e^{-2\alpha}[\alpha_{00}-\alpha_{11}]=\frac{3}{2}[\omega_2^2+\omega_3^2]=\frac{3}{2}K^2, \qquad K=c^{te}.$$

La dérivation de $\omega_2^2+\omega_3^2=K^2$ nous donne

$$\omega_2\omega_{22}+\omega_3\omega_{23}=0 \qquad \text{et} \qquad \omega_2\omega_{23}+\omega_3\omega_{33}=0\,;$$

soit en vertu de E_{23}

$$\omega_2[\omega_{22}+\omega_3^2]=0\,; \qquad \omega_3[\omega_{33}+\omega_2^2]=0\,.$$

Donc, puisque $\omega_2\omega_3 \neq 0$ il vient :

$$\omega_{22}+\omega_3^2=0\,; \qquad \omega_{33}+\omega_2^2=0 \to \omega_{22}+\omega_{33}+\omega_2^2+\omega_3^2=0$$

et comme

$$\omega_{22}+\omega_{33}=-\frac{1}{2}[\omega_2^2+\omega_3^2]$$

nous avons $\omega_2^2+\omega_3^2=0 \to \omega_2=\omega_3=0$ contrairement à l'hypothèse.

Ceci établit la non existence de champs gravitationnels du vide décrits par ds^2.

Examinons maintenant l'hypothèse champ mésonique vectoriel comme source du champ soit

$$T_{\alpha\beta}=\theta_\alpha\theta_\beta-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(\theta^\nu\theta_\nu)$$

dans les équations d'Einstein.

On ne peut avoir $\theta_2=\theta_3=0$ car les équations $R_{02}=R_{03}=R_{12}=R_{13}=0$ entraînent $\gamma=0$ $(\omega_2\omega_3 \neq 0)$ et l'addition des équations E_{00} et E_{11} fournit $\theta_0^2+\theta_1^2=0 \to \theta_0=\theta_1=0$, disparition du champ $\vec{\theta}$.

Posons donc $\theta_1=\theta_3=0$; $\theta_0\theta_2 \neq 0$.

Les équations R_{03} et $R_{12}=0$ demandent $\gamma_0=\gamma_1=0$ d'où

$$R_{02}=0 \to \theta_0\theta_2=0\,.$$

L'hypothèse est donc à rejeter. La conclusion est la même si l'on adopte

$$\theta_0 = \theta_3 = 0\,.$$

Prenant $\theta_0 = \theta_1 = 0$, $\theta_2\theta_3 \neq 0$ les relations $R_{02} = R_{03} = R_{12} = R_{13} = 0$ exigent toujours $\gamma = 0$. On parvient au système

$$e^{-2\alpha}[\alpha_{00} - \alpha_{11}] = [\omega_{22} + \omega_{33} + 2\omega_2^2 + 2\omega_3^2 - \Lambda e^{2\omega}]$$

$$\chi\theta_2^2 = -3\omega_{22} - \omega_{33} - 2\omega_3^2 + \Lambda e^{2\omega}; \qquad \chi\theta_3^2 = -3\omega_{33} - \omega_{22} - 2\omega_2^2 + \Lambda e^{2\omega}$$

$$4[-\omega_{23} + \omega_2\omega_3]^2 = [-3\omega_{22} - \omega_{33} - 2\omega_3^2 + \Lambda e^{2\omega}][-3\omega_{33} - \omega_{22} - 2\omega_2^2 + \Lambda e^{2\omega}]$$

Il faut donc

$$e^{-2\alpha}[\alpha_{00} - \alpha_{11}] = K\,; \qquad \omega_{22} + \omega_{33} + 2\omega_2^2 + 2\omega_3^2 - \Lambda e^{2\omega} = K$$

ω, déterminée par cette équation doit satisfaire la contrainte représentée par la dernière équation du système et rendre positives les expressions θ_2^2, θ_3^2. Les « composantes » du pseudo-vecteur d'isothermie $\xi^\alpha \equiv g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ sont

$$\xi^0 = 2g^{22}\Gamma^0_{22}\,; \qquad \xi^1 = 2g^{22}\Gamma^1_{22}\,; \qquad \xi^2 = 2g^{00}\Gamma^2_{00}\,; \qquad \xi^3 = 2g^{00}\Gamma^3_{00}$$

$\xi^0 = \xi^1 = 0$ si $\gamma = 0$ comme nous le supposons.

$$\xi^2 = 2e^{-2\omega}\omega_2\,; \qquad \xi^3 = 2e^{-2\omega}\omega_3$$

Portant ces expressions dans $\Box(\phi) \equiv \nabla^\nu\nabla_\nu(\phi) = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha(\phi_\beta) = g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}(\phi) - \xi^\nu\phi_\nu$ avec $\phi_\alpha \equiv \nabla_\alpha(\phi)$ il vient :

$$\Box(\omega) = -e^{-2\omega}\langle \omega_{22} + \omega_{33} + 2[\omega_2^2 + \omega_3^2] \rangle$$

L'équation en ω peut donc s'écrire $\Box(\omega) = -\Lambda - Ke^{-2\omega}$.

Équivalemment, en posant $X \equiv e^{2\omega}$, l'équation prend la forme

$$X_{22} + X_{33} = 2\Lambda X^2 + 2KX$$

Si $\Lambda = K = 0 \rightarrow X_{22} + X_{33} = 0$. X est alors une fonction harmonique des variables x^2, x^3.

$$X = k \log r\,; \qquad r^2 = (x^2)^2 + (x^3)^2$$

De $e^{2\omega} = k \log r$ on tire notamment la relation

$$e^{2\omega}[-\omega_{23} + \omega_2\omega_3] = \frac{kx^2x^3}{r^4}\left[1 + \frac{3k}{4e^{2\omega}}\right]$$

L'équation $\omega_{22} + \omega_{33} + 2[\omega_2^2 + \omega_3^2] = 0$ permet d'écrire :

$$\chi\theta_2^2 = -2\omega_{22} + 2\omega_2^2\,; \qquad \chi\theta_3^2 = -2\omega_{33} + 2\omega_3^2\,,$$

d'où la contrainte

$$[-\omega_{23} + \omega_2\omega_3]^2 = [-\omega_{22} + \omega_2^2][-\omega_{33} + \omega_3^2]$$

soit

$$\frac{k^2(x^2x^3)^2}{r^8}\left[1+\frac{A}{2k}\right]^2=\frac{1}{4}\left[-\frac{k}{r^2}+\frac{A(x^2)^2}{r^4}\right]\left[-\frac{k}{r^2}+\frac{A(x^3)^2}{r^4}\right];$$

$$A \equiv 2k\left[1+\frac{3k}{4e^{2\omega}}\right]$$

$$k[A-k]=0 \rightarrow k=0 \rightarrow A=0$$

ou

$$A=k \rightleftharpoons 1+\frac{3k}{2e^{2\omega}}=0 \rightarrow 2\log r+3=0$$

Il n'existe donc pas de solution du type considéré.

Posons donc $\Lambda = 0$, $K \neq 0 \rightarrow \omega_{22}+\omega_{33}+2[\omega_2^2+\omega_3^2]=K$ avec

$$[-\omega_{23}+\omega_2\omega_3]^2=\left[-\omega_{22}+\omega_2^2-\frac{K}{2}\right]\left[-\omega_{33}+\omega_3^2-\frac{K}{2}\right].$$

Ou d'une manière équivalente $X_{22}+X_{33}=2KX$ et

$$[2XX_{23}-3X_2X_3]^2=[2XX_{22}-3(X_2)^2+2K(X)^2][2XX_{33}-3(X_3)^2+2K(X)^2]$$

Posant $X=\phi(x^2)\psi(x^3)$, il vient $\dfrac{\phi''}{\phi}+\dfrac{\psi''}{\psi}=2K$.

Donc $\phi''=2L\phi$, $\psi''=2(K-L)\psi$; L : c^te^. La contrainte s'écrit :

$$(\phi'\psi')^2=[2\phi\phi''-3\phi'^2+2K\phi^2][2\psi\psi''-3\psi'^2+2K\psi^2]$$

soit encore :

$$(\phi'\psi')^2=[(2K+4L)\phi^2-3\phi'^2][(6K-4L)\psi^2-3\psi'^2]$$

$$\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2\cdot\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2=\left[(2K+4L)-3\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2\right]\left[(6K-4L)-3\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2\right]$$

Supposant L et $(K-L)>0$ et portant les valeurs $\left(\dfrac{\phi'}{\phi}\right)^2=2L$ $\left(\dfrac{\psi'}{\psi}\right)^2=2(K-L)$ dans la contrainte, on obtient une identité. Ceci fait apparaître la solution

$$X \equiv e^{2\omega}=\phi\psi=e^{\sqrt{2L}x^2+\sqrt{2(K-L)}x^3}$$

Nous avons en outre $\alpha_{00}-\alpha_{11}=Ke^{2\alpha}$, équation qu'on peut ramener à la forme $\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial\xi\partial\eta}=Ke^{2\alpha}$ par le changement de variables $x^0-x^1=2\xi$; $x^0+x^1=2\eta$.

Les expressions θ_2^2 et θ_3^2 sont négatives si $2\omega=\sqrt{2L}x^2+\sqrt{2(K-L)}x^3$

Soit alors $L<0$ et $(K-L)>0$; nous avons $\phi=\sin(\sqrt{2|L|}x^2)$; $\psi=e^{\sqrt{2(K-L)}x^3}$

$$\frac{\phi'}{\phi}=\sqrt{2|L|}\cot(\sqrt{2|L|}x^2)\,; \qquad \frac{\psi'}{\psi}=\sqrt{2(K-L)}\,.$$

La contrainte devient :

$$\begin{aligned}2|L|\cot^2(\sqrt{2|L|}x^2)\cdot[2(K-L)]\\ =\langle 2K+4L-6|L|\cot^2(\sqrt{2|L|}x^2)\rangle\langle 6K-4L-3\cdot 2(K-L)\rangle\end{aligned}$$

Posons $K=-2L$, nous avons

$$2|L|\cot^2(\sqrt{2|L|}x^2)\cdot[-6L]=-6|L|\cot^2(\sqrt{2|L|}x^2)\cdot[-16L+18L]$$

ce qui est une identité,

$$2\omega=\log\left[\sin(\sqrt{2|L|}x^2)\right]+\sqrt{6|L|}x^3.$$

On tire de cette expression

$$2\omega_2=\sqrt{2|L|}\cot(\sqrt{2|L|}x^2)\,;$$

$$2\omega_{22}=\frac{-2|L|}{\sin^2(\sqrt{2|L|}x^2)}\,; \qquad 2\omega_3=\sqrt{6|L|}\,; \qquad 2\omega_{33}=0$$

Par conséquent

$$\chi\theta_2^2=3|L|\cot^2(\sqrt{2|L|}x^2)\,; \qquad \chi\theta_3^2=|L|\,.$$

La solution est donc physiquement admissible et l'on étudierait d'une manière semblable le cas $L>0$, $(K-L)<0$.

L'équation $X_{22}+X_{33}=2\Lambda X^2$ correspond au choix $K=0$. Si l'on postule $X=X(u)$ avec $u=x^2+x^3$ il vient $X''=\Lambda X^2 \to (X')^2=\frac{2\Lambda}{3}X^3+c^{te}$.

En particulier si la constante arbitraire est nulle, on a

$$X'=\pm\sqrt{\frac{2\Lambda}{3}}X^{3/2}\,; \qquad \Lambda>0$$

$$-2X^{-1/2}=\pm\sqrt{\frac{2\Lambda}{3}}u+\mathscr{C} \to X\equiv e^{2\omega}=4\left[\mathscr{C}\pm\sqrt{\frac{2\Lambda}{3}}u\right]^{-2}\,; \qquad \mathscr{C}:\ C^{te}.$$

En outre $\alpha_{00}-\alpha_{11}=0 \to \alpha=\phi(x^0-x^1)+\psi(x^0+x^1)$. Toutefois cette solution correspond à $\theta_2=\theta_3=0$.

D'une manière générale

$$\chi\theta_2^2=\frac{-2XX''+3X'^2}{2X^2}=\chi\theta_3^2 \qquad \text{et} \qquad \omega_{23}=\frac{XX''-X'^2}{2X^2}$$

On vérifie que la contrainte est bien satisfaite.

Dans les équations d'Einstein nous prendrons

$$T_{\alpha\beta}=(\rho+p)U_\alpha U_\beta - pg_{\alpha\beta}+U_\alpha Q_\beta+U_\beta Q_\alpha\,; \qquad U^\alpha U_\alpha=1\,; \qquad U^\alpha Q_\alpha=0\,.$$

fluide parfait thermodynamique.

$$R_{\alpha\beta}=\chi\left\langle (\rho+p)U_\alpha U_\beta-\left(\frac{\rho-p}{2}\right)g_{\alpha\beta}+U_\alpha Q_\beta+U_\beta Q_\alpha\right\rangle+\Lambda g_{\alpha\beta}\,; \qquad \chi>0\,.$$

Si $U_2 = U_3 = 0$, $e^{-2\alpha-2\omega}[U_0^2 - U_1^2] = 1$; nous choisissons

$$Q_0 = Q_1 = 0\,; \qquad Q_2\cdot Q_3 \neq 0\,.$$

Du système correspondant on tire

$$2\chi p = g^{00}[R_{00}-R_{11}]-2\Lambda\,; \qquad 2\chi\rho = g^{00}[R_{00}-R_{11}]-4g^{22}R_{22}+2\Lambda$$

$$\begin{cases} U_0^2 = [R_{00}-g_{00}g^{22}R_{22}]/[g^{00}[R_{00}-R_{11}]-2g^{22}R_{22}] \\ U_1^2 = [R_{11}+g_{00}g^{22}R_{22}]/[g^{00}[R_{00}-R_{11}]-2g^{22}R_{22}] \end{cases}$$

$$R_{22}=R_{33}\,; \qquad R_{23}=0\,; \qquad (R_{01})^2=(R_{00}-g_{00}g^{22}R_{22})(R_{11}-g_{11}g^{22}R_{22}).$$

$$2\gamma_0\omega_2=\chi U_0Q_2\,; \quad 2\gamma_0\omega_3=\chi U_0Q_3\,; \quad 2\gamma_1\omega_2=\chi U_1Q_2\,; \quad 2\gamma_1\omega_3=\chi U_1Q_3$$

$$R_{22}=R_{33} \to \omega_{22}-\omega_2^2=\omega_{33}-\omega_3^2\,; \qquad R_{23}=0 \to \omega_{23}-\omega_2\omega_3=0$$

Écrivant $e^{-\omega}\equiv Z$ nous avons donc $Z_{22}=Z_{33}$; $Z_{23}=0$; $Z=A(x^2)+B(x^3)$ avec $A''=B''=2k$; $A=k(x^2)^2+ax^2+b$; $B=k(x^3)^2+cx^3+d$.

D'autre part

$$\frac{\omega_2}{Q_2}=\frac{\omega_3}{Q_3}=\frac{\chi U_0}{2\gamma_0}=\frac{\chi U_1}{2\gamma_1}\equiv\frac{1}{\zeta}\,; \qquad Q_2=\zeta\omega_2\,; \qquad Q_3=\zeta\omega_3$$

$\chi^2\zeta^2 = 4e^{-2\alpha-2\omega}(\gamma_0^2-\gamma_1^2)$ d'où la condition nécessaire $\gamma_0^2-\gamma_1^2>0$.

Nous transcrirons les expressions de U_0^2 et U_1^2 sous la forme :

$$U_0^2 \equiv \frac{\mathscr{H}+e^{2\alpha-2\gamma}\Omega}{\mathscr{D}}\,; \qquad U_1^2 \equiv \frac{\mathscr{Y}-e^{2\alpha-2\gamma}\Omega}{\mathscr{D}}$$

avec

$$\begin{cases} \mathscr{H}\equiv -\alpha_{00}+\alpha_{11}-\gamma_{00}+2\alpha_0\gamma_0-\gamma_{11}+2\alpha_1\gamma_1-2\gamma_1^2\,; \qquad \Omega\equiv 2(-\omega_{22}+\omega_2^2) \\ \mathscr{Y}\equiv \alpha_{00}-\alpha_{11}-\gamma_{00}+2\alpha_0\gamma_0-\gamma_{11}+2\alpha_1\gamma_1-2\gamma_0^2 \\ \mathscr{D}\equiv 2e^{-2\alpha-2\omega}[-\alpha_{00}+\alpha_{11}+\gamma_0^2-\gamma_1^2]+4e^{-2\gamma-2\omega}[-\omega_{22}+\omega_2^2] \end{cases}$$

$$\left(\frac{U_0}{\gamma_0}\right)^2=\left(\frac{U_1}{\gamma_1}\right)^2 \rightleftharpoons \frac{\mathscr{H}+e^{2\alpha-2\gamma}\Omega}{\gamma_0^2}=\frac{\mathscr{Y}-e^{2\alpha-2\gamma}\Omega}{\gamma_1^2}$$

soit en développant :

$$e^{2\alpha-2\gamma}\Omega(\gamma_0^2+\gamma_1^2)=\gamma_0^2\mathscr{Y}-\gamma_1^2\mathscr{H} \to \Omega=\frac{[\gamma_0^2\mathscr{Y}-\gamma_1^2\mathscr{H}]}{(\gamma_0^2+\gamma_1^2)}e^{-2\alpha-2\gamma}=c^{te}$$

puisque $\Omega=\Omega(x^2, x^3)$.

Or $e^{-\omega} = A(x^2) + B(x^3)$; $A'' = B'' = 2k$; on en déduit $\omega_2 = \dfrac{-A'}{A+B}$ puis $-\omega_{22}+\omega_2^2 = \dfrac{2k}{A+B}$; donc il faudrait $A + B = c^{te}$, $B = c^{te} \rightarrow A = c^{te}$.

Pour éviter cette solution triviale posons $2k = 0$; $A = mx^2 + p$; $B = nx^3 + q$. Alors $\Omega = 0 \rightarrow \gamma_0^2\mathscr{Y} - \gamma_1^2\mathscr{H} = 0$ relation dont le développement nous donne

$$(\alpha_{00} - \alpha_{11})(\gamma_0^2 + \gamma_1^2) + (\gamma_0^2 - \gamma_1^2)[-\gamma_{00} - 2\gamma_0^2 + 2\alpha_0\gamma_0 - \gamma_{11} - 2\gamma_1^2 + 2\alpha_1\gamma_1] = 0 \quad \text{(E)}$$

A l'équation (E) s'ajoute $(R_{01})^2 = \mathscr{H}\mathscr{Y}$.

Si nous remplaçons dans $\mathscr{H}$ et $\mathscr{Y}$, $(\alpha_{00} - \alpha_{11})$ par sa valeur tirée de (E) nous obtenons toutes réductions faites

$$\mathscr{H} = 2\gamma_0^2\mathscr{Z} ; \qquad \mathscr{Y} = 2\gamma_1^2\mathscr{Z}$$

avec

$$\mathscr{Z} = \left(\frac{-\gamma_{00} - \gamma_0^2 + 2\alpha_0\gamma_0 - \gamma_{11} - \gamma_1^2 + 2\alpha_1\gamma_1}{(\gamma_0^2 + \gamma_1^2)}\right)$$

Donc

$$4\,[-\gamma_{01} - \gamma_0\gamma_1 + \alpha_1\gamma_0 + \alpha_0\gamma_1]^2 = 4\gamma_0^2\gamma_1^2\mathscr{Z}^2$$

$$-\gamma_{01} - \gamma_0\gamma_1 + \alpha_1\gamma_0 + \alpha_0\gamma_1 = \pm\,\gamma_0\gamma_1\mathscr{Z}$$

Deux relations apparaissent :

$$\left\{\begin{aligned} &-\alpha_0\gamma_1\left[\frac{\gamma_0^2 - \gamma_1^2}{\gamma_0^2 + \gamma_1^2}\right] + \alpha_1\gamma_0\left[\frac{\gamma_0^2 - \gamma_1^2}{\gamma_0^2 + \gamma_1^2}\right] \\ &\qquad = \gamma_{01} + \gamma_0\gamma_1 - \gamma_0\gamma_1\left[\frac{\gamma_{00} + \gamma_0^2 + \gamma_{11} + \gamma_1^2}{\gamma_0^2 + \gamma_1^2}\right] \quad (1) \\ &\alpha_0\gamma_1\left[\frac{3\gamma_0^2 + \gamma_1^2}{\gamma_0^2 + \gamma_1^2}\right] + \alpha_1\gamma_0\left[\frac{\gamma_0^2 + 3\gamma_1^2}{\gamma_0^2 + \gamma_1^2}\right] \end{aligned}\right.$$

$$= \gamma_{01} + \gamma_0\gamma_1 + \gamma_0\gamma_1\left[\frac{\gamma_{00} + \gamma_0^2 + \gamma_{11} + \gamma_1^2}{\gamma_0^2 + \gamma_1^2}\right] \quad (2)$$

Soit $\gamma = \gamma(u)$; $u \equiv x^0 + \varepsilon x^1$; dans ce cas

$$\gamma_{01} + \gamma_0\gamma_1 - \gamma_0\gamma_1\left[\frac{\gamma_{00} + \gamma_0^2 + \gamma_{11} + \gamma_1^2}{\gamma_0^2 + \gamma_1^2}\right] = \varepsilon\gamma'' + \varepsilon\gamma'^2 - \varepsilon\gamma'^2\left[\frac{\gamma'' + \gamma'^2 + \varepsilon^2\gamma'' + \varepsilon^2\gamma'^2}{\gamma'^2(1 + \varepsilon^2)}\right] = 0$$

(1) devient en supposant $\varepsilon^2 \neq 1$: $\gamma'[\alpha_1 - \varepsilon\alpha_0] = 0$.

On ne peut prendre $\gamma' = 0$ car cela entraînerait $\vec{Q} = 0$; par conséquent $\alpha_1 = \varepsilon\alpha_0 = 0$.

Il est possible de satisfaire cette condition en posant $\alpha = \alpha(u)$.

(E) devient $(1 - \varepsilon^4)\gamma'^2[\alpha'' - \gamma'' - 2\gamma'^2 + 2\alpha'\gamma'] = 0$.

Pour un choix arbitraire de γ, α est déterminée par l'équation

$$\alpha'' + 2\alpha'\gamma' = \gamma'' + 2\gamma'^2$$

Exemple : $\gamma = nu \rightarrow \alpha = nu + \frac{1}{2n} e^{-2nu}$; on trouve ensuite

$$\begin{cases} \chi p = e^{-2\alpha-2\omega}\{-(1-\varepsilon^2)[n^2 + 2ne^{-2nu}] + 3e^{2\alpha-2\gamma}[\omega_2^2 + \omega_3^2]\} - \Lambda \\ \chi \rho = e^{-2\alpha-2\omega}\{(1-\varepsilon^2)[3n^2 - 2ne^{-2nu}] - 3e^{2\alpha-2\gamma}[\omega_2^2 + \omega_3^2]\} + \Lambda \end{cases}$$

Ces expressions doivent satisfaire $p \geqslant 0$; $\rho > 0$; $3p \leqslant \rho$; $\varepsilon^2 < 1$.
Examinons la relation (2) avec $\gamma = \gamma(u)$

$$\gamma'\left[\alpha_0\varepsilon\left(\frac{3+\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\right) + \alpha_1\left(\frac{1+3\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\right)\right] = 2\varepsilon[\gamma'' + \gamma'^2]$$

En posant $\alpha = \alpha(u)$ on a

$$\alpha' = \frac{\gamma'' + \gamma'^2}{2\gamma'} \rightarrow 2\alpha = \log \gamma' + \gamma \rightarrow e^{2\alpha} = e^{\gamma}\gamma'$$

(E) s'écrit encore avec $0 < \varepsilon^2 < 1$, $\gamma' \neq 0$: $\alpha'' + 2\alpha'\gamma' = \gamma'' + 2\gamma'^2$.
Soit $\alpha'' + \gamma'' + \gamma'^2 = \gamma'' + 2\gamma'^2 \rightarrow \alpha'' = \gamma'^2$.
On en déduit l'équation en γ : $\gamma'\gamma''' + \gamma''[\gamma'^2 - \gamma''] = 2\gamma'^4$.
Soit $\zeta\zeta'' + \zeta'[\zeta^2 - \zeta'] = 2\zeta^4$; $\zeta \equiv \gamma'$

$$\frac{(\zeta\zeta'' - \zeta'^2)}{\zeta^2} + \zeta' = 2\zeta^2$$

Posant $\zeta = e^{\int \frac{du}{\xi}}$, il vient $\zeta' \equiv \frac{d\zeta}{du} = \frac{1}{\xi} e^{\int \frac{du}{\xi}} \rightarrow \frac{\zeta'}{\zeta} = \frac{1}{\xi}$

$$\left(\frac{\zeta\zeta'' - \zeta'^2}{\zeta^2}\right) = -\frac{\xi'}{\xi^2} \qquad \text{d'où} \quad -\frac{\xi'}{\xi^2} + \frac{\zeta}{\xi} = 2\zeta^2$$

Avec

$$Z \equiv \frac{1}{\xi}, \qquad Z' = -\frac{\xi'}{\xi^2}; \qquad Z' + \zeta Z = 2\zeta^2$$

Mais

$$\frac{dZ}{du} = \frac{dZ}{d\zeta}\frac{d\zeta}{du} = \frac{dZ}{d\zeta}(\zeta Z)$$

L'équation s'écrit finalement

$$\zeta Z \frac{dZ}{d\zeta} + \zeta Z = 2\zeta^2$$

soit

$$Z\frac{dZ}{d\zeta} + Z = 2\zeta$$

On aperçoit la solution $Z = \zeta \rightarrow \gamma = -\log(c - u)$; $e^{2\alpha} = e^{2\gamma}$.
Cette solution est physiquement inacceptable car $(\rho + p) = 0$.
La transformation $Z = 2\zeta\Omega$ fournit :

$$2\Omega^2 + \Omega + 2\Omega\zeta\frac{d\Omega}{d\zeta} = 1 \qquad \frac{-2\Omega d\Omega}{2\Omega^2 + \Omega - 1} = \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

On en déduit

$$\left[\frac{-2}{3(\Omega + 1)} - \frac{1}{3\left(\Omega - \frac{1}{2}\right)}\right] d\Omega = \frac{d\zeta}{\zeta}$$

puis

$$(\Omega + 1)^2\left(\Omega - \frac{1}{2}\right) = \zeta^{-3}.$$

(Manuscrit reçu le 23 février 1981).