ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

B. LINET

Force de réaction de rayonnement gravitationnel pour un milieu élastique. II. Perturbation d'un mouvement quasi-minkowskien

Annales de l'I. H. P., section A, tome 34, nº 4 (1981), p. 427-435
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1981__34_4_427_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXXIV, n° 4, 1981, p. 427-435.

Section A :
Physique théorique.

Force de réaction de rayonnement gravitationnel pour un milieu élastique. II. Perturbation d'un mouvement quasi-minkowskien

par

B. LINET

Équipe de Recherche Associée au C. N. R. S., N° 533,
Université Paris VI, Institut Henri Poincaré,
11, rue Pierre-et-Marie-Curie, 75231, Paris Cedex 05, France

RÉSUMÉ. — Nous déterminons, dans le cadre de l'approximation linéaire de la relativité générale, les équations du mouvement pour un milieu élastique dans lequel les forces de contraintes sont prépondérantes par rapport aux forces gravitationnelles. Dans le cas de vitesses faibles par rapport à c, nous en déduisons la formule de variation d'énergie du système due au rayonnement gravitationnel. Nous obtenons le résultat surprenant qu'elle a exactement la même forme que celle déterminée dans l'article précédent (pas seulement en moyenne sur un mouvement quasi-périodique).

ABSTRACT. — We determine, within the framework of the first approximation of general relativity, the equations of motion of a continuous medium in which the forces from material stresses play a leading part with respect to the gravitational forces. In the slow approximation, we deduce the formula for the variation of the energy of the system due to the gravitational radiation. We obtain the surprising result that it has exactly the same form that one determined in the preceding paper (not only when averaged over a quasi-periodic motion).

1. INTRODUCTION

La formule donnant l'énergie gravitationnelle quadrupolaire rayonnée à l'infini par un système matériel en mouvement sous l'action de forces essentiellement non-gravitationnelles et animé de vitesse faible par rapport à c a été initialement donnée par Einstein [*3*]. Cependant toujours dans le cadre de l'approximation linéaire, une autre méthode est possible. Elle consiste à calculer la variation d'énergie du système matériel résultant du rayonnement gravitationnel par une analyse au voisinage des sources. Cette approche a été utilisée par Eddington [*2*] dans le cas d'une barre tournante et a été développée par Peres et Rosen [*7*] [*8*] pour un système matériel quelconque. Remarquons qu'une ambiguïté existe sur ce qu'ils appellent l'énergie et donc la variation d'énergie du système. Cependant, comme on peut le voir dans leur travail, ceci importe peu parce que finalement dans leur formule ils omettent les termes se présentant comme une dérivée totale par rapport au temps. En effet ceux-ci sont nuls en moyenne sur une période du mouvement minkowskien puisque celui-ci a été supposé périodique. L'équivalence des méthodes d'Einstein et d'Eddington, en ce qui concerne l'énergie totale rayonnée, a été démontrée par Papapetrou [*5*]. Mais jusqu'à présent la formule complète donnant la variation d'énergie d'un système due au rayonnement gravitationnel n'a pas été déterminée.

Dans le cas d'un système matériel dans lequel les forces de contraintes ne sont pas prépondérantes par rapport aux forces gravitationnelles, il est bien connu qu'il n'est pas possible de rester dans le cadre de la première approximation de la relativité générale. Pour trouver la variation d'énergie de ce système une méthode possible est celle proposée par Papapetrou et nous-mêmes [*6*]. Nous avons obtenu pour un fluide parfait la même formule que Chandrasekhar et Esposito [*1*]. Dans un article précédent [*4*], nous avons généralisé cette formule au cas d'un milieu élastique. Il est remarquable qu'en prenant la moyenne sur une période du mouvement newtonien, cette formule conduise à une perte d'énergie en accord avec celle d'Einstein obtenue à l'approximation linéaire. Mais de plus, il est surprenant que celle-ci coïncide avec la formule complète que nous allons établir dans ce travail.

Dans le cadre de l'approximation linéaire, il faut compléter les travaux antérieurs cités en établissant les équations du mouvement valables à cette approximation. Nous montrerons dans la section 2 que celles-ci s'interprètent comme les équations minkowskiennes du mouvement avec une force perturbatrice d'origine gravitationnelle. Dans la section 3, ayant adopté la solution retardée des équations du champ pour la métrique, nous développerons cette force en $1/c$ sous l'hypothèse de vitesse faible par rapport à c; la première contribution radiative apparaît à l'ordre $1/c^6$. De l'expression de cette force de réaction de rayonnement à cet ordre, nous déduirons la formule complète de la variation d'énergie d'un milieu élastique résultant du rayonnement gravitationnel quadrupolaire à l'infini.

2. LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT A L'APPROXIMATION LINÉAIRE

Nous adoptons les mêmes notations et conventions que dans [*4*]. Dans un système de coordonnées harmoniques, la densité tensorielle $\mathfrak{G}^{\lambda\mu}$ peut être développée en G de la façon suivante :

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathfrak{G}^{00} = \dfrac{1}{c}(1 + \underset{(1)}{\mathfrak{G}^{00}} + \dots) \\ \mathfrak{G}^{0i} = \underset{(1)}{\mathfrak{G}^{0i}} + \dots \\ \mathfrak{G}^{ij} = c(-\delta^j_i + \underset{(1)}{\mathfrak{G}^{ij}} + \dots) \end{cases}$$

et dans ce travail, nous ne garderons que les termes linéaires en G.

La source des équations d'Einstein est un tenseur impulsion-énergie ayant un tenseur des contraintes θ^ν_μ anisotrope

$$(4) \qquad \mathrm{T}^\mu_\nu = \rho u^\mu u_\nu - \frac{1}{c^2}\theta^\mu_\nu \qquad \text{avec} \qquad \theta^\mu_\nu u^\nu = 0$$

où u^μ est la vitesse du fluide. Nous exprimons la conservation du tenseur impulsion-énergie à l'aide de la densité tensorielle $\mathfrak{T}^\mu_\lambda$ définie par :

$$(5) \qquad \mathfrak{T}^\mu_\lambda = \sqrt{-g}\,\mathrm{T}^\mu_\lambda$$

sous la forme suivante :

$$(6) \qquad \mathfrak{T}^\mu_{\lambda,\mu} = f_\lambda \qquad \text{avec} \qquad f_\lambda = \frac{1}{2}\mathfrak{T}^\mu_\mu(\mathrm{Log}\sqrt{-g})_{,\lambda} - \frac{1}{2}\mathfrak{T}^\mu_\nu \mathrm{G}_{\mu\rho}\mathfrak{G}^{\rho\nu}_{,\lambda}$$

où g est le déterminant de $g_{\mu\nu}$ et $\mathrm{G}_{\mu\nu}$ l'inverse de $\mathfrak{G}^{\mu\nu}$.

Dans l'espace-temps de Minkowski, un ensemble de variables dynamiques du fluide est évidemment ρ, v^i et θ^i_j où la quantité v^i est définie de la façon suivante :

$$(7) \qquad u^\mu = u^0 v^\mu \qquad \text{avec} \qquad v^\mu : (1, v^i)$$

Elles permettent d'exprimer $\mathfrak{T}^\mu_\lambda$ en espace-temps de Minkowski; nous le notons alors $\bar{\mathfrak{T}}^\mu_\lambda$. On voit que :

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{c}\bar{\mathfrak{T}}^0_0 = \dfrac{\rho}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} + \dfrac{1}{c^4}\theta^i_j v^i v^j \\ \dfrac{1}{c^2}\bar{\mathfrak{T}}^i_0 = \dfrac{\rho}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}\dfrac{v^i}{c} + \dfrac{1}{c^2}\theta^i_j\dfrac{v^j}{c} \qquad \text{et} \qquad \bar{\mathfrak{T}}^0_i = -c^2\bar{\mathfrak{T}}^i_0 \\ \dfrac{1}{c}\bar{\mathfrak{T}}^k_i = -\dfrac{\rho}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}\dfrac{v^i v^k}{c^2} - \dfrac{1}{c^2}\theta^k_i \end{cases}$$

Les équations du mouvement minkowskiennes pour ρ, v^i et θ^j_i se déduisent de (6). On obtient simplement :

$$\partial_\nu \bar{\mathfrak{T}}^\nu_\mu = 0 \tag{9}$$

Les variables ρ, v^i et θ^i_j ne sont évidemment pas indépendantes quand on considère une théorie de l'élasticité relativiste et alors pour une théorie donnée le mouvement pourrait être déterminé.

Une conséquence immédiate de (9) est que l'on a :

$$\frac{d}{dt}\int \bar{\mathfrak{T}}^0_0 d^3y = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{dt}\int \bar{\mathfrak{T}}^k_0 d^3y = 0 \tag{10}$$

On montre que le système de coordonnées minkowskien peut être choisi de façon que :

$$\int \bar{\mathfrak{T}}^k_0 d^3y = 0 \qquad \text{et} \qquad \int \bar{\mathfrak{T}}^0_0 y^i d^3y = 0 \tag{11}$$

Nous tenons compte de la gravitation en considérant l'espace-temps décrit par la métrique (3). Le développement en G de $\mathfrak{T}^\mu_\lambda$ doit se faire par rapport aux variables dynamiques dont nous cherchons les équations du mouvement. Cependant, une difficulté apparaît pour le tenseur des contraintes. La théorie de l'élasticité relativiste implique que θ^i_j est fonction de ρ, v^i et de $\underset{(1)}{\mathfrak{G}}^{\mu\nu}$. Nous pouvons écrire :

$$\theta^i_j = \bar{\theta}^i_j + \underset{(1)}{\Pi}{}^i_j \tag{12}$$

où la quantité $\bar{\theta}^i_j$ n'est pas explicitement fonction de $\underset{(1)}{\mathfrak{G}}^{\mu\nu}$. Le tenseur impulsion-énergie se présente alors sous la forme d'un développement en G par rapport aux variables dynamiques ρ, v^i et $\bar{\theta}^i_j$. Nous avons la décomposition suivante :

$$\mathfrak{T}^\nu_\mu = \bar{\mathfrak{T}}^\nu_\mu + \underset{(1)}{\mathfrak{T}}{}^\nu_\mu \tag{13}$$

où $\bar{\mathfrak{T}}^\nu_\mu$ s'exprime avec ρ, v^i et $\bar{\theta}^i_j$ sous la même forme (9) qu'en espace-temps de Minkowski.

Les équations d'Einstein, linéarisées de la façon que nous venons d'expliquer, se réduisent aux équations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \Box\, \underset{(1)}{\mathfrak{G}}^{00} &= \frac{16\pi G}{c^2}\frac{1}{c}\bar{\mathfrak{T}}^0_0 \\ \Box\, \underset{(1)}{\mathfrak{G}}^{0k} &= \frac{16\pi G}{c^2}\frac{1}{c^2}\bar{\mathfrak{T}}^k_0 = -\frac{16\pi G}{c^2}\bar{\mathfrak{T}}^0_k \\ \Box\, \underset{(1)}{\mathfrak{G}}^{ij} &= -\frac{16\pi G}{c^2}\frac{1}{c}\bar{\mathfrak{T}}^j_i \end{aligned}\right. \tag{14}$$

qui déterminent $\underset{(1)}{\mathfrak{G}}^{\mu\nu}$ en fonction de ρ, v^i et $\bar{\theta}^i_j$.

Les équations du mouvement s'obtiennent en considérant le développement linéaire en G par rapport à ρ, v^i et $\bar{\theta}^i_j$ de la loi de conservation (6). Nous écrivons le résultat sous la forme suivante :

$$\partial_\nu \bar{\mathfrak{T}}^\nu_\mu = \underset{(1)}{\delta f_\mu} \qquad \text{avec} \qquad \underset{(1)}{\delta f_\mu} = \underset{(1)}{f_\mu} - \partial_\nu \underset{(1)}{\mathfrak{T}^\nu_\mu} \tag{15}$$

Ainsi les équations du mouvement pour les variables ρ, v^i et $\bar{\theta}^i_j$ se présentent comme les équations du mouvement minkowskiennes avec une force perturbatrice $\underset{(1)}{\delta f_\mu}$ d'origine gravitationnelle. En principe la considération des équations de l'élasticité relativiste permettrait d'exprimer celle-ci en fonction de ρ, v^i et $\bar{\theta}^i_j$ et ensuite le mouvement pourrait être obtenu. Nous ferons uniquement cette détermination pour la force de réaction de rayonnement de la section 3.

3. FORCE DE RÉACTION DE RAYONNEMENT

Le formalisme élaboré dans la section précédente ne suppose aucune restriction sur les vitesses du milieu. Nous allons intégrer les équations du champ (14) en prenant la solution retardée de chaque d'alembertien. Rappelons que si nous avons :

$$\Box\, \mathrm{X} = 4\pi \mathrm{S} \tag{16}$$

où S est une source bornée, alors au voisinage de la source la solution retardée s'exprime sous la forme de la série suivante :

$$\mathrm{X}_{\mathrm{ret}} = \sum_{n=0}^{\infty} {}^n\mathrm{X}(x^i, t) \tag{17}$$

où

$$\begin{cases} {}^n\mathrm{X} = \dfrac{(-1)^n}{n!c^n} \dfrac{\partial^n}{\partial t^n} \displaystyle\int r^{n-1} \mathrm{S}(y^j, t) d^3y \\ r^2 = (x^i - y^i)(x^i - y^i) \end{cases} \tag{18}$$

La partie radiative de la solution retardée (17) correspond au terme d'ordre impair en n. Lorsqu'on suppose que la source S varie lentement en fonction du temps, ${}^n\mathrm{X}$ signifie alors terme d'ordre de grandeur $1/c^n$ et les premiers termes de la série (17) sont prépondérants.

En appliquant les formules (17) et (18) aux équations du champ (14), nous pourrions déterminer les composantes de la métrique sous forme de séries et ensuite calculer la force de réaction de rayonnement sous forme d'une série. Cependant dans ce travail, nous allons nous limiter au cas où le milieu est animé de vitesse faible. Sous cette hypothèse, la métrique s'exprime, au voisinage des sources, comme un développement en $1/c$ que nous écrivons avec les notations suivantes :

$$(19)\quad \left\{ \begin{aligned} \underset{(1)}{\mathfrak{G}}^{00} &= {}^{2}\mathfrak{G}^{00} + {}^{4}\mathfrak{G}^{00} + {}^{5}\mathfrak{G}^{00} + {}^{6}\mathfrak{G}^{00} + {}^{7}\mathfrak{G}^{00} + 0\left(\frac{1}{c^8}\right) \\ \underset{(1)}{\mathfrak{G}}^{0k} &= {}^{3}\mathfrak{G}^{0k} + {}^{5}\mathfrak{G}^{0k} + {}^{6}\mathfrak{G}^{0k} + 0\left(\frac{1}{c^7}\right) \\ \underset{(1)}{\mathfrak{G}}^{ij} &= {}^{4}\mathfrak{G}^{ij} + {}^{5}\mathfrak{G}^{ij} + {}^{6}\mathfrak{G}^{ij} + {}^{7}\mathfrak{G}^{ij} + 0\left(\frac{1}{c^8}\right) \end{aligned} \right.$$

Nous rappelons que dans (19) ${}^{n}\mathfrak{G}^{\mu\nu}$ signifie terme d'ordre de grandeur $1/c^n$. On retrouve alors pour les composantes $\underset{(1)}{\mathfrak{G}}^{\mu\nu}$ l'ordre de grandeur en $1/c$ caractéristique pour le cas de mouvement lent.

On voit immédiatement que $\frac{1}{4}\,{}^{2}\mathfrak{G}^{00}$ est le potentiel newtonien. Dans le cadre de l'approximation linéaire dans lequel nous nous sommes placés, la force newtonienne n'est qu'une force perturbatrice pour les équations du mouvement minkowskiennes. Ceci montre clairement que nous ne considérons pas des systèmes étudiés dans l'article précédent [*4*].

Puisque dans ce travail, nous ne cherchons que la force de réaction de rayonnement, nous allons uniquement donner les expressions des premiers termes radiatifs dans la métrique (19) :

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} {}^{5}\mathfrak{G}^{00} &= -\frac{2G}{3c^5}\frac{d^3Q^{ii}}{dt^3} \\ {}^{5}\mathfrak{G}^{ij} &= -\frac{2G}{c^5}\frac{d^3Q^{ij}}{dt^3} \\ {}^{7}\mathfrak{G}^{00} &= -\frac{G}{30c^7}\left(2x^ix^i\frac{d^5}{dt^5}Q^{mm} + 4x^ix^j\frac{d^5}{dt^5}Q^{ij}\right) \\ &\quad - \frac{G}{30c^7}\left[-4x^j\frac{d^5}{dt^5}\int \rho y^jy^iy^id^3y + \frac{d^5}{dt^5}\int \rho y^iy^iy^jy^jd^3y\right] \\ &\quad - \frac{2G}{3c^7}\frac{d^3}{dt^3}\int \rho v^2y^iy^id^3y \\ {}^{6}\mathfrak{G}^{0k} &= \frac{2G}{c^6}x^i\frac{d^4Q^{ik}}{dt^4} - \frac{2G}{3c^6}\frac{d^3}{dt^3}\int \rho v^ky^iy^id^3y \\ {}^{7}\mathfrak{G}^{ii} &= -\frac{G}{3c^7}x^jx^j\frac{d^5Q^{mm}}{dt^5} - \frac{2G}{c^7}\frac{d^3}{dt^3}\int \rho v^2y^iy^id^3y \\ &\quad + \frac{4G}{3c^7}x^i\frac{d^3}{dt^3}\int(\rho v^2 + \bar{\theta}^s_s)y^id^3y - \frac{2G}{3c^7}\frac{d^3}{dt^3}\int(\rho v^2 + \bar{\theta}^s_s)y^iy^id^3y \end{aligned} \right.$$

où Q^{ij} est le moment quadrupolaire calculé avec ρ. Les expressions (20) ne sont valables que dans le système de coordonnées pour lequel les relations (11) tiennent.

Maintenant nous sommes en mesure de déterminer la première contribution radiative dans la force $\underset{(1)}{\delta f_\nu}$ définie en (15). Celle-ci peut être calculée plus directement à partir d'un développement en $1/c$ par rapport aux variables ρ, v^i et $\bar{\theta}^i_j$ de la loi de conservation (6); le calcul est plus aisé mais il est indispensable de mettre en évidence le développement en G pour comprendre la structure du problème que nous considérons. Cependant il se présente une difficulté dans l'évaluation de la partie radiative provenant du terme $\underset{(1)}{\Pi^j_i}$ introduit en (12). Il faudrait préciser les équations de l'élasticité que l'on considère. Pour le calcul de la première contribution radiative dans $\underset{(1)}{\delta f_\nu}$, comme dans [*4*], il nous suffit de savoir que :

$$(\underset{(1)}{\Pi^j_i})_{\text{rad}} = 0\left(\frac{1}{c^6}\right) \tag{21}$$

Faisons une remarque qui permet de simplifier les calculs des termes radiatifs dans la composante $\underset{(1)}{\delta f_0}$. A partir de

$$\nabla_\nu(\rho u^\nu) = \frac{1}{c^2}\nabla_\mu \theta^\mu_\nu u^\nu \tag{22}$$

on montre aisément que :

$$\partial_0[\rho^7(\sqrt{-g}u^0)] + \partial_i[\rho^7(\sqrt{-g}u^0)v^i] = -\frac{1}{2c^2}\bar{\theta}^s_s\,{}^5\mathfrak{G}^{00}_{,0} + \frac{1}{2c^2}\bar{\theta}^l_m\,{}^5\mathfrak{G}^{ml}_{,0} \tag{23}$$

Nous avons trouvé que la force de réaction de rayonnement apparaît à l'ordre $1/c^6$ et qu'elle a l'expression générale suivante :

$$\left\{\begin{aligned} (\underset{(1)}{\delta f_0})_{\text{rad}} &= \rho c\left[\frac{1}{4}v^l\,{}^7\mathfrak{G}^{00}_{,l} + \frac{1}{4}v^l\,{}^7\mathfrak{G}^{ii}_{,l} + {}^6\mathfrak{G}^{0l}_{,0}\frac{v^l}{c} - \frac{1}{2}\frac{v^iv^k}{c^2}\,{}^5\mathfrak{G}^{ik}_{,0}\right] \\ &\quad + \frac{1}{c}\,{}^5\mathfrak{G}^{00}\bar{\theta}^j_{k,j}v^k - \frac{1}{2c}\partial_0(\rho\,{}^5\mathfrak{G}^{ij}v^iv^j) - \frac{1}{2c}\partial_l(\rho\,{}^5\mathfrak{G}^{ij}v^iv^jv^l) + 0\left(\frac{1}{c^8}\right) \end{aligned}\right. \tag{24}$$

$$\left\{\begin{aligned} (\underset{(1)}{\delta f_k})_{\text{rad}} &= \rho c\left[-\frac{1}{4}\,{}^7\mathfrak{G}^{00}_{,k} - \frac{1}{4}\,{}^7\mathfrak{G}^{ii}_{,k} - \frac{1}{c}\,{}^6\mathfrak{G}^{0k}_{,0} + {}^6\mathfrak{G}^{0l}_{,k}\frac{v^l}{c} - {}^6\mathfrak{G}^{0k}_{,l}\frac{v^l}{c}\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c^2}\partial_0 v^i\,{}^5\mathfrak{G}^{ki} + \frac{1}{c^2}v^l\partial_l v^i\,{}^5\mathfrak{G}^{ki} + \frac{1}{c^2}\,{}^5\mathfrak{G}^{kl}_{,0}v^l\right] - \frac{1}{c}\,{}^5\mathfrak{G}^{00}\bar{\theta}^j_{k,j} + 0\left(\frac{1}{c^8}\right) \end{aligned}\right. \tag{25}$$

A l'aide des expressions (24) et (25), nous vérifions aussitôt que :

$$(\underset{(1)}{\delta f_0})_{\text{rad}} + v^k(\underset{(1)}{\delta f_k})_{\text{rad}} = 0\left(\frac{1}{c^8}\right) \tag{26}$$

La force de réaction de rayonnement provoque une variation de l'énergie minkowskienne du système donnée par la formule :

$$\frac{dE}{dt} = c \int (\underset{(1)}{\delta f_0})_{\text{rad}} d^3x \tag{27}$$

Dans la composante $(\underset{(1)}{\delta f_0})_{\text{rad}}$ explicitée en (24), nous introduisons les expressions (20) des termes radiatifs de la métrique. Pour effectuer l'intégration de (27), il est nécessaire de démontrer les quelques résultats suivants :

$$\frac{d}{dt}\int \rho v^k v^l d^3x + \frac{d}{dt}\int \bar{\theta}^l_k d^3x = \frac{1}{2}\frac{d^3Q^{lk}}{dt^3} + 0\left(\frac{1}{c^2}\right) \tag{28}$$

$$-2\int \bar{\theta}^j_{k,j} v^k d^3x + \frac{d}{dt}\int \bar{\theta}^i_i d^3x = \frac{1}{2}\frac{d^3Q^{ii}}{dt^3} + 0\left(\frac{1}{c^2}\right) \tag{29}$$

Finalement par un calcul direct, nous obtenons l'expression de la variation d'énergie (27) :

$$\tag{30} \left\{ \begin{aligned} \frac{dE}{dt} = &-\frac{G}{5c^5}\frac{d^3Q^{ij}}{dt^3}\frac{d^3Q^{ij}}{dt^3} + \frac{G}{15c^5}\left(\frac{d^3Q^{mm}}{dt^3}\right)^2 + 2\frac{d}{dt}\left[\frac{d^3Q^{ij}}{dt^3}\int \rho v^i v^j d^3x\right] \\ &+ \frac{G}{c^5}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{3}{10}\left(\frac{dQ^{ij}}{dt}\frac{d^3Q^{ij}}{dt^3} - \frac{d^2Q^{ij}}{dt^2}\frac{d^2Q^{ij}}{dt^2}\right)\right. \\ &\left. - \frac{1}{10}\left(\frac{dQ^{mm}}{dt}\frac{d^3Q^{nn}}{dt^3} - \left(\frac{d^2Q^{mm}}{dt^2}\right)^2\right)\right] \\ &- \frac{1}{2}\,{}^5\mathfrak{G}^{lm}\frac{d}{dt}\int \bar{\theta}^l_m d^3x + \frac{1}{2}\,{}^5\mathfrak{G}^{00}\frac{d}{dt}\int \bar{\theta}^s_s d^3x \end{aligned} \right.$$

Nous allons montrer que les deux derniers termes peuvent se mettre sous la forme d'une dérivée totale par rapport au temps. En effet à partir de (23), on voit immédiatement que :

$$\tag{31} \begin{aligned} &-\frac{1}{2}\,{}^5\mathfrak{G}^{ml}\frac{d}{dt}\int \bar{\theta}^m_l d^3x + \frac{1}{2}\,{}^5\mathfrak{G}^{00}\frac{d}{dt}\int \bar{\theta}^s_s d^3x \\ &= \frac{d}{dt}\left[c^2\int \rho^7(\sqrt{-g}u^0)d^3x + \frac{1}{2}\,{}^5\mathfrak{G}^{00}\int \bar{\theta}^s_s d^3x - \frac{1}{2}\,{}^5\mathfrak{G}^{ml}\int \bar{\theta}^l_m d^3x\right]. \end{aligned}$$

La force de réaction que nous avons calculée en (24) et (25) correspond au rayonnement gravitationnel quadrupolaire que l'on calcule usuellement à l'infini. On sait bien que c'est la partie dominante du rayonnement lorsque les vitesses du milieu sont faibles par rapport à c.

Nous remarquons que la formule de variations d'énergie (30) a la même forme que celle établie dans [*4*] pour un milieu élastique animé de vitesses faibles et dans lequel les forces de contraintes ne sont pas prépondérantes par rapport aux forces gravitationnelles.

4. CONCLUSION

Les équations du mouvement d'un milieu élastique dans lequel les forces de contraintes sont prépondérantes par rapport aux forces gravitationnelles se traitent dans le cadre de l'approximation linéaire de la relativité générale. Ce que nous venons de développer peut servir de point de départ à l'étude plus complète d'un milieu dont on préciserait les propriétés élastiques et thermodynamiques.

En ce qui concerne la formule complète donnant la variation d'énergie du système due au rayonnement gravitationnel quadrupolaire, nous avons obtenu le résultat surprenant qu'elle est identique à celle établie dans [*4*] pour un milieu élastique dans lequel les forces de contraintes ne sont pas prépondérantes par rapport aux forces gravitationnelles. Or dans ce dernier cas, il faut mettre en œuvre des approximations d'ordre plus élevé. Cependant il n'est pas impossible que cette coïncidence soit significative.

RÉFÉRENCES

[*1*] S. CHANDRASEKHAR et F. ESPOSITO, The $2\frac{1}{2}$-post-newtonian equations of hydrodynamics and radiation reaction in general relativity, *Astrophys. J.*, t. **160**, 1970, p. 153.

[*2*] A. EDDINGTON, The spontaneous loss of energy of a spinning rod according to the relativity theory, *Phil. Mag.*, t. **46**, 1923, p. 1112.

[*3*] A. EINSTEIN, Uber Gravitationswellen, *Berliner Berichte*, 1918, p. 154.

[*4*] B. LINET, Force de réaction de rayonnement gravitationnel pour un milieu élastique. I. Perturbation d'un mouvement quasi-newtonien. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **34**, 1981, p. 419.

[*5*] A. PAPAPETROU, Rayonnement gravitationnel en première approximation, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **1**, 1964, p. 117.

[*6*] A. PAPAPETROU et B. LINET, Equation of motion including the reaction of gravitational radiation, *Gen. Rel. Grav. (à paraître)*.

[*7*] A. PERES, Classical radiation recoil, *Phys. Rev.*, t. **128**, 1962, p. 2471.

[*8*] A. PERES et N. ROSEN, Gravitational radiation damping of non-gravitational motion, *Ann. Physics*, t. **10**, 1960, p. 94.