ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

P. IGLESIAS

# Essai de « thermodynamique rationnelle » des milieux continus

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 34, nº 1 (1981), p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1981__34_1_1_0>

© Gauthier-Villars, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

*Ann. Inst. Henri Poincaré,* Section A :
Vol. XXXIV, n° 1, 1981, p. 1-24. *Physique théorique.*

# Essai de « thermodynamique rationnelle » des milieux continus

par

**P. IGLESIAS**

Centre de Physique Théorique, C. N. R. S., Luminy, Case 907,
F-13288 Marseille Cedex 2 (France)

RÉSUMÉ. — On construit un modèle thermodynamique prédictif de milieux continus en relativité générale vérifiant les deux principes de la thermodynamique. Ce modèle est confronté aux modèles classiques newtoniens et à la théorie relativiste de l'élasticité.

ABSTRACT. — One constructs a predictive thermodynamical model of the continuous media in general relativity which verifies the two principles in thermodynamics. This model is confronted to the Newtonian classical models and to the relativistic theory of elasticity.

## 1. INTRODUCTION

### I.1. Le modèle et ses variables.

Le modèle de milieu dissipatif que nous proposons prolonge les travaux de J. M. Souriau [*16*] et C. Vallé [*18*], et d'une certaine manière, ceux de B. Carter, W. Israel, J. L. Stewart ([*1*] ... [*7*]). Il se situe *a priori* dans le cadre de la relativité générale dont il convient de distinguer deux aspects :

1) l'aspect covariance générale ou plus précisément invariance par le groupe des difféomorphismes de l'espace temps à support compact : *principe fondamental* de la physique;


© Gauthier-Villars

2) l'aspect gravitationnel, défini grâce à un champ de tenseurs symétriques $g_{\mu\nu}$ vérifiant les équations d'Einstein :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \text{cste} \,.\, T_{\mu\nu} \tag{1}$$

où $T_{\mu\nu}$ contient les informations sur la matière créant le champ, à savoir la densité, les contraintes, le flux d'énergie, ... T vérifiant alors les équations de conservations (1) :

$$\hat{\text{d}}\text{iv}\, T = 0 \tag{2}$$

Le problème consiste à construire un tenseur $T_{\mu\nu}$ susceptible de décrire un milieu matériel vérifiant ces équations. Ceci a déjà été fait de diverses façons pour les milieux élastiques dont la thermodynamique est absente par exemple : [*9*] [*13*]. L'introduction de la thermodynamique dans ces modèles pose alors un certain nombre de questions, dus essentiellement à ses deux principes fondamentaux. Il est toutefois possible de déduire le premier principe de la thermodynamique de la relativité générale (voir [*15*]), mais il semble bien, jusqu'à présent, qu'il faille ajouter le second principe à la main. Généralement cela se fait en imposant l'existence d'un courant d'entropie S vérifiant l'équation :

$$\hat{\text{d}}\text{iv}\, S \geqslant 0 \tag{3}$$

Ainsi un certain nombre d'auteurs ont proposé des modèles dans lesquels l'entropie S joue le rôle de variable fondamentale ([*1*] ... [*8*]). D'un autre côté, les travaux de Synge et Souriau sur les équilibres statistiques de gaz en mécanique classique et relativiste ([*17*], [*14*]) font apparaître un vecteur $\theta$ appelé vecteur température (2) (3) qui joue un rôle fondamental pour la caractérisation de l'équilibre. En effet, il y a équilibre statistique du gaz si et seulement si $\theta$ est un vecteur de Killing de la métrique $g$. Ainsi, le caractère dissipatif du mouvement serait contenu à la fois dans l'équation $\hat{\text{d}}\text{iv}\, S \geqslant 0$ et dans l'équation (4)

$$\delta_L g \neq 0 \; (\delta x = \theta) \tag{4}$$

Notre modèle sera construit comme celui de Souriau ([*16*]) de façon à ce que la première soit une conséquence de la seconde, c'est-à-dire :

$$[\delta_L g \neq 0 \Leftrightarrow \hat{\text{d}}\text{iv}\, S > 0], \quad [\delta_L g = 0 \Leftrightarrow \hat{\text{d}}\text{iv}\, S = 0] \tag{5}$$

S perd ainsi son caractère de variable primordiale au profit des variables $(g, \theta, \delta_L g)$. Notre but étant de décrire un milieu matériel quelconque, à ces

(1) $\hat{\text{d}}\text{iv}$ est la divergence riemannienne.

(2) Son module $\beta$ est la température réciproque $1/kT$, son vecteur unitaire U associé est la quadri-vitesse du milieu.

(3) B. Carter lui aussi exhibe un vecteur température dans son modèle.

(4) $\delta_L g$ représente la dérivée de Lie de la métrique $g$ par le champ $\delta x$.

variables nous ajouterons donc les positions de référence $q$ des molécules du milieu et leur variation $\frac{\partial q}{\partial x}$, $x$ étant un point de l'espace temps.

Ainsi, le modèle le plus élémentaire de milieu dissipatif en relativité générale doit nécessairement dépendre des quantités

$$\left(x, g, \theta, \delta_{\mathrm{L}}g, q, \frac{\partial q}{\partial x}\right)$$

que nous appellerons les *variables cinématiques* du modèle.

Le cadre géométrique du modèle peut se résumer ainsi :

1) l'espace-temps est une variété différentielle, non compacte, connexe et orientable $V_4$, munie d'une métrique riemannienne hyperbolique normale $g$.

2) il existe un champ de vecteur appelé champ de *vecteur température* $\theta$, partout du genre futur, et une variété de référence $V_3$ orientable appelé le *corps*, telle que l'action du groupe à un paramètre engendré par le vecteur température définisse une submersion $\pi$ de $V_4$ à $V_3$.

### I.2. **Tenseur impulsion énergie et potentiel d'énergie.**

Il est courant en mécanique des milieux continus de caractériser les propriétés thermodynamiques hors équilibre grâce à une fonction de dissipation (par exemple : [*12*]). Étant donnée la difficulté d'effectuer un bilan détaillé des phénomènes microscopiques, on suppose qu'il existe une fonction qui contienne toutes les informations suffisantes à ce sujet. De façon analogue, nous supposerons qu'il existe un « potentiel d'énergie » relativiste $\varphi$ dépendant des variables cinématiques, ce qui nous conduira à une généralisation naturelle de la fonction de dissipation (§ II.5), telle que le tenseur impulsion énergie du système soit donné par :

$$\mathrm{T} = \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \tag{6}$$

Cette fonction suffira à définir toutes les variables thermodynamiques, notamment le courant d'entropie S.

### I.3. **Fonction d'énergie libre et courant d'entropie.**

L'étude de l'équilibre montre que le courant d'entropie S est donné par :

$$\mathrm{S} = \overline{\mathrm{T}(\theta)} - \mathrm{F}\theta\,, \quad \overline{\mathrm{T}(\theta)} = g^{-1}(\mathrm{T}(\theta)) \tag{7}$$

où F définie à l'équilibre est la *fonction d'énergie libre*, qui vérifie la condition suivante $[\beta \mapsto \beta\mathrm{F}]$ est une fonction concave. Nous supposerons qu'hors équilibre, cette fonction F existe toujours et dépend des variables cinématiques, que le courant d'entropie est toujours donné par la même formule.

Nous donnerons plus loin (II.5) des conditions suffisantes sur les fonctions $\varphi$ et F pour que le courant d'entropie soit de divergence positive ou nulle, et par conséquent, que le modèle soit conforme aux deux principes de la thermodynamique.

## II. CONSTRUCTION DU MODÈLE

### II.1. Espace d'évolution thermodynamique.

De façon analogue à la mécanique classique, où l'on définit l'espace d'évolution d'un système dynamique comme l'ensemble des quantités $(\vec{r}_i, \vec{v}_i, t)$ des positions et des vitesses à tout instant $t$, $\vec{v}_i$ devenant ainsi une « variable indépendante », nous définirons l'espace d'évolution thermodynamique (noté $\mathscr{F}$) comme l'ensemble des valeurs possibles des variables cinématiques; $\frac{1}{2}\delta_L g(\delta x = \theta)$ et $\frac{\partial q}{\partial x}$ deviennent des variables indépendantes que nous noterons $\gamma$ et P, $\gamma$ sera appelée la *flexion* du milieu. Un point de $\mathscr{F}$ est un 6-uple :

$$u = (X, g, \theta, \gamma, q, P) \tag{8}$$

où X est un point de $V_4$, $q$ un point de $V_3$, $g$ un 2-tenseur covariant symétrique régulier de signature (+ ---) de $V_4$ en X, $\theta$ un vecteur tangent à $V_4$ en X de genre futur, $\gamma$ un 2-tenseur covariant symétrique de $V_4$ en X, P une application linéaire de $T_X(V_4)$ à $T_q(V_3)$ dont le noyau est l'espace vectoriel engendré par $\theta$ et dont l'image de l'orientation spatiale de $V_4$ en X est l'orientation de $V_3$ en $q$. $\mathscr{F}$ est une variété différentielle de dimension 40, fibrée sur $V_4$ ou $V_3$ grâce aux projections $u \mapsto X$ ou $u \mapsto q$.

### II.2. Actions des difféomorphismes de $V_4$ et $V_3$ sur $\mathscr{F}$.

Les difféomorphismes (conservant l'orientation) A de $V_4$ et B de $V_3$ se relèvent sur $\mathscr{F}$ par :

$$\begin{cases} u \mapsto (A(X), q, [A^{-1}]_-(g)_X, D(A)(X)(\theta), [A^{-1}]_-(\gamma)_X, P_0[D(A)(X)]^{-1}) \\ u \mapsto (X, B(q), g, \theta, \gamma, D(B)(q) \circ P) \end{cases} \tag{9}$$

$[A^{-1}]_-(g)_X$ et $[A^{-1}]_-(\gamma)_X$ désignent les images réciproques par A des tenseurs $g$ et $\gamma$ en X, D(A)(X) et D(B)(X) sont les applications linéaires tangentes de A et B en X.

On constate que les actions de A et B commutent, ceci permet de bien distinguer les symétries d'Espace-temps des symétries de $V_3$. Les premières nous permettront de formuler le principe d'indifférence matérielle ([*11*], [*10*]) grâce au principe d'invariance générale. Les deuxièmes seront utilisées pour étudier le cas des milieux avec symétries internes comme les fluides, les cristaux, les milieux amorphes, etc. Ces remarques peuvent être associées à celle de Moreau dans ([*10*], introduction).

### II.3. **Réduction de l'espace d'évolution thermodynamique.**

Le potentiel d'énergie du milieu devient maintenant une fonction définie sur $\mathcal{F}$. La condition d'invariance sous l'action du groupe $G_K$ des difféomorphismes de $V_4$ à support compact exige qu'elle soit définie sur $\mathcal{F}/G_K$. On démontre (Annexe B) que $\mathcal{F}/G_K$ peut être muni de la structure de variété différentielle définie dans l'Annexe A. On note $\overset{\circ}{\mathcal{F}} \equiv \mathcal{F}/G_K$, $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ est *l'espace d'évolution thermodynamique réduit*, c'est une variété différentielle connexe de dimension 20. La projection canonique de $\mathcal{F}$ sur $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ est donnée par :

$$\overset{\circ}{p} : (X, q, g, \theta, \gamma, P) \mapsto (q, \beta, h, k, \chi, a)$$

où :

. la *température réciproque* $\beta$ est un réel positif,

$$\beta = [\theta^\mu g_{\mu\nu} \theta^\nu]^{1/2} \tag{10}$$

. la *conformation* $h$ est un 2-tenseur contravariant symétrique de $V_3$ en $q$ défini négatif

$$h^{ij} = g^{\mu\nu}\, {}^i P_\mu {}^j P_\nu \tag{11}$$

. la *vitesse de déformation* $k$ est un 2-tenseur contravariant de $v_3$ en $q$

$$k^{ij} = -\frac{2}{\beta} g^{\mu\alpha} \gamma_{\alpha\beta} g^{\beta\nu}\, {}^i P_\mu {}^j P_\nu \tag{12}$$

. le *champ thermique* $\chi$ est un vecteur tangent à $v_3$ en $q$

$$\chi^i = \frac{2}{\beta^2}\, {}^i P_\mu g^{\mu\alpha} \gamma_{\alpha\nu} \theta^\nu \tag{13}$$

. la *vitesse thermique* $a$ est un réel

$$a = \frac{1}{\beta^3} \theta^\mu \gamma_{\mu\nu} \theta^\nu \tag{14}$$

*Remarques :*

. La projection $(q, \beta, h, k, \chi, a) \mapsto q$ définit une fibration de $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ sur $v_3$

. Pour tout mouvement (5) du milieu en posant $\pi : X \mapsto q$, on a :

$$\begin{cases} h = \pi_+(g^{-1}), \ k = \dfrac{1}{\beta} \pi_+(\delta_L g^{-1})(\delta X = \theta) \\[2ex] \chi = \dfrac{2}{\beta^2} \dfrac{\partial q}{\partial X} [\hat{\gamma}(\theta)] (\hat{\gamma}^\mu_\nu = g^{\mu\alpha}\gamma_{\alpha\nu}), \ a = \dfrac{1}{\beta^3} \gamma(\theta)(\theta) \end{cases} \tag{15}$$

(5) On peut définir un mouvement (thermodynamique) comme une section de $\mathcal{F}$ : $X \mapsto u$, telle qu'en chaque point $X : \gamma = \frac{1}{2} \delta_L g(\delta X = \theta)$, $P = \dfrac{\partial q}{\partial X}$ et $\hat{\text{div}}\, T = 0 \left( T = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \right)$.

## II.4. Expression générale du tenseur impulsion énergie et du courant d'entropie.

Posons $\mathring{u} = \mathring{p}(u)$; le potentiel d'énergie se factorise :

$$[u \mapsto \mathring{u} \mapsto \varphi]$$

ceci permet d'écrire T (défini en I.2) comme

$$\mathrm{T} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathring{u}} \circ \frac{\partial \mathring{u}}{\partial \gamma}$$

Lors d'un mouvement, en posant $\pi : \mathrm{X} \mapsto q$, le tenseur T s'écrit :

(16) $$\mathrm{T} = \alpha \bar{\mathrm{U}} \otimes \bar{\mathrm{U}} - 2\pi_{-}(\Lambda) + 2\bar{\mathrm{U}} \vee \pi_{-}(c)$$

avec :

. L'*énergie interne* $\alpha = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \varphi}{\partial a}$, nombre réel, apparaît comme la grandeur conjuguée de la vitesse thermique,

. La *chaleur convective* $c = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \varphi}{\partial \chi}$, convecteur de $\mathrm{V}_3$, apparaît comme la grandeur conjuguée du champ thermique.

. La *contrainte* $\Lambda = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \varphi}{\partial k}$, 2-tenseur covariant symétrique de $\mathrm{V}_3$, apparaît comme la grandeur conjuguée de la vitesse de déformation.

(Le symbole $\vee$ représente le produit symétrisé :

$$[\bar{\mathrm{U}} \vee \pi_{-}(c)]_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,[c_i \mathrm{U}_\mu \partial_\nu q^i + c_i \mathrm{U}_\nu \partial_\mu q^i]\,,$$

$\bar{\mathrm{U}}$ est le covecteur $g(\mathrm{U})$).

L'expression du courant d'entropie est alors donnée par :

(17) $$\mathrm{S} = (\alpha - \mathrm{F})\theta + \beta\overline{\pi_{-}(c)}$$

avec

$$\overline{\pi_{-}(c)} = g^{-1}(\pi_{-}(c))$$

## II.5. Espace d'évolution élastique, fonction d'énergie libre et potentiel d'énergie.

II.5.1. DÉFINITIONS. — Nous appellerons *espace d'évolution élastique* le sous-fibré $\mathscr{E}$ de $\mathscr{F}$ défini par l'équation $\gamma = 0$. Un point de $\mathscr{E}$ est un 5-uple

$$v = (x, g, \theta, q, p)$$

On vérifie que le groupe $\mathrm{G}_\mathrm{K}$ des difféomorphismes de $v_4$ à support compact agit sur $\mathscr{E}$, donc le quotient $\overset{\circ}{\mathscr{E}} \equiv \mathscr{E}/G_K$, appelé *espace d'évolution élastique réduit*, est le sous-fibré de $\overset{\circ}{\mathscr{F}}$ image de $\mathscr{E}$ par $\overset{\circ}{p}$. On a :

$$\overset{\circ}{v} = \overset{\circ}{p}_{\mathscr{E}}(v) = (q, \beta, h)$$

II.5.2. LEMME. — Étant donné une fonction réelle F définie sur $\mathscr{E}$ se factorisant en : $[v \mapsto \overset{\circ}{v} \mapsto \mathrm{F}]$, les conditions suivantes sont équivalentes :

*a*) pour tout mouvement :

$$\widehat{\operatorname{div}}\,(\mathrm{F}\theta) = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=0}(\gamma)$$

*b*)

$$\frac{1}{\beta}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right|_{\gamma=0} = \frac{\partial(\beta\mathrm{F})}{\partial\beta},\ \frac{1}{\beta}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial k}\right|_{\gamma=0} = \frac{\partial\mathrm{F}}{\partial h} - \frac{F}{2}h^{-1},\ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\chi}\right|_{\gamma=0} = 0$$

*Éléments de calcul.* — On montre qu'il existe un tenseur $\overset{\circ}{\mathrm{T}}$ tel que $\operatorname{div}(\mathrm{F}\theta) = \overset{\circ}{\mathrm{T}}(\gamma)$, le calcul donne pour $\overset{\circ}{\mathrm{T}}$ la valeur suivante, exprimée de trois façons différentes :

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathrm{T}} &= \frac{\partial(\beta\mathrm{F})}{\partial\beta}\bar{\mathrm{U}}\otimes\bar{\mathrm{U}} - 2\pi_-\left(\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial h} - \frac{\mathrm{F}}{2}h^{-1}\right) \\ \overset{\circ}{\mathrm{T}} &= \frac{\partial(\beta\mathrm{F})}{\partial\beta}g - 2\pi_-\left(\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial h} + \frac{\beta}{2}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial\beta}h^{-1}\right) \\ \overset{\circ}{\mathrm{T}} &= \beta\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial\beta}\bar{\mathrm{U}}\otimes\bar{\mathrm{U}} + \mathrm{F}g - 2\pi_-\left(\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial h}\right) \end{aligned}\right.$$

On utilise pour cela les résultats :

$$\frac{\partial\beta}{\partial\mathrm{X}}(\theta) = \frac{1}{\beta}\gamma(\theta)(\theta),\ \frac{\partial h}{\partial\mathrm{X}}(\theta) = \pi_+(\delta_{\mathrm{L}}g^{-1})$$

et la formule $\bar{\mathrm{U}}\otimes\bar{\mathrm{U}} = g - \pi_-(h^{-1})$ ([*13*]), et on égalise les expressions de T et $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=0}$.

II.5.3. THÉORÈME. — *Si les conditions suivantes sont vérifiées :*

*1*) *la fonction d'énergie libre* F *est définie sur* $\overset{\circ}{\mathscr{E}}$[1]

*2*) *le potentiel d'énergie* $\varphi$ *est strictement convexe en* $\gamma$ *et vérifie*

$$\frac{1}{\beta}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right|_{\gamma=0} = \frac{\partial(\beta\mathrm{F})}{\partial\beta},\ \frac{1}{\beta}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial k}\right|_{\gamma=0} = \frac{\partial\mathrm{F}}{\partial h} - \frac{\mathrm{F}}{2}h^{-1},\ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\chi}\right|_{\gamma=0} = 0$$

*Alors tout mouvement du milieu vérifie le second principe de la thermodynamique*

$$\left\{\begin{array}{c} \widehat{\operatorname{div}}\ \mathrm{S} \geqslant 0 \\ \text{et} \\ \operatorname{div}\ \mathrm{S} = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0 \end{array}\right.$$

Ce théorème est une conséquence directe du Lemme précédent, on a :

$$\hat{\mathrm{div}}\, \mathrm{S} = (\mathrm{T} - \mathring{\mathrm{T}})(\gamma) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} - \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}\right|_{\gamma=0}\right)(\gamma)$$

comme dans 16, on écrit :

$$\mathrm{div}\, \mathrm{S} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}(\gamma) + \varphi(0) - \varphi(\gamma)\right] + \left[\varphi(\gamma) - \varphi(0) - \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}\right|_{\gamma=0}(\gamma)\right],$$

ces deux termes sont positifs grâce à la convexité de $\varphi$, nuls si et seulement si $\gamma = 0$.

*Remarques :*

. Ce théorème permet d'écrire le potentiel d'énergie $\varphi$ sous la forme :

$$\varphi = \beta[\mathring{\alpha} a + \mathring{\Lambda}(k)] + \phi, \quad \mathring{\alpha} = \frac{\partial(\beta \mathrm{F})}{\partial \beta}, \quad \mathring{\Lambda} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial h} - \frac{\mathrm{F}}{2} h^{-1}$$

et

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial a}\right|_{\gamma=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \phi}{\partial k}\right|_{\gamma=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \phi}{\partial \chi}\right|_{\gamma=0} = 0$$

$\phi$ généralise de façon naturelle la *fonction de dissipation* (voir par exemple : Sedov [*12*]).

. F est défini à une jauge près, on ne change ni $\mathring{\mathrm{T}}$ ni $\hat{\mathrm{div}}\, \mathrm{S}$ si on fait la transformation $\mathrm{F} \mapsto \mathrm{F} + \mathrm{F}'$ avec $\mathrm{F}'$ telle que $\dfrac{\partial \beta \mathrm{F}'}{\partial \beta} = 0$ et $\dfrac{\partial \mathrm{F}'}{\partial h} - \dfrac{\mathrm{F}'}{2} h^{-1} = 0$.
Ces jauges $\mathrm{F}'$ peuvent être construites par une 3-forme $w$ défini sur $v_3$ :

$$\mathrm{F}'(q, \beta, h) = \frac{f(q)}{\beta}\, [\det(-\mathrm{H})]^{1/2}$$

où $f(q)$ est la composante $(1, 2, 3)$ de $w$ et H la matrice représentant $h$ dans une base quelconque.

. Les noms de vitesse thermique et vitesse de déformation donnés à $a$ et $k$ sont justifiés par les résultats intermédiaires :

$$a = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \beta}{\partial \mathrm{X}}(\mathrm{U}) = -\frac{d}{ds}(\mathrm{Log}\, \mathrm{T})$$

$$k = \frac{\partial h}{\partial \mathrm{X}}(\mathrm{U}) = \frac{dh}{ds}$$

où $\mathrm{U} = \dfrac{\theta}{\beta}$ et $s$ est le temps propre de la molécule dont la ligne d'univers passe par X.

# III. PROPRIÉTÉS DU MODÈLE

## III.1. Les mouvements non dissipatifs.

Nous allons retrouver dans le cas limite où la fonction de dissipation ne dépend pas de $\gamma$ la théorie relativiste de l'élasticité ([*9*], [*13*]). La théorie relativiste de l'élasticité est donnée par un principe variationnel dont le lagrangien ne dépend que de $q$ et $h$. Les équations d'Euler-Lagrande, pour l'action $\int_{V_4} l \, \mathrm{vol}_4$ sont équivalentes aux équations : $\hat{\mathrm{div}}\, T_l = 0$ avec :

(20) $$T_l = lg - 2\pi_-\left(\frac{\partial l}{\partial h}\right)$$

(voir à ce sujet [*13*]).

Supposons que $\varphi$ ne dépende pas de $\gamma$; lors d'un mouvement, T a pour expression :

(20 *bis*) $$T = \frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta} g - 2\pi_-\left(\frac{\partial F}{\partial h} + \frac{1}{2}\beta \frac{\partial F}{\partial \beta} h^{-1}\right)$$

S est donné par :

$$S = \beta \frac{\partial F}{\partial \beta} \theta$$

THÉORÈME. — Si F vérifie la condition $[\beta \mapsto \beta F]$ est concave, il existe un Lagrangien $l$ ne dépendant que de $q$ et $h$ tel que les expressions (20) et (20 *bis*) soient identiques.

*Preuve.* — Puisque $\varphi$ est affine en $\gamma$ : $\hat{\mathrm{div}}\, S = 0$, quel que soit le mouvement. Pour chaque mouvement il existe une 3-forme « densité d'entropie » définie sur $V_3$ telle que son image réciproque par $\pi : X \mapsto q$ soit $\mathrm{vol}_4(S)$ ($\mathrm{vol}_4$ désigne le volume riemannien sur $V_4$). Étant donné une 3-forme unité $\omega_0$ (6) choisie sur $V_3$, on peut écrire la forme « densité d'entropie » comme $\sigma\omega_0$ où $\Sigma : q \mapsto \sigma$ est la fonction scalaire distribution d'entropie, intégrale première des équations du mouvement. Posons $n = |\omega_{123}|\,[\det(-H)]^{1/2}$ (7), $\omega_{123}$ étant la composante de $\omega_0$ et H la matrice représentant $h$ dans une carte de $V_3$. Posons $\psi_{(\omega_0,F)}$ l'application $(q, \beta, h) \mapsto (q, \sigma, h)$ avec $\sigma = \dfrac{\beta^2}{h}\dfrac{\partial F}{\partial \beta}$, $\psi_{(\omega_0,F)}$ est inversible parce que $\dfrac{\partial \sigma}{\partial \beta} = \dfrac{\beta}{h}\dfrac{\partial^2(\beta F)}{\partial \beta^2}$ est de signe constant, en effet, $n$, $\beta$ sont positifs et $[\beta \mapsto \beta F]$ concave, donc $[\beta \mapsto \sigma]$ est strictement

(6) $\omega_0$ peut être choisie comme la densité de matière.

(7) Si $\mathscr{I}$ est défini par $\mathrm{vol}_4(\mathscr{I}) = \pi_-(\omega_0)$, alors $n^2 = g_{\mu\nu}\mathscr{I}^\mu\mathscr{I}^\nu = (\omega_{123})^2 \det(-H)$ (cf. [*13*]); $\mathscr{I}$ s'interprète comme le courant de matière.

monotone. Notons que $\left[\frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta} \mapsto n\sigma\right]$ est la transformée de Legendre de $[\beta \mapsto \beta F]$. On pose alors $f(q, \beta, h) = \frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta}$ et $l = [f \circ \psi^{-1}_{(\omega_o, F)}](q, \Sigma(q), h)$. En utilisant les propriétés des transformées de Legendre, le calcul donne

$$\frac{\partial l}{\partial h} = \frac{\partial F}{\partial h} + \frac{1}{2}\beta \frac{\partial F}{\partial \beta} h^{-1}$$

Et donc $T_l$ a bien la valeur donnée en (20), S est donnée par :

$$S = \sigma \mathscr{I}, \qquad \mathrm{Vol}_4(\mathscr{I}) = \pi_-(\omega_0)$$

. Le Lagrangien $l$ est calculé pour le mouvement considéré, mais il est clair qu'il a la même valeur pour tous les mouvements caractérisés par la même fonction $\Sigma$. Ainsi tout modèle de matière dissipative contient à la limite non dissipative $\varphi$ affine en $\gamma$ plusieurs modèles de matière parfaite, chacun indexé par sa distribution d'entropie. Il est remarquable qu'une condition de convexité empruntée à la mécanique statistique permette le raccordement de ce modèle à la théorie de l'élasticité. De plus grâce à ce théorème, on peut écrire et résoudre les équations du mouvement sans prendre en compte les variables thermodynamiques (température et entropie) qui se trouvent éliminées, et les calculer ensuite.

III.1.1. Passage a la relativité restreinte

Plaçons-nous dans une carte de Lorentz telle que la métrique s'écrive

$$g_{00} = 1, \quad g_{ij} = -\frac{1}{c^2}\delta_{ij}, \quad g_{0i} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Un point X de l'espace-temps sera repéré par le couple $(t, \vec{r})$, le vecteur température par $(\tilde{\beta}, \overrightarrow{\tilde{\beta} v})$, le vecteur courant de matière par $(\rho, \rho\vec{v})$. Les variables thermodynamiques $h$, $k$, $\chi$, $a$ ont pour expression :

$$(21) \qquad h^{ij} = {}^i\mathrm{H}_j, \ \mathrm{H} = -c^2\mathrm{D}, \ \mathrm{D} = \frac{\partial q}{\partial \vec{r}}\left[\mathbb{1}_3 - \frac{\vec{v}\,\bar{\vec{v}}}{c^2}\right]\overline{\frac{\partial q}{\partial \vec{r}}}$$

$$(22) \quad k^{ij} = {}^i\mathrm{K}_j, \ \mathrm{K} = -c^2\dot{\mathrm{D}}, \ \dot{\mathrm{D}} = -\frac{\partial q}{\partial \vec{r}}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{v}\,\bar{\vec{v}}}{c^2}\right) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}} + \overline{\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}}}\right]\overline{\frac{\partial q}{\partial \vec{r}}}$$

$$(23) \qquad a = \frac{1}{\tilde{\beta}}\left[\frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \vec{r}}(\vec{v}) - \frac{1}{c^2}\left[\overline{\frac{\partial(\tilde{\beta}\vec{v})}{\partial t}} \cdot \vec{v} + \bar{\vec{v}} \cdot \frac{\partial \tilde{\beta}\vec{v}}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{v}\right]\right]$$

$$(24) \quad \chi = -c^2\mathscr{X}, \ \mathscr{X} = \frac{1}{\tilde{\beta}}\left\{\frac{\partial q}{\partial \vec{r}}\left\{\frac{2}{c^2}\left[\left(\frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \vec{r}} - \frac{1}{c^2}\overline{\frac{\partial(\tilde{\beta}\vec{v})}{\partial t}}\right)\vec{v}\right); \mathbb{1}_3 \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(\tilde{\beta}\vec{v})}{\partial \vec{r}} + \overline{\frac{\partial(\tilde{\beta}\vec{v})}{\partial \vec{r}}}\right)\right]\vec{v} + \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \vec{r}} - \frac{2}{c^2}\frac{\partial(\tilde{\beta}\vec{v})}{\partial t}\right\}\right\}.$$

Posons $F = nc^2 + W$ ($n$ défini dans III.1.1), l'expression du tenseur impulsion énergie est :

$$(25)\qquad \begin{cases} \mathring{T} = (nc^2 + Q)\bar{U} \otimes \bar{U} + Wg + \dfrac{2}{c^2}\pi_-\left(\dfrac{\partial W}{\partial D}\right) \\ Q = \beta\dfrac{\partial W}{\partial \beta} \end{cases}$$

En posant $\hat{\mathring{T}}{}^{\nu}_{\mu} = g^{\nu\alpha}\mathring{T}_{\alpha\mu}$ on peut écrire :

$$\hat{\mathring{T}} = \begin{bmatrix} e & -\dfrac{y}{c^2} \\ y & \Sigma \end{bmatrix} \text{ avec :}$$

$$(26)\qquad \begin{cases} e = \dfrac{\rho c^2 + \tilde{Q}}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + W\left(1 + \dfrac{v^2}{c^2}\right) + \dfrac{1}{c^2}\vec{v}A\vec{v} \\ y = \left\{\left[\dfrac{\rho c^2 + \tilde{Q}}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + W\right]\mathbb{1}_3 + A\right\} . \vec{v} \\ \Sigma = -\left(A + \dfrac{\rho c^2 + \tilde{Q}}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}\dfrac{\vec{v}\vec{v}}{c^2}\right) \end{cases}$$

avec

$$A = 2\overline{\frac{\partial q}{\partial \vec{r}}}\frac{\partial W}{\partial D}\frac{\partial q}{\partial \vec{r}} - W\mathbb{1}_3, \quad \tilde{Q} = \frac{Q}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

Nous reconnaissons l'expression classique de $\hat{T}$ ([*13*]) à ceci près qu'au terme $\rho c^2$ vient s'ajouter le terme $\tilde{Q}$ que nous interpréterons à la limite newtonienne.

### III.1.2. Approximation newtonienne

Les expressions de $D, \dot{D}$, $\mathscr{X}$ et $a$, ont comme valeur à la limite newtonienne : $c = \infty$

$$(27)\qquad \begin{cases} D_N = \dfrac{\partial q}{\partial \vec{r}} \cdot \overline{\dfrac{\partial q}{\partial \vec{r}}} \\ \mathring{D}_N = -\dfrac{\partial q}{\partial \vec{r}}\left[\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}} + \overline{\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}}}\right]\overline{\dfrac{\partial q}{\partial r}} \\ \mathscr{X}_N = \dfrac{\partial q}{\partial \vec{r}}\left[\dfrac{1}{\beta}\overline{\dfrac{\partial \beta}{\partial \vec{r}}}\right] \\ a = \dfrac{1}{\beta}\left(\dfrac{\partial \beta}{\partial t} + \dfrac{\partial \beta}{\partial \vec{r}}(\vec{v})\right) \end{cases}$$

On reconnaît les expressions classiques de la conformation, du taux de déformation, du gradient du logarithme de la température réciproque (projeté sur $V_3$) et de la vitesse de variation du logarithme de la température le long des lignes de courant du milieu. L'expression du tenseur impulsion énergie de la mécanique classique s'obtient en supposant la matière faiblement liée, c'est-à-dire en négligeant les termes en $\frac{W}{n}$ devant $c^2$ et en faisant un développement limité de $\overset{\circ}{T}$ on a :

$$(28) \qquad \begin{cases} \hat{\overset{\circ}{T}}_N = \rho c^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vec{v} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E & -\rho\vec{v} \\ (E\mathbb{1}_3 + A)\vec{v} & -(A + \rho\vec{v}\bar{\vec{v}}) \end{bmatrix} \\ E = \frac{1}{2}\rho v^2 + Q + W \end{cases}$$

Le vecteur courant d'entropie est donné par :

$$(29) \qquad S = (s, s\vec{v}), \qquad s = \beta Q$$

Les équations de conservation $\hat{\text{div}}\,\overset{\circ}{T} = 0$ s'écrivent après quelques transformations :

$$(30) \qquad \begin{cases} \rho\vec{a} + \operatorname{div} A = 0 \qquad \vec{a} = \dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \dfrac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{r}}(\vec{v}) \\ \dfrac{\partial E}{\partial t} = \operatorname{div}\,[(E + A)\vec{v}\,] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{v} = 0 \qquad (\hat{\text{div}}\,\mathscr{I} = 0) \\ \dfrac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} s\vec{v} = 0 \qquad (\hat{\text{div}}\ S = 0) \end{cases}$$

On reconnaît les expressions classiques du bilan des forces dans la première équation, du bilan énergétique dans la seconde et des bilans de masse et d'entropie dans les troisième et quatrième équations. A partir de ces équations, il est possible de retrouver toutes les lois de conservation de la mécanique classique (impulsion, moment cinétique, etc.). L'expression (26) du tenseur des contraintes A permet d'interpréter W comme la densité d'énergie élastique du milieu. L'énergie E est alors la somme du terme cinétique $\frac{1}{2}\rho v^2$ du terme élastique W auxquels vient s'ajouter le terme $Q = \beta\frac{\partial W}{\partial\beta}$ qui peut s'interpréter alors comme le terme de *chaleur de la thermodynamique des processus réversibles*. En effet, l'expression de l'entropie $s = \beta Q$ est à rapprocher de l'expression classique $s = \frac{Q}{T}\left(\beta = \frac{1}{kT}\right)$, de plus, le terme Q n'intervenant pas dans le bilan des forces s'interprète comme le terme d'énergie mécaniquement inutilisable.

Ainsi, le modèle introduit de façon naturelle la chaleur classique, et permet en plus de la calculer, connaissant la fonction d'énergie libre. La variation de la chaleur totale $\mathbb{Q}$ du système entre deux instants $t$ et $t + \delta t$ est donnée par la formule :

$$\delta\mathbb{Q} = \int_{\Sigma_{t+\delta t}} \beta \frac{\partial W}{\partial \beta} \mathrm{Vol}_3 - \int_{\Sigma_t} \beta \frac{\partial W}{\partial \beta} \mathrm{Vol}_3$$

où $\Sigma_t$ et $\Sigma_{t+\delta t}$ sont des sections de $v_4$ aux instants $t$ et $t + \delta t$. L'étude des mouvements particuliers permettrait de retrouver les formules connues de la thermodynamique des processus reversibles.

## III.2. **Mouvements faiblement dissipatifs**

### III.2.1. Expression du tenseur impulsion énergie

Le développement au second ordre en $\gamma$ de la fonction dissipation constitue ce qu'on appelle la limite faiblement dissipative du modèle $\phi$ est donné par :

$$(31) \quad \phi = \frac{1}{2}\left[\lambda a^2 + \mathrm{E}(\chi)(\chi) + \mathrm{F}(k)(k) + 2a\mathrm{B}(\chi) + 2a\mathrm{L}(k) + 2\mathrm{R}(\chi)(k)\right]$$

$\lambda$, E, F, B, L, R sont les tenseurs de dissipation, leurs composantes sont au nombre de 55.

. $\lambda$ est réel et sera appelé la *susceptibilité thermique.*

. E est un 2-tenseur symétrique covariant de $V_3$, c'est le *tenseur de conductivité thermique.*

. F est un 4-tenseur covariant de $v$ vérifiant les symétries :

$$F_{ij,mn} = F_{ji,mn} = F_{ij,nm} = F_{mn,ij}$$

c'est le *tenseur de viscosité.*

. B est un covecteur de $V_3$, il couple les effets de conduction et de susceptibilité.

. L est un 2-tenseur symétrique de $V_3$, il couple les effets de viscosité et de susceptibilité.

. R est un 3-tenseur de $V_3$, vérifiant les symétries $R_{i.lm} = R_{i,ml}$ il couple les effets de conduction et de viscosité.

. On reconnaît les 27 coefficients de viscosité et de conduction de la théorie classique auxquels viennent s'ajouter la susceptibilité thermique de Souriau [*16*] et 27 autres coefficients de corrélation des phénomènes de viscosité, conduction et susceptibilité.

. La conduction de convexité de $\phi$ impose notamment (Annexe 3)

$$(32) \qquad \begin{cases} \lambda > 0 \\ \lambda \mathrm{E} - \mathrm{B} \otimes \mathrm{B} > 0 \end{cases}$$

. La *chaleur de dissipation* $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0 = \frac{1}{\beta}\frac{\partial\phi}{\partial a}$, la chaleur convective $c$, la *contrainte visqueuse* $\Delta\Lambda = \Lambda - \overset{\circ}{\Lambda} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial\phi}{\partial k}$ sont données par :

$$(33)\quad \begin{cases} \Delta\alpha = \frac{1}{\beta}(\lambda a + \mathrm{B}(\chi) + \mathrm{L}(k)) \\ \mathrm{C} = \frac{1}{\beta}(a\mathrm{B} + \mathrm{E}(\chi) + \bar{\mathrm{R}}(k)) \qquad \bar{\mathrm{R}}_{lm,i} = \mathrm{R}_{i,lm} \\ \Delta\Lambda = \frac{1}{\beta}(a\mathrm{L} + \mathrm{R}(\chi) + \mathrm{F}(k)) \end{cases}$$

. On décompose le tenseur T en la somme de $\overset{\circ}{\mathrm{T}}$ donné en (18) et de $\Delta\mathrm{T}$ : contribution de $\phi$. Dans le repère propre du fluide et pour une carte adaptée, $\Delta\mathrm{T}$ a pour expression :

$$(34)\quad \begin{aligned} \Delta\mathrm{T}_{00} &= \frac{\lambda}{\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial t} - \frac{c^2}{\beta^2}b_i\left(\partial^i\beta - \frac{\beta}{c^2}\partial_0 v^i\right) + \frac{2c^2}{\beta}\mathrm{T}_r\left[l\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{r}}\right] \\ \Delta\mathrm{T}_{0i} &= \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial t}b_i - \frac{c^2}{\beta^2}e_{il}\left(\partial^l\beta - \frac{\beta}{c^2}\partial_0 v^l\right) + \frac{2c^2}{\beta}\mathrm{T}_r\left[r_i\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{r}}\right] \\ -\frac{1}{2}[\Delta\mathrm{T}_{ij}] &= \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial t}l - \frac{c^2}{\beta^2}r\left(\frac{\partial\beta}{\partial\vec{r}} - \frac{\beta}{c^2}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right) + \frac{2c^2}{\beta}f\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{r}}\right) \end{aligned}$$

avec

$$b_i = \mathrm{B}_l\partial_i q^l\,;\ l_{ij} = \mathrm{L}_{mn}\partial_i q^m\partial_j q^n,\ r_{i,jk} = \mathrm{R}_{l,mn}\partial_i q^l\partial_j q^m\partial_k q^n$$
$$f_{ij,st} = \mathrm{F}_{lm,nk}\partial_i q^l\partial_j q^m\partial_s q^n\partial_t q^k,\ e_{il} = \mathrm{E}_{mn}\partial_i q^m\partial_l q^n$$

On a posé $r_l$ la matrice ${}^i[r_l]^j = r_{l,ij}$ et noté $\partial^i\beta = \partial_i\beta$.

### III.2.2. Limite newtonienne

Nous savons que la limite newtonienne consiste à faire un développement limité à l'ordre zéro en $\frac{1}{c^2}$ le tenseur $\hat{\mathrm{T}}$ s'écrit alors $\hat{\mathrm{T}} = \overset{\circ}{\mathrm{T}}_{\mathrm{N}} + \Delta\hat{\mathrm{T}}$, $\mathrm{T}_{\mathrm{N}}$ étant donné en (28). Nous allons supposer que les expressions de $\lambda$, $b$, $l$, $e$, $r$, $f$ sont de l'ordre de $\lambda$, $\frac{\overset{\circ}{b}}{c^2}$, $\frac{\overset{\circ}{l}}{c^2}$, $\frac{\overset{\circ}{e}}{c^4}$, $\frac{\overset{\circ}{r}}{c^4}$, $\frac{\overset{\circ}{f}}{c^4}$ ; on a alors :

$$(35)\quad \begin{cases} \Delta\hat{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \Delta\mathrm{E} & 0 \\ \Delta\mathrm{Y} & \Delta\Sigma \end{bmatrix} \\ \Delta\mathrm{E} = \frac{\lambda}{\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial t} - \frac{1}{\beta^2}\langle\,\overset{\circ}{b}, \mathrm{grad}\,\beta\,\rangle + \frac{2}{\beta}\mathrm{Tr}\left[\overset{\circ}{l}\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{r}}\right] \\ \Delta\mathrm{Y}_i = -\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial t}\overset{\circ}{b}_i + \frac{1}{\beta^2}\overset{\circ}{e}_{il}\partial^l\beta - \frac{2}{\beta}\mathrm{T}_r\left[\overset{\circ}{r}_i\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{r}}\right] \\ \Delta\Sigma = 2\left[\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial t}\overset{\circ}{l} - \frac{r}{\beta^2}\left(\frac{\partial\beta}{\partial\vec{r}}\right) + \frac{2}{\beta}\overset{\circ}{f}\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{r}}\right)\right] \end{cases}$$

Les équations de conservation ($\hat{\operatorname{div}}\,\mathrm{T} = 0$) s'écrivent dans le référentiel défini au § III.1.2.

$$(36)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} + \operatorname{div}((\mathrm{E}\mathbb{1}_3 + \mathrm{A})\vec{v}) - \operatorname{div}(\Delta\Sigma\vec{v}) + \operatorname{div}(\Delta \mathrm{Y}) = 0 \\ \rho\vec{a} + \operatorname{div}\mathrm{A} - \operatorname{div}(\Delta\Sigma) = 0 \end{cases}$$

avec

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\rho v^2 + \mathrm{W} + \mathrm{Q}_0 + \Delta\mathrm{E}, \qquad \mathrm{Q}_0 = \beta\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial\beta}$$

et on a remplacé $\dfrac{\partial\beta}{\partial t}$ par $\dfrac{d\beta}{dt} = \dfrac{\partial\beta}{\partial t} + \dfrac{\partial\beta}{\partial\vec{r}}(\vec{v})$.

Ces équations généralisent et couplent les équations de la chaleur et de la viscosité. De plus, ce système est de type elliptique. Les équations (36) redonnent les équations de Fourier de la chaleur et de Navier de la viscosité en supposant $\lambda = 0$, $\overset{\circ}{l} = 0$, $\overset{\circ}{r} = 0$, $\overset{\circ}{b} = 0$. Ce modèle donne (35) un bilan détaillé du système étudié.

## CONCLUSION

A partir d'un choix minimal de variables cinématiques, d'un nombre minimal d'hypothèses phénoménologiques qui sont :

— Existence d'un potentiel d'énergie $\varphi$ tel que $\mathrm{T} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\gamma}$.

— Existence hors équilibre d'une fonction énergie libre F.

— Expression du courant d'entropie $\mathrm{S} = \overline{\mathrm{T}(\theta)} - \mathrm{F}\theta$.

Grâce au principe d'invariance de la relativité générale et d'une méthode systématique de réduction ([8]) qui permet d'exhiber toutes les variables thermodynamiques et de les calculer, on a construit le modèle prédictif le plus élémentaire de milieu dissipatif en relativité générale. La limite newtonienne reste prédictive et permet donc des vérifications expérimentales.

Nous savons en particulier le raccorder à la théorie relativiste ou classique de l'élasticité. De plus, ce modèle comporte un bilan détaillé, qui permet d'interpréter les diverses formes d'énergie et leurs transformations mutuelles (énergies massique, cinétique, élastique et calorifique). L'approximation des mouvements faiblement dissipatifs fait apparaître les 27 coefficients de viscosité et de conduction des théories classiques, le coefficient de susceptibilité de Souriau [*16*] et 27 autres coefficients qui apparaissent comme des couplages entre les divers phénomènes. Il semble possible que ces coefficients soient mesurables puisqu'ils résistent au passage à la

([8]) Cette méthode peut s'appliquer à d'autres domaines de la physique.

mécanique newtonienne. Les équations de conservation $\hat{\text{div}}\, T = 0$ couplent les équations de la chaleur de Fourier et de la viscosité de Navier.

Une étude comparée de ce modèle avec divers modèles [*1*, ..., *8*] de milieux continus en relativité générale, montre notamment que certaines hypothèses de ces derniers deviennent des conséquences du premier. Les quantités caractéristiques de la dissipation comme le flux de chaleur, la contrainte visqueuse, deviennent calculables. Par exemple, l'hypothèse émise par B. Carter dans [*2*], à savoir :

$$\alpha(Q) = \alpha(0) + 0(\| Q \|^2)$$

où $\alpha$ est l'énergie interne, Q le flux de chaleur, est vérifiée dans ce modèle qui donne à $\alpha$ la valeur

$$\alpha = F + \left[ \frac{s^2}{\beta^2} + | h(c)(c) | \right]^{1/2} \qquad s^2 = \bar{S}S$$

et à Q la valeur

$$Q = \pi_-(c)$$

$c$, étant la chaleur convective.

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier J. M. Souriau qui m'a guidé dans mes recherches.

# ANNEXE A

1. **Définitions.** — Toutes les notations utilisées ici sont empruntées à l'ouvrage [*13*]. Elles correspondent à une description de la géométrie différentielle par la théorie des pseudo-groupes.

*Pseudo-groupe fondamental :*

Nous appellerons pseudo-groupe fondamental d'une variété V le pseudo-groupe de tous ses difféomorphismes locaux; nous le noterons $\mathscr{D}_{\mathrm{Loc}}(\mathrm{V})$ (voir [*13*], [*19*]).

*Racine :*

Une racine d'une variété V est un triplet $(v^{\phi}, v, \phi)$, où $v^{\phi}$ est un fibré différentiable au-dessus de V, pour tout élément A de $\mathscr{D}_{\mathrm{Loc}}(\mathrm{V})$, et tout point $x$ de V : $\phi(\mathrm{A})(x)$ est un élément de $\mathscr{I}_{\mathrm{som}}(\phi_x, \phi_{\mathrm{A}x})$, où $\phi_x$ désigne la fibre au-dessus de $x$, ne dépendant au plus que du genre de A en $x$ tel que :

$$\phi(\mathrm{AB})(x) = \phi(\mathrm{A})(\mathrm{B}(x)) \circ \phi(\mathrm{B})(x)$$

Un théorème important indique que si $\phi$ est une racine de V, elle se prolonge en une racine canonique $\phi$ de $v \cup \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire que pour toute translation T de $\mathbb{R}^n$ et tout point $\xi$ de $\mathbb{R}^n$

$$\phi(\mathrm{T})(\xi) = \mathbb{1}_{\phi_0}$$

$\phi_0$ étant la fibre type.

*Groupe structural :*

On appelle groupe structural de $\phi_x$ le groupe $\mathrm{G}_x$ défini par :

$$\mathrm{G}_x = \{ \phi(\mathrm{A})(x) \mid \mathrm{A} \in \mathrm{S}_x \}$$

$\mathrm{S}_x$ est le sous pseudo-groupe des difféomorphismes locaux laissant $x$ invariant.

On montre que les groupes structuraux de différentes fibres sont mutuellement conjugués :

$$\mathrm{G}_{x^*} = \phi(\mathrm{A})(x) \,.\, \mathrm{G}_x \,.\, [\phi(\mathrm{A})(x)]^{-1} \qquad \mathrm{A}(x) = x^*$$

De plus :

$$\mathrm{G}_0 = \phi(\mathrm{F}^{-1})(x) \,.\, \mathrm{G}_x \,.\, \phi(\mathrm{F})(\xi)$$

où F est une carte de V telle que $\mathrm{F}(\xi) = x$, ne dépend ni de F ni de $\xi$.

*Sous-groupe structural d'un sous speudo-groupe :*

Étant donné un sous pseudo-groupe $\mathscr{R}$ de $\mathscr{D}_{\mathrm{Loc}}(\mathrm{V})$, on définit $\mathrm{G}_x^{\mathscr{R}}$ par

$$\mathrm{G}_x^{\mathscr{R}} = \{ \phi(\mathrm{A})(x) \mid \mathrm{A} \in \mathrm{S}_x \cap \mathscr{R} \},$$

$\mathrm{G}_x^{\mathscr{R}}$ est un sous-groupe de G .

2. **Lemme.** — Étant donné une racine différentiable $\phi$ de V, un sous pseudo-groupe $\mathscr{R}$ de $\mathscr{D}_{\mathrm{Loc}}(\mathrm{V})$ agissant transitivement sur V.

Si $\mathrm{G}_x^{\mathscr{R}}$ est un sous-groupe invariant de $\mathrm{G}_x$, alors :

. $\forall \mathrm{A} \in \mathscr{D}_{\mathrm{Loc}}(\mathrm{V})$, $\mathrm{A}(x) = x^* \Rightarrow \mathrm{G}_{x^*}^{\mathscr{R}} = \phi(\mathrm{A})(x) \,.\, \mathrm{G}_x^{\mathscr{R}} \,.\, [\phi(\mathrm{A})(x)]^{-1}$.

. F étant une carte de V en $x$, $\mathrm{F}(\xi) = x \Rightarrow \mathrm{G}_0^{\mathscr{R}} = \phi(\mathrm{F}^{-1})(x) \,.\, \mathrm{G}_x^{\mathscr{R}} \,.\, \phi(\mathrm{F})(\xi)$ ne dépend ni de F ni de $\xi$.

*Preuve.* — 1) $\mathscr{R}$ agissant transitivement sur V, $\exists \mathrm{B} \in \mathscr{R} : \mathrm{B}(x) = x^*$, il est immédiat d'établir que $\mathrm{G}_{x^*}^{\mathscr{R}} = \phi(\mathrm{B})(x) \,.\, \mathrm{G}_x^{\mathscr{R}} \,.\, [\phi(\mathrm{B})(x)]^{-1}$, et donc :

$$\mathrm{G}_{x^*}^{\mathscr{R}} = \phi(\mathrm{A})(x) \,.\, [\phi(\mathrm{A})(x)]^{-1} \,.\, \phi(\mathrm{B})(x) \,.\, \mathrm{G}_x^{\mathscr{R}} \,.\, [\phi(\mathrm{B})(x)]^{-1} \,.\, \phi(\mathrm{A})(x) \,.\, [\phi(\mathrm{A})(x)]^{-1}$$

ce qui compte tenu de l'hypothèse : $\mathrm{G}_x^{\mathscr{R}}$ sous-groupe invariant de $\mathrm{G}_x$ donne le résultat, puisque $\phi(\mathrm{A}^{-1} \,.\, \mathrm{B})(x) \in \mathrm{G}_x$.

2) On pose $\underset{\mathrm{F}}{\mathrm{G}}{}_x^{\mathscr{R}} = \phi(\mathrm{F}^{-1})(x) \,.\, \mathrm{G}_x^{\mathscr{R}} \,.\, \phi(\mathrm{F})(\xi)$, il est immédiat de vérifier que $\underset{\mathrm{F}}{\mathrm{G}}{}_x^{\mathscr{R}}$ est un

sous-groupe invariant de $G_0$, étant donné alors deux cartes F et F* telles que $F(\xi) = X$ et $F^*(\xi^*) = X^*$, on montre que :

$$\underset{F_*}{G^{\mathscr{R}}_{x^*}} = \phi(a)(\xi) \,.\, \underset{F}{G^{\mathscr{R}}_x} \,.\, [\phi(a)(\xi)]^{-1}$$

avec $a = F^{*-1} . A . F$ où $A \in \mathscr{D}_{Loc}(V)$, $A(x) = x^*$ c'est-à-dire $\phi(a)(\xi) \in G_0$, étant donné que $\underset{F}{G^{\mathscr{R}}_x}$ est un sous-groupe invariant de $G_0$, on a donc le résultat. C. Q. F. D.

*Remarque.* — Grâce au Lemme, on peut écrire de façon générale :

$$\forall \tilde{a} \in \mathscr{D}_{Loc}(V \cup \mathbb{R}^n) \quad \forall x \in V \cup \mathbb{R}^n \quad G^{\mathscr{R}}_{x^*} = \phi(\tilde{a})(x) \,.\, G^{\mathscr{R}}_x \,.\, [\phi(\tilde{a})(x)]^{-1}$$

avec $a(x) = x^*$.

3. THÉORÈME. — Soit $\phi$ une racine canonique différentiable de V, de groupe structural $G_x$. Soit $\mathscr{R}$ un sous pseudo-groupe vérifiant les conditions du Lemme précédent. Soit $V^\phi/\mathscr{R}$ l'ensemble des orbites de $V^\phi$ sous l'action de $\mathscr{R}$.

Si $\phi_0/G^{\mathscr{R}}_0$ possède une structure de variété différentielle telle que la projection canonique $\varpi_0$ de $\phi_0$ à $\phi_0/G^{\mathscr{R}}_0$ soit une submersion alors :

. Il existe une racine différentiable $\psi$ de V de fibres $\psi_x = \phi_x/G^{\mathscr{R}}_x$, telle que la famille de projection canonique $\varpi_x$ de $\phi_x$ à $\psi_x$ définisse un homomorphisme de racine de $\phi$ à $\psi$.

. $V^\phi/\mathscr{R}$ possède une structure de variété différentielle difféomorphe à chacune des fibres $\psi_x$ et notamment à $\psi_0$.

*Preuve.* — 1) *Racine* $\psi$ :

Étant donné un élément $\Sigma$ de $V^\phi/\mathscr{R}$ et $\phi_x$ une fibre de $V^\phi$, alors il est immédiat que :

$$\Sigma \cap \phi_x \neq \phi$$
$$\Sigma \cap \phi_x = G^{\mathscr{R}}_x \,.\, [Z] \qquad \forall Z \in \Sigma \cap \phi_x$$

Soit $\tilde{a} \in \mathscr{D}_{Loc}(V \cup \mathbb{R}^n)$ et $x$ un point de $V \cup \mathbb{R}^n$, $\tilde{a}(x) = x^*$. Il existe une bijection $\psi(\tilde{a})(x)$ de $\psi_x$ dans $\psi_{x^*}$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \phi_x & \xrightarrow{\phi(\tilde{a})(x)} & \phi_{x^*} \\ {\scriptstyle\varpi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varpi} \\ \psi_x & \xrightarrow[Z(\tilde{a})(x)]{} & \psi_{x^*} \end{array}$$

En effet, il suffit de montrer que $\forall Z \in \varpi_x^-[\sigma]$, $\sigma \in \psi_x$ on a :

$$\phi(\tilde{a})(x)[G^{\mathscr{R}}_x(Z)] = G^{\mathscr{R}}_{x^*}[\phi(\tilde{a})(x)(Z)]$$

ce qui est assuré grâce au Lemme précédent, en outre la bijectivité de $\psi(\tilde{a})(x)$ est une conséquence immédiate de celle de $\phi(\tilde{a})(x)$. Il suffit maintenant de montrer que le symbole $\psi$ vérifie les propriétés d'une racine canonique. Ces vérifications sont immédiates et nous laissons au lecteur le soin de le constater.

Ainsi, $\psi$ est une racine sur V, la famille de projection $\{\omega_x\}$ vérifiant les équations

$$\psi(\tilde{a})(x) \circ \varpi_x = \varpi_{x^*} \circ \phi(\tilde{a})(x) \qquad \forall a \in \mathscr{D}_{Loc}(V \cup \mathbb{R}^n)$$

montre qu'elle est homomorphe à la racine $\phi$.

On peut écrire en particulier :

$$A \in \mathscr{D}_{Loc}(V) \Rightarrow \varpi_{x^*} \circ \phi(A)(x) = \psi(A)(x) \circ \varpi_x \qquad x^* = A(x)$$
$$a \in \mathscr{D}_{Loc}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \varpi_0 \circ \phi(a)(\xi) = \psi(a)(\xi) \circ \varpi_0$$
$$F \text{ carte de } V \Rightarrow \begin{cases} \varpi_x \circ \phi(F)(\xi) = \psi(F)(\xi) \circ \varpi_0 \\ \varpi_0 \circ \phi(F^{-1})(\xi) = \psi(F^{-1})(x) \circ \varpi_x \end{cases} \qquad F(\xi) = x$$

2) *Caractère différentiable de* $\psi$ :

Soit $a \in \mathscr{D}_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}^n)$ et $(\xi, \sigma) \in$ Domaine $(a) \times \phi_0$, l'application :

$$(\xi, \sigma) \mapsto \phi(a)(\xi)(\sigma)$$

est différentiable en $\xi$.

En effet, soit $z \in \omega_0^-(\sigma)$ et $\sigma$ fixé :

$$[\xi \mapsto \psi(a)(\xi)(\sigma)] = [\xi \mapsto \varpi_0 \circ \phi(a)(\xi)(z)]$$

or $\varpi_0$ est différentiable et $\phi$ est une racine différentiable, QED.

Considérons maintenant $\xi$ fixé, puisque $\varpi_0$ est une submersion, il existe un voisinage $\Omega$ de $\sigma$ et une section différentiable $s$ de $\phi_0$ au-dessus de $\Omega$; $\phi(a)(\xi)$ est un difféomorphisme de $s(\Omega)$ dans $\phi(a)(\xi)[\Omega]$, $\varpi_0$ est un difféomorphisme de $\phi(a)(\xi)[\Omega]$ dans $\psi(a)(\xi)[\Omega]$, d'où $[\sigma \mapsto \psi(a)(\xi)(\sigma) = \varpi_0 \circ \phi(a)(\xi) \circ s(\sigma)]$ est différentiable. Ainsi l'application :

$$(\xi, \sigma) \mapsto \psi(a)(\xi)(\sigma)$$

est différentiable, ce qui fait de $\psi$ une racine différentiable sur V. Et donc, chaque fibre $\psi_x$ est munie de la structure de variété différentiable de $\psi_0$ transporté par les $\psi(\mathrm{F})(\xi)$, $\mathrm{F}(\xi) = x$.

3) *Famille de bijections* $\{ f_x \}$ *de* $\psi_x$ *dans* $\mathrm{V}^\phi/\mathscr{R}$ :

On a vue que pour tout $\Sigma \in \mathrm{V}^\phi/\mathscr{R}$, $\Sigma \cap \phi_x = \mathrm{G}_x^{\mathscr{R}}[\mathrm{Z}]$, $z$ étant un élément quelconque de $\Sigma \cap \phi_x$.

On pose $f_x$ l'application $\sigma \mapsto \Sigma$ telle que $\sigma \in \psi_x$, $\Sigma \in \mathrm{V}^\phi/\mathscr{R}$ et $\varpi_x^-(\sigma) = \Sigma \cap \phi_x$.

Cette application est bijective par construction.

Puisque $\psi_x$ est une variété différentielle, $f_x$ permet de transporter sa structure sur $\mathrm{V}^\phi/\mathscr{R}$, pour que les structures définies par $f_x$ et $f_y$ soient compatibles, il faut et il suffit que $f_x^{-1} \circ f_y$ soit un difféomorphisme de $\psi_y$ à $\psi_x$.

Soit $\Sigma \in \mathrm{V}^\phi/\mathscr{R}$ et $\sigma_x = f_x^{-1}(\Sigma)$, $\forall \mathrm{B} \in \mathscr{R}$ tel que $\mathrm{B}(x) = y$ on a $f_y \circ \phi(\mathrm{B})(x)(\sigma_x) = \Sigma$; en effet : $\phi(\mathrm{B})(x)(\sigma_x) = \phi(\mathrm{B})(x) \circ \varpi_x(\mathrm{Z})$ avec $\mathrm{Z} \in \Sigma \cap \phi_x$ et donc $\phi(\mathrm{B})(x)(\sigma_x) = \varpi_y \circ \phi(\mathrm{B})(x)(\mathrm{Z})$, mais $\phi(\mathrm{B})(x)(\mathrm{Z}) \in \Sigma \cap \phi_y$ donc $f_y \circ \varpi_y \circ \phi(\mathrm{B})(x)(\mathrm{Z}) = \Sigma$ d'où $f_y^{-1} \circ f_x = \psi(\mathrm{B})(x)$ $\forall \mathrm{B} \in \mathscr{R}$ tel que $\mathrm{B}(x) = y$, et puisque $\psi$ est une racine différentiable $\psi(\mathrm{B})(x)$ est un difféomorphisme de $\psi_x$ dans $\psi_y$. C. Q. F. D.

*Conclusion :*

$\mathrm{V}^\phi/\mathscr{R}$ peut être muni de la même structure que chaque $\psi_x$ et notamment $\psi_0$. C. Q. F. D.

4. Lemme. — Soit N un élément de $\mathrm{L}_p^s(n)$, espace des applications $p$-linéaires symétriques de $[\mathbb{R}^n]^p$ dans $\mathbb{R}^n$. Il existe un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ à support compact B tel que :

$$\mathrm{B}(0) = 0$$
$$\mathrm{B}(x) = x + \frac{1}{p!}\mathrm{N}\underbrace{(x) \ldots (x)}_{p \text{ fois}} + 0(\| x \|^{p+1})$$

*Preuve.* — Soit $f$ le champ de vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par $f(x) = \dfrac{1}{p!}\mathrm{N}(x) \ldots (x)$ on a $e^{tf}(x_0) = x_0 + \displaystyle\int_0^t f[e^{sf}(x_0)]ds$ et $e^{tf}(0) = 0$ en dérivant cette expression au point zéro et en effectuant le développement limité à l'ordre $p$ de $f(e^{sf}(x_0))$ on obtient les résultats :

$$\mathrm{D}(e^{sf})(0) = \mathbb{1}_n \quad \text{et} \quad e^{tf}(x) = x + \frac{t}{p!}\mathrm{N}(x) \ldots (x) + t \circ (\| x \|^{p+1}).$$

Soit $\varphi$ une fonction $\mathrm{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ à support compact valant 1 sur un voisinage de zéro et posons $\tilde{f}(x) = \varphi(x) \,.\, f(x)$, alors $e^{\tilde{f}}$ et $e^f$ coïncident sur un voisinage non vide de zéro et donc leur développement limité :

$$e^{\tilde{f}}(x) = x + \frac{1}{p!}\mathrm{N}(x) \ldots (x) + 0(\| x \|^{p+1})$$

de plus $e^{\tilde{f}}$ est à support compact. C. Q. F. D.

5. **Lemme.** — Soit A un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ à support compact tel que

$$A(x) = M_1(x) + \ldots + \frac{1}{p!} M_p \underbrace{(x) \ldots (x)}_{p \text{ fois}} + 0(\| x \|^{p+1})$$

Soit R un élément de $L_p^v(n)$, il existe un difféomorphisme B de $\mathbb{R}^n$ à support compact tel que :

$$A \circ B(x) = M_1(x) + \ldots + \frac{1}{(p-1)!} M_{p-1} \underbrace{(x) \ldots (x)}_{(p-1) \text{ fois}} + \frac{1}{p!} R \underbrace{(x) \ldots (x)}_{p \text{ fois}} + 0(\| x \|^{p+1})$$

*Preuve.* — Il suffit d'appliquer le lemme précédent en posant $N = M_1^{-1}[R - M_p]$, $M_1$ est nécessairement inversible.

6. **Théorème.** — Soit $v$ une variété différentielle, connexe, non compacte et orientable, soit $x_0$ un point de $v$. Soit A un difféomorphisme à support compact conservant $x_0$. Alors :

. Nécessairement $D(A)(x_0)$ est un élément de $GL^+(T_{x_0}(v))$ composante connexe de $GL(T_{x_0}(v))$.

Soit $(X_0, M, N)$ un jet d'ordre $k$ des difféomorphismes locaux de V conservant $X_0$, tel que $M \in GL^+(T_{x_0}(v))$. Il existe un difféomorphisme à support compact A de V tel que

$$\begin{cases} A(X_0) = X_0 \\ D(A)(X_0) = M \\ J^k(A)(X_0) = (X_0, M, N) \end{cases}$$

où $J^k(A)(X_0)$ est le jet d'ordre $k$ de A au point $x_0$.

*Preuve.* — La première partie du théorème est immédiate.

Posons d'abord $k = 1$ et plaçons-nous dans une carte F de V telle que $F(0) = X_0$, soit S la base associée à F, posons

$$m = S^{-1} \circ M \circ S$$

$m \in GL(n, +)$ : groupe des matrices de $GL(n)$ à déterminant positif. Tout élément de $GL(n, +)$ s'écrit comme un produit d'exponentielle

$$m = e^{z_1} \ldots e^{z_p} \qquad z_k \in L(n)$$

posons alors $f_k(x) = \varphi(x) \, . \, z_k \, . \, X$, où $\varphi$ est une fonction réelle de $\mathbb{R}^n$ à support compact et égale à 1 sur un voisinage de zéro. Alors $a = e^{f_1} \ldots e^{f_p}$ vérifie :

$a$ est un difféomorphisme à support compact, $D(a)(0) = m$. Si le support de $\varphi$ est entièrement contenu dans le domaine de F, le difféomorphisme défini par $F \circ a \circ F^{-1} = A$ est à support compact et vérifie $A(X_0) = X_0$ et $D(A)(X_0) = M$.

On finit de démontrer le théorème grâce à la récurrence définie par le lemme 5.

C. Q. F. D.

# ANNEXE B

## RÉDUCTION DE L'ESPACE D'ÉVOLUTION THERMODYNAMIQUE

. Racine $\phi$ définie par l'action des difféomorphismes de $V_4$ sur $\mathscr{F}$.

L'action des difféomorphismes de $V_4$ conservant l'orientation définit une racine $\phi$ sur $V_4$, de fibré $\mathscr{F}$. Le groupe structural $G_x^+$ est une représentation du groupe $GL^+(T_x(V_4))$, puisque $\phi$ est une racine d'ordre 1. Grâce au théorème 6) de l'annexe A, il est immédiat d'établir que $G_x^{G_K} = G_x^+$, $G_x^{G_K}$ représente le sous-groupe structural défini par le sous-groupe des difféomorphismes à support compact de $V_4$. Puisque $G_K$ agit transitivement sur $V_4$ et que $G_x^{G_K} = G_x^+$ les premières conditions du théorème 3) de l'annexe A sont vérifiées. Il reste à munir $\mathscr{F}_0/G_0^+$ d'une structure de variété différentiable telle que la projection $\varpi_0$ de $\mathscr{F}_0$ à $\mathscr{F}_0/G_0^+$ soit une submersion.

. Construction de $\overset{\circ}{\mathscr{F}} = \mathscr{F}_0/G_0^+$.

Posons $z = (q, P, G, \theta, \Gamma)$ un élément de la fibre type. $G_0^+$ est une représentation de $GL(4, +)$ définie par :

$$a \in GL(4, +) \Rightarrow \underline{a}_{\mathscr{F}_0}(2) = (q, P \circ a^{-1}, \overline{a^{-1}}Ga^{-1}, a\theta, \overline{a^{-1}}\Gamma a^{-1})$$

La réduction de $\mathscr{F}$ par $G_K$ se ramène à celle d'une variété différentielle par un groupe de Lie. Il est immédiat de constater que $GL(4, +)$ agit librement sur $\mathscr{F}_0$ et donc que si $\overset{\circ}{\mathscr{F}}$ existe, elle est nécessairement de dimension $36 - 16 = 20$, 36 étant la dimension de $\mathscr{F}_0$ et 16 celle de $GL(4, +)$. Donc, la construction de $\overset{\circ}{\mathscr{F}}$ se réduit à la recherche de 20 invariants judicieusement choisis. Il est évident que $q$ et $\beta = (\bar{\theta}G\theta)^{1/2}$ sont conservés; d'autre part les quantités H, K, $\chi$, $a$ définies par :

$$H = PG^{-1}\bar{P}, \quad K = -\frac{2}{\beta}PG^{-1}\Gamma G^{-1}\bar{P}, \quad \chi = \frac{2}{\beta^2}PG^{-1}\Gamma\theta, \quad a = \frac{1}{\beta^3}\bar{\theta}\Gamma\theta$$

sont invariantes. Montrons que l'application $\varpi_0$ :

$$(q, P, G, \theta, \Gamma) \mapsto (q, \beta, H, K, \chi, a)$$

est une submersion. $\overset{\circ}{\mathscr{F}}$ sera alors défini comme l'ensemble des quantités $(q, \beta, h, k, \chi, a)$ telle que $q \in v_3$, $\beta$ est un réel positif, $h$ est un 2-tenseur contravariant symétrique défini négatif de $v_3$ en $q$, représenté dans une base de $v_3$ par la matrice H (${}^iH_j = h^{ij}$), $k$ est un 2-tenseur contravariant symétrique de $v_3$ en $q$ représenté par la matrice K, $\chi$ est un vecteur de $v_3$ en $q$, $a$ un réel.

1) $\varpi_0$ est une surjection de $\mathscr{F}_0$ sur $\overset{\circ}{\mathscr{F}}$.

Soit $(q, \beta, H, K, \chi, a)$, posons $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_3 \end{pmatrix}$, $\theta = \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P = [0 \quad w]$, avec $w = [-H]^{1/2}$,

$\Gamma = \beta\begin{bmatrix} a & \bar{v} \\ v & A \end{bmatrix}$ avec $v = -\frac{1}{2}x^{-1}\chi$ et $A = -\frac{1}{2}w^{-1}Kw^{-1}$, on a

$$\varpi_0(q, P, G, \theta, \Gamma) = (q, \beta, H, K, \chi, a)$$

2) 2 points $(q, P, G, \theta, \Gamma)$ et $(q', P', G', \theta', \Gamma')$ ayant même projections appartiennent nécessairement à la même orbite de $GL(4, +)$. La démonstration est immédiate à partir du résultat précédent.

3) $\varpi_0$ est une submersion.

Étant donné un point $(q, P, G, \theta, \Gamma)$ de $\mathscr{F}_0$, il existe toujours un élément $a$ de $GL(4, +)$ tel que

$$\underline{a}_{\mathscr{F}_0}\left(q, [0 \quad w], \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_3 \end{pmatrix}, \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{\Gamma}\right) = (q, P, G, \theta, \Gamma)$$

alors

$$\varpi_0(q, \mathrm{P}, \mathrm{G}, \theta, \Gamma) = \left(q, \beta, -w\bar{w}, -\frac{2}{\beta}w\mathrm{A}\bar{w}, -\frac{2}{\beta}wv, \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

On a posé $\tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} \alpha & \bar{v} \\ v & \mathrm{A} \end{pmatrix}$, donc $\varpi_0$ est une submersion si et seulement si l'application

$$(q, \beta, w, \alpha, v, \mathrm{A}) \mapsto \left(q, \beta, -w\bar{w}, -\frac{2}{\beta}w\mathrm{A}\bar{w}, -\frac{2}{\beta}wv, \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

est elle-même une submersion, propriété qui est immédiate à vérifier.

## Conclusion

$\overset{\circ}{\mathscr{F}}$ ainsi définie est une variété différentielle de dimension 20, telle que $\varpi_0$ soit une submersion, il existe une bijection entre $\overset{\circ}{\mathscr{F}}$ et $\mathscr{F}_0/\mathrm{G}_0^+$, donc $\overset{\circ}{\mathscr{F}}$ est la variété quotient $\mathscr{F}_0/\mathrm{G}_0^+$ définie dans l'annexe A.

# ANNEXE C

## RELATIONS DE CONVEXITÉ DE $\varphi$

Soit $\psi$ la forme quadratique définie par :

$$\psi\begin{pmatrix} a_1 \\ \chi_1 \\ k_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ \chi_2 \\ k_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\{ \lambda a_1 a_2 + a_1 \mathrm{B}(\chi_2) + a_2 \mathrm{B}(\chi_1) + a_1 \mathrm{L}(k_1) + a_2 \mathrm{L}(k_1) + \mathrm{R}(\chi_1)(k_2) + \mathrm{R}(\chi_2)(k_1) + \mathrm{E}(\chi_1)(\chi_2) + \mathrm{F}(k_1)(k_2) \}$$

la convexité de la fonction de dissipation $\phi$ en $\gamma$ implique que exprimé dans le repère propre du milieu et dans une carte adaptée $\psi$ est une forme quadratique définie positive, donc nécessairement on doit avoir, en posant $\chi$ et $k$ nuls

$$\lambda > 0$$

on décompte l'espace des $\begin{pmatrix} a \\ \chi \\ k \end{pmatrix}$ en deux sous-espaces orthogonaux pour $\psi$ dont le premier est l'ensemble des $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, la forme quadratique se décompose en deux formes supplémentaires $\psi_1$ et $\psi_2$ tel que

$$\psi_1(a_1)(a_2) = \frac{1}{2}\lambda a_1 a_2$$

et

$$\psi_2\begin{pmatrix} \chi_1 \\ k_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_2 \\ k_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\lambda}(\mathrm{B}(\chi_1) + \mathrm{L}(k_1))(\mathrm{B}(\chi_2) + \mathrm{L}(k_2)) + \mathrm{R}(\chi_1)(k_2) + \mathrm{R}(\chi_2)(k_1) + \mathrm{E}(\chi_1)(\chi_2) + \mathrm{F}(k_1)(k_2)$$

puisque $\lambda$ est strictement positif $\psi_2$ doit être définie positive ce qui implique pour $k = 0$ la condition

$$\lambda \mathrm{E} - \mathrm{B} \otimes \mathrm{B} > 0$$

la troisième condition de convexité s'exprime par une expression compliquée que nous n'utilisons pas.

# RÉFÉRENCES


[*1*] B. CARTER, Perfect Fluid and Magnetic Field Conservation laws in the theory of black holes accretion rings. *DAF*. Observatoire de Paris 92 Meudon France.

[*2*] *Regular and Anomalous Heat Conduction*. Journées Relativistes 1976. Université libre de Bruxelles.

[*3*] W. ISRAEL, Extract from *General Relativity*. Papers in Honour of J. L. Synge. Clarendon Press, Oxford, 1972.

[*4*] *Non Stationary Irreversible Thermodynamics:* a Clausal Relativistic Theory. Preprint OAP 444, California Institute of Technology Pasadena-California.

[*5*] *The Dynamics of Polarisation, General Relativity and Gravitation*, t. **9**, n° 5, 1978.

[*6*] W. ISRAEL, J. M. STEWART, Thermodynamics of non Stationary and Transient Effects in Relativistic Gas. *Physics Letters*, t. **58 A**, n° 4, 1976.

[7] Transient Relativistic Thermodynamics and Kinetic Theory. *Annals of Physics*, t. **118**, n° 2, 1979.
[8] Relativistics Hydrodynamics with Irreversible Thermodynamics, etc. *Nuovo Cimento*, t. **XL B**, n° 1, 1966; *Nuovo Cimento*, t. **LB**, n° 1, 1967.
[9] A. LICHNEROWICZ, *Théorie relativiste de la gravitation et de l'Électromagnétisme*, Masson, 1955.
[10] J. J. MOREAU, *Loi d'Élasticité en grande Déformation*. Séminaire d'analyse convexe. Montpellier, 1979.
[11] NOLL, *The Foundation of Mechanics and Thermodynamics*, Springer, 1979.
[12] SEDOV, *Mécanique des Milieux Continus*. Édition de Moscou.
[13] J. M. SOURIAU, *Géométrie et Relativité*, Hermann, 1964.
[14] *Structure of Dynamical Systems*. North Holland *(à paraître)*.
[15] Thermodynamique et Géométrie. Preprint, *C. N. R. S.*, CPT, Luminy Marseille, 1978, p. 1008.
[16] Thermodynamique Relativiste des Fluides. *Rend. Sem. Math.* Univers. Politecn. Torino, t. **35**, 1976-1977.
[17] J. L. SYNGLE, *The Relativistic Gas*, Amsterdam, 1957.
[18] C. VALLÉE, *Thermodynamique Relativiste des Milieux Continus*. Institut de Mécanique des Fluides, Poitiers *(à paraître)*.
[19] KOBAYASHI NOMIZU, *Differential Geometry*.

*(Manuscrit reçu le 29 mai 1980)*