ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

J. GARIEL

Rapprochement entre deux formalismes en thermodynamique relativiste des phénomènes irréversibles

Annales de l'I. H. P., section A, tome 33, nº 2 (1980), p. 195-203
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1980__33_2_195_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré Section A :
Vol. XXXIII, n° 2, 1980, p. 195-203. *Physique théorique.*

Rapprochement entre deux formalismes en thermodynamique relativiste des phénomènes irréversibles

par

J. GARIEL

RÉSUMÉ. — Nous montrons que l'on peut rapprocher le formalisme d'Eckart [*1*] de celui de Costa de Beauregard [*2*], en Relativité Restreinte, dans le cas d'un fluide simple thermodynamique, au sens de Pham Mau Quan [*3*], conducteur de la chaleur, non visqueux et sans rayonnement.

ABSTRACT. — We show that we can bring together the Eckart's special relativistic formalism [*1*] and the Costa de Beauregard's one [*2*], for a no viscous nor radiative, but with heat conduction, simple thermodynamic fluid, in the Pham Mau Quan's sense [*3*].

§ 1. INTRODUCTION

1.1. Soit un fluide à une composante, idéal, mais conducteur de la chaleur. On sait qu'on peut le décrire dans l'espace de Minkowski de la relativité restreinte, de métrique $g^{\alpha\beta}$ dont la signature est $(+, -, -, -)$ $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$, par un tenseur d'impulsion-énergie $T^{\alpha\beta}$. Eckart a proposé :

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta - P\gamma^{\alpha\beta} - u^\alpha q_E^\beta - u^\beta q_E^\alpha \tag{1-1}$$

où ρ et P sont les champs scalaires de densité d'énergie et de pression,

u^α le champ de quadrivitesse normée, q_E^α le champ de conduction calorifique, et $\gamma^{\alpha\beta}$ le projecteur local d'espace, avec :

$$u^\alpha u_\alpha = 1 \tag{1-2}$$

$$q_E^\alpha u_\alpha = 0 \tag{1-3}$$

$$\gamma^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta . \tag{1-4}$$

Pham Mau Quan, qui a généralisé la théorie d'Eckart en Relativité générale [*3*], a proposé un tenseur asymétrique [*4*] :

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta - P\gamma^{\alpha\beta} - u^\alpha q_P^\beta \tag{1-5}$$

que nous choisirons, afin de faciliter le rapprochement avec le formalisme de Costa de Beauregard. Le tenseur $T^{\alpha\beta}$ est conservatif, sa divergence est nulle :

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \tag{1-6}$$

équation qui se décompose en

$$u_\alpha \nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \tag{1-7}$$

qui exprime le premier principe, et

$$\gamma^\alpha{}_\mu \nabla_\beta T^{\mu\beta} = 0 \tag{1-8}$$

qui exprime l'équation du mouvement.

De nombreux auteurs [*5*] sont d'accord pour interpréter ρ comme la somme de la densité du nombre de particules, n, et de la densité d'énergie interne u :

$$\rho = n(1 + \bar{u}) \tag{1-9}$$

où $\bar{u}$ est l'énergie interne spécifique. D'une façon générale nous définirons une grandeur extensive spécifique $\bar{x}$, de densité x, par :

$$n\bar{x} = x . \tag{1-10}$$

La conservation du nombre de particules

$$\nabla_\alpha(nu^\alpha) = 0 \tag{1-11}$$

permet alors de mettre (1-7) sous la forme

$$n\dot{\bar{u}} = P\frac{\dot{n}}{n} + \nabla_\alpha q_P^\alpha , \tag{1-12}$$

la notation « point » sur un symbole signifiant sa dérivée totale par rapport à l'élément métrique $d\xi(d\xi^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$; x^α, quadri-point de l'espace-temps).

1.2. Costa de Beauregard [*2*] part également d'un tenseur conservatif et effectue, sur le modèle thermodynamique, une séparation au sein de son tenseur d'impulsion-énergie entre une partie « travail » $w^{\alpha\beta}$ et une partie « calorifique » $q^{\alpha\beta}$. Il étudie de façon détaillée essentiellement cette dernière, $q^{\alpha\beta}$, et pose :

$$q^{\alpha\beta} = \mathrm{T}^{\alpha} s_c^{\beta} \tag{1-13}$$

en précisant que poser l'existence du 4-vecteur température T^{α} c'est poser un « postulat de quasi-équilibre local ». Cette façon de procéder nous semble être dans le même esprit que la nôtre [*6*] ; s_c^{β} est le courant densitaire d'entropie.

La partie $w^{\alpha\beta}$ nous semble, en outre, pouvoir se décomposer en une partie « cinétique » et une partie « pression », la décomposition de chacun de ces deux tenseurs en un produit « variable intensive × variable extensive » relevant également d'un postulat d'équilibre local.

§ 2. RAPPROCHEMENT

2.1. Le rapprochement consistera d'abord à identifier le tenseur de Pham Mau Quan et celui de Costa de Beauregard :

$$n(1 + \bar{h})u^{\alpha}u^{\beta} - \mathrm{P}g^{\alpha\beta} - u^{\alpha}q_{\mathrm{P}}^{\beta} \equiv w^{\alpha\beta} + \mathrm{T}u^{\alpha}s_c^{\beta} \tag{2-1}$$

où $\bar{h}$ est l'enthalpie spécifique

$$h = n\bar{h} = u + \mathrm{P} \tag{2-2}$$

et où l'on a utilisé l'hypothèse (13) [*2*] de Costa de Beauregard :

$$\mathrm{T}^{\alpha} = \mathrm{T}u^{\alpha}, \tag{2-3}$$

T étant le champ de température scalaire.

On peut encore écrire (2-1)

$$n(1 + \bar{g})u^{\alpha}u^{\beta} - \mathrm{P}g^{\alpha\beta} + u^{\alpha}(\mathrm{T}su^{\beta} - q_{\mathrm{P}}^{\beta}) \equiv w^{\alpha\beta} + \mathrm{T}u^{\alpha}s_c^{\beta}, \tag{2-4}$$

s étant la densité scalaire d'entropie et $\bar{g}$ l'enthalpie libre (fonction de Gibbs) spécifique scalaire définie par :

$$\bar{g} = \bar{h} - \mathrm{T}\bar{s}. \tag{2-5}$$

Par identification, (2-4) donne :

$$w^{\alpha\beta} = n(1 + \bar{g})u^{\alpha}u^{\beta} - \mathrm{P}g^{\alpha\beta} \tag{2-6}$$

et :

$$su^{\beta} - \frac{1}{\mathrm{T}} q_{\mathrm{P}}^{\beta} = s_c^{\beta}. \tag{2-7}$$

2.2. D'autre part, la définition (14) [*2*] du courant de chaleur de Costa de Beauregard est :

$$q_c^{\alpha} = \mathrm{T}s_c^{\alpha} \tag{2-8}$$

c'est-à-dire d'après (2-7) :

(2-9) $$q_c^\alpha = \mathrm{T}su^\alpha - q_\mathrm{P}^\alpha .$$

2.3. D'après (1-13), les « grandeurs d'état cachées » dont parle Costa de Beauregard seront ([*2*], équations (6)) :

(2-10) $$\mathrm{W}^\alpha = \iiint_{\mathscr{C}} w^{\alpha\beta}\delta u_\beta$$

et :

(2-11) $$\mathrm{Q}^\alpha = \iiint_{\mathscr{C}} \mathrm{T}^\alpha s_c^\beta \delta u_\beta ,$$

où $\mathscr{C}$ est un tube d'univers auquel le champ u^α est tangent. Le tenseur d'impulsion-énergie peut s'interpréter comme la densité de quantité de mouvement 4-vectorielle globale :

(2-12) $$\mathrm{P}^\alpha = \iiint \mathrm{T}^{\alpha\beta}\delta u_\beta$$

où l'intégrale $\iiint$ s'entend sur un tri-volume fermé. Celui-ci, une fois le champ u^α défini, peut se décomposer en un tube d'univers $\mathscr{C}$ fermé par deux hypersurfaces $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ du genre espace ; $\mathscr{P} = \mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_2$. Nous aurons alors une contribution calorifique au « moment linéaire » P^α, d'après (2-12), (1-13) et (2-7), donnée par :

(2-13) $$\mathrm{P}_\mathrm{Q}^\alpha = \iiint q^{\alpha\beta}\delta u_\beta = \iiint \mathrm{T}u^\alpha\left(su^\beta - \frac{1}{\mathrm{T}}q_\mathrm{P}^\beta\right)\delta u_\beta .$$

Seule demeure non nulle sur $\mathscr{P}$:

(2-14) $$\iiint_{\mathscr{P}} u^\alpha q_\mathrm{P}^\beta \delta u_\beta$$

et seule demeure non nulle sur $\mathscr{C}$:

(2-15) $$\iiint_{\mathscr{C}} \mathrm{T}su^\alpha u^\beta \delta u_\beta ,$$

si bien que la « grandeur d'état calorifique » (2-11) (ou « calorique ») est en fait :

(2-16) $$\mathrm{Q}^\alpha = \iiint_{\mathscr{C}} u^\alpha \mathrm{T}s\delta u_0$$

(où $\delta u_0 \equiv u^\beta \delta u_\beta$ est le tri-volume scalaire élémentaire), c'est-à-dire ce que nous pourrions appeler « l'énergie liée globale », ou, localement, la « densité d'énergie liée de convection », ou encore « la quantité de mouvement barycentrique due à l'énergie liée ».

§ 3. COURANTS DE CHALEUR ET HYPOTHÈSES DE FOURIER

3.1. Costa de Beauregard [2]; dans son § 5 où il traite de la conduction thermique, propose (équation (21)) l'expression suivante pour le courant calorifique

$$q_c^\alpha = u^\alpha \int^{\mathrm{T}} \mathrm{C}(\mathrm{T})d\mathrm{T} - \gamma(\mathrm{T})\nabla^\alpha \mathrm{T}, \tag{3-1}$$

où C(T) est la chaleur spécifique et $\gamma(\mathrm{T})$ le coefficient de conductivité thermique du fluide.

3.2. Il est possible de critiquer ce choix :

a) pour une raison thermodynamique : il nous semble que $\int^{\mathrm{T}} \mathrm{C}(\mathrm{T})d\mathrm{T}$ ne représente la quantité de chaleur reçue par le système, et « transportée par convection », que dans des cas particuliers trop restrictifs. Ce n'est vrai que si, par exemple, la transformation dans le repère propre local s'effectue à volume (ou pression, selon que C est C_v ou C_p) constant.

Auquel cas, cela suggère de compléter ce premier terme en le remplaçant par :

$$u^\alpha\left[\int^{\mathrm{T}} n\mathrm{C}_v(\mathrm{T})d\mathrm{T} - \int^n \frac{l}{n}dn\right], \tag{3-2}$$

où l est un coefficient calorimétrique scalaire (chaleur de dilatation). Nous avons mis $n\mathrm{C}_v$ pour que les deux termes de cette différence portent sur le même système, c'est-à-dire le même nombre de particules. On peut aussi penser que le cas particulier envisagé est celui d'un gaz semi-parfait, auquel cas $\int^{\mathrm{T}} n\mathrm{C}_v(\mathrm{T})d\mathrm{T}$ représente la variation d'énergie interne, conformément à une interprétation « contenu de chaleur » du premier terme de q_c^α. Il faudrait alors généraliser le premier terme de (3-1) selon :

$$u^\alpha\left[\int^{\mathrm{T}} n\mathrm{C}_v(\mathrm{T})d\mathrm{T} - \int^n \frac{l-\mathrm{P}}{n}dn\right]; \tag{3-3}$$

q_c^α représenterait de ce point de vue la densité de courant d'énergie interne J_u^α. Cela est très plausible *a priori* puisque, comme nous allons le voir, le deuxième terme de (3-1) représente le courant de chaleur de conduction, qui peut s'interpréter classiquement [9] comme la composante de conduction du courant densitaire d'énergie interne.

b) pour une raison relativiste : il nous semble que le premier terme de (3-1) désignant certainement « la partie convective » de la chaleur, le deuxième terme devrait donc représenter la partie conductive de la chaleur, et donc être un vecteur du genre espace, ce que n'est pas en général $\nabla^\alpha \mathrm{T}$.

Eckart [*1*] et Pham Mau Quan [*3*] ont posé tous deux une hypothèse de Fourier avec un vecteur du genre espace :

(3-4) $$q_{\mathrm{E}}^{\alpha} = -\gamma(\mathrm{T})\gamma^{\alpha\beta}[\nabla_{\beta}\mathrm{T} - \mathrm{T}\dot{u}_{\beta}]$$

(3-5) $$q_{\mathrm{P}}^{\alpha} = -\gamma(\mathrm{T})\gamma^{\alpha\beta}\nabla_{\beta}\mathrm{T}\,.$$

Costa de Beauregard avait également posé dans son livre que cette partie conductive devait tout naturellement être orthogonale à u^{α} ([*7*], p. 139, IV-160). Il nous semble que dans son article [*2*] manque le terme (dans ses notations) $c^{-2}\theta'^{i}$ de [*7*], p. 139, IV-160; ce terme comprend à son tour deux termes (dans nos notations) :

$$\dot{\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right)}u^{\alpha} + \frac{1}{\mathrm{T}}\dot{\mathrm{u}}^{\alpha}\,.$$

On conçoit que Costa de Beauregard ait pu rejeter le second, ainsi que Pham Mau Quan l'a fait (3-5) par rapport à Eckart (3-4), mais le premier nous paraît tout à fait essentiel. A notre avis, il ne s'agit que d'un simple oubli, puisqu'en note 7 dans [*2*] Costa de Beauregard indique qu'il a bien repris son argument de [*7*], p. 138-139, mais à partir de $\mathrm{T}^{\alpha} = \mathrm{T}u^{\alpha}$ au lieu de $\theta^{\alpha} = \mathrm{T}^{-1}u^{\alpha}$.

3.3. Moyennant ces deux rectifications, (3-2) et (3-5), qui donnent :

(3-6) $$q_{c}^{\alpha} = u^{\alpha}\left[\int^{\mathrm{T}}\mathrm{C}_{v}(\mathrm{T})d\mathrm{T} - \int^{n}\frac{l}{n}dn\right] + \gamma(\mathrm{T})\gamma^{\alpha\beta}\nabla_{\beta}\mathrm{T}\,,$$

on a par identification avec (2-9), et d'après (3-5) :

(3-7) $$\mathrm{T}s = \int^{\mathrm{T}}\mathrm{C}_{v}(\mathrm{T})d\mathrm{T} - \int^{n}\frac{l}{n}dn\,.$$

Notons que nous avons changé le signe du terme en $\gamma(\mathrm{T})$ dans (3-6) par rapport à (3-1), de façon à avoir un coefficient de conductivité thermique $\gamma(\mathrm{T})$ positif, identique à celui de Pham Mau Quan.

Si, au lieu de (3-2), on avait utilisé la généralisation (3-3), on voit que l'identification avec (2-9) aurait alors été impossible; cela nous conduit à rejeter cette dernière généralisation (3-3).

Ainsi, par (3-7), la « densité propre de chaleur » ([*7*], p. 136, IV-147 et p. 139, IV-162) de Costa de Beauregard ne serait autre, encore une fois, que la densité d'énergie liée.

Il nous reste à vérifier la conformité de (3-7) avec le deuxième principe écrit au niveau spécifique, pour une transformation localement réversible.

3.4. Comparons maintenant ce résultat (3-7) avec l'équation de continuité calorifique relativiste proposée par Pham Mau Quan [*3*] [*4*] et modifiée [*8*] :

(3-8) $$\nabla_{\alpha}q_{\mathrm{P}}^{\alpha} = \mathrm{C}_{v}nu^{\alpha}\partial_{\alpha}\mathrm{T} - \frac{l}{n}u^{\alpha}\partial_{\alpha}n\,.$$

Pour cela différentions (3-7) :

$$\mathrm{T}ds + sd\mathrm{T} = n\mathrm{C}_v(\mathrm{T})d\mathrm{T} - \frac{l}{n}dn \tag{3-9}$$

Si bien que, avec (3-8) :

$$\nabla_\alpha q^\alpha_{\mathrm{P}} = \mathrm{T}\dot{s} + s\dot{\mathrm{T}} = n\mathrm{T}\dot{\bar{s}} - \mathrm{T}\bar{s}\dot{n} + s\dot{\mathrm{T}} \tag{3-10}$$

ce qui n'est pas conforme aux deux principes de la thermodynamique.

3.5. Pour supprimer les termes gênants, $\mathrm{T}\bar{s}\dot{n} + s\dot{\mathrm{T}}$, il faut écrire :

$$\bar{s}^\alpha_c = u^\alpha\left[\int^{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{C}_v(\mathrm{T})}{\mathrm{T}}d\mathrm{T} - \int^n \frac{l}{\mathrm{T}n^2}dn\right] + \frac{\gamma'(\mathrm{T})}{n}\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\beta\mathrm{T} \tag{3-11}$$

avec

$$\gamma'(\mathrm{T}) = \frac{1}{\mathrm{T}}\gamma(\mathrm{T})$$

et définir q^α_c par :

$$q^\alpha_c = n\mathrm{T}\bar{s}^\alpha_c\,, \tag{3-12}$$

définition qui est compatible avec la définition (2-8) de Costa de Beauregard, puisque la comparaison impose :

$$s^\alpha_c = n\bar{s}^\alpha_c \tag{3-13}$$

c'est-à-dire avec (3-11) :

$$s^\alpha_c = nu_\alpha\left[\int^{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{C}_v(\mathrm{T})}{\mathrm{T}}d\mathrm{T} - \int^n \frac{l}{\mathrm{T}n^2}dn\right] + \gamma'(\mathrm{T})\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\beta\mathrm{T}\,, \tag{3-14}$$

ce qui est conforme à (2-7), avec (3-5), si :

$$\bar{s} = \int^{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{C}_v(\mathrm{T})}{\mathrm{T}}d\mathrm{T} - \int^n \frac{l}{\mathrm{T}n^2}dn \tag{3-15}$$

c'est-à-dire pour une transformation élémentaire :

$$\dot{\bar{s}} = \frac{\mathrm{C}_v(\mathrm{T})}{\mathrm{T}}\dot{\mathrm{T}} - \frac{l}{\mathrm{T}n^2}\dot{n} \tag{3-16}$$

expression du deuxième principe qui, comparée à (3-8), donne :

$$n\mathrm{T}\dot{\bar{s}} = \nabla_\alpha q^\alpha_{\mathrm{P}}\,. \tag{3-17}$$

(3-17) est bien en accord avec le premier principe sous sa forme (1-12), si l'on a un axiome d'équilibre local de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{u} = \bar{u}(\bar{s},\bar{v}) = \bar{u}\left(\bar{s}, \frac{1}{n}\right) \\ \textit{avec} \\ \mathrm{P} = -\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{v}}\right)_{\bar{s}} \quad \textit{et} \quad \mathrm{T} = \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{s}}\right)_{\bar{v}}\,. \end{array}\right. \tag{3-18}$$

Ainsi, par (3-11) et (3-12), il faut finalement remplacer (3-6), et donc (3-1), par :

$$q_c^\alpha = n\mathrm{T}u^\alpha\left[\int^{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{C}_v(\mathrm{T})}{\mathrm{T}} d\mathrm{T} - \int^{n} \frac{l}{\mathrm{T}n^2} dn\right] + \gamma(\mathrm{T})\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\beta \mathrm{T}. \tag{3-19}$$

3.6. Enfin, il apparaît que le concept de « courant de chaleur », tel qu'il est posé ici par Costa de Beauregard, c'est-à-dire sous sa forme (3-19), est un peu artificiel. En effet, pour un fluide adiabatique réversible, on devrait en principe s'attendre à ce que $q^{\alpha\beta} = 0$.

Or, dans le cas d'un tel fluide, la partie convective du courant q_c^α doit rester, et donc entrer de fait dans $w^{\alpha\beta}$; sinon, on ne peut retrouver ni l'équation du mouvement d'Eckart-Pham Mau Quan (ou équation d'Euler relativiste), ni le premier principe, sauf à poser $s = 0$ (en plus de la condition de réversibilité démontrée par Grosjean [*10*], équation (8-7)).

Grosjean [*10*] (tableaux III-MR, p. 231 et II-MR, p. 229, 1$^{\text{res}}$ lignes) a, d'ailleurs, instinctivement rectifié cela en faisant une mauvaise identification entre le $q^{\alpha\beta}$ (respectivement, le $w^{\alpha\beta}$) de Costa de Beauregard, et son tenseur de chaleur (respectivement de travail), où n'apparaît que le terme de conduction (respectivement, $\mathcal{M}_{\mathrm{H}} = n(1 + \bar{h})$) au lieu de q_c^α entier (respectivement $\mathcal{M}_{\mathrm{G}} = n(1 + \bar{g})$).

Ainsi, il apparaît préférable de n'appeler « courant de chaleur » que la partie conductrice de q_c^α, soit q_{P}^α, et de remplacer notre équation (2-6) par :

$$w^{\alpha\beta} = n(1 + \bar{h})u^\alpha u^\beta - \mathrm{P}g^{\alpha\beta}. \tag{3-30}$$

§ 4. CONCLUSION

Les théories d'Eckart et de Pham Mau Quan semblent compatibles avec celle de Costa de Beauregard, leur rapprochement permettant de préciser la forme (2-6) du tenseur $w^{\alpha\beta}$ de Costa de Beauregard. Le fait que la méthode, plus thermodynamique, de Costa de Beauregard, qui justifie la décomposition de $q^{\alpha\beta}$ en $\mathrm{T}^\alpha s^\beta$ par un postulat de quasi-équilibre local, soit en accord avec la méthode, plus relativiste, de Pham Mau Quan qui décompose par projections $\mathrm{T}^{\alpha\beta}$ à partir du champ u^α, semble encourageant pour une déduction de la Thermodynamique relativiste des phénomènes irréversibles à partir d'un axiome d'équilibre local sur les courants.

RÉFÉRENCES

[*1*] C. ECKART, *Phys. Rev.*, t. **58**, 15 novembre 1940, p. 919.
[*2*] O. COSTA DE BEAUREGARD, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **A 280**, 17 février 1975, p. 483.
[*3*] PHAM MAU QUAN, *Thèse*, Paris, 1954.
[*4*] PHAM MAU QUAN, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **261**, 1965, p. 3049.
[*5*] A. H. TAUB, *Phys. Rev.*, t. **74**, 1948, p. 328-334.

C. CATTANEO, *Introduction à la Théorie Macroscopique des fluides relativistes* (I). Collège de France, 1970.
A. LICHNEROWICZ, *Commun. Math. Phys.*, t. **12**, 1969, p. 145-174.
L. A. SCHMID, *Nuovo Cimento*, t. **47 B**, n° 1, 11 janvier 1967, p. 1.
G. PICHON, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **A 2**, n° 1, 1965, p. 21-85.
[6] J. GARIEL, *Thèse 3e cycle*, Paris, 1975.
[7] O. COSTA DE BEAUREGARD, *La théorie de la relativité restreinte*. Masson, Paris, 1949.
[8] J. GARIEL, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **A 280**, 21 mai 1975, p. 1333.
[9] J. GARIEL, *Bull. Soc. Roy. Sci. de Liège*, t. **49**, 1980, fasc. 1-2, p. 89-96.
[10] P. V. GROSJEAN, *Bull. Soc. Roy. Sci. de Liège*, n° 3-4, 1975, p. 213-232.

(Manuscrit reçu le 14 avril 1980)