ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

J. BASS

Moyennes et mesures en mécanique quantique et en mécanique classique

Annales de l'I. H. P., section A, tome 33, nº 3 (1980), p. 301-317
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1980__33_3_301_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXXIII, n° 3, 1980, p. 301-317.

Section A :
Physique théorique.

Moyennes et mesures en mécanique quantique et en mécanique classique

par

J. BASS

Université Pierre-et-Marie-Curie (Paris VI)

RÉSUMÉ. — En mécanique quantique, à un instant fixé, la théorie des opérateurs conduit à attribuer à chaque grandeur physique X une loi de probabilité. Mais elle ne permet d'associer au couple (X, Y) une loi de probabilité que si les opérateurs correspondants commutent. Comme à tout opérateur on peut associer des opérateurs qui ne commutent pas avec lui, il est donc impossible de représenter l'ensemble des grandeurs physiques par les procédés usuels du calcul des probabilités c'est-à-dire par des fonctions aléatoires stationnaires du temps. L'objet de cet article est de montrer que, si l'on représente X et Y par des fonctions non aléatoires dont le caractère oscillant permette le calcul de moyennes temporelles $\left(\text{opérateur } \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (.)dt\right)$, on peut construire des couples de fonctions X, Y qui aient des propriétés comparables à celles des couples d'opérateurs : à X et à Y on peut associer des mesures ayant le caractère de lois de probabilité, mais cela n'est pas possible pour le couple (X, Y). Les fonctions qui remplissent ces conditions sont les fonctions pseudo-aléatoires, qui constituent une classe de fonctions stationnaires complémentaire de celle des fonctions presque-périodiques. Les procédés employés pour les construire passent par l'intermédiaire de suites arithmétiques équiréparties sur l'intervalle [0, 1], qui jouent un rôle comparable à celui des variables aléatoires équiréparties sur [0, 1]. Leurs propriétés résultent des théorèmes ergodiques de H. Weyl (1916) et ont des rapports étroits avec celles des nombres irrationnels.

SUMMARY. — In quantum mechanics, for a system at a fixed time, the theory of operators associates to every physical quantity X a probability

law. But it is not possible to associate a probability law to a pair (X, Y) of operators, when they do not commute. Therefore it is not possible to represent the physical quantities by the usual methods of probability theory. The aim of this paper is to show that, if X, Y are represented by non random functions which are oscillating in such a way that they generate temporal averages $\left(\text{operator } \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (.)dt\right)$, their exist pairs of functions X, Y which have properties similar to pairs of operators. To X and to Y it is possible to associate two measures analogous to probability measures, but that is not possible for the pair (X, Y). The functions satisfying to such conditions are the pseudo-random function, a class of stationary functions which is complementary of the class of almost-periodic functions. The construction of these functions makes use of uniformly distributed sequences of real numbers, which constitute a simulation of random variables uniformly distributed over [0, 1]. Their properties are consequences of the ergodic theorems of H. Weyl (1916) and are related to the properties of irrational numbers.

LA NOTION DE MOYENNE

Dans les applications des mathématiques, on emploie le mot « moyenne » pour désigner des opérations qui, en apparence, n'ont guère de rapports entre elles. Sans rappeler les cas les plus élémentaires (moyenne arithmétique, géométrique, ...), je vais confronter trois types de moyennes qui sont d'un usage courant.

1. Moyenne temporelle. — Soit $f(t)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes, définie pour tout t (ou, si l'on préfère, pour $t > 0$. On peut alors la supposer nulle pour $t < 0$). On appelle moyenne de f l'expression

$$Mf = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)dt .$$

Bien entendu, il peut arriver que la limite n'existe pas. Il est facile de donner des exemples de fonctions ayant des moyennes, et aussi de fonctions n'ayant pas de moyenne. sin t a une moyenne. $e^{i\log|t|}$ n'a pas de moyenne, car

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i\log|t|}dt = \frac{e^{i\log T}}{1+i},$$

expression qui ne tend vers aucune limite quand $T \to \infty$.

2. Moyenne stochastique (ou espérance mathématique). — Sur un ensemble Ω, on définit une tribu et une mesure de probabilité m. Soit $X(\omega)$

une fonction mesurable sur la tribu (variable aléatoire). Sa moyenne est l'intégrale de Lebesgue

$$EX = \int_\Omega X(\omega) dm(\omega) .$$

Si X est à valeurs réelles, on peut aussi introduire sa fonction de répartition $F(x) = m\{\omega ; X(\omega) < x\}$. On sait que EX se représente alors par l'intégrale de Stieltjes

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) .$$

3. MOYENNE QUANTIQUE. — En mécanique quantique, on se place dans un espace de Hilbert H, muni du produit scalaire $\langle , \rangle$. On choisit un élément ψ de norme 1. La moyenne de l'opérateur linéaire A dans l'état ψ est le produit scalaire

$$Q(A) = \langle A\psi, \psi \rangle$$

Je me propose de rappeler en quoi ces trois « moyennes » sont effectivement dignes d'être appeler moyennes, de montrer en quoi elles sont cependant différentes, et de suggérer certaines analogies entre les moyennes temporelles et les moyennes quantiques, qui ne se prolongent pas aux moyennes stochastiques.

ÉQUIVALENCE DES TROIS MOYENNES

Partons de l'idée que, si φ est une fonction à valeurs complexes ayant un domaine de définition convenable,

$$M[\varphi(f)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi[f(t)] dt \qquad \text{(moyenne temporelle)}$$

$$E[\varphi(X)] = \int_\Omega \varphi[X(\omega)] dm(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dF(x) \qquad \text{(moyenne stochastique)}$$

$$Q[\varphi(A)] = \langle \varphi(A)\psi, \psi \rangle \qquad \text{(moyenne quantique)}.$$

J'admets ici que $\varphi(A)$ a pu être défini. Si en particulier f et X sont à valeurs réelles et si A est hermitien (auto-adjoint), on définit

$$Me^{i\lambda f} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{i\lambda f(t)} dt$$

$$Ee^{i\lambda X} = \int_\Omega e^{i\lambda X(\omega)} dm(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dF(x)$$

$$Qe^{i\lambda A} = \langle e^{i\lambda A}\psi, \psi \rangle .$$

(λ est un paramètre réel).

Si X est m-mesurable, $\mathrm{E}e^{i\lambda \mathrm{X}}$ existe. C'est une fonction de λ, appelée *fonction caractéristique* de la variable aléatoire X.

L'existence de $\mathrm{M}e^{i\lambda f}$ exige des conditions beaucoup plus difficiles à énoncer. Elle n'est pas spontanée.

Celle de $\mathrm{Q}e^{i\lambda \mathrm{A}}$ est assurée si l'opérateur A est borné. S'il ne l'est pas, le symbole $e^{i\lambda \mathrm{A}}$ peut être considéré comme une donnée plus satisfaisante que A. Il définit un *groupe d'opérateurs unitaires*, dont A est, sous réserve d'existence, l'opérateur infinitésimal, et dont la moyenne existe.

L'unification de la notion de moyenne résulte de la propriété suivante, qui se démontre assez facilement : chacune des trois moyennes ci-dessus est la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité m ([1]). Cette mesure apparaît explicitement pour $\mathrm{E}e^{i\lambda \mathrm{X}}$, ce qui confère à la moyenne stochastique un rôle particulier, un caractère de référence, dont il ne faut pas abuser.

Dans le cas de la moyenne temporelle, la mesure m s'appelle *mesure asymptotique* de la fonction f. C'est une mesure sur $\mathbb{R}$. En voici un exemple :

$$f(t) = \sin t\,, \qquad \mathrm{M}e^{i\lambda f} = \mathrm{M}e^{i\lambda \sin t} = \mathrm{M}\sum_n \mathrm{J}_n(\lambda)e^{int} = \mathrm{J}_0(\lambda)\,.$$

La fonction caractéristique de $\sin t$ est la fonction de Bessel $\mathrm{J}_0(\lambda)$. On sait que

$$\mathrm{J}_0(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\cos \lambda x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,, \qquad \begin{aligned} dm(x) &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,, & &\text{si} \quad |x| < 1 \\ &= 0 & &\text{si} \quad |x| > 1\,. \end{aligned}$$

La mesure m a une densité (non bornée) égale à $\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

PROPRIÉTÉS PARTICULIÈRES A CHACUNE DES TROIS MOYENNES

La fonction $\varphi(x) = e^{i\lambda x}$ nous a servi à établir une propriété essentielle commune aux trois moyennes. Elle va aussi nous permettre de mieux les distinguer. Mais une autre fonction va participer à cette recherche. C'est la fonction $\varphi(x) = x^2$.

Si X et Y sont des fonctions mesurables et de *carré intégrable*, on sait que X + Y est de carré intégrable et que XY est intégrable. On a

$$\mathrm{E}\,|\mathrm{X}+\mathrm{Y}|^2 = \mathrm{E}\,|\mathrm{X}|^2 + \mathrm{E}\,|\mathrm{Y}|^2 + \mathrm{E}\bar{\mathrm{X}}\mathrm{Y} + \mathrm{E}\mathrm{X}\bar{\mathrm{Y}} \qquad (\bar{\mathrm{X}} \text{ imaginaire conjugué de X})$$

$$\sqrt{\mathrm{E}\,|\mathrm{X}+\mathrm{Y}|^2} \leqslant \sqrt{\mathrm{E}\,|\mathrm{X}|^2} + \sqrt{\mathrm{E}\,|\mathrm{Y}|^2}$$

([1]) Cela résulte du fait que ces trois « fonctions caractéristiques » sont des fonctions de type positif continues.

Les fonctions de carré intégrable constituent un espace vectoriel.

Si au contraire f et g sont des fonctions moyennables et dont les carrés ont des moyennes temporelles, il n'en résulte pas que $|f+g|^2$ *admette nécessairement* une moyenne, ou encore que $f\bar{g}$ admette une moyenne, car l'opérateur $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}$ se comporte d'une façon très différente de l'opérateur $\int_{-\infty}^{\infty}$ ou $\lim\limits_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}$.

Exemple. — $f(t) = 1$, $g(t) = e^{i\log|t|}$. Les deux fonctions f et g ont une moyenne quadratique égale à 1. Mais $|f+g|^2$ n'a pas de moyenne, car $f\bar{g} = e^{-i\log|t|}$ n'en a pas.

Donc les fonctions admettant un carré moyen ne constituent pas un espace vectoriel.

Si A et B sont des *opérateurs bornés*, A^2, B^2, $(A+B)^2$ ont des moyennes dans tout état ψ. S'ils ne sont pas bornés, le problème dépend de leur domaine de définition, mais ce n'est pas dans cette direction que la discussion mérite d'être poursuivie. Il est plus intéressant de comparer la structure des mesures associées aux différents types de moyennes.

Si X et Y sont deux fonctions mesurables (variables aléatoires), $Ee^{i(\lambda X+\mu Y)}$ existe. C'est la fonction caractéristique du couple (X, Y).

Supposons par contre que les deux fonctions f et g aient chacune une mesure asymptotique. *Il n'en résulte pas nécessairement que* $\lambda f + \mu g$ *ait une mesure asymptotique.* Comme il est souvent difficile de manier les mesures asymptotiques, on peut montrer la propriété ci-dessus par le raisonnement suivant.

Supposons que f et g soient réelles, bornées et que $\lambda f + \mu g$ ait une mesure asymptotique. Alors

$$e^{i(\lambda f+\mu g)} = 1 + i\lambda f + i\mu g - \frac{\lambda^2}{2}f^2 - \lambda\mu fg - \frac{\mu^2}{2}g^2 + \dots .$$

La série étant uniformément convergente pour $t \in \mathbb{R}$, on peut prendre la moyenne de deux membres. En particulier, f^2, g^2, fg ont des moyennes. Si donc fg n'a pas de moyenne, le couple f, g ne peut avoir de mesure asymptotique.

Suivant une définition déjà ancienne, on dit que f et g sont *comparables* si $M(fg)$ (ou $M(f\bar{g})$ dans le cas complexe) existe. Je modifierai cette définition en disant que f et g sont comparables si $Me^{i(\lambda f+\mu g)}$ existe (pour tous nombres réels λ, μ). Il existe donc des fonctions non comparables.

Des exemples seront donnés plus loin de fonctions ayant une mesure asymptotique individuelle et dont le couple n'admet pas de mesure asymptotique.

En ce qui concerne les moyennes d'opérateurs, des difficultés analogues se présentent, mais sous une forme différente. Soient A et B deux opérateurs hermitiens. Supposons-les bornés pour éviter toute complication. A chacun des opérateurs A et B est associée dans l'état ψ une mesure, définie par sa fonction caractéristique, qui a pour expression

$$\langle e^{i\lambda A}\psi, \psi \rangle , \qquad \langle e^{i\mu B}\psi, \psi \rangle .$$

Au couple (A, B), il est logique d'associer le produit scalaire

$$\varphi(\lambda, \mu) = \langle e^{i(\lambda A + \mu B)}\psi, \psi \rangle ,$$

qui existe quels que soient les nombres réels λ et μ.

Si A *et* B *commutent*, $\varphi(\lambda, \mu)$ est la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité représentée par sa fonction de répartition $F(x, y)$:

$$\varphi(\lambda, \mu) = \iint e^{i(\lambda x + \mu y)} dF(x, y) .$$

(Intégrale étendue au plan des x, y).

F est une fonction positive telle que $\iint dF(x, y) = 1$, pourvue en outre de propriétés de croissance, qui en font bien la représentation d'une mesure positive. Ce résultat provient simplement du fait que $e^{i(\lambda A + \mu B)} = e^{i\lambda A}e^{i\mu B}$, ce qui entraîne que $\varphi(\lambda, \mu)$ est de type positif. On peut dire aussi que l'ensemble des opérateurs $e^{i(\lambda A + \mu B)}$ constitue un groupe unitaire à deux paramètres.

Si par contre A et B ne commutent pas, la factorisation de $e^{(\lambda A + \mu B)}$ n'est plus possible, et il est bien connu que, sauf peut être pour certains états ψ particuliers, la *transformée de Fourier de* $\varphi(\lambda, \mu)$ *n'est pas une mesure positive.* Dans certains cas, par exemple celui de l'opérateur position et de l'opérateur impulsion et lorsque l'espace de Hilbert H est un espace L^2 (ces opérateurs ne sont pas des opérateurs bornés, mais cela importe peu), on sait construire la transformée de Fourier de $\varphi(\lambda, \mu)$. La fonction F est absolument continue. On peut poser $dF = fdxdy$. f est *la pseudo-densité de probabilité de Wigner.* On sait qu'elle peut prendre des valeurs négatives.

Cette circonstance a fortement influencé le développement de la mécanique quantique. Elle s'interprète dans ce qu'on appelle la « théorie de la mesure » au sens physique, qu'il ne faut pas confondre avec la « théorie de la mesure » des mathématiciens. Pour des raisons diverses, l'habitude est de traduire toute notion de moyenne dans le langage des probabilités, sous forme d'une moyenne stochastique, ou espérance mathématique. La fonction caractéristique $\varphi(\lambda, \mu)$ est une moyenne, à laquelle, si A et B ne commutent pas, il est donc impossible d'attacher une loi de probabilité. On considère comme naturel que chaque grandeur physique soit individuellement pourvue d'une loi de probabilité. Que cela ne soit plus vrai pour le couple est assez déconcertant, et a été interprété de diverses façons, faisant intervenir des concepts physiques, mathématiques ou logiques originaux.

Je ne pense pas que la combinaison linéaire d'opérateurs $\lambda A + \mu B$ joue un rôle essentiel. Le résultat pourra être retenu sous la forme suivante :

Si A *et* B *ne commutent pas, il n'est pas possible d'associer au couple* (A, B) *une loi de probabilité (valable dans tout état* ψ*).*

Cette loi de probabilité nous est apparue comme transformée de Fourier d'une quantité qui avait le caractère d'une moyenne. Or nous avons signalé que, si l'on se réfère non plus aux moyennes stochastiques, mais aux moyennes temporelles, une circonstance analogue à celle qui est soulignée ci-dessus peut se produire d'une façon tout à fait naturelle.

Il existe des fonctions $f(t)$, $g(t)$ *ayant individuellement des mesures asymptotiques, et telles que le couple* (f, g) *n'ait pas de mesure asymptotique.*

Expérimentalement, voici ce que cela signifie : soit l_T la longueur totale des intervalles de l'axe des t tels que $0 < t < T$, $f(t) < x$.

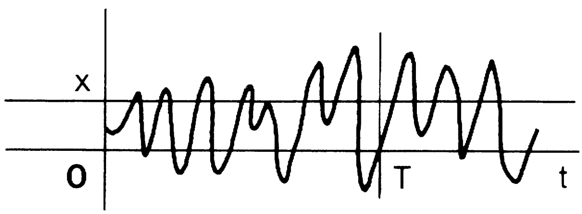


FIG. 1.

Lorsque $T \to \infty$, $\frac{1}{T} l_T$ tend vers une limite, qu'on peut appeler la fonction de répartition de f. De même pour g.

Portons maintenant $f(t)$ en abscisses, $g(t)$ en ordonnées. Le point $(f(t), g(t))$ décrit une trajectoire compliquée, qu'on peut matérialiser sur l'écran d'un oscillographe. On sait définir — et mesurer — la fréquence de l'ensemble des $t < T$ pour lesquels la trajectoire traverse un rectangle donné arbitraire. Il existe des cas, qui n'ont rien d'anormal, pour lesquels,

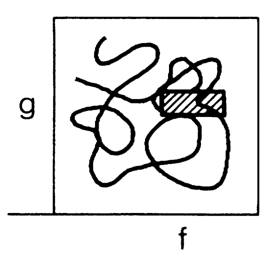


FIG. 2.

lorsque $T \to \infty$, cette fréquence ne se stabilise pas et, mathématiquement parlant, ne tend pas vers une limite.

Je me propose de donner des exemples de cette situation, puis d'en ébaucher une interprétation.

FONCTIONS STATIONNAIRES

Suivant la définition primitive, une *fonction stationnaire* est une fonction $f(t)$ à valeurs complexes telle que la *fonction de corrélation*

$$\gamma(\tau) = M\bar{f}(t)f(t+\tau)$$

existe quel que soit τ et soit une fonction continue de τ. En particulier $M|f(t)|^2$ existe.

Vis-à-vis des moyennes temporelles, les fonctions stationnaires jouent le même rôle que les fonctions aléatoires stationnaires relativement aux moyennes stochastiques. Elles en diffèrent cependant sur quelques points.

a) Si $E|X|^2$ existe, EX existe, et $|EX| < \sqrt{E|X|^2}$.

Si par contre $M|f|^2$ existe, il n'en résulte pas nécessairement que Mf existe.

b) Si $E|X|^2$ et $E|Y|^2$ existent, $E|X+Y|^2$ existe.

Si par contre $M|f|^2$ et $M|g|^2$ existent, il n'en résulte pas nécessairement que $M|f+g|^2$ existe.

La fonction de corrélation, essentielle dans bien des problèmes, ne joue dans ce qui suit aucun rôle, sauf de servir à faire la classification des fonctions stationnaires. Par contre, nous compléterons la définition de la stationnarité en exigeant que si f est réelle, la fonction f ait une mesure asymptotique, c'est-à-dire que $Me^{i\lambda f(t)}$ existe pour tout λ réel.

Il existe deux classes principales de fonctions stationnaires.

1° Les fonctions presque-périodiques, qui sont limites pour la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de suites de polynômes trigonométriques. L'exemple le plus simple en est celui des séries trigonométriques absolument convergentes

$$f(t) = \sum_n c_n e^{i\omega_n t}.$$

Il s'agit là des fonctions presque-périodiques continues. On peut modifier la définition pour y englober des fonctions non continues.

Une fonction presque-périodique f a une moyenne, et une fonction de corrélation, qui est aussi presque-périodique. Or la fonction $e^{i\lambda f}$ est aussi presque-périodique, donc elle a une moyenne, qui n'est autre que la fonction caractéristique de f. Donc une fonction presque-périodique a une mesure asymptotique.

2° LES FONCTIONS PSEUDO-ALÉATOIRES. — Ce sont les fonctions f telles que

$$\lim_{\tau \to \infty} \gamma(\tau) = 0 .$$

Elles ont une moyenne qui est nulle.

Sans entrer dans les détails, on peut dire que ces deux sortes de fonctions stationnaires sont associées à la décomposition spectrale de $\gamma(\tau)$. $\gamma(\tau)$ est la transformée de Fourier d'une mesure sur $\mathbb{R}$ appelée mesure spectrale, dont la composante absolument continue correspond à la fonction pseudo-aléatoire et la composante discontinue (atomique) à la fonction presque-périodique.

Nous allons rappeler comment on peut construire des fonctions pseudo-aléatoires, et montrer que certaines fonctions pseudo-aléatoires n'ont pas de mesure asymptotique.

FONCTIONS PSEUDO-ALÉATOIRES

Les modèles de fonctions pseudo-aléatoires que l'on sait construire se rattachent à la notion de suite équirépartie dans l'intervalle $[0, 1]$. Soit x_n une suite de nombres réels compris entre 0 et 1. Soit I un intervalle arbitraire contenu dans $[0, 1]$. Soit n le nombre de points $x_1, \ldots, x_N$ de la suite qui appartiennent à I. Si, lorsque $N \to \infty$, le rapport $\frac{n}{N}$ a une limite, égale à la longueur l de I, on dit que la suite x_n est équirépartie dans $[0, 1]$.

La définition s'étend au cas d'une suite de points équirépartie dans le cube $[0, 1]^p$ de $\mathbb{R}^p$.

Une suite numérique x_n est p-équirépartie si la suite de points

$$\{ x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+p-1} \}$$

est équirépartie dans le cube de $\mathbb{R}^p$.

Les théorèmes de H. Weyl donnent, sous deux formes, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite x_n soit équirépartie.

1° THÉORÈME ERGODIQUE. — Quelle que soit la fonction f, intégrable au sens de Riemann sur $[0, 1]$,

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} [f(x_1) + \ldots + f(x_n)] = \int_0^1 f(x)dx .$$

2° FORME SPÉCIALE DU THÉORÈME PRÉCÉDENT. — Quel que soit l'entier l non nul,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} [e^{2i\pi l x_1} + \dots + e^{2i\pi l x_n}] = 0 .$$

Enfin, si la suite $x_{n+l} - x_n$ est équirépartie quel que soit l'entier l non nul, la suite x_n est équirépartie.

On démontre alors que, *si x_n est une suite 2-équirépartie, et si* F(x) *est une fonction telle que* $\int_0^1 F(x)dx = 0$, *la fonction f définie par*

$$f(t) = 0 \quad \text{si} \quad t < 0$$
$$f(t) = F(x_n) \quad \text{si} \quad n < t < n + 1$$

est pseudo-aléatoire.

C'est une fonction discontinue en escalier. On peut en déduire des fonctions pseudo-aléatoires continues, en en faisant la convolution par des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$.

Ces résultats sont utilisables parce qu'on sait construire des suites équiréparties. D'après un théorème de H. Weyl, si P(x) *est un polynôme de degré p à coefficients réels, dont le coefficient de x^p est un nombre irrationnel, la suite x_n =* P(n) *est p-équirépartie modulo 1.* Cela signifie que la suite des parties décimales $\underset{\smile}{P(n)} = [P(n) - \text{partie entière de } P(n)]$ est p-équirépartie.

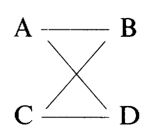
COMPARABILITÉ DES SUITES ÉQUIRÉPARTIES

Nous allons mettre en évidence sur un exemple certaines analogies de structure qui existent entre les fonctions stationnaires, les suites et les opérateurs.

La notation A — B désignera deux opérateurs qui *commutent.*

La notation f — g désignera deux fonctions *comparables.*

Dans les deux cas, cela entraîne l'existence d'une mesure pour le couple. Soient A, B, C, D quatre opérateurs ayant entre eux les relations qui correspondent au schéma suivant



Ils forment 6 couples, dont 4 commutent. C'est le cas des deux opérateurs de position x, y et d'impulsion $\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ pour une particule à deux dimensions.

Nous voulons construire des fonctions f, g, p, q de t telles que leur schéma de comparabilité soit

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & g \arrow[dl, dash] \\ p \arrow[r, dash] & q \end{tikzcd}$$

Nous allons montrer que cela est possible, en utilisant un modèle qui se prêtera à des généralisations évidentes. Notons $\underbrace{z}$ la partie fractionnaire du nombre réel z, différence entre z et sa partie entière. Considérons les quatre suites

$$x_n = \underbrace{\alpha n^2}, \qquad y_n = \underbrace{\beta n^2}$$
$$u_n = \underbrace{\gamma n^2 + \log n}, \qquad v_n = \underbrace{\delta n^2 + \log n},$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont quatre nombres irrationnels. $\underbrace{\alpha n^2}$ peut aussi s'écrire

$$\alpha n^2, \qquad \text{modulo } 1$$

On dit que des nombres irrationnels α_m sont indépendants s'ils ne sont liés par aucune relation linéaire à coefficients entiers non tous nuls : la relation $\Sigma l_m \alpha_m = 0$ (l_m entier) implique que tous les l_m sont nuls.

Supposons d'abord que α et β soient indépendants. On sait que la suite (x_n, y_n) est équirépartie. Elle a une mesure asymptotique. En effet, d'après le théorème de H. Weyl,

$$\mathrm{M} e^{i(\lambda x_n + \mu y_n)} = \iint e^{i(\lambda x + \mu y)} dx dy = \int_0^1 e^{i\lambda x} dx \int_0^1 e^{i\mu y} dy$$
$$= -\frac{1}{\lambda\mu}(1 - e^{i\lambda})(1 - e^{i\mu}).$$

On peut même dire que l'indépendance arithmétique de α et β entraîne l'indépendance des suites x_n, y_n au sens probabiliste.

De même, si α et γ sont indépendants, la suite (x_n, u_n) est équirépartie. Pour le voir, il suffit de démontrer que la suite

$$l_1 \underbrace{\alpha n^2} + l_2 \underbrace{\gamma n^2 + \log n}$$

est équirépartie pour tout couple d'entiers l_1, l_2 non simultanément nuls. Il s'agit donc de la suite

$$l_1 \alpha n^2 + l_2(\gamma n^2 + \log n), \qquad \text{modulo } 1.$$

Elle est équirépartie si la suite

$$(l_1\alpha + l_2\gamma)[(n + p)^2 - n^2] + l_2\ [\log (n + p) - \log n]$$

est équirépartie modulo 1 pour tout entier p non nul. Cela se ramène à

$$2p(l_1\alpha + l_2\gamma)n + l_2 \log\left(1 + \frac{p}{n}\right).$$

Comme $l_1\alpha + l_2\gamma$ n'est pas nul par hypothèse, et $\log\left(1 + \frac{p}{n}\right)$ tend vers 0, la propriété est vérifiée.

On démontre de même que la suite (u_n, v_n) est équirépartie.

Supposons maintenant que trois quelconques des quatre irrationnels α, β, γ, δ soient indépendants. Alors les trois suites correspondantes sont équiréparties à 3 dimensions et indépendantes au sens probabiliste. Nous faisons l'hypothèse suivante : *les irrationnels α, β, γ, δ ne sont pas indépendants. Mais les quatre triplets (α, β, γ), (α, β, δ), (α, γ, δ), (β, γ, δ) sont indépendants.*

Exemple :

$$\alpha = \sqrt{2}, \qquad \beta = \sqrt{3}, \qquad \gamma = \sqrt{5}, \qquad \delta = -(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$$

Essayons de former la mesure asymptotique du quadruplet (x_n, y_n, u_n, v_n). Elle se représente par sa fonction caractéristique

$$\varphi(\lambda, \mu, \nu, \xi) = \mathrm{M}e^{i(\underbrace{\lambda\alpha n^2} + \underbrace{\mu\beta n^2} + \underbrace{\nu\gamma n^2 + \log n} + \underbrace{\xi\delta n^2 + \log n})}$$

Nous voulons montrer qu'il existe des nombres λ, μ, ν, ξ pour lesquels cette moyenne n'existe pas. Choisissons

$$\lambda = 2\pi l_1\,, \qquad \mu = 2\pi l_2\,, \qquad \nu = 2\pi l_3\,, \qquad \xi = 2\pi l_4\,,$$

où l_1, l_2, l_3, l_4 sont des entiers. φ prend la valeur

$$\mathrm{M}e^{2i\pi[l_1\alpha n^2 + l_2\beta n^2 + l_3(\gamma n^2 + \log n) + l_4(\delta n^2 + \log n)]} = \mathrm{M}e^{2i\pi[(l_1\alpha + l_2\beta + l_3\gamma + l_4\delta)n^2 + (l_3 + l_4)\log n]}.$$

Par hypothèse, il existe des entiers l_1, l_2, l_3, l_4 tels que $l_1\alpha + l_2\beta + l_3\gamma + l_4\delta = 0$. Supposons en outre que, pour ce choix, $l_3 + l_4$ ne soit pas nul. C'est le cas dans l'exemple ci-dessus. Alors φ se réduit à

$$\mathrm{M}e^{2i\pi l \log n} = \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} e^{2i\pi l \log n}, \qquad l = l_3 + l_4\,.$$

Or on vérifie que cette limite n'existe pas. Pour le voir, il suffit d'écrire

$$\left(\frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} e^{2i\pi l \log \frac{n}{\mathrm{N}}}\right) e^{2i\pi l \log \mathrm{N}}$$

et de remarquer que le premier terme tend vers $\displaystyle\int_0^1 e^{2i\pi l \log x} dx = \frac{1}{2i\pi l + 1}$, alors que le second n'a pas de limite.

Il existe donc des nombres λ, μ, ν, ξ pour lesquels $\varphi(\lambda, \mu, \nu, \xi)$ n'existe pas. Si au contraire on ne met en jeu que trois des nombres α, β, γ, δ, leurs combinaisons linéaires ne sont jamais nulles, et la fonction caractéristique existe sans restriction.

Il faut maintenant construire quatre fonctions de t telles que 4 des

6 couples qu'elles forment soient comparables, les deux autres ne l'étant pas, conformément au schéma

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & g \arrow[dl, dash] \\ p \arrow[r, dash] & q \end{tikzcd}$$

Donnons-nous quatre fonctions de deux variables F, G, P, Q. Formons les suites

$$F(x_n, y_n)\,, \qquad G(y_n, u_n)\,, \qquad P(u_n, v_n)\,, \qquad Q(v_n, x_n)\,.$$

Les couples (F, G), (G, P), (P, Q), (Q, F) ne font intervenir que trois des suites équiréparties. Ils ont donc des mesures asymptotiques. Par exemple

$$\mathrm{M}e^{i[\lambda F(x_n,y_n) + \mu G(y_n,u_n)]} = \iiint e^{i[\lambda f(x,y) + \mu g(y,u)]} dxdydu$$

(intégrale étendue au cube $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < u < 1$).

Mais aux couples (F, P) et (G, Q), qui contiennent les quatre suites, il n'est pas possible d'associer de mesure asymptotique. On pourrait plus généralement considérer le quadruplet F, G, P, Q. L'expression

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{i[\lambda F(x_n,y_n) + \mu G(y_n,u_n) + \nu P(u_n,v_n) + \xi Q(v_n,x_n)]}$$

n'a pas de limite quand $N \to \infty$. Elle ne peut donc s'identifier à l'intégrale

$$\iiiint e^{i[\lambda F(x,y) + \mu G(y,u) + \nu P(u,v) + \xi Q(v,x)]} dxdydudv$$

bien que cette intégrale soit parfaitement définie.

Considérons maintenant les quatre fonctions $f(t)$, $g(t)$, $p(t)$, $q(t)$ qui, pour $n < t < n + 1$, ont pour valeurs

$$f(t) = F(x_n, y_n)\,, \quad g(t) = G(y_n, u_n)\,, \quad p(t) = P(u_n, v_n)\,, \quad q(t) = Q(v_n, x_n)\,.$$

Ces fonctions satisfont un schéma de comparabilité.

Les couples (f, g), (g, p), (p, q), (q, f) ont des mesures asymptotiques.

Les couples (f, p) et (g, q) n'en ont pas. On peut en outre démontrer que le couple (f, g), par exemple, peut être choisi de telle sorte que sa « loi de probabilité » coïncide avec une loi donnée à l'avance. Sa fonction caractéristique

$$\iiint e^{i[\lambda F(x,y) + \mu G(y,u)]} dxdydu$$

est tout à fait générale. Elle s'identifie à celle d'un couple de variables aléatoires $F(x, y)$, $G(y, u)$, fonctions de trois variables aléatoires indépendantes x, y, u, équiréparties sur $[0, 1]$. La présence de y à la fois dans F et G, introduit le degré de dépendance qui permet de compenser l'indépendance de x, y, u. Un schéma plus simple aurait consisté à partir de quatre suites du type $F(x_n)$, $G(y_n)$, $P(u_n)$, $Q(v_n)$. Chacun aurait fourni une mesure de probabilité valable. Mais les couples du type (F, G) auraient été indépendants au sens probabiliste, ce qui est beaucoup trop restrictif. Le schéma proposé semble donc celui qui est le mieux adapté au problème posé.

Montrons enfin que, à une constante additive près, les quatre fonctions f, g, p, q sont pseudo-aléatoires. Il faut pour cela calculer leur fonction de corrélation. Faisons le pour f. On sait que, si une fonction est constante sur les intervalles $]n, n+1[$, sa fonction de corrélation varie linéairement dans chaque intervalle. Il suffit donc de la calculer pour des écarts τ entiers. On cherche

$$M\bar{F}(x_{n+\tau}, y_{n+\tau})F(x_n, y_n)\,, \qquad \tau \text{ entier}\,.$$

Comme les suites x_n, y_n sont constituées à partir de polynômes αn^2, βn^2 du second degré, elles sont 2-équiréparties, et le quadruplet $(x_n, y_n, x_{n+\tau}, y_{n+\tau})$ est, pour $\tau \neq 0$, équiréparti dans le cube de $\mathbb{R}^4$. On peut donc appliquer le théorème de H. Weyl et la fonction de corrélation est égale à

$$\gamma(\tau) = \iiiint \bar{F}(x', y')F(x, y)dxdydx'dy' = \left| \iint F(x, y)dxdy \right|^2 .$$

Si donc l'intégrale $\iint F(x, y)dxdy$ est nulle, $\gamma(\tau) = 0$ pour τ entier non nul, donc aussi pour τ réel $\geqslant 1$. En outre

$$\gamma(0) = M\bar{F}(x_n, y_n)F(x_n, y_n) = \iint |F(x, y)|^2 dxdy > 0\,.$$

$\gamma(\tau)$ varie linéairement de $\gamma(0)$ à 0 quand τ varie de 0 à 1 et est nulle ensuite. Donc f est pseudo-aléatoire.

Si $\iint F(x, y)dxdy \neq 0$, cette intégrale est la valeur moyenne de f. On vérifie alors que $f - Mf$, fonction de moyenne nulle, est pseudo-aléatoire. f est la somme d'une constante Mf et d'une fonction pseudo-aléatoire.

Remarque. — On peut choisir F et G de manière que la loi du couple (f, g) soit donnée à l'avance. Mais il n'est pas possible de choisir F, G, P, Q de manière que les lois des quatre couples (f, g), (g, p), (p, q), (q, f) soient données. Il existe des conditions restrictives de compatibilité. L'exemple qui suit les met en évidence dans un cas simple.

Exemple. — Cherchons des fonctions f, g, p, q telles que les 4 couples (A, B), (B, P), (P, Q), (Q, A) obéissent à des lois normales, avec des écarts types unité, et des coefficients de corrélation respectivement égaux à r_1, r_2, r_3, r_4. On veut que

$$\iiint e^{i[\lambda f(x,y)+\mu g(y,u)]}dxdydu = e^{-\frac{1}{2}(\lambda^2+2r_1\lambda\mu+\mu^2)}$$
$$(0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < u < 1).$$

Remplaçons d'abord les variables équiréparties x, y, u par des variables indépendantes X, Y, U qui soient normalement distribuées.

On va chercher les constantes a, b, a', b' de façon que

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint e^{i[\lambda(aX+bY)+\mu(b'U+a'Y)]}e^{-\frac{1}{2}(X^2+Y^2+U^2)}dXdYdU = e^{-\frac{1}{2}(\lambda^2+2r_1\lambda\mu+\mu^2)}$$

(X, Y, U variant de $-\infty$ à $+\infty$).

L'intégrale triple vaut

$$e^{-\frac{1}{2}[\lambda^2a^2+\mu^2b'^2+(\lambda b+\mu a')^2]},$$

d'où on déduit que

$$a^2+b^2=1 \qquad a'^2+b'^2=1 \qquad ba'=r_1\,.$$

On pose

$$a=\cos\theta_1 \qquad b=\sin\theta_1 \qquad r_1=\sin\theta_1\cos\theta_2$$
$$b'=\sin\theta_2 \qquad a'=\cos\theta_2$$

En fonction de X, Y, U on a donc

$$f=\cos\theta_1 X+\sin\theta_1 Y\,, \qquad g=\cos\theta_2 Y+\sin\theta_2 U\,.$$

En continuant de la même façon, on introduira deux autres nombres θ_3, θ_4 tels que

$$p=\cos\theta_3 U+\sin\theta_3 V\,, \qquad q=\cos\theta_4 V+\sin\theta_4 X$$
$$r_2=\sin\theta_2\cos\theta_3\,, \qquad r_3=\sin\theta_3\cos\theta_4\,, \qquad r_4=\sin\theta_4\cos\theta_1\,.$$

Ces équations déterminent θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 en fonction de r_1, r_2, r_3, r_4. Cependant, elles n'ont de solution que si r_1, r_2, r_3, r_4 satisfont à certaines conditions. Sans écrire ces conditions générales, on voit leur nécessité par le raisonnement suivant. En éliminant θ_2 et θ_4, on obtient

$$\frac{r_1^2}{\sin^2\theta_1}+\frac{r_2^2}{\cos^2\theta_3}=1\,, \qquad \frac{r_3^2}{\sin^2\theta_3}+\frac{r_4^2}{\cos^2\theta_1}=1\,.$$

Il en résulte que, pour que θ_1 et θ_3 existent, il faut que

$$r_1^2+r_2^2<1\,, \qquad r_3^2+r_4^2<1\,.$$

De même

$$r_2^2+r_3^2<1\,, \qquad r_1^2+r_4^2<1\,.$$

Dans l'espace à 4 dimensions, le point r_1, r_2, r_3, r_4 se trouve nécessairement dans l'intersection de quatre cylindres de révolution intérieurs au cube $|r_i| < 1$.

Pour obtenir enfin $f(x, y)$, il faut passer des variables normales X, Y aux variables x, y uniformément distribuées sur [0, 1] en posant

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2X^2} dX = dx\,, \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2Y^2} dY = dy\,,$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{X} e^{-1/2X'^2} dX'\,, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Y} e^{-1/2Y'^2} dY'\,.$$

On a donc

$$f(x, y) = \cos \theta_1 X(x) + \sin \theta_1 Y(y)$$

où $X(x)$, $Y(y)$ sont les fonctions inverses de $x(X)$, $y(Y)$.

CONCLUSION

Les suites équiréparties sur [0, 1] jouent un rôle analogue aux variables aléatoires équiréparties sur [0, 1]. Elles permettent de construire des mesures, qui peuvent s'identifier aux mesures de probabilité. Mais elles ont certaines propriétés qui les distinguent des variables aléatoires (fonctions mesurables). Deux suites équiréparties peuvent ne pas être *comparables*, de sorte que leur couple ne possède pas de mesure à deux dimensions.

Ces circonstances sont conséquences de propriétés de dépendance ou d'indépendance de nombres irrationnels.

En construisant convenablement des fonctions de suites équiréparties comparables par couples, par triplets, mais non par quadruplets, on arrive à définir des fonctions d'une variable t, constantes par intervalles (fonctions en escalier), éventuellement régularisables par convolution, dont les couples sont pourvus de mesures mais dont les quadruplets (dans l'exemple schématique choisi) ne peuvent donner naissance à une mesure (de probabilité). La situation présente de grandes analogies avec celle qu'on rencontre en mécanique quantique, où la comparabilité des suites est remplacée par la *commutativité* des opérateurs. Cependant, en mécanique quantique, un couple d'opérateurs non commutatifs peut donner naissance à une « pseudo-loi de probabilité », définie par une « pseudo-densité » qui, au moins pour certains états ψ, n'est pas positive. La moyenne $\langle e^{i(\lambda A + \mu B)}\psi, \psi \rangle$ existe, mais n'est pas une fonction caractéristique.

Au contraire, si f et g sont deux fonctions pseudo-aléatoires construites avec des suites non comparables, la moyenne

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{i[\lambda f(t) + \mu g(t)]} dt$$

n'a aucune limite lorsque $T \to \infty$.

Les deux problèmes (temporel et quantique) ont donc à la fois des analogies intéressantes et des différences qui semblent fondamentales.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] J. Bass, Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires. *Bull. Soc. Math. France*, t. **87**, 1959.
[*2*] J. Bass, *Les fonctions pseudo-aléatoires*, *Mémorial des Sciences Mathématiques*. Gauthier-Villars, Paris, 1962.
[*3*] J. Bass, Stationary functions and their applications to turbulence. *Journal of math. analysis and applications*, t. **47**, n^{os} 2 et 3, 1974.
[*4*] J.-P. Bertrandias, Espaces de fonctions continues et bornées en moyenne asymptotique d'ordre p. *Mémoires soc. Math. France*, t. **5**, 1966.
[*5*] J. Couot, Théorie ergodique de l'équirépartition, actes du Colloque de Marseille-Luminy. *Lecture notes in mathematics*, t. **475**, Springer, 1975.
[*6*] Pham Phu Hien, Mesure asymptotique définie par une fonction à valeur dans $\mathbb{R}^n$ ou dans un espace vectoriel topologique. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **XI**, 1975.
[*7*] H. Weyl, Uber die Gleichverteilung von Zahlen modulo Eins. *Math. Ann.*, t. **77**, 1916.
[*8*] N. Wiener, Generalized harmonic analysis. *Acta Math.*, t. **55**, 1930.

(Manuscrit reçu le 30 mai 1980)