ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. CRUMEYROLLE

Bilinéarité et géométrie affine attachées aux espaces de spineurs complexes, minkowskiens ou autres

Annales de l'I. H. P., section A, tome 34, nº 3 (1981), p. 351-372

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1981__34_3_351_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXXIV, n° 3, 1981, p. 351-372.

Section A :
Physique théorique.

Bilinéarité et géométrie affine attachées aux espaces de spineurs complexes, minkowskiens ou autres

par

A. CRUMEYROLLE
Université Paul Sabatier,
118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex

SOMMAIRE. — Nous montrons à nouveau que la notion de « twisteur », loin d'être nouvelle, se ramène à celle de spineur attaché à une algèbre de Clifford. L'affaiblissement du « principe de trialité » conduit naturellement à des algèbres d'interaction pour les champs et super-champs. Dans le cas minkowskien nous présentons méthodiquement des correspondances entre géométrie spinorielle et affine, clarifiant et complétant certains résultats donnés par Penrose et ses élèves dans un tout autre contexte.

INTRODUCTION

Le chapitre I examine dans l'esprit d'un article antérieur [5, *a*] la notion de « twisteur » qui selon certains auteurs fournirait un type nouveau d'algèbre pour l'espace de Minkowski, algèbre qui différerait de celle qui s'attache aux spineurs. Nous avons voulu montrer en détails que l'introduction des « twisteurs » est une pure convention de langage pour désigner des éléments de certaines sommes de spineurs ou d'espaces isomorphes. Peut-être pourrait-on toutefois parler, c'est commode, de revêtement « twistoriel » pour désigner le revêtement d'ordre 4 d'un groupe conforme, par opposition au revêtement spinoriel qui comme l'on sait est d'ordre 2. Les « twisteurs », en bref, sont des spineurs.

Le chapitre II développe des propriétés de bilinéarité sur les espaces spinoriels. On est ainsi conduit à étendre le principe de trialité [*3*] [*4*], sous une forme affaiblie à des espaces de dimension paire quelconque; on n'a pas donné les interprétations en mécanique quantique, qui transparaissent dans ce que l'on pourrait appeler pour les champs une « algèbre d'interaction », et qui fourniraient la base d'une présentation bien structurée de super-espaces, super-symétries et super-champs (cf. formules (4), n° 3, chap. II).

Après avoir rappelé quelques correspondances particulières en espace de Minkowski, on aborde toujours dans cet espace, des propriétés de correspondance entre spineurs purs et géométrie affine. Certaines de ces propriétés sont sous-jacentes ou même exprimées dans [*8*] [*9*], mais dans un tout autre langage, à notre avis trop encombré de considérations matricielles et de géométrie à l'ancienne mode, qui ne se prêtent pas aux généralisations sur les espaces courbes, comme le reconnaissent d'ailleurs les auteurs. Au contraire nous avons tenu à conserver des méthodes qui s'adaptent facilement à des variétés différentiables V_{2r} pseudoriemaniennes munies d'un champ de r-vecteurs isotropes et donc possédant une structure spinorielle. Malgré leur intérêt spéculatif nous ne pensons pas toutefois que ces notions de géométrie affine soient essentielles à l'heure actuelle; ce qui semble important c'est avant tout de se placer dans le cadre d'une bonne théorie spinorielle indépendante de cette débauche de calculs linéaires et de notations indicielles qui ont bien souvent limité les possibilités d'extension aux dimensions élevées et aux espaces courbes.

Compte tenu du développement des mathématiques au cours des trois dernières décennies, il convient d'abandonner la définition des espaces spinoriels comme couples d'espaces vectoriels complexes de dimension 2 munis d'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée et d'une involution (conjugaison) à partir desquels on reconstitue une algèbre de Clifford. Cette méthode (historiquement intéressante) est impropre aux généralisations en dimension quelconque et complètement inadaptée à l'introduction des spineurs symplectiques; on sait qu'elle conduit à des impasses. Nous rappelons aux n° 4 et n° 5 du chapitre II comment on retrouve de manière extrêmement rapide les propriétés particulières aux espaces de Minkowski, le rôle de certains groupes unitaires « neutres » étant lui-même clarifié au chapitre I, en même temps que la notion de « twisteur » apparue de façon si mystérieuse dans la Physique théorique.

Le lecteur qui ne pourra consulter [*4*], ouvrage dont l'abord est assez ardu pour un physicien théoricien, trouvera dans notre polycopié plus élémentaire « Algèbres de Clifford et spineurs » (Toulouse 1974, Offilib., Paris, 48, rue Gay-Lussac) tous les éléments indispensables à la parfaite compréhension de cet article. Une bonne connaissance des passages essentiels de nos publications [*5*] est aussi souhaitable.

CHAPITRE I

LES « TWISTEURS » OU UNE CONVENTION DE LANGAGE

1. Introduction.

C(Q) étant une algèbre de Clifford réelle, C(Q′) sa complexifiée, nous avons proposé dans [5, *a*] d'appeler « twisteur » d'ordre s pour C(Q′) (ou pour C(Q)) tout élément d'un espace vectoriel isomorphe à la somme directe de s espaces de spineurs, chacun de ces s espaces étant classiquement un idéal minimal à gauche pour l'algèbre C(Q′) ou $C^+(Q')$. Un « twisteur » est donc un élément d'un idéal à gauche d'une algèbre de Clifford. Dans la suite nous *supposerons* $s = 2$ *et nous parlerons de « twisteur » seulement dans ce sens.*

Nous considèrerons aussi que l'espace vectoriel E est réel, de dimension n finie, n pair, $n = 2r$, muni d'une métrique non dégénérée de signature (p, q), p signes $(+)$, q signes $(-)$, $p + q = n$ ($p \leqslant q$ pour fixer les idées). Le cas où n est impair n'est pas, comme l'on sait, essentiellement différent, surtout lorsque l'on considère uniquement l'algèbre $C^+(Q)$. Comme il se trouve que le cas où n est pair est le plus important pour la plupart des applications nous laisserons au lecteur intéressé le soin d'adapter au cas impair les développements ci-dessous.

Nous écrirons

$$C(Q) = C(p, q)$$
$$C(Q') = C'(p, q).$$

On rappelle le résultat connu, le produit tensoriel étant celui d'algèbres non graduées :

$$C(p + 1, q + 1) \simeq C(p, q) \otimes C(1, 1).$$

$(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E, $(e_i)^2 = 1$, si $1 \leqslant i \leqslant p$, $(e_i)^2 = -1$ si $p + 1 \leqslant i \leqslant n$. On considère une décomposition de Witt avec vecteurs isotropes, constituant une base du complexifié $E_{\mathbb{C}} = E'(p, q)$:

$$x_1 = \frac{e_1 + e_n}{2}, \ldots, x_p = \frac{e_p + e_{n-p+1}}{2},$$
$$x_{p+1} = \frac{ie_{p+1} + e_{n-p}}{2}, \ldots, x_r = \frac{ie_r + e_{n-r+1}}{2}$$
$$y_1 = \frac{e_1 - e_n}{2}, \ldots, y_p = \frac{e_p - e_{n-p+1}}{2},$$
$$y_{p+1} = \frac{ie_{p+1} - e_{n-p}}{2}, \ldots, y_r = \frac{ie_r - e_{n-r+1}}{2}.$$

B étant associée à Q, on notera bien que :

$$B(x_i, y_j) = \frac{\delta_{ij}}{2} \qquad \text{et que} \qquad x_i y_j + y_j x_i = \delta_{ij} .$$

(x_i, y_j) sera dite de base de Witt spéciale de $E'(p, q)$.

$f = y_1 y_2 \ldots y_r$ est un r-vecteur isotrope. $C(Q')f$ est un espace de spineurs pour $C(Q')$.

Soient f et f' deux r-vecteurs isotropes tels que la somme

$$C(Q')f \oplus C(Q')f'$$

soit directe et définisse donc un espace de « twisteurs » pour $C(Q')$.

2. **Proposition 1.**

PROPOSITION 1. — *On peut trouver une représentation de* $C'(p+1, q+1)$ *dans tout espace* $C(Q')f \oplus C(Q')f'$ *de « twisteurs » pour* $C(Q')$, *de manière que* $C(Q')f$ *et* $C(Q')f'$ *soient respectivement isomorphes à l'espace des spineurs pairs et impairs pour* $C'(p + 1, q + 1)$.

Si $f = y_1 y_2 \ldots y_r$, posons $f' = \gamma f \gamma^{-1}$, avec $x'_i = \gamma x_i \gamma^{-1}$, $y'_i = \gamma y_i \gamma^{-1}$, (x_i, y_j) et (x'_i, y'_j) sont des bases de $E'(p, q)$, $\gamma \in \mathrm{Pin}\, Q'$.

(x, y) étant une base de Witt spéciale de $E'(1, 1)$,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_r, x, y_1, y_2, \ldots, y_r, y)$$

est une base de Witt spéciale de $E'(p + 1, q + 1)$. On pose $\Phi = f \otimes y = fy$, et un idéal à gauche minimal $\mathscr{I}$ de $C'(p + 1, q + 1)$ a pour base les $x_{i_1} \ldots x_{i_h} x\Phi$, $x_{i_1} \ldots x_{i_h}\Phi$, $1 \leqslant i_1 < i_r \ldots < i_h \leqslant r$.

A $(x_{i_1} \ldots x_{i_h} f)$ nous associons $x_{i_1} \ldots x_{i_h}\Phi$ ou $x_{i_1} \ldots x_{i_h} \otimes x\Phi$, selon que h est pair ou impair.

A $(x'_{i_1} \ldots x'_{i_h} f'$ nous associons $x'_{i_1} \ldots x'_{ih}\gamma\Phi$ ou $x'_{i_1} \ldots x'_{i_h}\gamma \otimes x\Phi$ selon que h est pair ou impair, lorsque γ est impair ; nous renversons cette correspondance si γ est pair.

Que γ soit pair ou impair, nous définissons un isomorphisme i de $C(Q')f \oplus C(Q')f'$ sur $C'(p + 1, q + 1)\Phi$ en étendant linéairement cette correspondance.

Pour obtenir la représentation de $(C')^+(p + 1, q + 1)$ dans $C(Q')f$ (et $C(Q')f'$), on associera à w pair :

$$\rho_w = i^{-1} \circ w \circ i ,$$

où w est ici le produit par w.

On remarquera en effet que l'on a :

$$w = u_1 + (u_2 \otimes x) + (u_3 \otimes y) + (u_4 \otimes xy) , \quad u_i \in C(Q') , \quad i = 1, 2, 3, 4 ,$$

et les règles opératoires :

$$w(x_{i_1} \dots x_{i_h} \otimes x)\Phi = (u_1 \otimes x + 2u_3 + 2u_4 \otimes x)x_{i_1} \dots x_{i_h}\Phi$$
$$w(x_{i_1} \dots x_{i_h}\Phi) = (u_1 + u_2 \otimes x)(x_{i_1} \dots x_{i_h}\Phi)\,,$$

u_1 et u_4 sont pairs, u_2 et u_3 impairs, de sorte que le produit par w transforme bien un élément de $i(C(Q')f)$ en un élément de $i(C(Q')f)$ et un élément de $i(C(Q')f')$ en un élément de $i(C(Q')f')$.

3. Remarque 1.

(e_0, e_{n+1}) étant une base de $E(1, 1)$ avec $(e_0)^2 = 1$ et $(e_{n+1})^2 = -1$, on peut adjoindre ces deux vecteurs à $e_1, e_2, \dots, e_n$, pour obtenir une base orthogonale de $E(p + 1, q + 1)$.

Cette base étant supposée choisie, $C(p, q)$ est naturellement munie d'une structure euclidienne qui étend celle de $E(p, q) = E(Q)$, telle que

$$Q(e_{i_1}e_{i_2} \dots e_{i_k}) = (e_{i_1}e_{i_2} \dots e_{i_k})^2\,.$$

Notant e_0 et $\hat{e}_N$ les images de 1 et $e_N = e_1e_2 \dots e_n$, dans cette structure $Q(\hat{e}_0) = 1$, $Q(\hat{e}_N) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^q = (-1)^{r+q}$; si $r + q$ est impair on peut prendre $\hat{e}_0 = e_0$, $\hat{e}_N = e_{n+1}$, ce qui donne une construction moins formelle de $C(p + 1, q + 1)$ (indépendante d'ailleurs de tout choix de la base orthogonale). Si on complexifie et si $r + q$ est pair, on remplace e_N par ie_N, retrouvant la même situation.

4. Introduction d'une pseudo-norme hermitienne.

On peut munir l'espace $C(Q')f$ des spineurs d'une forme hermitienne $\mathscr{H}$ telle que :

$$\beta(\overline{uf})vf = \mathscr{H}(uf, vf)\gamma f, \qquad \text{avec} \qquad \overline{f} = \gamma f \gamma^{-1}$$

définissant le spineur par γf [5, c]. Si la forme quadratique Q est non définie positive $\mathscr{H}$ est une forme de signature neutre [6], non dégénérée. Il serait loisible de définir $\tilde{\mathscr{H}}$ à l'aide de $\tilde{\beta} = \beta . \alpha$, α automorphisme principal.

PROPOSITION 2. — *Si* $p+q=2r$, *la composante connexe de* Spin $(p+1, q+1)$ *est un sous-groupe de* $SU(r, r)$.

Construisons $\mathscr{H}$ pour les spineurs associés à $C'(p + 1, q + 1)$.

Le rectangle blanc $\boxed{}$ désignant la composante connexe de l'identité, prenons $\rho \in \boxed{\text{Spin }(p, q)}$, sous-groupe inclus dans $\boxed{\text{Spin }(p + 1, q + 1)}$, comme $\beta(\rho)\rho = 1$, la définition de $\mathscr{H}$ montre que $\rho \in U(r, r)$.

On s'assure que :

$$\exp\left(\frac{e_0 + e_{n+1}}{2} z\right) = 1 + \frac{e_0 + e_{n+1}}{2} z, \qquad z \in \mathrm{E}(p, q),$$

$$\exp\left(\frac{e_0 - e_{n+1}}{2} z\right) = 1 - \frac{e_0 - e_{n+1}}{2} z, \qquad z \in \mathrm{E}(p, q),$$

$$\exp\left(\frac{e_0 e_{n+1}}{2} \eta\right), \qquad \eta \in \mathbb{R}^*,$$

appartiennent aussi à U(r, r), car :

$$\left(1 + \frac{e_0 \pm e_{n+1}}{2} z\right)\beta\left(1 + \frac{e_0 \pm e_{n+1}}{2} z\right) = 1$$

$$\exp\left(\frac{e_0 e_{n-1}}{2} \eta\right) \exp\left(\beta\left(\frac{e_0 e_{n+1}}{2} \eta\right)\right) = 1\,.$$

Les divers éléments envisagés engendrent la composante connexe de Spin ($p + 1$, $q + 1$), qui est ainsi incluse dans U(r, r). Mais $\theta_g : u \to gu$ est tel que

$$\mathrm{Det}\,\theta_g = (\mathrm{N}(g))^{2^{n+1}} \qquad [5, b], \text{ ici} \qquad \mathrm{N}(g) = 1\,, \qquad \mathrm{Det}\,\theta_g = 1$$

de sorte que $\boxed{\mathrm{Spin}\,(p+1, q+1)} \in \mathrm{SU}(r, r)$ (1').

Remarque. — Quand $p + q$ est pair, le revêtement d'ordre 4 de la composante connexe $\boxed{\mathrm{C}_n(p, q)}$ du groupe conforme est soit Spin ($p+1$, $q+1$), soit $\mathrm{G}_0^+(p + 1, q + 1)$ (le cas impair est différent, pour cette remarque voir [*1*] [*7*]). Spin ($p+1$, $q + 1$) opère sur l'espace $(\mathrm{C}')^+(p + 1, q + 1)\Phi$ des semi-spineurs, isomorphe à $\mathrm{C}'(p, q)f$ qui apparaît comme un espace de représentation « twistorielle » pour l'algèbre $\mathrm{C}'(p, q)$. Il naît de là une confusion assez répandue, certains auteurs considérant alors $\mathrm{C}'(p, q)f$ comme l'espace de « twisteurs » pour $\mathrm{C}'(p, q)$; en fait l'espace complet des « twisteurs » est $\mathrm{C}'(p, q)f \oplus \mathrm{C}'(p, q)f'$ comme l'explique la proposition 1.

5. Le cas relativiste.

$$r = 2, \quad q = 3, \quad p = 1 \qquad (\text{alors } (r + 1)(2r + 1) = (2r)^2 - 1 = 15)\,.$$

PROPOSITION 3. — $\boxed{\mathrm{Spin}\,(2, 4)}$ *est isomorphe à* SU(2, 2).

De cette propriété déjà connue nous donnons la démonstration immédiate suivante.

Nous observerons, par particularisation du raisonnement donné pour la proposition 2 que ces 2 groupes ont la même algèbre de Lie, de plus ils ont en commun un voisinage de l'identité qui les engendre l'un et l'autre, la loi de groupe pouvant dans les deux cas s'identifier au produit cliffordien.

On peut montrer que la composante connexe de l'identité de Spin (2, 4) est le groupe $G_0^+(2, 4)$ [5, *b*] et que $G_0^+(2, 4)$ est le revêtement d'ordre 4 de la composante connexe de $C_4(1, 3)$ [*1*] [*7*].

Ici $e_N e_i = - e_i e_N$, $i = 1, 2, 3, 4$, de sorte que $\hat{e}_N$ peut s'identifier à e_N, et le noyau du revêtement du groupe conforme est ± 1, $\pm e_N$.

On voit le rôle joué par la dimension et par la signature.

On peut appeler « twisteur pour C(0, 2) ou C'(0, 2) », tout élément de l'espace des spineurs $C'(1, 3)f$, $f = y_1 y_2$, tandis que les « twisteurs pour C(1, 3) » sont les spineurs construits à partir de C(2, 4) après complexification. Ce sont de tels « twisteurs » (à 4 composantes ou à 8 composantes complexes) qu'avait introduit Penrose par une approche fort différente et très détournée [*8*].

En fait on pourra facultativement parler de « twisteurs » toutes les fois qu'on s'intéressera spécialement aux espaces de représentations irréductibles du revêtement d'un groupe conforme $C_n(p, q)$ (revêtement dont le noyau est un groupe d'ordre 4) ; comme ce revêtement est le groupe $\mathrm{Pin}\,(p + 1, q + 1)$ on voit qu'il n'y a rien dans la notion de twisteur qui ne soit dans la notion de spineur si ce n'est que les projections sur le groupe orthogonal $O(p + 1, q + 1)$ et sur le groupe conforme $C_n(p, q)$ se font de manières différentes, l'un des noyaux étant à 2 éléments, l'autre à 4 éléments. *Il est donc abusif et même incorrect de présenter les « twisteurs » comme des objets distincts des spineurs.*

En résumé :

Les « twisteurs pour l'algèbre de Clifford $C(p, q)$ » (*ou* $C'(p . q)$) *sont les spineurs pour l'algèbre de Clifford* $C(p + 1, q + 1)$ (*ou* $C'(p+1, q+1)$) *et il pourra être commode de qualifier de « twistoriel » le revêtement d'ordre* 4 *du groupe conforme* $C_n(p, q)$, *ce dernier isomorphe à* $\dfrac{(O(p + 1, q + 1)}{\mathbb{Z}_2}$.

CHAPITRE II

PROPRIÉTÉS DE GÉOMÉTRIE LINÉAIRE ET AFFINE LIÉES AUX SPINEURS

1. **Introduction.**

Certaines propriétés de géométrie spinorielle sont susceptibles d'être traduites en propriétés de géométrie linéaire et affine pour l'espace E (ou $E_{\mathbb{C}}$), parfois même ces propriétés ont été prises comme point de départ pour donner des définitions concernant les structures spinorielles ou les « twisteurs », comme le fait R. Penrose [*8*]. Le cas où E est minkowskien est très particulier et donne lieu à des propriétés spéciales, cela n'a pas été clairement exprimé chez beaucoup d'auteurs et a été la source de beaucoup de confusions au sujet des spineurs. Comme le cas minkowskien n'est pas le seul à prendre en compte, même en physique relativiste où la théorie des champs quantiques fait intervenir des fibrés spinoriels plus généraux (d'ailleurs orthogonaux ou symplectiques), il importe de se placer autant que possible dans un cadre indépendant de la dimension et de la signature pour en faire ensuite application au cas minkowskien en notant ses particularités : ainsi devraient se présenter, la « géométrie twistorielle », le « formalisme vectoriel complexe », le principe « affaibli » de trialité, la théorie des super-espaces et des super-champs, etc. Dans ce qui suit on supposera fixée une structure spinorielle déterminée par le choix d'un r-vecteur isotrope f ; les problèmes liés au changement de structure spinorielle ne seront pas abordés, ils sont cependant d'un grand intérêt [*2*] (K. Bujaska).

2. Applications bilinéaires équivariantes relativement à l'action du groupe G_0^+.

$G_0^+ = G_0^+(p, q)$ est le sous-groupe de Spin (p, q) dont les éléments sont de « norme » spinorielle 1. C'est un groupe connexe, d'indice 2 dans Spin (p, q) [*4*].

G_0^+ *opère dans* $S = C(Q')f$ *par multiplication à gauche et dans* E' *par :* $(x, g) \to gxg^{-1}$ *; une application bilinéaire* φ *de* $S \times S$ *dans* E' *est équivariante pour l'action de* G_0^+ *si :*

$$\underline{\varphi(guf, gvf) = g(\varphi(uf, vf))g^{-1}, \qquad \forall g \in G_0^+ .} \tag{1}$$

Nous supposerons de plus que φ *est non dégénérée, au sens suivant :*

Si $\varphi(uf, vf) = 0$, $\forall uf \in S$, *on a nécessairement* $vf = 0$, ce qui signifie que Ψ_{uf} avec $\Psi_{uf}(vf) = \varphi(uf, vf)$ est injective pour tout uf. Si $w \in (E')^*$, $w \circ \varphi$ est une forme bilinéaire non dégénérée.

ρ étant la représentation dans S : $uf \to guf$, $g \in G_0^+$, ω sa duale, $\omega(g) = {}^t\rho(g^{-1})$, soit θ une forme linéaire arbitrairement choisie sur E', écrivons $uf = s$, $vf = t$ et $\Phi_s(t) = \theta \circ \varphi(s, t)$, $\Phi_s \in (E')^*$, si nous posons $gxg^{-1} = A(x)$, $x \in E'$, alors (1) se traduit par :

$$\langle \Phi_{gs}, t \rangle = \langle {}^tA(\Phi_s), g^{-1}t \rangle = \langle (\omega(g) \circ {}^tA)(\Phi_s), t \rangle$$

puisque $\theta(A(x)) = {}^tA(\theta)(x)$, et en introduisant une dualité dans S notée $\langle\, ,\, \rangle$. Ainsi :

$$\omega(g) \circ {}^tA \circ \Phi_s = \Phi_{gs} ,$$

pour tout $s \in S$, donc

$$\omega(g) \circ {}^tA \circ \Phi = \Phi \circ \rho(g) ,$$

et de même s'il existe une autre application analogue φ',

$$\omega(g) \circ {}^t\mathrm{A} \circ \Phi' = \Phi' \circ \rho(g),$$

d'où l'on déduit que $\rho(g)$ commute avec $\Phi^{-1} \circ \Phi' = \psi$. ψ commute donc avec tout élément de $C^+(Q')$, espace isomorphe à End $S^+ \times$ End S^-. Donc ψ commute avec tout endomorphisme de matrice

$$\begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix}, \qquad A, B \in M_{r'}(\mathbb{C}), \qquad r' = 2^{r-1},$$

et ψ a pour matrice diag $(\lambda I_{r'}, \mu I_{r'})$

$$\psi = \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2, \qquad \alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \in \text{End } S.$$

$$\Phi' = \Phi \circ \psi = \lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2, \qquad \Phi_1, \Phi_2 \in \text{Hom }(S, S^*)$$

d'où :

$$\varphi' = \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2,$$

donc φ' appartient à un espace de dimension 2 au plus. Nous verrons plus loin que la dimension de cet espace est effectivement 2 si r est pair. Sans cette réserve nous avons obtenu :

PROPOSITION 1. — *L'ensemble des applications bilinéaires φ de $S \times S$ dans E', équivariantes pour l'action de G_0^+, et non dégénérées, est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{C}$, si r est pair. Si r est impair cet espace a au plus la dimension 2.*

Remarques. — On observera que cette proposition est l'analogue de celle qui concerne les formes bilinéaires invariantes pour l'action de G_0^+. Une démonstration analogue est aussi valable pour les formes sesquilinéaires invariantes pour l'action de G_0^+.

Il serait aussi loisible de chercher φ à valeur dans un sous-espace de $C(Q')$. On obtiendrait encore un espace de dimension 2 au plus (cf. plus bas).

On connaît l'exemple

$$\psi : (uf, vf) \to uf\beta(v) \in C(Q'),$$

ici l'image décrit tout $C(Q')$, de même

$$\tilde{\psi} : (uf, vf) \to uf\tilde{\beta}(v) \in C(Q'),$$

d'où l'on déduit que l'ensemble des applications bilinéaires équivariantes de $S \times S$ dans $C(Q')$ est un espace complexe de dimension 2, au plus.

Citons aussi :

$$(uf, vf) \in S^- \otimes S^+ \to uf\beta(v) + \beta(uf\beta(v))$$

où l'image décrit tout E' en espace de Minkowski utilisé par K. Bugajska dans [*2*].

3. Le principe affaibli de trialité, ou principe d'interaction.

On rappelle qu'une forme bilinéaire $\mathscr{B}$ sur $S \times S$ est définie par :

$$\mathscr{B}(uf, vf)f = \beta(uf)vf,$$

β anti-automorphisme principal de $C(Q')$ et

$$\mathscr{B}(vf, uf) = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} \mathscr{B}(uf, vf). \tag{2}$$

$\mathscr{B}$ est non dégénérée, soit symétrique, soit antisymétrique. Le principe de trialité tel qu'il est présenté par Chevalley [*4*] se résume en ce qui suit :

$$r = 4, \qquad \dim S^+ = \dim S^- = \dim E' = 8,$$

$\mathscr{B}$ est symétrique, $\mathscr{B}$ est nulle sur $S^+ \times S^-$.

Il existe sur S une forme quadratique γ telle que

$$\gamma(uf) = \mathscr{B}(uf, uf).$$

$A = E' \times S$ et A est muni d'une forme bilinéaire Λ, telle que

$$\Lambda(x + uf, x' + u'f) = B(x, x') + \mathscr{B}(uf, u'f) \qquad x, x' \in E', \ uf, \ u'f \in S.$$

Λ est non dégénérée, E', S^+, S^- sont non isotropes pour Λ et l'orthogonal de l'un des trois espaces (pour Λ) est la somme des 2 autres.

On introduit une forme cubique F_0 sur A par :

$$F_0(x + uf + u'f) = \mathscr{B}(xuf, u'f), \qquad x \in E', \ uf \in S^+, \ u'f \in S^-$$

et

$$F_0(x + uf + u'f) = \mathscr{B}(uf, xu'f) \qquad \text{(immédiat)}.$$

De F_0 on déduit par « polarisation » une forme trilinéaire Φ_0 sur $A \times A \times A$; $F_0(a\xi + b\eta + c\zeta)$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, est un polynôme en a, b, c, le coefficient de abc est $\Phi_0(\xi, \eta, \zeta)$, Φ_0 est symétrique.

Il existe alors sur A une structure d'algèbre commutative, mais non associative : r étant non dégénérée, $\forall \zeta \in A$, il existe ω unique, $\omega \in A$, tel que :

$$\Lambda(\omega, \zeta) = \Phi_0(\xi, \eta, \zeta); \tag{3}$$

on écrit :

$$\omega = \xi \circ \eta = \eta \circ \xi.$$

Il est alors possible de voir, en s'appuyant sur deux propositions faciles à établir — si $\xi \in E'$, $\eta \in S^+$, $\zeta \in S^-$, on a $\Phi(\xi, \eta, \zeta) = F(\xi + \eta + \zeta)$, et $\xi \circ \eta = 0$ si ξ, η appartiennent tous les deux à un et un seul des espaces E', S^+, S^- — que :

$$\underline{E' \circ S^+ \subseteq S^-, \quad S^+ \circ S^- \subseteq E', \quad S^- \circ E' \subseteq S^+} \tag{4}$$

et que tout automorphisme de l'espace vectoriel A qui laisse Λ et F_0 invariantes est un automorphisme de l'algèbre A(o).

Des calculs de routine assurent que :

$$guf \circ gu'f = \mathrm{N}(g)g.(uf \circ u'f).g^{-1}$$

donc que la condition (1) est satisfaite si $g \in \mathrm{G}_0^+$, $uf \in \mathrm{S}$, $u'f \in \mathrm{S}$.

La formule $uf \circ (uf \circ u'f) = \gamma(uf)u'f$ [*4*] assure que si $uf \circ u'f = 0$, $\forall uf \in \mathrm{S}^+$, on a nécessairement $uf = 0$, de sorte que l'on est dans les conditions de la proposition 1 (on montre que $uf \circ u'f = 0$ si uf et $u'f$ sont de même parité).

La proposition 1 est donc complètement établie pour $r = 4$.

Dans ces rappels on n'a pas introduit explicitement l'automorphisme $\mathcal{J}$ *d'ordre 3 de* A, *qui laisse* Λ *et* F_0 *invariantes, applique* E′ *sur* S^+, S^+ *sur* S^- *et* S^- *sur* E′, *dont les propriétés ainsi énoncées constituent le « principe de trialité » et sont spéciales au cas* $r = 4$ ($2^{r-1} = 2r \Rightarrow r = 4$).

Cependant la formule $uf \circ (uf \circ u'f) = \gamma(uf)u'f$ est déduite de la démonstration de ce principe de trialité. On peut en éviter l'emploi, en observant que

$$\Phi_0(s, uf, u'f) = \mathrm{F}_0(x + uf + u'f) = \mathscr{B}(xuf, u'f) = \Lambda(uf \circ u'f, x)\,, \qquad \forall x \in \mathrm{E}',$$

de sorte que si $uf \circ u'f = 0$, $\forall uf \in \mathrm{S}^+$, $u'f \in \mathrm{S}^-$, la non dégénérescence de $\mathscr{B}$ sur $\mathrm{S}^- \times \mathrm{S}^-$ entraîne $u'f = 0$.

Nous appellerons « *principe de trialité affaibli* » *l'existence sur* A *d'une loi de composition o, bilinéaire et symétrique satisfaisant seulement à* (4). *On a des situations de ce type* (cf. plus bas).

Supposons maintenant que $n = 2r$ est quelconque. Si $r = 2, 3 \pmod 4$, $\mathscr{B}$ est antisymétrique ; si $r = 4, 5 \pmod 4$, $\mathscr{B}$ est symétrique. Si r est pair, $\mathscr{B}$ est nulle sur $\mathrm{S}^+ \times \mathrm{S}^-$ et $\mathrm{S}^- \times \mathrm{S}^+$; si r est impair $\mathscr{B}$ est nulle sur $\mathrm{S}^+ \times \mathrm{S}^+$ et $\mathrm{S}^- \times \mathrm{S}^-$ [*4*].

On peut toujours munir $\mathrm{A} = \mathrm{E}' \times \mathrm{S}$ d'une forme bilinéaire Λ telle que :

$$\Lambda(x + uf, x' + u'f) = \mathrm{B}(x, x') + \mathscr{B}(uf, u'f)\,,$$

Λ est non dégénérée (évident).

- *Si r est pair*, E′, S^+, S^- sont non isotropes pour Λ, la définition de F_0,

$$(\mathrm{F}_0(x + uf + u'f) = \mathscr{B}(xuf, u'f)\,, \qquad x \in \mathrm{E}',\ uf \in \mathrm{S}^+,\ u'f \in \mathrm{S}^-)$$

et celle de Φ_0 s'étendent et on a encore la loi $\circ$ satisfaisant (4) et

$$uf \circ u'f = 0\,, \qquad \forall uf \in \mathrm{S}^+ \text{ entraîne } u'f = 0\,.$$

Il existe si r est pair un principe affaibli de trialité et la proposition 1 antérieure est complètement justifiée (on a deux applications linéairement indépendantes satisfaisant aux hypothèses du 2) l'une avec β l'autre avec $\tilde{\beta}$.

- *Si r est impair.*

Pour trouver un principe affaibli de trialité remplaçons E′ par :

$$\mathrm{C}_2 = \Lambda^0(\mathrm{E}') + \Lambda^1(\mathrm{E}') + \Lambda^2(\mathrm{E}')\,,$$

$\Lambda(E')$ étant l'algèbre extérieure de E'. C_2 est le sous-espace de $C(Q')$ engendré par les produits d'au plus 2 éléments de E' dans $C(Q')$.

On prendra $A = C_2 \times S$ et en remarquant que $\mathbb{C}_2$ est muni par B d'une forme bilinéaire B_2 non dégénérée, on posera pour r impair :

$$\Lambda(z + uf, z' + u'f) = B_2(z, z') + \mathscr{B}(uf, u'f)$$

$$F_0(z + uf + u'f) = \mathscr{B}(zuf, u'f), \qquad z \in C_2, \ uf \in S^+, \ u'f \in S^-$$

et Φ_0 se définira comme plus haut. Des calculs parallèles conduisent à :

(5) $\underline{C_2 \circ S^+ \subseteq S^+, \quad C_2 \circ S^- \subseteq S^-, \quad S^+ \circ S^- \subseteq C_2, \quad S^+ \circ S^+ = S^- \circ S^- = 0}$

et la condition de régularité est satisfaite.

Remarques. — En se bornant à C_2^+, on pourrait également obtenir un principe affaibli de trialité.

On pourrait prendre au lieu de C_2^+, C_{r-1}^+ de dimension 2^{2r-2} si r est impair, muni de l'extension naturelle de la forme B. Quand r est pair on peut également introduire des sous-espaces de $C^-(E')$.

4. La conjugaison de charge généralisée [5, c].

$\bar{f}$ étant le complexe conjugué de f, tout spineur appartenant à

$$C(Q')f \cap \bar{f}C(Q')$$

est un spineur pur, et s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \lambda\gamma f, \quad \gamma f &= x_{p+1}x_{p+2} \ldots x_r f \quad (\lambda \text{ scalaire}, h = r - p) \quad [5, c] \\ &= i^h e_{p+1}e_{p+2} \ldots e_r f \quad (\text{avec } \gamma = i^h e_{p+1}e_{p+2} \ldots e_r, \ N(\gamma) = 1). \end{aligned}$$

La conjugaison de charge $\mathscr{C}$ est telle que

$$\mathscr{C}(uf) = \bar{u}\gamma f, \qquad \mathscr{C}(uf) \text{ est encore notée } (uf)^*.$$

On peut choisir arbitrairement le facteur λ, il est loisible de faire ce choix de manière que :

$$\mathscr{C}^2 = \varepsilon' \, \mathrm{Id}, \qquad \varepsilon' = (-1)^{\frac{h(h+1)}{2}}$$

avec $h = r - p$ et avec $\bar{\gamma}\gamma f = \varepsilon' f$ [5, c], alors

(6) $$\underline{(uf)^* \otimes (vf)^* = \overline{(uf \otimes vf)} = \overline{uf\beta(v)}}.$$

Calculant

$$\mathscr{B}(x(uf)^*, (u'f)^*) = B((uf^*) \circ (u'f)^*, x)$$

pour tout x réel il vient :

(7) $\underline{(uf)^* \circ (u'f)^* = \overline{\varepsilon(uf) \circ (u'f)}} \qquad (\beta(f) = \varepsilon f, \ \varepsilon = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}})$

avec $uf \in S$, $u'f \in S$, $(uf \circ u'f) \in E'$ (ou C_2), $x \in E'$ (ou C_2).

Enfin le lecteur pourra aisément vérifier que :

(8) $$\underline{\mathcal{H}((uf)^*, vf) = \varepsilon\mathcal{H}((vf)^*, uf)}$$

On observera que la conjugaison de charge change la parité si et seulement si h est impair.

5. Quelques propriétés particulières au cas relativiste restreint (R. R.) ou minkowskien.

$$r = 2, \quad k = 1, \quad h = 1, \quad \varepsilon' = -1, \quad \mathscr{C}^2 = -1$$

et on peut choisir $\gamma f = x_2 f = ie_2 f$.

Une base locale pour les spineurs impairs (espace S^-) est

$$\underline{(x_1 f, x_2 f) = (\rho, \sigma)}$$

et on en déduit par $\mathscr{C}$ une base (ρ^*, σ^*) pour les spineurs pairs (espace S^+)

$$\underline{(f, x_1 x_2 f) = (-\sigma^*, \rho^*)}.$$

$\psi(uf \otimes vf)$ s'identifie à $uf\beta(v)$ et constitue un isomorphisme linéaire classique de $S \otimes S$ sur $C(Q')$. Des calculs de routine donnent alors en posant $\chi = (1 + \beta) \circ \psi$ [2]

(9) $$\chi(\rho \otimes \rho^*) = x_1, \quad \chi(\sigma \otimes \rho^*) = x_2, \quad \chi(\sigma \otimes \sigma^*) = y_1, \quad \chi(\rho \otimes \sigma^*) = -y_2$$

χ est un isomorphisme linéaire de $S^- \otimes S^+$ sur E', équivariant pour l'action de G_0^+.

Soit $uf \otimes vf$, écrit $(a\rho + b\sigma) \otimes (-a'\sigma^* + b'\rho^*)$,

(10) $$\chi(uf \otimes vf) = ab'x_1 + bb'x_2 - a'by_1 + aa'y_2$$

et on voit immédiatement que $\chi(uf \otimes vf)$ est isotrope si $uf \in S^-$ et $vf \in S^+$.

Ce vecteur isotrope est réel si et seulement si :

$$aa' = -\overline{bb'}, \qquad ab' = \overline{ab'}, \qquad a'b = \overline{a'b},$$

c'est le cas en particulier si $b = -\overline{a'}$ et $a = \overline{b'}$, donc

(11) $$\underline{\chi((uf) \otimes (uf)^*)}, \qquad \underline{uf \in S^-}$$

est un vecteur réel isotrope.

Il en est de même en ce qui concerne la *réalité* de

$$\chi(uf \otimes (vf)^* + vf \otimes (uf)^*),$$

$uf, vf \in S^-$ qui n'est autre que l'image par χ de :

$$(u + v)f \otimes ((u + v)f)^* - uf \otimes (uf)^* - vf \otimes (vf)^* \quad [2].$$

Comparons χ et $\circ$, principe de trialité affaibli. $f \circ x_1 f$ s'obtient de $\mathscr{B}(xf, x_1 f) = \Lambda(f \circ x_1 f, x) = B(f \circ x_1 f, x)$ pour tout $x \in E'$. Prenant x successivement égal à x_1, y_1, y_2, on voit que $f \circ x_1 f$ est colinéaire à y_2.

Si on fait $x = x_2$, il vient

$$- f x_2 x_1 f = \mathrm{B}(f \circ x_1 f, x_2) f = - f$$

$$\left.\begin{array}{lrl}
\text{d'où} & f \circ x_1 f = - 2y_2 & \underline{\sigma^* \circ \rho = 2y_2} \\
\text{et de même} & f \circ x_2 f = 2y_1 & \underline{\sigma^* \circ \sigma = - 2y_1} \\
 & x_1 x_2 f \circ x_1 f = - 2x_1 & \underline{\rho^* \circ \rho = - 2x_1} \\
 & x_1 x_2 f \circ x_2 f = - 2x_2 & \underline{\rho^* \circ \sigma = - 2x_2}
\end{array}\right\} \qquad (12)$$

PROPOSITION 3. — *En espace de Minkowski, modulo un facteur constant (non significatif), l'isomorphisme fondamental χ se ramène à l'application du principe de trialité affaibli.*

Si donc on construit des propriétés linéaires et affines naturellement liées aux propriétés des spineurs à l'aide de l'isomorphisme χ, en espace de Minkowski, une généralisation possible de ces propriétés en dimension quelconque sera fournie par le principe de trialité affaibli.

6. **La description linéaire et affine des propriétés des spineurs en espace de Minkowski** (R. R.).

Beaucoup de ces propriétés pourraient s'exposer dans le cadre d'un espace quelconque réel de dimension 4, complexifié. Nous nous bornerons, pour des raisons évidentes à considérer le complexifié d'un espace de Minkowski.

PROPOSITION 4. — *Tout semi-spineur* (R. R.) *est un spineur pur et réciproquement.*

La réciproque est connue.

Si F est le plan (x_1, x_2), F' le plan (y_1, y_2).

$\mathrm{E}' = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}'$; selon [*4*] pour que uf soit un spineur pur il faut et il suffit que l'on puisse écrire :

$$u = \lambda \exp v . z_1 z_2 \ldots z_k, \qquad \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad v \in \Lambda^2 \mathrm{F},$$

$z_1, z_2 \ldots z_k$ vecteurs linéairement indépendants de F. Cela donne les écritures possibles pour u :

$$\lambda(1 + a x_1 x_2) f, \qquad \lambda(1 + a x_1 x_2)(b x_1 + c x_2)(b' x_1 + c' x_2) f,$$
$$\lambda(1 + a x_1 x_2)(b x_1 + b x_2) f.$$

On voit que :

$$(\alpha x_1 + \beta x_2) f \qquad \text{et} \qquad (\alpha' + \beta' x_1 x_2) f$$

sont de l'une de ces formes (s'ils sont non nuls).

PROPOSITION 5. — *A tout semi-spineur* (R. R.) *de* $\mathrm{C}'(1.3) = \mathrm{C}'$ *on peut associer un plan totalement isotrope* (t. i.).

En effet l'espace des spineurs $C'f$ étant choisi, il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des s. t. i. m. et celui des champs de spineurs purs, modulo un coefficient complexe non nul [4]. Les s. t. i. m. sont ici de dimension 2.

Conséquence. — A un spineur, élément de $C'f$, qui s'écrit :

$$uf = u^+f + u^-f$$

en somme directe de 2 semi-spineurs on peut associer un couple de plans totalement isotropes de E'.

Ces 2 plans de « parité » différente se coupent nécessairement selon une droite isotrope D (cas particulier du critère

$$\mathscr{B}(uf, u'f) \neq 0 \Leftrightarrow V \cap V' = 0$$

si V et V' sont les s. t. i. m. associés aux spineurs purs uf et $u'f$) [4].

Donc à tout spineur (sans parité) non nul, on peut associer une droite isotrope de l'espace vectoriel E' *par la construction précédente* (construction A).

En particulier :

La droite isotrope associée à $\underline{(u^+f, (u^+f)^*)}$ *est réelle.*

Selon [4], les points x du plan associés à u^+f sont caractérisés par

$$x(u^+f) = 0$$

u^+f et $\mathscr{C}(u^+f) = (u^+f)^*$ correspondent à des plans nécessairement sécants selon une droite Δ, un point x de Δ est caractérisé par :

$$xu^+f = 0\,, \qquad x(u^+f)^* = 0 \qquad \text{ou} \qquad x\bar{u}^+\gamma f = 0$$

et un point y de $\bar{\Delta}$ par :

$$y\overline{u^+f} = 0 \qquad \text{et} \qquad yu^+\overline{\gamma f} = 0$$

soit

$$y\bar{u}^+\gamma f\gamma^{-1} = 0 \qquad \text{et} \qquad yu^+\bar{\gamma}\gamma f\gamma^{-1} = 0\,,$$

mais $\bar{\gamma}\gamma f = \varepsilon' f$ donne :

$$y\bar{u}^+\gamma f = 0 \qquad \text{et} \qquad yu^+f = 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta = \bar{\Delta}\,.$$

PROPOSITION 6. — *La droite* D *associée à* $uf = u^+f + u^-f$ *par la construction* (A) *précédente s'identifie à la droite déterminée par* $\chi(u^+f \otimes u^-f)$.

Si $u^-f = (ax_1 + bx_2)f$, $u^+f = (a' + b'x_1x_2)f$

$$x = \chi(u^+f \otimes u^-f) = ab'x_1 + bb'x_2 - a'by_1 + aa'y_2$$

on vérifie immédiatement que :

$$x(u^+f) = 0 \qquad \text{et} \qquad x(u^-f) = 0\,.$$

Ainsi étant donné $uf = u^+f + u^-f$ défini modulo un facteur scalaire — on dira un spineur projectif — on peut lui associer biunivoquement *2 droites réelles isotropes déterminées par*

$$\underline{\chi(u^+f \otimes (u^+f)^*) \qquad et \qquad \chi((u^-f) \otimes (u^-f)^*)}\,.$$

Utilisant l'expression analytique de $\chi(uf \otimes vf)$ donnée plus haut, on voit aisément que pour que ces 2 droites soient confondues il faut et il suffit que

$$\mathscr{H}(u^-f, u^+f) = -\bar{a}a' - \bar{b}b' = 0$$

(ce qui implique que $\mathscr{H}(uf, uf) = 0$).

On voit donc la possibilité d'associer à un spineur un couple de droites affines, la droite issue de $\chi(u^-f \otimes (u^-f)^*)$ parallèle à $\chi(u^+f \otimes (u^+f)^*)$ et la droite obtenue en échangeant ces 2 vecteurs. On a vu antérieurement la possibilité d'associer à tout couple de semi-spineurs, de parités différentes, c'est-à-dire à un spineur, une droite isotrope « homogène », c'est-à-dire issue de l'origine dans l'espace affine E′. Δ est l'ensemble des points $x \in E'$ tels que

$$x(u^+f) = 0 \qquad \text{et} \qquad x(u^-f) = 0\,.$$

PROPOSITION 7. — *La construction* (A) *établit une bijection entre l'ensemble des couples de spineurs purs projectifs de parités différentes et l'ensemble des droites isotropes homogènes de* E′.

C'est une conséquence directe d'une proposition établie dans [*4*]. Tout s. t. i. de dimension $r - 1$ de E′ est contenu dans un et un seul s. t. i. m. pair et dans un et un seul s. t. i. m. impair.

Ici on peut évidemment donner une démonstration directe utilisant la proposition (6) et la formule (10), il suffit de calculer a, b, a', b', associés à un vecteur $\alpha x_1 + \beta x_2 - \gamma y_1 + \delta y_2$, avec $\alpha\gamma = \beta\delta$, c'est immédiat.

Comme tout vecteur de E′ est somme de 2 vecteurs isotropes, on voit que l'on pourra obtenir tout vecteur de E′ comme image par χ d'une somme :

$$uf \otimes vf + u'f \otimes v'f,$$

de deux termes seulement.

On se propose maintenant de généraliser la construction (A), en une construction (B).

On cherche à déterminer l'ensemble des $x \in E'$ tels que :

$$(13)\quad \begin{cases} a)\;\; x(u^+f) = \lambda(u^-f)\,, & \lambda \neq 0, \;\text{scalaire donné fixé} \\ \text{et } b)\;\; x(u^-f) = \lambda'(u^+f)\,, & \lambda' \neq 0\,, \;\text{scalaire donné fixé.} \end{cases}$$

On peut observer que :

$$x^2(u^+f) = \lambda x(u^-f) = \lambda\lambda'(u^+f)\,,$$

de sorte que

$$x^2 = \lambda\lambda' = k = c^{te}$$

et (13) équivaut à la condition :

$$\text{(13 } bis\text{)} \qquad \begin{cases} x(u^+f) = \lambda(u^-f) \\ x^2 = k\,. \end{cases}$$

Posant $x = x_0 + x'$, où x_0 est une solution particulière de $x(u^+f) = \lambda(u^-f)$, si elle existe,

$$x'(u^+f) = 0$$

x' est l'élément général d'un plan totalement isotrope. Ainsi (13) *a*) traduit que x est dans un plan affine totalement isotrope, et (13) *b*) a une signification analogue, donc sous réserve de prouver qu'il existe un élément fixe x_0 satisfaisant à (13), on voit que l'ensemble des solutions de (13) est donné par les points d'une *droite affine isotrope* Δ. De (13 *bis*) on voit que Δ est l'intersection d'un s. t. i. m. et d'une quadrique $x^2 = k$. On voit immédiatement qu'une telle intersection contient la droite de l'infini du s. t. i. m. et donc une deuxième droite Δ (qui est aussi l'intersection de deux plans affines obtenus respectivement de (13) *a*) et (13) *b*) et de parités différentes).

Une solution analytique complète de (13) s'obtient aisément :

$$x = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma y_2 + \delta y_2\,, \qquad u^+f = (a' + b'x_1x_2)f\,, \qquad u^-f = (ax_1 + bx_2)f\,,$$

donne si $x(u^+f) = \lambda u^-f$

$$x = \left(\frac{b'x_1}{a'} + y_2\right)\delta + \left(y_1 - \frac{b'x_2}{a'}\right)\gamma + \frac{\lambda(ax_1 + bx_2)}{a'}\,, \qquad a' \neq 0$$

et si $x(u^-f) = \lambda'(u^+f)$,

$$x = \left(\frac{b}{a}x_2 + x_1\right)\alpha + \left(y_2 - \frac{b}{a}y_1\right)\delta + \lambda'\frac{(a'y_1 - b'x_2)}{a}\,, \qquad a \neq 0$$

d'où pour les points X de Δ :

$$\text{(14)} \quad \mathrm{X} = (ab'x_1 + bb'x_2 - a'by_1 + aa'y_2)\frac{\delta}{aa'} + \frac{\lambda a^2x_1 + \lambda abx_2 + \lambda'a'^2y_1 - \lambda'a'b'x_2}{aa'}$$

Si 2 couples (u^+f, u^-f), (u_1^+f, u_1^-f) s'appliquent par (B) sur des droites (Δ, Δ_1) avec $\Delta \equiv \Delta_1$, identifiant les directions on voit que

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}\,, \qquad \frac{a'}{a'_1} = \frac{b'}{b'_1}\,,$$

et écrivant que le point de Δ obtenu avec $\delta = 0$ est sur Δ_1,

$$\lambda\left(\frac{a'}{a} - \frac{a'_1}{a_1}\right) = 0\,, \qquad \lambda\left(\frac{b}{a'} - \frac{b_1}{a'_1}\right) = \lambda'\left(\frac{b'}{a} - \frac{b'_1}{a_1}\right), \qquad \lambda'\left(\frac{a}{a'} - \frac{a_1}{a'_1}\right) = 0\,.$$

Si λ et $\lambda' \neq 0$, $\quad \Delta \equiv \Delta_1 \Leftrightarrow (u_1^+f, u_1^-f) = (tu^+f, tu^-f)\,, \qquad t \in \mathbb{C}^*$.

Si $\lambda = \lambda' = 0$, $\quad \Delta \equiv \Delta_1 \Leftrightarrow (u_1^+f, u_1^-f) = (tu^+f, t'u^-f)\,, \qquad t, t' \in \mathbb{C}^*$.

Réciproquement, soit Δ une droite isotrope appartenant à la quadrique $X^2 = k$, existe-t-il un spineur $uf = u^+f + u^-f$ qui par (B) s'applique sur Δ. La direction de Δ détermine une droite homogène Δ_0 et le couple (u^+f, u^-f) modulo 2 facteurs de proportionnalité (t, t') ; la droite Δ coupe $(y_2)^\perp$ (on étudierait à part le cas d'exception) en un point $Ax_1 + Bx_2 + Cy_1$, tel que $AC = k$, d'où le calcul de λ et λ' (on fixe a, b et $\frac{b}{a'}$, $A = \frac{\lambda a}{a'}$, $B = \lambda \frac{b}{a'} - \lambda' \frac{b'}{a}$, $C = \lambda' \frac{a'}{a}$, on obtient λ, λ' et $\frac{b'}{a}$, d'où un seul coefficient de proportionnalité $\left(\text{si } \lambda' \neq 0, \text{ si } \lambda \neq 0 \text{ on fixe } \frac{b'}{a}\right)$.

Nous avons obtenu :

PROPOSITION 8. — *Il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des droites affines isotropes portées par la quadrique* $X^2 = k$, $k \neq 0$, *et l'ensemble des spineurs projectifs.*

Remarque. — On observera que $x'\gamma u^+f = \lambda\gamma u^-f$, $\gamma \in \operatorname{Pin} Q'$, s'écrit $\gamma^{-1}x'\gamma(u^+f) = \lambda u^-f$ avec $x'^2 = x^2$ et que la correspondance possède la propriété d'équivariance.

Condition de réalité de Δ $(\lambda\lambda' \neq 0)$. — On écrit qu'il existe un scalaire complexe u tel que le produit de u par le coefficient de δ dans X soit égal à son conjugué (Δ porte un vecteur réel). $u = a\bar{b}$ convient, et on obtient :

$$a\bar{a}' + b\bar{b}' = 0$$

qui exprime que

$$(\alpha) \qquad \mathscr{H}(u^-f, u^+f) = 0$$

(ou encore qu'il existe ρ tel que $a = \rho\bar{b}'$, $\bar{a}' = -\rho^{-1}b$).

— On écrit ensuite que l'intersection de Δ avec $y_1^\perp$ est un point réel. Cela donne :

$$(\beta) \qquad \lambda' b'\bar{a}' = \bar{\lambda}\bar{a}\bar{b} \quad \text{et équivaut à} \quad \lambda' + \bar{\lambda}\rho\bar{\rho} = 0,$$

compte tenu de (α), et entraîne dans le cas général $\lambda\lambda'$ réel, négatif :

$$\rho\bar{\rho} = -\frac{\lambda\lambda'}{|\lambda|^2}\,.$$

(α) entraîne que $\mathscr{H}(uf, uf) = 0$.

Condition d'intersection de Δ *et* Δ_1 *réelles.* — Il existe au moins un point $x \in E'$ tel que :

$$x(u^+f) = \lambda(u^-f), \qquad x(u^-f) = \lambda'(u^+f)$$
$$x(u_1^+f) = \lambda(u_1^-f), \qquad x(u_1^-f) = \lambda'(u_1^+f)$$

On peut remarquer que ces 4 conditions sont équivalentes soit à :

$$(15) \qquad x(u^+f) = \lambda(u^-f), \qquad x(u_1^-f) = \lambda'(u_1^+f), \qquad x^2 = \lambda\lambda'$$

soit à :

$$(15\ bis) \qquad x(u^-f) = \lambda'(u^+f), \qquad x(u_1^+f) = \lambda(u_1^-f), \qquad x^2 = \lambda\lambda'.$$

Si on prend la première condition on observe que les plans isotropes associés à (u^+f) et (u_1^-f) étant nécessairement sécants, il existe une droite déterminée par

$$x(u^+f) = \lambda(u^-f) \qquad \text{et} \qquad x(u_1^-f) = \lambda'(u_1^+f);$$

exprimer qu'il existe $x \in \Delta \cap \Delta_1$ revient à écrire que $x^2 = \lambda\lambda'$. Δ et Δ_1 sont réelles, si elles sont de même direction on a nécessairement :

$$(16) \qquad \begin{cases} \mathscr{H}(u^-f, u^+f) = \mathscr{H}(u_1^-f, u_1^+f) = \mathscr{H}(u^-f, u_1^+f) \\ = \mathscr{H}(u^+f, u_1^-f) = 0 \end{cases}$$

(ce qui est immédiat).

Réciproquement, explicitant ces conditions, on trouve :

$$a\overline{a'} + b\overline{b} = a\overline{a'_1} + b\overline{b'_1} = a_1\overline{a'} + b_1\overline{b'} = a_1\overline{a'_1} + b_1\overline{b'_1} = 0$$

$\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1}$ et $\dfrac{a'}{a'_1} = \dfrac{b'}{b'_1}$, ce qui exprime que les droites homogènes de direction Δ et Δ_1 sont confondues.

(16) *exprime donc que* Δ *et* Δ_1 *sont de même direction*

(on sait que pour qu'elles soient confondues il faut et il suffit que uf et $u_1 f$ soient proportionnels).

Nous supposerons donc dorénavant Δ et Δ_1 de directions distinctes. S'il existe $x \in \Delta \cap \Delta_1$, calculant $\mathscr{H}(uf, u_1 f)$ et appliquant (15), (15 *bis*) on trouve immédiatement

$$\left.\begin{array}{ll} (17) & \underline{\mathscr{H}(u^+f, u_1^-f) = \dfrac{\overline{\lambda}}{\lambda}\,\mathscr{H}(u^-f, u_1^+f)} \\ (17\ bis) & \underline{\mathscr{H}(u^-f, u_1^+f) = \dfrac{\overline{\lambda'}}{\lambda'}\,\mathscr{H}(u^+f, u_1^-f)} \end{array}\right\} \quad \text{avec } \lambda\lambda' \text{ réel non nul}$$

Réciproquement, les 2 droites étant de directions distinctes, les premiers membres de (17) et (17 *bis*) ne sont certainement pas nuls tous les deux, si $\mathscr{H}(u^+f, u_1^-f) \neq 0$ et si $x(u^+f) = \lambda(u^-f)$ et $x(u_1^-f) = \lambda'(u_1^+f)$ (x réel, prendre l'intersection de Δ et du plan $x(u_1^- f) = \lambda'(u_1^+ f)$, ce point existe en général) alors (17) entraîne immédiatement que $x^2 = \lambda\lambda'$, donc que x appartient à Δ et Δ_1.

Ainsi :

(17) *et* (17 *bis*) *expriment que* Δ *et* Δ_1 *réelles, se coupent, à « distance finie ou à l'infini ».*

Particularisant λ, λ' on trouve une condition suggestive : λ *imaginaire pur, et donc* λ' *imaginaire pur :*

$$\mathcal{H}(uf, u_1 f) = \mathcal{H}(u^- f, u_1^+ f) + \mathcal{H}(u^+ f, u_1^- f) = 0 .$$

Alors Δ *et* Δ_1 *se coupent à distance finie où à l'infini si et seulement si leurs spineurs représentatifs sont orthogonaux pour* $\mathcal{H}$.

Remarquons enfin que si $\lambda\lambda' = 0$, avec l'un des facteurs seulement égal à 0, les mêmes conclusions sont valables bien que la démonstration soit caduque. On peut en effet faire un raisonnement par continuité à partir de $\lambda' = \varepsilon$, ε tendant vers 0. Il reste la condition (17).

Le lecteur pourra comparer ces résultats à ceux que donnent Penrose et Ward dans un contexte entièrement différent [*8*]. Nous pensons que notre approche est beaucoup plus simple et mieux structurée.

7. **Conclusion.**

Si (avec $r = 2$) on cherche $x \in E'$ tel que :

$$x(u^+ f) = \lambda(u^- f), \qquad \lambda \neq 0, \quad \lambda \text{ fixé}, \qquad \text{avec} \qquad x^2 = k \neq 0, \quad k \text{ fixé},$$

cela revient à chercher un élément particulier g du groupe de Clifford Γ' (qui correspond à une symétrie relativement à l'hyperplan $x^\perp$ par la projection « tordue » sur le groupe orthogonal). On peut d'ailleurs remarquer qu'il existe $\gamma \in \operatorname{Spin} Q'$ tel que

$$\gamma(u^+ f) = f$$

et le problème à résoudre revient à chercher

$$\gamma x \gamma^{-1} \gamma(u^+ f) = \lambda \gamma(u^- f)$$
$$x' f = \lambda(v^- f), \qquad (x')^2 = (x^2) = k .$$

Sous cette forme on voit immédiatement que si

$$v^- f = (Ax_1 + Bx_2) f, \qquad x' = \lambda(Ax_1 + Bx_2) + \gamma y_1 + \delta y_2 ,$$

γ et δ sont indéterminés, la condition $(x')^2 = k$ ramène l'indétermination au choix d'un paramètre arbitraire, d'où l'obtention d'une droite affine associée au couple de spineurs $(u^+ f)$, $(u^- f)$. Sur ce point comparer avec l'article [*5*, *a*], p. 164-167.

Il existe une généralisation immédiate de cette correspondance, mais elle ne conduit pas à des résultats aussi simples. En toute dimension r si on se donne un couple de spineurs purs on peut chercher les éléments g du groupe de Clifford Γ' tels que $g(u^+f) = \lambda(u^-f)$, λ fixé, $N(g) = k \neq 0$; ce qui se ramène (modulo une similitude) à chercher g' impair, tel que :

$$g'f = \lambda(v^-f), \qquad N(g') = k.$$
$$g'f = \lambda\sigma f, \qquad \sigma \in \Gamma' \text{ choisi}.$$

$g' = \lambda\sigma\gamma$, γ appartenant au sous-groupe H′ des éléments θ de Pin Q′ tel que $\theta f = f$.

Si on se borne à $N(g) = \pm 1$, on voit qu'un couple de semi-spineurs purs (défini modulo un facteur scalaire) est associé biunivoquement à un élément de G'_0/H'. L'élément $g' \in \Gamma'$ obtenu est défini modulo un facteur qui dépend de $\frac{r^2 - r + 2}{2}$ paramètres comme le montre la dimension d'un groupe de spinorialité complexe [5, *a*].

En dimension 6 le critère de pureté rappelé en (II, 6) pour un spineur de parité déterminé, montre que tout spineur pur s'écrit :

$$\lambda(1 + a_1x_2x_3 + a_2x_3x_1 + a_3x_1x_2)z_1z_2z_kf, \qquad k \leqslant 3, \quad z_i \in F,$$

et on voit facilement que tout spineur pair est pur ainsi que tout spineur impair. Ce résultat est signalé dans [3]. Évidemment $x'f = \lambda(v^-f)$ est en général impossible (prendre v^- avec un terme en $x_1x_2x_3$).

Si l'on est parti d'un espace vectoriel réel E de signature (2, 4), la propriété du (I) :

$$C'(1, 3)f \oplus C'(1, 3)f' \simeq C'(2, 4)\Phi,$$

entraîne qu'à tout spineur projectif pour C′(2, 4) (c'est-à-dire un « twisteur projectif » pour C′(1, 3)) on peut associer un couple de droites affines isotropes selon la construction (B) dans l'espace E′(1, 3).

Mais on ne pourra pas donner si $r \neq 2$ des constructions affines comparables par leur simplicité à celles du nº 6. Il semble donc préférable de travailler directement sur les algèbres de Clifford et spineurs sans utiliser ces correspondances qui sont trop particulières et ne sont rien d'autre que des transcriptions de propriétés.

RÉFÉRENCES

[1] P. ANGLES, Construction de revêtements du groupe conforme d'un espace vectoriel muni d'une métrique de type (p, q). *Annales I. H. P.*, t. **2**, novembre 1980, p. 33-51.

[2] K. BUGAJSKA, *a*) Geometric interpretation of spinors.
b) Nature of superspace. *Journal of math. Physics*, t. **21**, août 1980, p. 2091-2101.

[3] E. CARTAN, *Leçons sur la théorie des spineurs*. Hermann, Tome II, Paris, 1938.

[4] Cl. CHEVALLEY, *The algebraic theory of spinors*, Columbia, U. P., 1954.

[5] A. CRUMEYROLLE, *a*) Fibrations spinorielles et twisteurs généralisés. *Periodica Math. Hungarica*, t. **6** (2), 1975.
b) Structures spinorielles. *Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A*, t. **XI**, n° 1, 1969, p. 19-55.
c) Dérivations, formes et opérateurs usuels sur les champs spinoriels. *Ibid*, t. **XVI**, n° 3, 1972, p. 171-201.
[6] Y. DUCEL, Thèse. Toulouse, 1979.
[7] LOUNESTO et E. LATVAMAA, Conformal transf. and Clifford algebras. *Report HTKK Mat. A*, t. **123**. Helsinki Un. of Technology, 1978. Proceed. of the American. *Math. Soc.*, t. **79**, n° 4, août 1980.
[8] R. PENROSE, Twistor Algebra. *Journal of math. Physics*, t. **8**, n° 2, février 1967, p. 345-366.
[9] R. PENROSE et R. WARD, Twistors for flat and curved Space-Time. Dans General Relativity and Gravitation. Édité par A. Held, *Inst. de Phys. Théorique*, Berne, t. **2**, 1979, p. 283-328.

(Manuscrit reçu le 5 décembre 1980)