

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. CRUMEYROLLE

**Algèbres de Clifford dégénérées et revêtements des  
groupes conformes affines orthogonaux et symplectiques**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 33, n° 3 (1980), p. 235-249

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1980\\_\\_33\\_3\\_235\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1980__33_3_235_0)

© Gauthier-Villars, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

# **Algèbres de Clifford dégénérées et revêtements des groupes conformes affines orthogonaux et symplectiques**

par

**A. CRUMEYROLLE**

Université de Toulouse III,  
118, route de Narbonne, Toulouse.

---

**SOMMAIRE.** — On introduit des algèbres de Clifford dégénérées et les groupes spinoriels associés dans le cas orthogonal comme dans le cas symplectique. On examine particulièrement le cas où le rang  $r$  de la forme fondamentale est égal à  $(n - 1)$ , si  $n$  est la dimension de l'espace ; on en déduit une construction de revêtements des groupes conformes affines orthogonaux et symplectiques selon le même processus formel. On donne succinctement quelques applications aux fibrations spinorielles.

Cette méthode à l'avantage de s'appliquer indifféremment au cas orthogonal et au cas symplectique. Dans le cas orthogonal les inversions n'apparaissent pas, ce qui peut être un avantage dans les applications à la Mécanique quantique. Le lecteur qui s'intéresse au revêtement du groupe conforme complet pourra consulter [1] et [5].

---

## **I. LE CAS ORTHOGONAL**

1. Soit  $(E, Q)$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur un corps  $\mathbb{K}$  commutatif de caractéristique différente de 2, muni d'une forme quadratique  $Q$  dégénérée de rang  $r$ ,  $r < n$ .

Posant  $F = \text{rad } E$  (radical de  $E$ ), on a la décomposition en somme directe  $E = F \oplus E'$  et  $Q$  induit sur  $E'$  une forme quadratique  $Q'$  de rang maximum  $r$ .

**PROPOSITION 1.** — *L'algèbre de Clifford  $C(Q)$  est isomorphe au produit tensoriel gradué de  $C(Q')$  et de  $\Lambda(F)$ . C'est un cas particulier d'un résultat classique :  $C(Q_0 \oplus Q')$  est isomorphe, pour toutes formes quadratiques  $Q_0$  et  $Q'$ , au produit tensoriel gradué  $C(Q_0) \otimes C(Q')$ . Ici  $Q_0 = 0$ .*

## 2. Centre de $C(Q)$ .

Nous le déterminons de manière élémentaire.

Tout élément de  $C(Q)$  peut s'écrire :

$$u = \sum a^{HL} e_{HL} + b^K e_K + c^M f_M,$$

$H, K, L, M$  indices composés,  $e_H, f_L \dots$  produits d'éléments ordonnés ( $e_i, f_j$ ) d'une base orthonormée de  $E$ ,  $e_i \in E', f_j \in F$ ,  $a^{HL}, b^K, c^M$ , éléments de  $\mathbb{K}$ .  $|H| = h_1 + h_2 \dots + h_s$ ,  $e_H = e_{h_1} \dots e_{h_s}$ , et notations analogues.

Si  $u$  est central, multipliant par  $f_p$  à droite, puis à gauche, on obtient par différence, pour les termes qui ne contiennent que des ( $f_j$ ) :

$$\sum_M c^M f_M f_p (1 - (-1)^{|M| |P|}),$$

cette somme est nulle.  $c^M = 0$ , ou  $f_M$  est de degré maximum, ou  $f_M$  est pair.  $f_M$  de degré maximum impair est impossible car  $f_M$  doit commuter

avec tout  $e_K$ , nécessairement  $\sum_M c^M f_M \in \Lambda^+(F)$ .  $\sum_K b^K e_K$  est nécessairement

central dans  $C(Q')$  donc, selon l'étude du centre d'une algèbre de Clifford non dégénérée [3], nécessairement :

$$\begin{cases} \sum_K b^K e_K \in \mathbb{K}, & \text{si } r \text{ est pair,} \\ \sum_K b^K e_K \in \mathbb{K} + \mathbb{K} e_R, \quad e_R = e_1 e_2 \dots e_r, & \text{si } r \text{ est impair;} \end{cases}$$

cependant le deuxième cas est impossible, car  $e_R$  ne peut commuter avec  $f_p$ ,  $|P|$  impair.

On est maintenant ramené à étudier un élément central de la forme

$$\sum_{H,L} a^{HL} e_H f_L.$$

$\Rightarrow$  Pour un terme avec  $|L|$  pair, on multiplie par  $e_K$  à droite puis à gauche, on voit que  $a^{HL} e_H$  est central dans  $C(Q')$ . Si  $r$  est pair on est dans  $\Lambda^+(F)$ , si  $r$  est impair dans  $(\mathbb{K} + e_R) \Lambda^+(F)$ .

⇒ Pour un terme avec  $|L|$  impair, on multiplie par  $e_H$ , on voit que  $|H|$  est pair. Si  $e_H$  ne contient pas  $e_i$  le produit par  $e_i$  montre que  $a^{HL} = 0$ , de sorte que  $e_H$  est nécessairement  $e_R$  et  $r$  est pair, mais  $e_R f_R$ ,  $|L|$  impair ne commute pas avec  $y \in \Lambda^-(F)$ .

Nous avons obtenu :

PROPOSITION 2. — Si  $Z$  est le centre de  $C(Q)$  :

- a) Si  $r = rg(Q)$  est pair :  $Z = \Lambda^+(F)$ ,
- b) Si  $r = rg(Q)$  est impair :  $Z = \Lambda^+(F) + e_R \Lambda^+(F)$ ,

$e_R = e_1 e_2 \dots e_r$ , produit d'éléments d'une base orthonormée de  $E'$ , supplémentaire du radical de  $E$ .

On a posé  $\Lambda(F) = \Lambda^+(F) \oplus \Lambda^-(F)$ .

Il est classique que le centre de  $\Lambda(F)$  est  $\Lambda^+(F)$  si  $F$  est de dimension paire,  $\Lambda^p(F) + \Lambda^+(F)$  si  $F$  est de dimension  $p$  impaire. De plus un élément de  $\Lambda(F)$  est inversible si et seulement si son terme de degré 0 est non nul.

### 3. Groupe de Clifford tordu.

DÉFINITION 1. —  $\alpha$  désignant l'automorphisme principal de  $C(Q)$ , on appelle groupe de Clifford tordu  $(\Gamma)$  de  $(E, Q)$  le groupe des éléments inversibles  $g$  de  $C(Q)$  tels que :

$$(1) \quad p_g(x) = \alpha(g)xg^{-1} \in E, \quad \forall x \in E.$$

Le calcul de  $\alpha(x')x' = -x'^2$ , où  $x' = \alpha(g)xg^{-1}$ , montre que  $x'^2 = x^2$ , donc  $p_g$  appartient à  $0(E, Q)$  monoïde des isométries de  $E$ .

PROPOSITION 3. —  $p$  est un homomorphisme dont le noyau est l'ensemble  $\Lambda(F)^*$  des éléments inversibles de  $\Lambda(F)$ .

Il est facile de voir que  $\Lambda(F)^* \subseteq \ker p$ .

Soit  $u \in \ker p$ ,  $\alpha(u)x = xu$ ,  $\forall x \in E$ . Posons  $u = u^+ + u^-$ ,  $u^\pm \in C(Q)^\pm$ , et dans les éléments de  $C(Q)$  distinguons ceux qui contiennent  $e_1$  en facteur et ceux qui ne le contiennent pas.

$u^+ = v_0 + e_1 v_1$ ,  $v_0$  et  $v_1$  combinaisons linéaires d'éléments ne contenant pas le facteur  $e_1$ .

$$u^+ e_1 = e_1 u^+, \text{ d'où}$$

$$v_0 + e_1 v_1 = e_1 v_0 e_1^{-1} + e_1^2 v_1 e_1^{-1} = v_0 - e_1 v_1 \Rightarrow v_1 = 0.$$

Remplaçant  $e_1$  par  $e_2, e_3, \dots, e_r$ , on voit que  $u^+$  est un produit d'éléments de  $\Lambda^+(F)$ .

Procédant de manière analogue avec  $u^{(-)}$ , on voit que  $u \in \Lambda(F)^*$ .

PROPOSITION 4. —  $p$  est un homomorphisme sur le groupe  $(\Sigma)$  des isométries de  $(E, Q)$  qui se réduisent sur  $F$  à l'identité.

$p_g$  étant visiblement injective est un isomorphisme de  $E$ , de plus  $p_g \in (\Sigma)$  (aisé).

Si  $a \in E$  avec  $Q(a) \neq 0$ , écrivons  $a = a_1 + a_2$ ,  $a_1 \in E'$ ,  $a_2 \in F$ ,

$$p_a(x) = x - \frac{2B(x, a)}{Q(a)} a, \quad \text{avec } B(x, x) = Q(x).$$

Si  $a_2 = 0$ ,  $p_{a_1}(x) = x - \frac{2B(x, a_1)a_1}{Q(a_1)}$ , et  $p_{a_1}$  est la symétrie relative à  $(a_1)^\perp$ .

Dès lors choisissant des  $a_1$  avec  $Q(a_1) \neq 0$  on peut obtenir par composition de symétries :

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi_g(e_i) = \sum_k a_i^k e_k, & (e_k) \text{ base orthonormée de } E', \\ \varphi_g(f_j) = f_j, & (f_j) \text{ base quelconque de } F, \end{cases}$$

où la matrice des  $a_i^k$  est orthogonale pour  $(E', Q')$ . Considérons les éléments cliffordiens de la forme :

$$g_k = 1 + \sum_i C^{ki} e_k f_i = \exp \left( \sum_i C^{ki} e_k f_i \right),$$

$$g_k^{-1} = 1 - \sum_i C^{ki} e_k f_i,$$

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_{g_k}(e_k) = e_k - 2 \sum_i C^{ki} (e_k)^2 f_i, \\ \varphi_{g_k}(e_l) = e_l, & l \neq k, \\ \varphi_{g_k}(f_j) = f_j, \end{cases}$$

on a  $\varphi_{g_s}(e_k) = e_k - \sum_i 2g_{ks} C^{si} f_i$ ,  $s$  fixé,  $k$  fixé, et par composition  $g_1$ ,

$g_2, \dots, g_r$  donnent :

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi_\gamma(e_k) = e_k + \sum_i b_k^i f_i, & \text{avec } b_k^i = - \sum_s 2g_{sk} C^{si}, \\ \varphi_\gamma(f_j) = f_j. \end{cases}$$

Les transformations (2) et (4) donnent par composition le résultat annoncé.

*Remarque.* —  $(\Sigma)$  est le produit semi-direct de groupes d'endomorphismes de matrices  $\left\| \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right\|$ ,  $A$  matrice orthogonale  $r \times r$ , et  $\left\| \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline B & I \end{array} \right\|$ ,  $B$  matrice à  $r$  colonnes et  $(n - r)$  lignes.

**PROPOSITION 5.** — Dans le cas où  $r = (n - 1)$ ,  $p(\Gamma)$  est le groupe des

transformations affines de  $E'$  qui induisent sur l'espace vectoriel associé une isométrie pour  $Q'$  (groupe des transformations affines orthogonales).

Ce résultat immédiat avait déjà été signalé dans la littérature antérieure, mais dans un contexte différent (par exemple [2]).

PROPOSITION 6. — *Tout élément  $g$  de  $(\Gamma)$  se factorise en*

$$(5) \quad g = a_1 a_2 \dots a_l \exp u_1 \exp u_2 \dots \exp u_r \cdot v$$

$$a_i \in E', \quad Q(a_i) \neq 0, \quad u_k = \sum_i C^{ki} e_k f_i, \quad v \in \Lambda(F)^*.$$

On peut encore écrire :

$$(6) \quad g = a_1 a_2 \dots a_l \exp \left( \sum_{ki} (C^{ki} e_k f_i) \right) v$$

puisque les exponentielles commutent l'une avec l'autre (aucune question de convergence ne se pose pour définir les exponentielles). Cette proposition est immédiate d'après la démonstration de la proposition 4.

#### 4. Groupes Pin Q et Spin Q.

La « norme » spinorielle.

$\beta$  est l'anti-automorphisme principal de  $C(Q)$ .

Si  $x' = \alpha(g)xg^{-1}$ ,  $\beta(x') = x'$ , et en développant :

$$\alpha(g^{-1})\beta(g^{-1})x\beta(\alpha(g))g = x, \quad \forall x \in E,$$

donc  $\beta(\alpha(g))g \in \Lambda^+(F)^*$ .

Si l'on pose maintenant :

$$\tilde{N}(g) = \beta(\alpha(g))g, \quad \text{on a} \quad \tilde{N}(gg') = \tilde{N}(g)\tilde{N}(g')$$

et  $\tilde{N}$  qui est un homomorphisme de  $\Gamma$  dans  $\Lambda^+(F)^*$ , peut définir une norme spinorielle.

Cependant il faut observer que  $v \in \Lambda(F)^*$  peut être non réduit à un scalaire et tel que  $\tilde{N}(v) \in K^*$ , de sorte que la considération d'éléments  $g$  tels que  $\tilde{N}(g) = \pm 1$  ne conduit pas à  $\ker(p)$  discret. Il y aurait cependant exception *a priori* pour le cas où  $r = (n - 1)$ , en se restreignant à  $C^+(Q)$  (sur ce point cf. [2] et remarque *c*) ci-dessous).

DÉFINITION 2. — Soit  $\Theta$  le sous-groupe distingué des éléments de  $(\Gamma)$  de la forme  $(a + u)$ ,  $a \in K^*$ ,  $u \in \Lambda(F)$ , on appellera Pin Q le groupe quotient  $\Gamma/\Theta$ .

La définition de Spin Q est alors évidente.

Il est immédiat que  $p|_{\text{Pin } Q}$  est de noyau discret  $\{1, -1\}$ .

Selon (6), tout élément de  $\text{Pin } Q$  admet un représentant de la forme :

$$(7) \quad a_1 a_2 \dots a_l \exp \left( \sum_{ki} (C^{ki} e_k f_i) \right)$$

ou aussi bien :

$$a_1 a_2 \dots a_l \left( 1 + \sum_{ki} C^{ki} e_k f_i \right)$$

*Remarques.* — a) On pourrait introduire le groupe quotient  $(\hat{\Gamma})$  de  $(\Gamma)$  par le sous-groupe distingué des éléments de la forme  $(1 + u)$ ,  $u \in \Lambda(F)$ ,  $\tilde{N}$  passe au quotient et donne  $\hat{N}$ , on peut définir  $\text{Pin } Q$  comme le sous-groupe des éléments  $g$  de  $(\hat{\Gamma})$  tels que  $\hat{N}(g) = \pm 1$ .

b)  $\text{Pin } Q$  est le produit semi-direct de  $\text{Pin } Q'$  par un sous-groupe distingué commutatif.

En effet :

$$\begin{aligned} \exp u_k \exp u'_k &= \left( 1 + \sum C^{kj} e_k f_j \right) \left( 1 + \sum C'^{ks} e_k f_s \right) \\ &= \left( 1 - (e_k)^2 \sum_{j,s} C^{kj} C'^{ks} f_j f_s \right) \left( 1 + \sum_j (C^{kj} + C'^{kj}) e_k f_j \right), \end{aligned}$$

car  $\sum_{j,s,l} C^{kj} C'^{ks} (C^{kl} + C'^{kl}) f_j f_s f_l$  donne deux paquets de termes : si on permute  $j$  et  $l$  dans le premier paquet, puis  $l$  et  $s$  dans le deuxième, on trouve 0.

Ainsi :

$$\exp u_k \exp u'_k = \exp (u_k + u'_k), \quad \text{mod } \Lambda(F)^*$$

(en fait modulo un élément de degré 2 au plus).

De plus si  $a \in E'$ , avec  $Q(a) \neq 0$ , on déduit de (1) que :

$$\exp \left( \sum_{i,k} \alpha^{ki} e_k f_i \right) a = a \exp \sum_{k,i} (\beta^{ki} e_k f_i).$$

Tout cela permet de représenter le produit de 2 éléments de la forme (7) par un élément de la forme (7) et assure aussi le résultat quant au produit semi-direct.

c) Quand  $r = (n - 1)$ , b) entraîne que  $\text{Pin } Q$  est l'ensemble des éléments  $g$  de la forme  $a_1 a_2 \dots a_l \exp (\sum C^{ki} e_k f_i)$  avec  $\tilde{N}(a_1 \dots a_l) = \pm 1$  car  $\Lambda^2(F) = 0$ .

**PROPOSITION 7.** —  $p(\text{Pin } Q)$ , si  $r = (n - 1)$ , est le groupe revêtement d'ordre 2 du groupe des transformations affines orthogonales de  $(E', Q')$ .

Immédiat. En particulier : faisant  $r = 4$ ,  $n = 5$ , on obtient avec une métrique de signature  $(1, 3)$  le groupe revêtement du groupe de Poincaré si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

### 5. Revêtement du groupe conforme affine orthogonal.

On suppose  $r = n - 1$  et  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

Il est possible d'obtenir un revêtement de ce groupe (associé à une métrique de signature  $(p, q)$ ), par introduction d'une métrique de signature  $(p + 1, q + 1)$  [4 a] [I], voir aussi [5]. Cette méthode fait intervenir les inversions, ce qui peut être un inconvénient si l'on souhaite se restreindre à des transformations partout définies.

Nous appelons *groupe conforme affine orthogonal* le groupe constitué par les isométries vectorielles, les translations et les homothéties.

Nous considérons l'espace  $E_1 = F \oplus F' \oplus E' = E \oplus F$  qui est un espace de dimension minimale avec forme quadratique non dégénérée  $Q_1$  contenant  $E$  et induisant  $Q$  sur  $E$ , où  $F'$  est un espace de dimension 1 orthogonal à  $E'$  isotrope, formant avec  $F$  un couple hyperbolique. Soit  $(e')$  une base de  $F'$  et  $(\varepsilon)$  une base de  $F$  avec  $B_1(\varepsilon, \varepsilon') = 1$ ,  $B_1$  forme bilinéaire associée à  $Q_1$ .

On vérifie que

$$\begin{aligned} \exp(\alpha\varepsilon\varepsilon')\varepsilon \exp(-\alpha\varepsilon\varepsilon') &= (\exp(2\alpha)\varepsilon), \\ \exp(\alpha\varepsilon\varepsilon')\varepsilon' \exp(-\alpha\varepsilon\varepsilon') &= \exp(-2\alpha)\varepsilon'. \quad \alpha \in \mathbb{R}^*, \end{aligned}$$

Le groupe de Clifford  $(\Gamma_1)$  de  $Q_1$  admet  $(\Gamma)$  comme sous-groupe, car  $(1 + \Lambda^2(F)) \subset \Gamma_1$  (cf. 4, remarque b)) et ici  $\Lambda^2(F) = 0$ .

Considérons l'ensemble des produits de  $C(Q_1)$  qui contiennent seulement des facteurs pris dans la décomposition (6) et éventuellement un facteur  $\exp(\alpha\varepsilon\varepsilon')$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ . Cet ensemble constitue un sous-groupe  $(\Gamma_2)$  de  $(\Gamma_1)$ .

$p_g | E, g \in (\Gamma_2)$ , admet dans le repère  $(e_1, e_2, \dots, e_r, \varepsilon)$  une matrice  $n \times n$  de la forme :

$$\left\| \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & \lambda I \end{array} \right\| \quad \begin{array}{l} A \text{ matrice orthogonale pour } Q', \\ B \text{ matrice à 1 ligne et } (n - 1), \text{ colonnes, } \lambda \in \mathbb{R}_+^* . \end{array}$$

Ces matrices définissent un groupe  $p(\Gamma_2)$ .

$\Gamma_2/\Theta$  est un revêtement d'ordre 2 de ce groupe.

$$\exp(\alpha\varepsilon\varepsilon') \exp(e_k\varepsilon) \quad \text{s'écrit} \quad \exp(\beta e_k\varepsilon) \exp(\alpha\varepsilon\varepsilon'), \quad \beta \in \mathbb{R},$$

et les remarques antérieures au sujet de la commutation montrent que  $\Gamma_2/\Theta$  s'identifie au groupe constitué par les éléments de la forme

$$a_1 a_2 \dots a_i \exp\left(\sum_{k,i} C^k e_k \varepsilon\right) \exp(\alpha\varepsilon\varepsilon')$$

avec  $\tilde{N}(a_1 \dots a_i) = \pm 1$   $\Gamma_2/\Theta$  apparaît donc comme un sous-groupe de  $\text{Pin}(Q_1)$ .



**PROPOSITION 8.** — *Le groupe  $p(\Gamma_2)$  est isomorphe au groupe conforme affine orthogonal de  $(E', Q')$  et peut lui être identifié.*

A la matrice  $\left\| \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & \lambda I \end{array} \right\|$  on associe la matrice  $\left| \begin{array}{cc|c} 1/\lambda & A & 0 \\ \hline 1/\lambda & B & I \end{array} \right|$ ; on vérifie que cette correspondance se conserve par multiplication.

*En conclusion :*

Pour obtenir le revêtement d'ordre 2 du groupe conforme affine orthogonal  $CO(p, q)$  d'un espace réel  $(\mathcal{E}, \mathcal{Q})$  muni d'une forme quadratique  $\mathcal{Q}$  non dégénérée de signature  $(p, q)$  :

- on associe à  $\mathcal{E}$  un espace  $(\mathcal{E}_1, \mathcal{Q}_1)$ , avec  $\mathcal{Q}_1$  de signature  $(p + 1, q + 1)$ ,
- on écrit la décomposition de Witt :

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} \oplus \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$$

$\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  de dimension 1, totalement isotropes: orthogonaux à  $\mathcal{E}$ , formant un plan hyperbolique.

→ Si  $(e_1, e_2 \dots e_n)$  est une base orthonormée de  $\mathcal{E}$  et  $(\varepsilon, \varepsilon')$  une base de Witt de  $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$ , l'ensemble des éléments  $\gamma$  de  $\mathcal{C}(\mathcal{Q}_1)$  de la forme :

$$(8) \quad \gamma = a_1 a_2 \dots a_l \exp \left( \sum_{k=1}^n C^k e_k \varepsilon \right) \exp (\alpha \varepsilon \varepsilon')$$

$\alpha, C^k \in \mathbb{R}, a_i \in \mathcal{E}, \mathcal{Q}(a_i) \neq 0, \tilde{N}(a_1 a_2 \dots a_l) = \pm 1, \alpha \neq 0$ , constitue un sous-groupe de  $\text{Pin}(p + 1, q + 1)$  qui est un revêtement d'ordre 2,  $\widehat{CO}(p, q)$ , de  $CO(p, q)$ .

$$\widehat{CO}(p, q) \simeq (\mathbb{R}^* \times \text{Pin } \mathcal{Q}) \otimes T, \quad \text{où } T \text{ est un groupe commutatif.}$$

En mécanique quantique, en se restreignant à la composante connexe de l'identité du groupe de Lorentz, on obtient ainsi le revêtement d'ordre 2 du groupe des automorphismes causaux dont l'élément général s'écrit comme un produit d'exponentielles (dans (8) remplacer  $a_i$  par

$$\exp(a^{ij} e_i e_j) \quad (i < j).$$

## 6. Représentations spinorielles.

Si  $\mathcal{Q}$  n'est pas neutre, on complexifie  $C(\mathcal{Q})$  en  $C(\mathcal{Q})^{\mathbb{C}}$  et  $C(\mathcal{Q}_1)$  en  $C(\mathcal{Q}_1)^{\mathbb{C}}$ ; l'idéal minimal à gauche  $C(\mathcal{Q}_1)^{\mathbb{C}} f \varepsilon$ , où  $f$  est un  $r$ -vecteur isotrope pour la forme  $\mathcal{Q}^{\mathbb{C}}$ , fournit un espace de représentation irréductible fidèle de  $\text{Pin}(p + 1, q + 1)$ . En se restreignant à  $\widehat{CO}(p, q)$  :

$$\rho(\gamma) : wf\varepsilon \rightarrow \gamma wf\varepsilon$$

donne une représentation « spinorielle » induite qui peut être *a priori* réductible.

Si on s'intéresse seulement au revêtement  $\widehat{P}(p, q)$  du groupe affine orthogonal  $P(p, q)$  (ou groupe de Poincaré généralisé) on fera simplement  $\alpha = 0$ , dans l'expression de  $\gamma$ , obtenue au n° 5, formule (8).

PROPOSITION 9. — *La représentation spinorielle de  $\widehat{CO}(p, q)$  induite dans  $\mathcal{I} = C(\mathcal{Q}_1)^c f_\varepsilon$  n'a pas d'autre sous-espace irréductible propre que  $C(\mathcal{Q})^c f_\varepsilon$ .*

En effet :

$$C(\mathcal{Q}_1)^c f_\varepsilon = C(\mathcal{Q})^c f_\varepsilon \oplus \varepsilon' C(\mathcal{Q})^c f_\varepsilon .$$

Si un élément  $uf_\varepsilon + \varepsilon'vf_\varepsilon$ ,  $v \neq 0$ , appartient à un idéal à gauche  $\mathcal{I}'$  de  $C(\mathcal{Q}_1)^c$  inclus dans  $\mathcal{I}$ ,

$$(1 + e_k \varepsilon)(vf_\varepsilon + \varepsilon'vf_\varepsilon) \in \mathcal{I}'$$

$$uf_\varepsilon + 2e_kvf_\varepsilon + \varepsilon'vf_\varepsilon \in \mathcal{I}'$$

donc

$$e_kvf_\varepsilon \in \mathcal{I}' ;$$

$\text{Pin}(\mathcal{Q})$  engendre algébriquement  $C(\mathcal{Q})^c$ , et comme  $C(\mathcal{Q})^c \simeq \text{End}(C(\mathcal{Q})^c f)$ , selon un résultat bien connu,  $\mathcal{I}'$  contient  $C(\mathcal{Q})^c f_\varepsilon$ , donc  $\varepsilon'vf_\varepsilon \in \mathcal{I}'$ . Mais  $\varepsilon'vf_\varepsilon \in \mathcal{I}'$  entraîne pour la même raison que :

$$\varepsilon' C(\mathcal{Q})^c f_\varepsilon \subseteq \mathcal{I}' .$$

Donc  $\mathcal{I}' = \mathcal{I}$ .

Maintenant, observons que  $C(\mathcal{Q})^c f_\varepsilon$  est stable pour l'action de  $\text{Pin } \mathcal{Q}$

et des éléments  $\exp \sum_1^n (C^k e_k \varepsilon)$ .

Comme  $\exp(\alpha \varepsilon \varepsilon') = 1 - (1 - \exp 2\alpha) \frac{\varepsilon \varepsilon'}{2} = 1 + \lambda \varepsilon \varepsilon'$ , on voit que cette stabilité s'étend à l'action de  $\exp(\mathbb{R}^* \varepsilon \varepsilon')$ ,

$$(1 + \lambda \varepsilon \varepsilon')uf_\varepsilon = (1 + 2\lambda)uf_\varepsilon ,$$

qui est encore une homothétie.

Si on appelle groupe des similitudes  $\text{GO}(p, q)$  le groupe engendré par les isométries et les homothéties, son revêtement  $\widehat{\text{GO}}(p, q)$  est engendré par les :

$$a_1 a_2 \dots a_l \exp(\alpha \varepsilon \varepsilon') .$$

On peut réenoncer le résultat qui vient d'être obtenu :

PROPOSITION 9 bis. —  *$C(\mathcal{Q})^c f_\varepsilon$  est l'espace d'une représentation spinorielle irréductible pour le groupe de revêtement  $\widehat{\text{GO}}(p, q)$  du groupe des similitudes.*

On remarque que  $\exp \alpha \varepsilon \varepsilon'$  donne à nouveau une homothétie dans l'espace spinoriel.

*Remarques.* — a) T opère dans  $C(\mathcal{Q})^{cf_\varepsilon}$  comme l'identité, de sorte que la représentation de  $\widehat{CO}(p, q)$  dans cet espace n'est pas fidèle. La même remarque vaut pour  $\widehat{P}(p, q)$ .

b)  $\exp(\mathbb{R}^*\varepsilon\varepsilon')$  opère dans  $\varepsilon'C(\mathcal{Q})^{cf_\varepsilon}$  comme l'identité. On remarquera que l'action de  $\text{Pin}(\mathcal{Q})$  est la même dans les deux espaces  $\varepsilon'C(\mathcal{Q})^{cf_\varepsilon}$  et  $C(\mathcal{Q})^{cf_\varepsilon}$ .

c) On pourrait remplacer partout  $\varepsilon$  par  $\varepsilon'$ , on obtiendrait alors par projection par  $p$  un groupe  $p(\Gamma'_2)$ . Les algèbres de Lie de  $p(\Gamma_2)$  et  $p(\Gamma'_2)$  engendrent une algèbre isomorphe à celle du groupe conforme complet  $C_n(p, q)$ ,  $p + q = n$ . Les transformations conformes spéciales qui sont des transmuées de translations par une inversion n'apparaissent pas explicitement mais sont remplacées par des translations. On passe des translations dans  $p(\Gamma_2)$  à celles de  $p(\Gamma'_2)$  en échangeant  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  à l'aide d'une symétrie relativement à l'hyperplan orthogonal à  $(\varepsilon - \varepsilon')$ . C'est cette symétrie qui remplace l'inversion dont l'hyperpseudo-sphère directrice est l'hyperpseudo-sphère unité de  $\mathcal{E}$ , laquelle apparaît dans la factorisation d'une transformation conforme spéciale :

$$x \in \mathcal{E} \rightarrow \frac{1}{1 + ax} \cdot x, \quad a \in \mathcal{E},$$

définie pour  $\tilde{N}(1 + ax) \neq 0$

$$\left( x \rightarrow \frac{1}{1 + ax} \cdot x \text{ s'écrivant } x \rightarrow (x^{-1} + a)^{-1} \right) \quad [I] [5].$$

d) La composante connexe de l'identité du groupe  $\text{Pin}(p + 1, q + 1)$  de la métrique  $\mathcal{Q}_1$  est un revêtement d'ordre 2 de la composante connexe du groupe conforme complet.  $C(\mathcal{Q}_1)^{cf_\varepsilon}$  est un espace twistoriel pour  $(\mathcal{E}, \mathcal{Q})$  [4 a].

## 7. Problèmes de fibrations.

Supposons qu'il existe au-dessus de la variété  $V$  un fibré vectoriel  $\xi_n$ , réel, de rang  $n$  sur  $\mathbb{R}$ , admettant une structure pseudoriemannienne dégénérée, c'est-à-dire possédant une forme quadratique de rang  $r < n$  en tout point.

La matrice de toute transformation linéaire régulière qui conserve une forme quadratique  $Q$  dégénérée de rang  $r < n$ , est dans l'espace standard de la forme :

$$\left\| \begin{array}{cc} A & 0 \\ B & D \end{array} \right\|$$

$A$ , matrice orthogonale  $r \times r$ ,  $D$  matrice régulière  $(n - r) \times (n - r)$ ,  $B$  matrice  $(n - r) \times r$ .

Selon un résultat général une fibration dont le groupe structural est

constitué de telles matrices a son groupe réductible à celui des matrices de la forme :

$$\left\| \begin{array}{cc} A' & 0 \\ 0 & D' \end{array} \right\|,$$

Il existe donc deux fibrations  $\zeta_r$  et  $\zeta_{n-r}$  telles que  $\zeta_n = \zeta_r \oplus \zeta_{n-r}$ ,  $\zeta_r$  étant un fibré pseudo-riemannien non dégénéré et  $\zeta_{n-r}$  totalement isotrope.

**PROPOSITION 10.** — *Une fibration spinorielle dégénérée détermine une fibration spinorielle non dégénérée et une fibration vectorielle totalement isotrope triviale.*

La définition d'une fibration spinorielle au-dessus du fibré des repères de  $\zeta_n$  est immédiate selon le n° 4.

Le groupe Pin Q est le produit semi-direct du groupe Pin Q' et d'un groupe commutatif T dont les éléments se représentent par :

$$\left( 1 + \sum_{ki} C^{ki} e_k f_i \right).$$

T est homéomorphe à  $\mathbb{R}^{r \times (n-r)}$ , donc selon un résultat général sur les fibrations, le fibré associé au fibré spinoriel de fibre  $H \simeq \frac{\text{Pin Q}}{\text{Pin Q}'}$  a une section et le fibré de groupe Pin Q a son groupe réductible à Pin Q'. La projection ainsi réduite donne un revêtement du fibré de groupe  $O(Q')$ , non dégénéré. De plus on sait, que par projection, Pin Q' opère comme l'identité sur le fibré des repères de  $\zeta_{n-r}$ ,  $\zeta_{n-r}$  est donc trivial.

Ces remarques suggèrent les constructions suivantes :

Soit V une variété différentiable de dimension  $n = 2r$ , munie d'une structure pseudo-riemannienne non dégénérée. Nous voulons construire au-dessus de cette variété une fibration en spineurs conformes, au sens du n° 6.

Nous considérons donc 2 fibrés  $\zeta, \zeta'$ , réels, tels que  $T(V) \oplus \zeta \oplus \zeta'$  soit une somme de Whitney, donnant en tout point  $x \in V$  une décomposition de Witt attachée à une métrique se réduisant sur  $T_x(V)$  à la métrique donnée,  $\zeta_x \oplus \zeta'_x$  étant un plan hyperbolique orthogonal à  $T_x(V)$ ,  $\zeta_x, \zeta'_x$  isotropes.

S'il existe au-dessus de  $T(V)$  un fibré spinoriel revêtement d'ordre 2 du fibré des repères tangents, il existe un champ (modulo un facteur  $\pm 1$ ) de  $r$ -vecteurs isotropes  $f$  pour la « métrique » de  $T(V)$ ,  $\zeta$  et  $\zeta'$  ont des sections  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$ , et  $f\varepsilon$  est un pseudo-champ de  $(r+1)$ -vecteurs isotropes. Il existe donc une structure spinorielle pour le fibré de repères de  $T(V) \oplus \zeta \oplus \zeta'$ . On retrouve alors la situation décrite dans le n° 6 en chaque point  $x \in V$ .

En mécanique quantique  $(p, q) = (1, 3)$ , supposons que  $X^k e_k = X$  soit

un champ local de vecteurs,  $\left( e_k = \frac{\partial}{\partial x^k} \right.$  dans les applications,  $(x^i)$  coordonnées locales) et  $E_{jk}$  une section locale du fibré en algèbres de Lie associé au fibré des repères tangents; on a,  $X\varepsilon$  étant une section du fibré à groupe  $P(1, 3)$  :

$$[E_{jk}, X^l e_l \varepsilon] = (g_{lk} X^l e_j - g_{lj} X^l e_k) \varepsilon = \left( X_k \frac{\partial}{\partial x^j} - X_j \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \varepsilon.$$

$(X\varepsilon)$  définit l'impulsion,  $E_{jk}$  le moment de spin et  $[E_{jk}, X]\varepsilon$  le moment orbital. Le champ ainsi décrit est de spin 1/2, comme l'on sait, à masse non nulle ( $X$  non isotrope), dans l'interprétation usuelle.

On peut mettre sur l'espace des sections spinorielles une structure hilbertienne [4 b] de sorte que le cadre géométrique de la quantification de la particule de spin 1/2 dans un champ de gravitation, est mis en évidence, avec des propriétés usuelles de covariance.

Si la « masse est nulle » on peut utiliser le groupe  $\widehat{GO}(p, q)$  et les spineurs déterminés selon la proposition 9 bis.

#### REMARQUES SUR LA « CONJUGAISON DE CHARGE »

Dans leur article *Charge conjugation and Segal's cosmology* (1975), [6] Sternberg et Wolf considèrent une métrique  $\mathcal{Q}$  de type  $(p, q)$ ,  $p = 1$ ,  $q = 3$  et adjoignant 2 vecteurs qui génèrent un plan hyperbolique tel que  $(\varepsilon, \varepsilon')$ , avec  $\left( \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1$ , remarquent que le choix de  $\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\sqrt{2}} = e_{-1}$  est lié à celui d'une conjugaison de charge. Ce résultat est une conséquence banale et un cas particulier de notre définition de la conjugaison de charge donnée dans l'article « Dérivations, formes et opérateurs usuels sur les champs spinoriels... » (*Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. **XVI**, n° 3, 1972, p. 171-201). Dans notre spineur pur  $\gamma f$  (p. 194, *Ibid.*), si  $p + q = 2r$ ,  $p < r$ ,  $\gamma$  contient  $(r - p)$  facteurs isotropes du premier degré; il en est encore ainsi avec  $(p + 1, q + 1)$ ,  $(p + 2, q + 2)$ , etc.

Si  $r - p = 1$ , on peut prendre  $\gamma f' = e_- f'$  [cf., p. 191, *Ibid.*]  $\mathcal{C}(uf') = \bar{u} \gamma f'$  est une conjugaison de charge qui échange spineurs pairs et spineurs impairs ( $f'$  est un  $r$ -vecteur isotrope standard).

Tout cela est valable avec  $p = 1$ ,  $q = 3$ , mais aussi toutes les fois que  $r - p = 1$ , ou  $p - r = 1$ .

## II. LE CAS SYMPLECTIQUE

$(E, G)$  est un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire antisymétrique  $G$ , dégénérée, de rang  $r < n$ ,  $n$  est la dimension de  $E$  sur  $\mathbb{K}$ . On

reprendra autant que possible, les notations de (I).  $E = F \oplus E'$ ,  $G' = G | E'$ .  $V(F)$  est l'algèbre symétrique de  $F$ .

**PROPOSITION 1 bis.** — *L'algèbre de Clifford symplectique  $C_s(G)$  est isomorphe au produit tensoriel de  $C_s(G')$  et  $V(F)$ .*

C'est la même démonstration que dans le cas orthogonal [4 c].

**PROPOSITION 2 bis.** — *Le centre de  $C_s(G)$  est  $V(F)$ .*

Immédiat.

On supposera maintenant que  $\mathbb{K}$  est soit  $\mathbb{R}$  soit  $\mathbb{C}$  et on introduira l'algèbre de Clifford symplectique large [4 c]  $C_s(G)_l$  que l'on définira comme  $C_s(G')_l \otimes \overset{**}{V}(F)$  où  $\overset{**}{V}(F)$  est l'algèbre des séries formelles de  $F$ .

**DÉFINITION 1 bis.** — *On appelle groupe de Clifford symplectique  $\Gamma_s$ , le groupe des éléments inversibles  $\gamma$  de  $C_s(G)_l$  tels que*

$$p_\gamma(x) = \gamma x \gamma^{-1} \in E, \quad \forall x \in E.$$

$p_\gamma$  appartient au monoïde des « isométries » symplectiques de  $E$ .

**PROPOSITION 3 bis.** —  $\ker p = (\overset{**}{V}(F))^*$ .

Immédiat.

**PROPOSITION 4 bis.** —  *$p$  est un homomorphisme sur le groupe  $(\Sigma_s)$  des transformations symplectiques qui se réduisent sur  $F$  à l'identité.*

Une formule (2 bis) analogue à (2) s'obtient par composition de transpositions symplectiques pour  $(E', G')$ . Si on choisit une base symplectique  $(e_\alpha, e_{\beta^*})$  de  $(E', G')$  et  $(f_j)$  base de  $F$ , si

$$C = \sum_j C^{j\alpha^*} e_{\alpha^*} f_j,$$

$$\exp(tC)x \exp(-tC) = x + t \sum_j C^{j\alpha^*} F(e_{\alpha^*}, x) f_j$$

Pour  $x = e_\alpha$  :

$$\begin{cases} p_{(\exp C)}(e_\alpha) = e_\alpha - \sum_j C^{j\alpha^*} f_j \\ p_{(\exp C)}(e_\beta) = e_\beta, & \beta \neq \alpha^* \\ p_{(\exp C)}(e_{\beta^*}) = e_{\beta^*}, & p_{(\exp C)}(f_j) = f_j, \end{cases}$$

Remplaçant  $\alpha^*$  par  $\alpha$ , puis variant les indices on obtient une formule (4 bis) analogue à (4).

Il apparaît encore un produit semi-direct et quand  $r = (n - 1)$ ,  $p(\Gamma_s)$  est le groupe des transformations affines symplectiques de  $(E', G')$ .

PROPOSITION 6 bis. — *Tout élément  $\gamma$  de  $\Gamma_s$  se factorise en :*  
 (6 bis)  $\gamma = \exp t_1(a_1)^2 \exp t_2(a_2)^2$

$$\dots \exp t_i(a_i)^2 \exp \left( \sum_{j,\alpha} a^{j\alpha*} e_{\alpha*} f_j \right) \dots \exp \sum_{j,\alpha} (a^{j\alpha} e_{\alpha} f_j) \cdot v,$$

---


$$t_i \in \mathbb{K}^*, \quad a_i \in E, \quad v \in (\check{\vee} F)^*, \quad a^{jk} \in \mathbb{K};$$

cela découle d'un résultat établi dans le cas non dégénéré [4 c] et des considérations antérieures.

GROUPES MÉTAPLECTIQUES ET SPINORIELS SYMPLECTIQUES

Prenons  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  et soit  $\beta$  l'anti-automorphisme principal tel que  $\beta | E = iId$ .

Un calcul parallèle à celui du (I) montre que l'on peut définir

$$N(\gamma) = \beta(\gamma)\gamma \in (\check{\vee} F)^* \quad \text{et que} \quad N(\gamma)N(\gamma') = N(\gamma\gamma').$$

Si nous partons de  $E$  réel, complexifié en  $E^{\mathbb{C}}$ , introduisons  $C_S(G)_i^{\mathbb{C}}$  complexifiée de  $C_S(G)_i$  et le sous-groupe des éléments  $\gamma$  de  $(\Gamma_s)^{\mathbb{C}}$  groupe de Clifford de  $G^{\mathbb{C}}$ , complexifié de  $G$ , tels que  $\gamma x \gamma^{-1} \in E, \forall x \in E$ . En quotientant par le sous-groupe des éléments  $(1 + u), u \in (\check{\vee} F)^*, \hat{N}$  étant déduite de  $N$  par passage au quotient, on appellera groupe métaplectique le sous-groupe des éléments  $\bar{\gamma}$  de  $\frac{(\Gamma_s)^{\mathbb{C}}}{1 + (\check{\vee} F)^*}$  tels que  $|\hat{N}(\bar{\gamma})| = 1$ , et groupe spinoriel

2-symplectique le sous-groupe des  $\bar{\gamma}$  tels que  $\hat{N}(\bar{\gamma}) = 1$ .

Les groupes spinoriels  $q$ -symplectiques ( $q = 2, 3 \dots + \infty$ ) [4 c] s'obtiennent tous à partir du cas non dégénéré, leurs éléments se factorisent en un élément du groupe correspondant de  $(E', G')$  et un élément

$$\sum_{j,\alpha^*} \exp (a^{j\alpha^*} e_{\alpha^*} f_j) \sum_{j,\alpha} \exp (a^{j\alpha} (e_{\alpha} f_j)),$$

modulo un facteur, élément de  $1 + (\check{\vee} F)^*$ .

REVÊTEMENTS DU GROUPE CONFORME AFFINE SYMPLECTIQUE

On suppose  $r = (n - 1), \mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

On introduit encore  $E_1 = F \oplus F' \oplus E' = E \oplus F$ , qui est un espace de dimension minimale avec forme symplectique  $G_1$  contenant  $E$  et induisant  $G$  sur  $E$ .

$F \oplus F'$  est un plan hyperbolique « orthogonal » au sens symplectique à  $E'$ .  $(\varepsilon, \varepsilon')$  constitue une base de  $(F, F')$ ,  $G_1(\varepsilon, \varepsilon') = 1 \Rightarrow \varepsilon\varepsilon' - \varepsilon'\varepsilon = 1$ .

$$\exp (\alpha\varepsilon\varepsilon')\varepsilon \exp (-\alpha\varepsilon\varepsilon') = \exp (-\alpha) \cdot \varepsilon.$$

On aboutit ainsi à une proposition (8 bis) analogue à la proposition (8),  $A$  étant une matrice symplectique pour  $G'$ .

La conclusion finale donnée pour le cas orthogonal s'adapte aisément, mais on conserve dans tous les cas les passages au quotient, l'algèbre symétrique en dimension 1 n'étant pas réduite aux scalaires.

## RÉFÉRENCES

- [1] P. ANGLES, Construction de revêtements du groupe conforme d'un espace vectoriel muni d'une métrique de type  $(p, q)$ . *Annales Inst. H. Poincaré*, Sect. A, t. **33**, 1, 1980, p. 33-51.
- [2] J. A. BROOKE, A galilean formulation of spin 1: Clifford algebras and spin groups. *Journal of Math. Phys.*, t. **19**, n° 5, mai 1978, p. 952-959.
- [3] Cl. CHEVALLEY, *The algebraic theory of spinors*. Columbia U. P., New York, 1954.
- [4] A. CRUMEYROLLE, a) Fibrations spinorielles et twisteurs généralisés. *Periodica Math. Hungarica*, t. **6**, 2, 1975, p. 143-171; b) Formalisme lié à la seconde quantification sur les fibrés spinoriels orthogonaux ou symplectiques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **282**, série A, 1976, p. 1367-1370; c) Algèbre de Clifford symplectique, etc. *J. Math. Pures et appl.*, t. **56**, 1977, p. 205 à 230.
- [5] P. LONESTO et E. LATVAMAA, Conformal transformations and Clifford algebras. Report HTKK (Helsinki, Université de Technologie). *Math. A*, t. **123**, 1978.
- [6] S. STERNBERG et J. A. WOLF, Charge conjugation and Segal's cosmology. *Il nuovo Cimento*, t. **28 A**, n° 2, 1975, p. 253-271.

(Manuscrit reçu le 29 mai 1980)