

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

PERTTI LOUNESTO

## **Sur les idéaux à gauche des algèbres de Clifford et les produits scalaires des spineurs**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 33, n° 1 (1980), p. 53-61

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1980\\_\\_33\\_1\\_53\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1980__33_1_53_0)

© Gauthier-Villars, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Sur les idéaux à gauche des algèbres de Clifford et les produits scalaires des spineurs

par

**Pertti LOUNESTO**

U. E. R. de Mathématiques, Institut Polytechnique d'Helsinki,  
02150 Espoo 15, Finlande

### LES FORMES QUADRATIQUES ET LEURS ALGÈBRES DE CLIFFORD

Considérons un espace orthogonal  $X = R^{p,q}$  sur  $R$  avec une forme quadratique non dégénérée

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2 \quad (n=p+q)$$

et une algèbre associative ayant  $R^{p,q}$  comme sous-espace tel que le carré d'un vecteur est égal à sa forme quadratique  $x^2 = f(x)$ . Si cette algèbre est engendrée par  $R^{p,q}$ , elle est nécessairement de dimension  $2^n$  ou  $2^{n-1}$ . Une telle algèbre de dimension  $2^n$  est appelée algèbre de Clifford  $R_{p,q}$  sur  $R^{p,q}$ . L'autre de dimension  $2^{n-1}$  est possible seulement quand  $p-q=1 \pmod{4}$ . Quand  $p-q \neq 1 \pmod{4}$  l'algèbre de Clifford  $R_{p,q}$  est simple et quand  $p-q=1 \pmod{4}$  l'algèbre de Clifford  $R_{p,q}$  est la somme directe des deux idéaux  $\frac{1}{2}(1+e_j)R_{p,q}$  et  $\frac{1}{2}(1-e_j)R_{p,q}$  où  $e_j = e_1 e_2 \dots e_n$  et où  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $R^{p,q}$ .

L'algèbre de Clifford  $R_{p,q}$  de dimension  $2^n$  est la somme directe des espaces de  $k$ -vecteurs  $R_{p,q}^k$  de dimension  $\binom{n}{k}$  où  $0 \leq k \leq n$ . La base canonique de  $R_{p,q}^k$  est formée par les produits

$$e_A = e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \dots e_{\alpha_k}, \quad 1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \leq n.$$

L'élément  $e_j = e_1 e_2 \dots e_n$  dans  $R_{p,q}^n$  commute ou anticommute avec tous

les 1-vecteurs  $e_1, e_2, \dots, e_n$  selon que  $n$  est impair ou pair. En effet, le centre de  $R_{p,q}$  est  $R_{p,q}^0$  si  $n$  est pair et la somme directe  $R_{p,q}^0 + R_{p,q}^n$  si  $n$  est impair. Quand  $n$  est pair, l'algèbre de Clifford  $R_{p,q}$  est centrale, c'est-à-dire que le centre  $R_{p,q}^0$  de  $R_{p,q}$  contient seulement les multiples scalaires d'unité 1, et quand  $n$  est impair, le centre  $R_{p,q}^0 + R_{p,q}^n$  de  $R_{p,q}$  est isomorphe à  $C$  ou  ${}^2R$  selon  $e_j^2 = -1$  ( $p - q = 3 \pmod 4$ ) ou  $e_j^2 = 1$  ( $p - q = 1 \pmod 4$ ).

Pour identifier les algèbres de Clifford  $R_{p,q}$  sur  $R^{p,q}$  avec  $n = p + q < 8$  on peut consulter la table 1 suivante (Porteous, 1969, p. 250).

TABLE 1. — Algèbres de Clifford  $R_{p,q}$ .

$p+q \backslash p-q$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
0	R														
1	C ${}^2R$														
2	H      R(2)      R(2)														
3	${}^2H$ C(2) ${}^2R(2)$ C(2)														
4	H(2)      H(2)      R(4)      R(4)      H(2)														
5	C(4) ${}^2H(2)$ C(4) ${}^2R(4)$ C(4) ${}^2H(2)$														
6	R(8)      H(4)      H(4)      R(8)      R(8)      H(4)      H(4)														
7	${}^2R(8)$ C(8) ${}^2H(4)$ C(8) ${}^2R(8)$ C(8) ${}^2H(4)$ C(8)														

Par la propriété universelle de l'algèbre de Clifford  $R_{p,q}$  la transformation orthogonale  $x \rightarrow -x$  de  $R_{p,q}^1 = R^{p,q}$  se prolonge de façon unique en involution  $u \rightarrow \bar{u}$  de  $R_{p,q}$ . Pour un  $k$ -vecteur  $u \in R_{p,q}^k$  cette involution est explicitement

$$\bar{u} = u \quad \text{si } k = 0 \pmod 2, \quad \bar{u} = -u \quad \text{si } k = 1 \pmod 2.$$

L'algèbre de Clifford  $R_{p,q}$  est graduée mod 2 par l'involution  $u \rightarrow \bar{u}$  de  $R_{p,q}$

$$R_{p,q} = R_{p,q}^{(0)} + R_{p,q}^{(1)}$$

avec la propriété

$$R_{p,q}^{(i)} R_{p,q}^{(j)} \subset R_{p,q}^{(i+j)} \quad i, j \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}.$$

Un sous-espace  $V$  de  $R_{p,q}$  est gradué si il est la somme directe des intersections  $V \cap R_{p,q}^{(i)}$ . Comme une algèbre graduée  $R_{p,q}$  est simple, quand elle n'a pas d'idéaux gradués propre, et aussi centrale, c'est-à-dire que le centre de  $R_{p,q}$  intersecté avec  $R_{p,q}^{(0)}$  contient seulement les multiples scalaires d'unité 1.

Pour deux algèbres graduées  $A$  et  $B$  le produit tensoriel gradué  $A \hat{\otimes} B$  est l'espace linéaire  $A \otimes B$  muni d'un produit déterminé par la formule

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{ij}(aa') \otimes (bb')$$

où  $a' \in A^{(i)}$ ,  $b \in B^{(j)}$ . Une algèbre graduée  $A$  a un opposé gradué  $A^*$  muni d'un produit défini par la formule

$$a * a' = (-1)^{ij} a' a$$

où  $a \in A^{(i)}$ ,  $a' \in A^{(j)}$ . Soit  $A$  une algèbre graduée et  $A^{(0)}$  sa sous-algèbre paire, alors on note  $A | A^{(0)}$ . Deux algèbres graduées  $A$  et  $B$  sont similaires si l'algèbre graduée  $A \hat{\otimes} B^*$  est isomorphe à  $R(2v) |^2 R(v)$  pour un entier positif  $v$ . Le produit tensoriel gradué des deux algèbres graduées centrales simples est aussi graduée centrale simple. Les algèbres graduées centrales simples sur  $R$  peut être collectées dans 8 classes de similarité, qui forment un groupe cyclique, ou le produit est induit par le produit tensoriel gradué. Ce groupe s'appelle le groupe de Brauer-Wall  $BW_R$  de  $R$ .

Dans la théorie des formes quadratiques plusieurs inconvenances peuvent être éliminées si l'algèbre de Clifford est regardée comme élément de groupe de Brauer-Wall. Cette proposition élégante est faite par C. T. C. Wall (1964). L'algèbre de Clifford d'une somme orthogonale est le produit tensoriel gradué des algèbres de Clifford des composantes, c'est-à-dire que

$$R_{p+p',q+q'} \simeq R_{p,q} \hat{\otimes} R_{p',q'}$$

Ce résultat important est donné par Chevalley (1955).

TABLE 2. — Algèbres de Clifford  $R_{p,q}$  et  $BW_R$ .

$p - q$	0	1	2	3	4	5	6	7
$p + q$								
0	$R(2v)$		$R(2v)$		$H(v)$		$H(v)$	
1		${}^2R(2v)$		$C(2v)$		${}^2H(v)$		$C(2v)$

Pour identifier les algèbres de Clifford  $R_{p,q}$  sur  $R^{p,q}$  il est suffisant de consulter la table 2 précédente où  $v = 2^{l/2}$ ,  $l = [n/2]$ ,  $n = p + q$  avec  $p - q \pmod 8$  et  $p + q \pmod 2$ . En particulier, il y a les isomorphismes suivants  $R_{p,q} \simeq R_{p-4,q+4}$  ( $p \geq 4$ ) des algèbres graduées. Ici on a le théorème de périodicité de Bott (1959) caché. De plus, il y a les isomorphismes  $R_{q,p} \simeq R_{p+1,q-1}$  ( $q \geq 1$ ) des algèbres ordinaires (non graduées).

Plus de détails sur les formes quadratiques et leurs algèbres de Clifford sont donné par Bass (1967), Atiyah-Bott-Shapiro (1964) et Micali-Revoy (1977) et par Crumeyrolle (1974).

### STRUCTURE LINÉAIRE SUR LES IDÉAUX MINIMAUX A GAUCHE DES ALGÈBRES DE CLIFFORD

Pour fixer un idéal à gauche minimal  $V$  de  $R_{p,q}$  nous pouvons choisir un idempotent primitif  $f$  de  $R_{p,q}$  de manière que  $V = R_{p,q}f$ . Par une base

orthonormée  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $\mathbf{R}^{p,q}$  nous pouvons construire un idempotent primitif  $f$  de manière suivante. Rappelons que les  $2^n$  éléments

$$e_A = e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \dots e_{\alpha_k}, \quad 1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \leq n$$

constituent une base de  $\mathbf{R}_{p,q}$  et que  $\dim_{\mathbf{R}} V = 2^\chi$  où  $\chi = 1$  ou  $\chi = l + 1$  selon  $p - q = 0, 1, 2 \pmod 8$  ou  $p - q = 3, 4, 5, 6, 7 \pmod 8$ . Choisissons  $n - \chi$  éléments  $e_A, e_A^2 = 1$ , de manière qu'ils soient mutuellement commutant et qu'ils engendrent un groupe d'ordre  $2^{n-\chi}$ . Alors idempotent

$$f = \frac{1}{2}(1 + e_{A_1}) \frac{1}{2}(1 + e_{A_2}) \dots \frac{1}{2}(1 + e_{A_{(n-\chi)}})$$

est primitif (Lounesto, 1977). Ce résultat généralise les résultats correspondants de E. Cartan (1938) et Chevalley (1954) qui sont valables seulement pour les espaces orthogonaux admettant un sous-espace d'indice maximum de Witt. Par exemple, on peut considérer certains spineurs comme des quantités qui définissent un sous-espace isotrope de dimension  $l$  dans  $\mathbf{R}^{l,l}$  de manière suivante. Choisissons une base orthonormée  $(e_1, e_2, \dots, e_l, e_{l+1}, e_{l+2}, \dots, e_{2l})$  de  $\mathbf{R}^{l,l}$ . Les éléments

$$\frac{1}{2}(e_1 + e_{l+1}), \dots, \frac{1}{2}(e_2 + e_{l+2}), \dots, \frac{1}{2}(e_l + e_{2l})$$

forment une base du sous-espace isotrope de dimension  $l$  dans  $\mathbf{R}^{l,l}$ . Définissons

$$v = \frac{1}{2}(e_1 + e_{l+1}) \frac{1}{2}(e_2 + e_{l+2}) \dots \frac{1}{2}(e_l + e_{2l}).$$

L'idéal à gauche  $V = \mathbf{R}_{l,l}v$  de  $\mathbf{R}_{l,l}$  est minimal comme nous le savons. En effet,  $v = e_1 e_2 \dots e_l f$ , ou

$$f = \frac{1}{2}(1 + e_1 e_{l+1}) \frac{1}{2}(1 + e_2 e_{l+2}) \dots \frac{1}{2}(1 + e_l e_{2l})$$

est un idempotent primitif, et donc  $V = \mathbf{R}_{l,l}f$ .

L'anneau de division  $F = f\mathbf{R}_{p,q}f = \{ \psi \in V \mid \psi f = f\psi \}$  est isomorphe à  $\mathbf{R}, \mathbf{C}$  ou  $\mathbf{H}$  selon  $p - q = 0, 1, 2 \pmod 8$ ,  $p - q = 3 \pmod 4$  ou  $p - q = 4, 5, 6 \pmod 8$ . L'application

$$V \times F \rightarrow V, \quad (\psi, \lambda) \rightarrow \psi\lambda$$

définit une structure  $F$ -linéaire à droite sur  $V$ . Muni de cette structure  $F$ -linéaire l'idéal minimal à gauche  $V$  de  $\mathbf{R}_{p,q}$  est appelé le module pinoriel. De la même façon, si nous commençons avec  $\mathbf{R}_{p,q}^{(0)}$  nous obtenons le module spinoriel.

Évidemment la représentation  $\mathbf{R}_{p,q} \rightarrow \text{End}_F V, u \rightarrow D(u)$ , où  $D(u)$  est définie par  $D(u)\psi = u\psi$ , est irréductible. Elle est aussi fidèle si  $\mathbf{R}_{p,q}$  est simple. Pour trouver une représentation fidèle de  $\mathbf{R}_{p,q}$  en général nous

prendrons un idéal à gauche  $W = V$  ou  $W = V + \bar{V}$ , où  $\bar{V} = \{ \bar{\psi} \mid \psi \in V \}$ , selon que  $R_{p,q}$  est simple ou une somme directe des deux idéaux simples  $\frac{1}{2}(1 \pm e_j)R_{p,q}$ . De la même façon nous prendrons un idempotent  $e = f$  ou  $e = f + \bar{f}$ .

L'anneau  $E = eR_{p,q}e = \{ \psi \in W \mid \psi e = e\psi \}$  est  $E = F$  ou  $E = F + \bar{F}$ , où  $\bar{F} = \{ \bar{\lambda} \mid \lambda \in F \}$ , selon que  $R_{p,q}$  est simple ou une somme directe de deux idéaux simples  $\frac{1}{2}(1 \pm e_j)R_{p,q}$ . L'anneau  $E$  est isomorphe à  $R, C, H, {}^2H$  ou  ${}^2R$ . L'application

$$W \times E \rightarrow W, \quad (\psi, \lambda) \rightarrow \psi\lambda$$

définit une structure  $E$ -linéaire à droite sur  $W$ . Muni de cette structure  $E$ -linéaire l'idéal à gauche  $W$  de  $R_{p,q}$  est appelé le module binomial.

### PRODUITS SCALAIRES DES SPINEURS ET LE GROUPE DE BRAUER-WALL ÉTENDU

Les deux transformations orthogonales  $x \rightarrow \pm x$  de  $X = R_{p,q}^1$  se prolongent de façon unique en anti-involutions  $u \rightarrow \beta_{\pm}(u)$  de  $R_{p,q}$ . Notons  $u^{\pm} = \beta_{\pm}(u)$ . Pour un  $k$ -vecteur  $u \in R_{p,q}^k$  ces anti-involutions sont explicitement

$$\begin{aligned} u^+ &= u \quad \text{si } k = 0, 1 \pmod{4}, & u^+ &= -u \quad \text{si } k = 2, 3 \pmod{4}, \\ u^- &= u \quad \text{si } k = 0, 3 \pmod{4}, & u^- &= -u \quad \text{si } k = 1, 2 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Soit  $\beta$  une des anti-involutions  $\beta_+$  ou  $\beta_-$  de  $R_{p,q}$ . Les espaces réels linéaires

$$\begin{aligned} P_+ &= \{ \psi \in V \mid \beta(\psi) = +\psi \} \\ P_- &= \{ \psi \in V \mid \beta(\psi) = -\psi \} \end{aligned}$$

ont les dimensions 0, 1, 2 ou 3 et

$$P = P_+ + P_- = \{ \psi \in V \mid \beta(\psi) \in V \}$$

a dimension 0, 1, 2 ou 4 tant et plus augmente la dimension de  $V$ . L'espace réel linéaire

$$B = \{ \psi \in W \mid \beta(\psi) \in W \}$$

a dimension 1, 2, 4 ou 8. Pour tout  $\psi, \varphi \in V$  ou  $W$  on a  $\beta(\psi)\varphi \in P$  ou  $B$ , respectivement. Il existe un élément inversible  $u$  dans  $R_{p,q}$  telle que  $P \subset uF$  et quand  $\dim P \neq 0$  telle que pour tout  $\lambda \in F$  on a aussi  $\lambda^\sigma = u^{-1}\beta(\lambda)u \in F$ . Respectivement, il existe un élément inversible  $u$  dans  $R_{p,q}$  telle que  $B = uE$  et de plus pour tout  $\lambda \in E$  aussi  $\lambda^\sigma = u^{-1}\beta(\lambda)u \in E$ . Les applications

$$\begin{aligned} V \times V &\rightarrow F, & (\psi, \varphi) &\rightarrow \psi^\xi \varphi = u^{-1}\beta(\psi)\varphi \\ W \times W &\rightarrow E, & (\psi, \varphi) &\rightarrow \psi^\xi \varphi = u^{-1}\beta(\psi)\varphi \end{aligned}$$

sont des produits scalaires. Quand  $\beta(u) = +u$  ou  $\beta(u) = -u$  ce produit scalaire est symétrique ou antisymétrique, respectivement, car pour tout  $\psi, \varphi$  on a

$$(\psi^\xi \varphi)^\sigma = (u^{-1} \beta(\psi) \varphi)^\sigma = u^{-1} \beta(\varphi) \psi \beta(u^{-1}) u = (\varphi^\xi \psi) \beta(u^{-1}) u$$

qui est  $+\varphi^\xi \psi$  ou  $-\varphi^\xi \psi$ .

Le produit scalaire  $W \times W \rightarrow E, (\psi, \varphi) \rightarrow \psi^\xi \varphi = u^{-1} \beta(\psi) \varphi$  admet encore des propriétés intéressantes. Il est non dégénéré car la corrélation  $\psi \rightarrow \psi^\xi = u^{-1} \beta(\psi)$  est injective. Il est aussi défini positif (pour le choix  $u = 1$ ) quand  $(p, q) = (n, 0)$  et  $\beta = \beta_+$  ou  $(p, q) = (0, n)$  et  $\beta = \beta_-$ . Autrement ce produit scalaire n'est pas seulement indéfini mais aussi neutre pour toutes les paires  $(p, q)$  sauf  $(0, 1), (0, 2), (0, 3)$  quand  $\beta = \beta_+$  et  $(1, 0)$  quand  $\beta = \beta_-$ .

Plus de détails sur les produits scalaires des spineurs sont donné par Porteous (1969) et Lounesto (1978).

Les homomorphismes des E-modules à droite  $W \rightarrow W, \psi \rightarrow s\psi$  qui laisse invariant le produit scalaire

$$W \times W \rightarrow E, (\psi, \varphi) \rightarrow \psi^\xi \varphi = u^{-1} \beta(\psi) \varphi,$$

c'est-à-dire pour qui  $(s\psi)^\xi (s\varphi) = \psi^\xi \varphi$  pour tout  $\psi, \varphi \in W$ , forment un groupe des automorphismes  $\text{Aut}(W, \xi)$  du produit scalaire. On peut réaliser ce groupe des automorphismes  $\text{Aut}(W, \xi)$  par le groupe

$$G = \{ s \in R_{p,q} \mid \beta(s)s = 1 \}.$$

Pour le produit scalaire  $V \times V \rightarrow F, (\psi, \varphi) \rightarrow \psi^\xi \varphi = u^{-1} \beta(\psi) \varphi$  le groupe des automorphismes  $\text{Aut}(V, \xi)$  est réalisable comme un sous-groupe de  $G$ . Si l'algèbre de Clifford  $R_{p,q}$  est simple ( $p - q \neq 1 \pmod{4}$ ) alors  $G \simeq \text{Aut}(V, \xi)$ . Si l'algèbre de Clifford  $R_{p,q}$  est une somme directe de deux idéaux simples

$\frac{1}{2}(1 \pm e_j)R_{p,q}$  ( $p - q = 1 \pmod{4}$ ) alors il y a deux possibilités

$$\begin{aligned} G &\simeq \text{Aut}(V, \xi) & \text{si } \dim P = 0 \\ G &\simeq {}^2\text{Aut}(V, \xi) & \text{si } \dim P \neq 0. \end{aligned}$$

Pour identifier les groupes des automorphismes  $\text{Aut}(W, \xi)$  du produit scalaire  $W \times W \rightarrow E, (\psi, \varphi) \rightarrow \psi^\xi \varphi = u^{-1} \beta(\psi) \varphi$  sur le module binomial  $W$  considérons d'abord les cas  $n = p + q < 8$ , table 3.

Curieusement tous ces groupes d'automorphismes des produits scalaires des spineurs peuvent être identifiés par la table 4 suivante où  $v = 2^l/2$ ,  $l = [n/2]$ ,  $n = p + q$  avec  $p - q \pmod{8}$  et  $p + q \pmod{8}$ ; voir aussi Porteous (1969), p. 271 et Lounesto (1978).

TABLE 3. — Les groupes des automorphismes sur le module binomial.

$$\beta = \beta_+$$

$p+q \backslash p-q$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
0								O(1)							
1								O(1, C)	<sup>2</sup> O(1)						
2								SO*(2)	O(1, 1)	O(2)					
3								GL(1, H)	U(1, 1)	GL(2, R)	U(2)				
4								Sp(2, 2)	Sp(2, 2)	Sp(4, R)	Sp(4, R)	Sp(4)			
5								Sp(4, C)	<sup>2</sup> Sp(2, 2)	Sp(4, C)	<sup>2</sup> Sp(4, R)	Sp(4, C)	<sup>2</sup> Sp(4)		
6								Sp(8, R)	Sp(4, 4)	Sp(4, 4)	Sp(8, R)	Sp(8, R)	Sp(4, 4)	Sp(8)	
7								GL(8, R)	U(4, 4)	GL(4, H)	U(4, 4)	GL(8, R)	U(4, 4)	GL(4, H)	U(8)

$$\beta = \beta_-$$

$p+q \backslash p-q$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
1								O(1)							
2								U(1)	GL(1, R)						
3								Sp(2)	Sp(2, R)	Sp(2, R)					
4								<sup>2</sup> Sp(2)	Sp(2, C)	<sup>2</sup> Sp(2, R)	Sp(2, C)				
5								Sp(4)	Sp(2, 2)	Sp(4, R)	Sp(4, R)	Sp(2, 2)			
6								U(4)	GL(2, H)	U(2, 2)	GL(4, R)	U(2, 2)	GL(2, H)		
7								O(8)	SO*(8)	SO*(8)	O(4, 4)	O(4, 4)	SO*(8)	SO*(8)	
								<sup>2</sup> O(8)	O(8, C)	<sup>2</sup> SO*(8)	O(8, C)	<sup>2</sup> O(4, 4)	O(8, C)	<sup>2</sup> SO*(8)	O(8, C)

TABLE 4. —  $R_{p,q}$  et BW(R).

$$\beta = \beta_+$$

$q=0$	$p+q \backslash p-q$	0	1	2	3	4	5	6	7
O(2v)	0	O(v, v)	O(v, v)			SO*(2v)	SO*(2v)		
<sup>2</sup> O(2v)	1		<sup>2</sup> O(v, v)		O(2v, C)	<sup>2</sup> SO*(2v)		O(2v, C)	
O(2v)	2	O(v, v)	O(v, v)		SO*(2v)	SO*(2v)			
U(2v)	3		GL(2v, R)	U(v, v)		GL(v, H)		U(v, v)	
Sp(2v)	4	Sp(2v, R)	Sp(2v, R)	Sp(2v, R)	Sp(v, v)		Sp(v, v)		
<sup>2</sup> Sp(2v)	5		<sup>2</sup> Sp(2v, R)	Sp(2v, C)		<sup>2</sup> Sp(v, v)		Sp(2v, C)	
Sp(2v)	6	Sp(2v, R)	Sp(2v, R)	Sp(v, v)			Sp(v, v)		
U(2v)	7		GL(2v, R)	U(v, v)		GL(v, H)		U(v, v)	



$$\beta = \beta_-$$

$p=0$	$p-q$		$p+q$							
			0	1	2	3	4	5	6	7
$O(2v)$	0		$O(v, v)$		$O(v, v)$		$SO^*(2v)$		$SO^*(2v)$	
$U(2v)$	1			$GL(2v, \mathbb{R})$		$U(v, v)$		$GL(v, \mathbb{H})$		$U(v, v)$
$Sp(2v)$	2		$Sp(2v, \mathbb{R})$		$Sp(2v, \mathbb{R})$		$Sp(v, v)$		$Sp(v, v)$	
${}^2Sp(2v)$	3			${}^2Sp(2v, \mathbb{R})$		$Sp(2v, \mathbb{C})$		${}^2Sp(v, v)$		$Sp(2v, \mathbb{C})$
$Sp(2v)$	4		$Sp(2v, \mathbb{R})$		$Sp(2v, \mathbb{R})$		$Sp(v, v)$		$Sp(v, v)$	
$U(2v)$	5			$GL(2v, \mathbb{R})$		$U(v, v)$		$GL(v, \mathbb{H})$		$U(v, v)$
$O(2v)$	6		$O(v, v)$		$O(v, v)$		$SO^*(2v)$		$SO^*(2v)$	
${}^2O(2v)$	7			${}^2O(v, v)$		$O(2v, \mathbb{C})$		${}^2SO^*(2v)$		$O(2v, \mathbb{C})$

En effet, ceci signifie que nous classons les algèbres graduées centrales simples  $A | A^{(0)}$  avec une anti-involution  $\beta$  en donnant  $G | G^{(0)}$  où  $G = \{s \in A | \beta(s)s = 1\}$  et  $G^{(0)} = A^{(0)} \cap G$ ; voir aussi C. T. C. Wall (1968). Le groupe de Brauer-Wall  $BW_{\mathbb{R}} \simeq Z_8$  est maintenant étendu à un groupe abélien  $BW(\mathbb{R}) \simeq (Z_8 \times Z_8)/Z_2$ .

*Exemple.* — L'algèbre de Clifford  $R_{2,1}$  est isomorphe à  ${}^2R(2)$ . L'idempotent  $f = \frac{1}{2}(1 + e_1) \frac{1}{2}(1 + e_{23})$  est primitif. Les éléments

$$f_1 = \frac{1}{4}(1 + e_1 + e_{23} + e_{123})$$

$$f_2 = \frac{1}{4}(e_2 - e_{12} + e_3 - e_{13})$$

d'une base de  $V = R_{2,1}f$  ont les propriétés

$$\begin{aligned} \beta_+(f_1)f_1 &= 0, & \beta_+(f_1)f_2 &= 0, \\ \beta_+(f_2)f_1 &= 0, & \beta_+(f_2)f_2 &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \beta_-(f_1)f_1 &= 0, & \beta_-(f_1)f_2 &= f_2, \\ \beta_-(f_2)f_1 &= -f_2, & \beta_-(f_2)f_2 &= 0. \end{aligned}$$

Donc les groupes des automorphismes du module pinoriel  $V$  et module binoriel  $W$  sont

	$\text{Aut}(V, \xi)$	$\text{Aut}(W, \xi)$
$\beta_+$ :	$GL(2, \mathbb{R})$	$GL(2, \mathbb{R})$
$\beta_-$ :	$Sp(2, \mathbb{R})$	${}^2Sp(2, \mathbb{R})$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- M. F. ATIYAH, R. BOTT, R. SHAPIRO, Clifford modules, *Topology*, t. **3**, suppl. 1, 1964, p. 3-38.
- H. BASS, Lectures on topics in algebraic K-theory. Tata Institute of Fundamental Research, *Lectures on Mathematics*, n° 41, Bombay, 1967.
- R. BOTT, The stable homotopy of the classical groups. *Ann. of Math.*, t. **70**, 1959, p. 313-337.
- E. CARTAN, *Leçons sur la théorie des spineurs I-II*, Hermann, Paris, 1938.
- C. CHEVALLEY, *The algebraic theory of spinors*. Columbia University Press, New York, 1954.
- C. CHEVALLEY, The construction and study of certain important algebras. *Publications of Mathematical Society of Japan*, n° 1. Herald Printing, Tokyo, 1955.
- A. CRUMEYROLLE, *Algèbres de Clifford et spineurs*. Université Paul Sabatier, Toulouse, 1974.
- P. LOUNESTO, On primitive idempotents of Clifford algebras, *Report-HTKK-Mat*, A-113, 1977.
- P. LOUNESTO, Spinors and Brauer-Wall groups, *Report-HTKK-Mat*, A-124, 1978.
- A. MICALI, P. REVOY, Modules quadratiques, *Cahiers Mathématiques*, t. **10**, 1977, Montpellier.
- I. R. PORTEOUS, *Topological geometry*, VNR, London, 1969.
- C. T. C. WALL, Graded Brauer groupes, *J. Reine Angew. Math.*, t. **213**, 1964, p. 187-199.
- C. T. C. WALL, Graded algebras, anti-involutions, simple groups and symmetric spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **74**, 1968, p. 198-202.

(Manuscrit reçu le 14 mars 1980)