ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

SIMONE GUTT

Second et troisième espaces de cohomologie différentiable de l'algèbre de Lie de Poisson d'une variété symplectique

Annales de l'I. H. P., section A, tome 33, nº 1 (1980), p. 1-31
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1980__33_1_1_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré Section A :
Vol. XXXIII, n° 1, 1980, p. 1-31. *Physique théorique.*

Second et troisième espaces de cohomologie différentiable de l'algèbre de Lie de Poisson d'une variété symplectique

par

Simone GUTT

Aspirant du Fonds National Belge de la Recherche Scientifique.
Université Libre de Bruxelles, Campus Plaine C. P. 218,
Bd du Triomphe, B-1050 Bruxelles

Dans l'étude de la mécanique classique et de sa formulation géométrique sur l'espace des phases W, on fait appel à l'espace des fonctions C^∞ sur W à valeurs réelles muni de la structure d'algèbre de Lie définie par le crochet de Poisson. Si on s'intéresse aux déformations de cette structure, on retrouve, si $W = \mathbb{R}^{2n}$, le crochet de Moyal. C'est ce crochet qui correspond, par la quantification de Weyl, au commutateur des opérateurs en mécanique quantique. Ce résultat a conduit certains auteurs [*2*] à suggérer de comprendre la quantification comme une déformation de la structure de l'algèbre des observables classiques. Dans cette optique, un processus de quantification est lié à la donnée d'une *déformation du crochet de Poisson.*

L'étude des *déformations* d'une algèbre de Lie, et plus particulièrement leurs existences et leurs équivalences, reposent essentiellement *sur les 2*[e] *et 3*[e] *espaces de cohomologie* de Chevalley [*3*] de cette algèbre.

Dans cet article, nous calculons de manière explicite les 2[e] et 3[e] espaces de cohomologie différentiable de l'algèbre de Lie de Poisson d'une variété symplectique.

I. DÉFINITIONS

a) L'algèbre de Lie de Poisson N.

Soit (W, F) une variété symplectique connexe paracompacte de dimension $2n$. Tout ce qui sera introduit ici sera supposé de classe C^∞. Notons N l'espace des fonctions C^∞ sur W à valeurs réelles, $N = C^\infty(W ; \mathbb{R})$.

Nous définissons un isomorphisme μ entre le fibré tangent à la variété τW

et son fibré cotangent τ^*W de la manière suivante : $\mu : \tau W \to \tau^* W$; $X \to -i(X)F$ où $i(.)$ désigne le produit intérieur. Si $f \in N$, nous désignons par X_f le champ de vecteurs sur $W : X_f = \mu^{-1}(df)$; μ s'étend aux fibrés de tenseurs. En particulier on désigne par Λ le tenseur 2 fois contravariant $\Lambda = \mu^{-1}(F)$. Dans des *coordonnées locales naturelles*, c'est-à-dire des coordonnées locales où les composantes de F sont des constantes, on a $\Lambda^{ij} = (-F^{-1})^{ij}$.

Sur l'espace N on a une structure d'algèbre de Lie définie par le crochet de Poisson $P : P(u, v) = \{ u, v \} = -i(X_v)du$ pour tout $u, v \in N$.

A la variété symplectique W sont associées d'autres algèbres classiques :

— L, algèbre de Lie des transformations infinitésimales symplectiques ;

$$L = \{ X \in \tau W \text{ t. q. } \mathscr{L}(X)F = -d\mu(X) = 0 \}$$

— L^*, algèbre de Lie des champs de vecteurs globalement hamiltoniens ;

$$L^* = \{ X \in \tau W \text{ t. q. } \mu(X) \text{ soit une 1-forme exacte} \}$$

— L^c, algèbre de Lie des transformations infinitésimales conformes symplectiques ;

$$L^c = \{ X \in \tau W \text{ t. q. } \mathscr{L}(X)F + k(X)F = 0 \text{ où } k(X) \in \mathbb{R} \}$$

Ces algèbres jouissent entre autres des propriétés suivantes [*1*] :

. Si $\mathbb{R}$ est identifié aux fonctions constantes sur W, le crochet de Poisson de deux fonctions est défini de telle sorte qu'on ait un isomorphisme d'algèbres de Lie entre L^* et $N/\mathbb{R}$.

. Si $H^1(W ; \mathbb{R})$ désigne le premier espace de cohomologie de De Rham de la variété W, on a un isomorphisme naturel d'espaces vectoriels entre $H^1(W ; \mathbb{R})$ et L/L^*.

. Si $F = d\alpha$, $X_0 = \mu^{-1}(\alpha) \in L^c$ et $L^c = \mathbb{R}X_0 \oplus L$; si F est non exacte, $L^c = L$; si $\dim W > 2$ et si $X \in \tau W$ est tel que $\mathscr{L}(X)F + aF = 0$ où $a \in N$, alors a est une fonction constante et $X \in L^c$.

b) Cohomologie de Chevalley de N.

Une p-cochaîne est une application p-linéaire alternée $N^p \to N$, les o-cochaînes étant identifiées aux éléments de N.

Le cobord d'une p-cochaîne C est la $(p + 1)$-cochaîne δC définie par

$$\delta C(u_0, u_1, \ldots, u_p) = \sum_{\alpha=0}^{p} (-1)^\alpha \{ u_\alpha, C(u_0, \ldots, \hat{u}_\alpha, \ldots, u_p) \} + \sum_{\alpha<\beta} (-1)^{\alpha+\beta} C(\{ u_\alpha, u_\beta \}, u_0, \ldots, \hat{u}_\alpha, \ldots, \hat{u}_\beta, \ldots, u_p)$$

où $u_\alpha \in N$ et où $\hat{}$ indique l'omission.

Une p-cochaîne C est dite *locale* si $C(u_1, \ldots, u_p)|_0 = 0$ dès que $u_1|_0 = 0$ où 0 désigne un ouvert de W.

Une p-cochaîne est dite *d-différentiable* si elle est locale et si sa restriction au domaine d'une carte est donnée par un opérateur multidifférentiel d'ordre maximum d en chaque argument.

De manière plus générale, une cochaîne C est différentiable si elle est d-différentiable par un certain entier d.

Le cobord d'une cochaîne différentiable est différentiable. On désigne par $H^p_{\mathrm{diff}}(N)$, $p^{\text{ème}}$ espace de *cohomologie différentiable de Chevalley* de N, l'espace quotient des p-cocycles différentiables par les cobords de $(p-1)$-cochaînes différentiables.

c) **Cohomologie 1-différentiable.**

Le cobord d'une cochaîne 1-différentiable est 1-différentiable. On peut donc étudier la cohomologie $H^p_{1-\mathrm{diff}}(N)$ relative à ces cochaînes.

Lichnerowicz [4] a montré l'isomorphisme suivant :

$$H^p_{1-\mathrm{diff}}(N) \cong P^{p-1}(W, F) \oplus [H^p(W\,;\mathbb{R})/Q^p(W, F)]$$

où $H^p(W\,;\mathbb{R})$ désigne le $p^{\text{ème}}$ espace de cohomologie de De Rham de la variété W.

$P^{p-1}(W, F)$ est le noyau de l'opérateur $\tilde{F} : H^{p-1}(W\,;\mathbb{R}) \to H^{p+1}(W\,;\mathbb{R})$ déterminé par l'action sur les classes de cohomologie de De Rham de l'opérateur défini sur les formes par le produit extérieur par F.

$Q^p(W, F)$ est l'image par $\tilde{F}$ de $H^{p-2}(W\,;\mathbb{R})$ dans $H^p(W\,;\mathbb{R})$;

en particulier, si la 2-forme F est exacte,

$$Q^p(W, F) = 0\,, \qquad P^{p-1}(W, F) = H^{p-1}(W\,;\mathbb{R})$$

et

$$H^p_{1-\mathrm{diff}}(N) \cong H^{p-1}(W\,;\mathbb{R}) \oplus H^p(W\,;\mathbb{R})\,.$$

d) **Le 2-cocyle S^3_Γ.**

On appelle *connexion symplectique* une connexion linéaire Γ sans torsion telle que $\nabla F = 0$, où ∇ désigne l'opérateur de dérivation covariante associée à Γ. De telles connexions existent sur toute variété symplectique. Si $\{ \Gamma^k_{ij} \}$ sont les coefficients de la connexion Γ dans une carte naturelle $\{ x^i \}$, on introduit les quantités $\Gamma_{ijk} = F_{il}\Gamma^l_{jk}$.

On définit la 2-cochaîne S^3_Γ par son expression dans une carte naturelle :

$$S^3_\Gamma(u, v) = \Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}\Lambda^{i_3j_3}(\mathscr{L}(X_u)\Gamma)_{i_1i_2i_3}(\mathscr{L}(X_v)\Gamma)_{j_1j_2j_3}\,.$$

On montre [2] que S^3_Γ est un 2-cocycle 3-différentiable non exact (voir aussi § II, lemme 5).

e) **Résultats.**

En utilisant la théorie de Gelfand Fuk's, Vey [5] a obtenu d'intéressants résultats concernant $H^p_{\mathrm{diff}}(N)$.

Ici nous calculons directement $H^2_{\mathrm{diff}}(N)$ et, si $\dim W > 2$, $H^3_{\mathrm{diff}}(N)$.

On a la

PROPOSITION. —

. $H^2_{\mathrm{diff}}(N) \cong \mathbb{R}S^3_\Gamma \oplus H^2_{1\text{-diff}}(N)$

. $H^3_{\mathrm{diff}}(N) \cong L^c/L^* \oplus H^3_{1\text{-diff}}(N)$ (si $\dim W > 2$)

En particulier si la 2-forme F est exacte et si $b_k(W)$ désigne le $k^{\text{ème}}$ nombre de Betti de la variété $W(b_k(W) = \dim H^k(W\,;\mathbb{R}))$ on a

$$\dim H^2_{\mathrm{diff}}(N) + 1 + b_1(W) + b_2(W)$$

et $\dim H^3_{\mathrm{diff}}(N) = 1 + b_1(W) + b_2(W) + b_3(W)$ si $\dim W > 2$.

II. SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE DIFFÉRENTIABLE

Considérons un 2-cocycle différentiable C. Sur le domaine 0 d'une carte, C est donné par :

$$C(u, v)\,|_0 = \sum_{r \geq s \geq 0} a^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s} (\partial_{i_1 \dots i_r} u \partial_{j_1 \dots j_s} v - \partial_{i_1 \dots i_r} v \partial_{j_1 \dots j_s} u)$$

où l'on suppose, ce qui n'est pas restrictif, que $a^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s}$ est symétrique en les indices i et symétrique en les indices j. De plus, si $r = s$, on suppose que $a^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_r} = - a^{j_1 \dots j_r, i_1 \dots i_r}$.

Par extension de la notion usuelle du symbole principal d'un opérateur différentiel, nous définissons ici comme le symbole principal de C les termes non nuls d'ordre (r, s), $r \geqslant s$ avec r maximum et, pour cette valeur de r, s maximum. Par sa définition, le symbole principal est de nature tensorielle. La partie essentielle de la démonstration consiste à déterminer ce symbole.

A cet effet, on considère la relation de cocyle ; C étant un 2-cocyle, on a $\underset{uvw}{\mathrm{S}} \{ u, C(v, w) \} - \underset{uvw}{\mathrm{S}} C(\{ u, v \}, w) = 0$ où S désigne la sommation sur toutes les permutations cycliques des lettres u, v, w. En explicitant cette identité dans la carte envisagée, on a l'opérateur tridifférentiel défini par :

$$\begin{aligned}
\delta C(u_1, u_2, u_3)\,|_0 = & \sum_{r \geq s \geq 0} \varepsilon^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}_{1\ 2\ 3} \Lambda^{kl} \partial_l a^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s} \partial_k u_{\lambda_1} \partial_{i_1 \dots i_r} u_{\lambda_2} \partial_{j_1 \dots j_s} u_{\lambda_3} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{r \geq s \geq 0} \varepsilon^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}_{1\ 2\ 3} \Lambda^{kl} a^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s} \sum_{n=1}^{r-1} \frac{r\,!}{n\,!\,(r-n)\,!} \partial_{i_1 \dots i_n k} u_{\lambda_1} \partial_{i_{n+1} \dots i_r l} u_{\lambda_2} \partial_{j_1 \dots j_s} u_{\lambda_3} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{r \geq s \geq 0} \varepsilon^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}_{1\ 2\ 3} \Lambda^{kl} a^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s} \sum_{n=1}^{s-1} \frac{s\,!}{n\,!\,(s-n)\,!} \partial_{i_1 \dots i_r} u_{\lambda_1} \partial_{j_1 \dots j_n k} u_{\lambda_2} \partial_{j_{n+1} \dots j_s l} u_{\lambda_3} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{r > s = 0} \varepsilon^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}_{1\ 2\ 3} \Lambda^{kl} a^{i_1 \dots i_r} \partial_k u_{\lambda_1} \partial_{i_1 \dots i_r} u_{\lambda_2} \partial_l u_{\lambda_3} = 0
\end{aligned}$$

Sur les triples ordonnés d'entiers (r, s, t) avec $r \geqslant s \geqslant t$, on donne l'ordre partiel suivant :

$$(r, s, t) < (r', s', t') \quad \text{ssi} \quad r \leqslant r', \quad s \leqslant s', \quad t \leqslant t' \quad \text{et} \quad r + s + t < r' + s' + t'$$

On va considérer dans l'opérateur tridifférentiel cité plus haut des termes d'ordre (r, s, t) maximum pour cet ordre partiel. Ils seront dès lors de nature tensorielle. Plus précisément on regarde ceux de ces termes qui ne font intervenir que le symbole principal de C.

LEMME 1. — *L'ordre (r, s) du symbole principal de C ne peut être que $(r, 2)$ avec $r \geqslant 2$, $(3, 3)$ ou (r, s) avec r et $s \leqslant 1$.*

Démonstration. — Cas 1. — Supposons que le symbole principal de C soit d'ordre (r, s) avec $r > s > 2$. Nous considérons dans la relation de cocycle les termes d'ordre $(r, s, 2)$, plus précisément le coefficient de $\partial_{i_1 \dots i_r} u_1 \partial_{j_1 \dots j_s} u_2 \partial_{k_1 k_2} u_3$ où les indices sont maintenant fixés.

On a :

$$\sum_{p=1}^{r} \Lambda^{k_1 i_p} a^{i_1 \dots \hat{i}_p \dots i_r k_2, j_1 \dots j_s} + \sum_{p=1}^{r} \Lambda^{k_2 i_p} a^{i_1 \dots \hat{i}_p \dots i_r k_1, j_1 \dots j_s} - \sum_{p=1}^{s} \Lambda^{j_p k_1} a^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots \hat{j}_p \dots j_s k_2} - \sum_{p=1}^{s} \Lambda^{j_p k_2} a^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots \hat{j}_p \dots j_s k_1} = 0$$

En faisant le produit par $F_{k_1 i_1}$ on obtient :

$$(2n + r) a^{k_2 i_2 \dots i_r, j_1 \dots j_s} + \sum_{p=1}^{s} a^{j_p i_2 \dots i_r, k_2 j_1 \dots \hat{j}_p \dots j_s} + \sum_{p=1}^{s} \Lambda^{j_p k_2} a_{\mathrm{B}}^{i_2 \dots i_r, j_1 \dots \hat{j}_p \dots j_s} = 0$$

où l'on a défini $a_{\mathrm{B}}^{i_2 \dots i_r, j_2 \dots j_s} = F_{i_1 j_1} a^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s}$.

Multiplions encore par $F_{k_2 j_1}$. Il vient : $(r - s) a_{\mathrm{B}}^{i_2 \dots i_r, j_2 \dots j_s} = 0$.

La relation plus haut devient

$$(2n + r) a^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s} + \sum_{p=1}^{s} a^{j_p i_2 \dots i_r, j_1 \dots \hat{j}_p \dots j_s i_1} = 0 .$$

Similairement

$$(2n + r) a^{j_1 i_2 \dots i_r, i_1 j_2 \dots j_s} + a^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s} + \sum_{p=2}^{s} a^{j_p i_2 \dots i_r, j_1 \dots \hat{j}_p \dots j_s i_1} = 0 .$$

En soustrayant ces deux relations on a $a^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s} = a^{j_1 i_2 \dots i_r, i_1 j_2 \dots j_s}$. Ainsi $a^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s}$ est symétrique en tous ses indices.

Mais alors

$$(2n + r) a^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s} + \sum_{p=1}^{s} a^{j_p i_2 \dots i_r, j_1 \dots \hat{j}_p \dots j_s i_1} = (2n + r + s) a^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s} = 0 .$$

Donc $a^{i_1\dots i_r, j_1\dots j_s} = 0$ et l'ordre du symbole principal de C ne peut être (r, s) avec $r > s > 2$.

Cas 2. — Supposons que l'ordre soit (r, s) avec $r = s > 3$.

On regarde dans la relation de cocycle le coefficient de

$$\partial_{i_1\dots i_{r-1}} u_1 \partial_{j_1\dots j_r} u_2 \partial_{k_1k_2k_3} u_3 .$$

Explicitement on a :

$$\sum_{p=1}^{r-1} \Lambda^{i_p k_1} a^{i_1\dots \hat{i}_p \dots i_{r-1} k_2 k_3, j_1 \dots j_r} + \sum_{p=1}^{r-1} \Lambda^{i_p k_2} a^{i_1\dots \hat{i}_p \dots i_{r-1} k_3 k_1, j_1 \dots j_r}$$
$$+ \sum_{p=1}^{r-1} \Lambda^{i_p k_3} a^{i_1\dots \hat{i}_p \dots i_{r-1} k_1 k_2, j_1 \dots j_r} = 0$$

En multipliant par $F_{i_1k_1}$ on obtient $(2n + r)a^{i_2\dots i_{r-1}k_2k_3, j_1\dots j_r} = 0$. Ainsi $a^{i_1\dots i_r, j_1\dots j_r} = 0$ et l'ordre du symbole principal n'est pas (r, s) avec $r = s > 3$.

Cas 3. — Supposons que l'ordre soit (r, s) avec $r > 1$ et $s = 1$ (resp. $s = 0$).

On regarde le coefficient de $\partial_{i_1\dots i_r} u_1 \partial_{j_1 j_2} u_2 (\partial_k) u_3$. On a :

$$\sum_{p=1}^{r} \Lambda^{i_p j_1} a^{i_1 \dots \hat{i}_p \dots i_r j_2, (k)} + \sum_{p=1}^{r} \Lambda^{i_p j_2} a^{i_1 \dots \hat{i}_p \dots i_r j_1, (k)} = 0$$

Multiplions par $F_{i_1 j_1}$. On obtient $(2n + r)a^{i_2\dots i_r j_2, (k)} = 0$. Donc $a^{i_1\dots i_r, (k)} = 0$.

Les cas 1, 2 et 3 étant exclus, le lemme 1 est démontré. q. e. d.

LEMME 2. — *Si l'ordre du symbole principal est* (3, 3), *alors ce symbole principal coïncide avec celui de* αS^3_Γ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Démonstration. — Considérons dans la relation du cocycle le coefficient de $\partial_{i_1 i_2 i_3} u_1 \partial_{j_1 j_2 j_3} u_2 \partial_k u_3$. On a $\Lambda^{kl} \partial_l a^{i_1 i_2 i_3, j_1 j_2 j_3} = 0$. Ainsi les composantes $a^{i_1 i_2 i_3, j_1 j_2 j_3}$ sont des constantes sur le domaine d'une carte naturelle. (Remarquons que le terme envisagé ici n'est pas tensoriel, (3, 3, 1) n'étant pas maximum pour l'ordre partiel annoncé).

Regardons maintenant les termes d'ordre (3, 3, 2) coefficients de $\partial_{i_1 i_2 i_3} u_1 \partial_{j_1 j_2 j_3} u_2 \partial_{k_1 k_2} u_3$. Ce sont des termes de nature tensorielle. On a

$$\sum_{p=1}^{3} \Lambda^{j_p k_1} a^{j_1 \dots \hat{j}_p \dots j_3 k_2, i_1 i_2 i_3} + \sum_{p=1}^{3} \Lambda^{j_p k_2} a^{j_1 \dots \hat{j}_p \dots j_3 k_1, i_1 i_2 i_3}$$
$$+ \sum_{p=1}^{3} \Lambda^{k_1 i_p} a^{i_1 \dots \hat{i}_p \dots i_3 k_2, j_1 j_2 j_3} + \sum_{p=1}^{3} \Lambda^{k_2 i_p} a^{i_1 \dots \hat{i}_p \dots i_3 k_1, j_1 j_2 j_3} = 0$$

Multiplions par $F_{j_1k_1}$. On obtient

$$(2n+3)a^{j_2j_3k_2,i_1i_2i_3} - \sum_{p=1}^{3} a^{i_1\ldots\hat{i}_p\ldots i_3k_2,i_pj_2j_3} - \sum_{p=1}^{3} \Lambda^{k_2i_p}a_{\mathrm{B}}^{j_2j_3,i_1\ldots\hat{i}_p\ldots i_3} = 0$$

où l'on a utilisé la même notation qu'au lemme 1 :

$$a_{\mathrm{B}}^{i_2\ldots i_r,j_2\ldots j_s} = F_{i_1j_1}a^{i_1\ldots i_r,j_1\ldots j_s}.$$

Similairement

$$(2n+3)a^{i_1j_2j_3,i_2i_3k_2} + a^{k_2j_2j_3,i_1i_2i_3} + a^{i_2j_2j_3,i_1k_2i_3} + a^{i_3j_2j_3,i_1i_2k_2}$$
$$- \Lambda^{i_1k_2}a_{\mathrm{B}}^{j_2j_3,i_2i_3} - \Lambda^{i_1i_2}a_{\mathrm{B}}^{j_2j_3,k_2i_3} - \Lambda^{i_1i_3}a_{\mathrm{B}}^{j_2j_3,k_2i_2} = 0$$

et

$$(2n+3)\sum_{p=1}^{3} a^{i_pj_2j_3,i_1\ldots\hat{i}_p\ldots i_3k_2} = -3a^{k_2j_2j_3,i_1i_2i_3} - 2\sum_{p=1}^{3} a^{i_pj_2j_3,i_1\ldots\hat{i}_p\ldots i_3k_2}$$
$$+ \sum_{p=1}^{3} \Lambda^{i_pk_2}a_{\mathrm{B}}^{j_2j_3,i_1\ldots\hat{i}_p\ldots i_3}.$$

Ainsi

$$a^{j_2j_3k_2,i_1i_2i_3}\left(2n+3-\frac{3}{2n+5}\right) = \left(1+\frac{1}{2n+5}\right)\sum_{p=1}^{3} \Lambda^{k_2i_p}a_{\mathrm{B}}^{j_2j_3,i_1\ldots\hat{i}_p\ldots i_3}$$

Donc

$$a^{j_1j_2j_3,i_1i_2i_3} = \frac{1}{2n+1}\sum_{p=1}^{3} \Lambda^{j_1i_p}a_{\mathrm{B}}^{j_2j_3,i_1\ldots\hat{i}_p\ldots i_3}$$

Pour des raisons de symétrie :

$$\sum_{p=1}^{3} \Lambda^{j_1i_p}a_{\mathrm{B}}^{j_2j_3,i_1\ldots\hat{i}_p\ldots i_3} = \sum_{p=1}^{3} \Lambda^{j_2i_p}a_{\mathrm{B}}^{j_1j_3,i_1\ldots\hat{i}_p\ldots i_3}$$

En multipliant par $F_{j_1i_1}$ on a :

$$(2n+1)a_{\mathrm{B}}^{j_2j_3,i_2i_3} = \Lambda^{j_2i_2}a_{\mathrm{BB}}^{j_3,i_3} + \Lambda^{j_2i_3}a_{\mathrm{BB}}^{j_3,i_2}$$

Dès lors, pour des raisons de symétrie

$$\Lambda^{j_2i_2}a_{\mathrm{BB}}^{j_3,i_3} + \Lambda^{j_2i_3}a_{\mathrm{BB}}^{j_3,i_2} = \Lambda^{j_3i_2}a_{\mathrm{BB}}^{j_2,i_3} + \Lambda^{j_3i_3}a_{\mathrm{BB}}^{j_2,i_2}.$$

En faisant le produit par $F_{j_3i_2}$ il vient $2na_{\mathrm{BB}}^{j_2,i_3} = \Lambda^{j_2i_3}a_{\mathrm{BBB}}$.

Par sa définition a_{BBB} est un scalaire. Sur le domaine de la carte naturelle c'est une constante. W étant connexe, ceci implique que $a_{\mathrm{BBB}} = a$ où $a \in \mathbb{R}$ et

$$a^{i_1i_2i_3,j_1j_2j_3} = \alpha\sigma_{k_1k_2k_3}^{j_1j_2j_3}\Lambda^{i_1k_1}\Lambda^{i_2k_2}\Lambda^{i_3k_3}$$

où σ indique la sommation sur les permutations d'indices.

Ainsi le symbole principal de C coïncide avec celui de αS_Γ^3, $\alpha \in \mathbb{R}$. q. e. d.

LEMME 3. — *Si le symbole principal est d'ordre* $(r, 2)$ *il coïncide avec le symbole principal d'un cobord.*

Démonstration. — Regardons dans la relation de cocycle le coefficient de $\partial_{i_1 \dots i_r} u_1 \partial_{j_1 j_2} u_2 \partial_{k_1 k_2} u_3$. On a :

$$\sum_{p=1}^{r} \Lambda^{i_p j_1} a^{i_1 \dots \hat{i}_p \dots i_r j_2, k_1 k_2} + \sum_{p=1}^{r} \Lambda^{i_p j_2} a^{i_1 \dots \hat{i}_p \dots i_r j_1, k_1 k_2}$$
$$+ \sum_{p=1}^{r} \Lambda^{k_1 i_p} a^{i_1 \dots \hat{i}_p \dots i_r k_2, j_1 j_2} + \sum_{p=1}^{r} \Lambda^{k_2 i_p} a^{i_1 \dots \hat{i}_p \dots i_r k_1, j_1 j_2}$$
$$- \Lambda^{j_1 k_1} a^{i_1 \dots i_r, j_2 k_2} - \Lambda^{j_1 k_2} a^{i_1 \dots i_r, j_2 k_1} - \Lambda^{j_2 k_1} a^{i_1 \dots i_r, j_1 k_2}$$
$$- \Lambda^{j_2 k_2} a^{i_1 \dots i_r, j_1 k_1} = 0 .$$

En multipliant par $F_{i_1 j_1}$ on obtient :

$$(2n + r) a^{i_2 \dots i_r j_2, k_1 k_2} + \sum_{p=2}^{r} \Lambda^{k_1 i_p} a_{\mathrm{B}}^{i_2 \dots \hat{i}_p \dots i_r k_2, j_2}$$
$$+ \sum_{p=2}^{r} \Lambda^{k_2 i_p} a_{\mathrm{B}}^{i_2 \dots \hat{i}_p \dots i_r k_1, j_2} + \Lambda^{k_1 j_2} a_{\mathrm{B}}^{i_2 \dots i_r, k_2} + \Lambda^{k_2 j_2} a_{\mathrm{B}}^{i_2 \dots i_r, k_1} = 0$$

En multipliant encore par $F_{i_2 k_1}$, il vient :

$$(2n + r - 1) a_{\mathrm{B}}^{i_3 \dots i_r j_2, k_2} - (2n + r - 1) a_{\mathrm{B}}^{i_3 \dots i_r k_2, j_2} + \Lambda^{k_2 j_2} a_{\mathrm{BB}}^{i_3 \dots i_r} = 0$$

Le produit par $F_{k_2 j_2}$ donne $(2n + 2r - 2) a_{\mathrm{BB}}^{i_3 \dots i_r} = 0$.

En reprenant la relation précédente, cela implique que $a_{\mathrm{B}}^{i_2 \dots i_r, j}$ est complètement symétrique en tous ses indices. Notons $a_{\mathrm{B}}^{i_2 \dots i_r, j} = b^{i_2 \dots i_r j}$. On a

$$- (2n + r) a^{i_1 \dots i_r, j_1 j_2} = \sum_{p=1}^{r} \Lambda^{j_1 i_p} b^{i_1 \dots \hat{i}_p \dots i_r j_2} + \sum_{p=1}^{r} \Lambda^{j_2 i_p} b^{i_1 \dots \hat{i}_p \dots i_r j_1}$$

Considérons la 1-cochaîne différentiable B définie par :

$$\mathrm{B}(u) = \frac{-2}{2n + r} b^{i_1 \dots i_r} \nabla_{i_1 \dots i_r} u$$

Son cobord est le 2-cocycle exact $\delta \mathrm{B}(u, v) = \{ u, \mathrm{B}v \} + \{ \mathrm{B}u, v \} - \mathrm{B}\{ u, v \}$ dont le symbole principal, d'ordre $(r, 2)$ est donné par :

$$\frac{2}{2n + r} \Lambda^{kl} b^{i_1 \dots i_r} \frac{r!}{(r-1)!} (\partial_{i_1 \dots i_{r-1} k} u \partial_{i_r l} v + \partial_{i_1 k} u \partial_{i_2 \dots i_r l} v)$$
$$= \left(\sum_{p=1}^{r} \Lambda^{i_p j_1} \frac{2 . r!}{2n + r} b^{i_1 \dots \hat{i}_p \dots i_r j_2} + \sum_{p=1}^{r} \Lambda^{i_p j_2} \frac{2 . r!}{2n + r} b^{i_1 \dots \hat{i}_p \dots i_r j_1} \right)$$
$$(\partial_{i_1 \dots i_r} u \partial_{j_1 j_2} v - \partial_{j_1 j_2} u \partial_{i_1 \dots i_r} v)$$
$$= a^{i_1 \dots i_r, j_1 j_2} (\partial_{i_1 \dots i_r} u \partial_{j_1 j_2} v - \partial_{j_1 j_2} u \partial_{i_1 \dots i_r} v) .$$

Ainsi, le symbole principal de C coïncide avec celui du cobord δB. q. e. d.

LEMME 4. — *Une 2-cochaîne 1-différentiable est exacte dans la cohomologie 1-différentiable si et seulement si elle est exacte dans la cohomologie différentiable.*

Démonstration. — Considérons une 2-cochaîne 1-différentiable C et supposons $C = \delta B$ où B est une 1-cochaîne différentiable.

Si le symbole principal de B est d'ordre r, avec $r > 1$, soit :

$$B(u)|_0 = a^{i_1 \dots i_r} \partial_{i_1 \dots i_r} u + \text{termes de degré inférieur},$$

le symbole de δB est d'ordre $(r, 2)$.

En effet si les termes d'ordre $(r, 2)$ de δB sont nuls, cela implique :

$$\sum_{p=1}^{r} \Lambda^{i_p j_1} a^{i_1 \dots \hat{i}_p \dots i_r j_2} + \sum_{p=1}^{r} \Lambda^{i_p j_2} a^{i_1 \dots \hat{i}_p \dots i_r j_1} = 0$$

et, en multipliant par $F_{i_1 j_1}$, on en déduit $a^{i_1 \dots i_r} = 0$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite sur l'ordre du symbole de B.

Comme $C = \delta B$ est une 2-cochaîne 1-différentiable, δB ne peut comporter de termes d'ordre $(r, 2)$. Le symbole principal de B est donc d'ordre $r \leqslant 1$. Ceci revient à dire que B est une 1-cochaîne 1-différentiable.

Ainsi, si une 2-cochaîne 1-différentiable est exacte dans la cohomologie différentiable, elle est aussi exacte dans la cohomologie 1-différentiable. La réciproque est évidente. q. e. d.

Des 4 lemmes précédents, on déduit que :

si C est un 2-cocycle différentiable, il existe un 2-cocycle différentiable C′, égal soit à un cobord, soit à αS^3_Γ où $\alpha \in \mathbb{R}$, soit à 2-cocycle 1-différentiable, dont le symbole principal coïncide avec celui de C. Ainsi $C - C'$ a un symbole principal d'ordre inférieur à celui de C (on dit que l'ordre (r, s), couple ordonné avec $r \geqslant s$, est supérieur à l'ordre (r', s') si $r > r'$ ou si $r = r'$ et $s > s'$).

En itérant le raisonnement on voit que

Si C *est un 2-cocycle différentiable, il s'écrit* $C = \alpha S^3_\Gamma + \delta E + A$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$, E *est une 1-cochaîne différentiable et* A *est un 2-cocycle 1-différentiable.*

LEMME 5. — *Le nombre* α *et la classe* $[A]_1$ *du 2-cocycle* A *dans la cohomologie 1-différentiable sont univoquement déterminés par le 2-cocycle* C.

Démonstration. — Supposons qu'on ait

$$C = \alpha S^3_\Gamma + \delta E + A \qquad \text{et} \qquad C = \beta S^3_\Gamma + \delta E' + A'.$$

On en déduit :

$$\delta(E - E') = (\beta - \alpha) S^3_\Gamma + A' - A. \tag{1}$$

Supposons que $E - E'$ ait un symbole principal d'ordre r ($r \geqslant 4$). Son cobord contiendrait alors (voir démonstration du lemme 4) des termes d'ordre $(r, 2)$. Or le membre de droite de l'équation (1) ne contient pas de tels termes, S^3_Γ étant 3-différentiable et $A' - A$ étant 1-différentiable.

Donc $E - E'$ a un symbole principal d'ordre $r \leqslant 3$.

Dès lors son cobord ne contient pas de termes d'ordre $(3, 3)$.

Ceci implique qu'il en soit de même pour le membre de droite de (1), c'est-à-dire $\alpha = \beta$.

Dès lors $A - A'$ est une 2-cochaîne 1-différentiable exacte, et, par le lemme 4, $[A]_1 = [A']_1$.

Si le 2-cocycle C est exact, $C = \delta E = 0.S^3_\Gamma + \delta E + 0$; il lui correspond donc le nombre réel 0 et la classe nulle de $H^2_{1\text{-diff}}(N)$. On peut ainsi associer à la classe $[C]$ dans la cohomologie différentiable du 2-cocycle $C = \alpha S^3_\Gamma + \delta E + A$, le nombre réel α et la classe $[A]_1$ de A dans $H^2_{1\text{-diff}}(N)$. De plus cette correspondance est clairement surjective et injective. On en déduit la

PROPOSITION 1. — $H^2_{\text{diff}}(N) \cong \mathbb{R}S^3_\Gamma \oplus H^2_{1\text{-diff}}(N)$

III. TROISIÈME ESPACE DE COHOMOLOGIE DIFFÉRENTIABLE

Le principe de la démonstration est analogue à celui du calcul de $H^2_{\text{diff}}(N)$ mais nous devons supposer ici que $\dim W \geqslant 4$.

Considérons un 3-cocycle différentiable C. Sur le domaine 0 d'une carte naturelle, C est donné par :

$$C(u_1, u_2, u_3)\,|_0 = \sum_{r \geq s \geq t \geq 0} a^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s, k_1 \dots k_t} \varepsilon^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}_{1\ 2\ 3} \partial_{i_1 \dots i_r} u_{\lambda_1} \partial_{j_1 \dots j_s} u_{\lambda_2} \partial_{k_1 \dots k_t} u_{\lambda_3}$$

où l'on suppose, ce qui n'est pas restrictif que $a^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s, k_1 \dots k_t}$ est symétrique en les indices i, symétrique en les indices j et symétrique en les indices k. De plus, si deux des entiers r, s, t sont égaux on suppose a antisymétrique par permutation des groupes d'indices relatifs à ces deux entiers ; par exemple, si $r = s$, $a^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_r, k_1 \dots k_t} = - a^{j_1 \dots j_r, i_1 \dots i_r, k_1 \dots k_t}$.

Nous définissons ici comme symbole principal de C les termes non nuls d'ordre (r, s, t), $r \geqslant s \geqslant t$ avec $r + s + t$ maximum, r maximum pour cette valeur de $r+s+t$ et s maximum pour ces valeurs de r et de $r+s+t$. Comme précédemment, le symbole principal est de nature tensorielle. La partie essentielle de la démonstration consiste à le déterminer en se servant du fait que C est un 3-cocycle, donc

$$\delta C(u_0, u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{3\,!} \varepsilon^{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}_{0\ 1\ 2\ 3} \{ u_{\lambda_0}, C(u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}, u_{\lambda_3}) \} - \frac{1}{2.2\,!} \varepsilon^{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}_{0\ 1\ 2\ 3} C(\{ u_{\lambda_0}, u_{\lambda_1} \}, u_{\lambda_2}, u_{\lambda_3}) = 0$$

En explicitant cette relation de cocycle dans la carte envisagée, on a l'opérateur quadridifférentiel défini par :

$$\delta C(u_0, u_1, u_2, u_3)|_0 = \sum_{r\geq s\geq t} \varepsilon^{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_{0\,1\,2\,3}[\Lambda^{kl}\partial_l a^{i_1\ldots i_r, j_1\ldots j_s, k_1\ldots k_t}\partial_k u_{\lambda_0} \partial_{i_1\ldots i_r}u_{\lambda_1}\partial_{j_1\ldots j_s}u_{\lambda_2}\partial_{k_1\ldots k_t}u_{\lambda_3}$$

$$- \frac{1}{2}\Lambda^{kl}a^{i_1\ldots i_r, j_1\ldots j_s, k_1\ldots k_t}\sum_{n=1}^{r-1}\frac{r\,!}{n\,!\,(r-n)\,!}\partial_{i_1\ldots i_n k}u_{\lambda_0}\partial_{i_{n+1}\ldots i_r l}u_{\lambda_1}\partial_{j_1\ldots j_s}u_{\lambda_2}\partial_{k_1\ldots k_t}u_{\lambda_3}$$

$$- \frac{1}{2}\Lambda^{kl}a^{i_1\ldots i_r, j_1\ldots j_s, k_1\ldots k_t}\sum_{n=1}^{s-1}\frac{s\,!}{n\,!\,(s-n)\,!}\partial_{i_1\ldots i_r}u_{\lambda_3}\partial_{j_1\ldots j_n k}u_{\lambda_0}\partial_{j_{n+1}\ldots j_s l}u_{\lambda_1}\partial_{k_1\ldots k_t}u_{\lambda_2}$$

$$- \frac{1}{2}\Lambda^{kl}a^{i_1\ldots i_r, j_1\ldots j_s, k_1\ldots k_t}\sum_{n=1}^{t-1}\frac{t\,!}{n\,!\,(t-n)!}\partial_{i_1\ldots i_r}u_{\lambda_2}\partial_{j_1\ldots j_s}u_{\lambda_3} \partial_{k_1\ldots k_n k}u_{\lambda_0}\partial_{k_{n+1}\ldots k_t l}u_{\lambda_1}]$$

$$+ \sum_{r\geq s\geq t=0}\frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_{0\,1\,2\,3}\Lambda^{kl}a^{i_1\ldots i_r, j_1\ldots j_s}\partial_k u_{\lambda_0}\partial_{i_1\ldots i_r}u_{\lambda_1}\partial_{j_1\ldots j_s}u_{\lambda_2}\partial_l u_{\lambda_3} = 0$$

Sur les quadruples ordonnés d'entiers (p, q, r, s) avec $p \geqslant q \geqslant r \geqslant s$, on se donne l'ordre partiel suivant :

$$(p, q, r, s) < (p', q', r', s') \quad \text{ssi} \quad p \leqslant p', \quad q \leqslant q', \quad r \leqslant r', \quad s \leqslant s'$$

et

$$p + q + r + s < p' + q' + r' + s'$$

Dans la mesure du possible, nous considérerons dans l'opérateur quadridifférentiel cité plus haut des termes d'ordre (p, q, r, s) maximum pour cet ordre partiel (ils seront dès lors de nature tensorielle), ne faisant intervenir que le symbole principal de C.

Supposons que le symbole principal soit d'ordre (r, s, t). Suivant la valeur de t, nous distinguons différents cas

. CAS 1 — $t > 3$.

LEMME 1. — *Le symbole principal de* C *ne peut être d'ordre* (r, s, t) *avec* $r \geqslant s \geqslant t > 3$.

Démonstration. — Supposons que le symbole soit d'ordre (r, s, t) avec $r \geqslant s \geqslant t > 3$ et étudions dans la relation de cocycle le terme d'ordre $(r, s, t - 1, 3)$ coefficient de $\partial_{i_1\ldots i_r}u_0\partial_{j_1\ldots j_s}u_1\partial_{k_1\ldots k_{t-1}}u_2\partial_{l_1l_2l_3}u_3$ (tous les indices sont maintenant fixés). On a

$$\sum_{p=1}^{t-1}\sum_{q=1}^{3}\Lambda^{k_pl_q}a^{i_1\ldots i_r, j_1\ldots j_s, k_1\ldots \hat{k}_p\ldots k_{t-1}l_1\ldots \hat{l}_q\ldots l_3} = 0$$

En multipliant par $F_{k_1l_1}$ il vient : $(2n + t)a^{i_1\ldots i_r, j_1\ldots j_s, k_2\ldots k_{t-1}l_2l_3} = 0$, donc $a = 0$. q. e. d.

. CAS 2 – $t = 3$.

Supposons que le symbole soit d'ordre $(r, s, 3)$ et étudions dans la relation de cocycle le terme d'ordre $(r, s, 3, 2)$ coefficient de

$$\partial_{i_1\dots i_r}u_0\partial_{j_1\dots j_s}u_1\partial_{k_1k_2k_3}u_2\partial_{l_1l_2}u_3\,.$$

Il vient :

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{r}\Lambda^{i_pl_1}a^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_rl_2,j_1\dots j_s,k_1k_2k_3}+\sum_{p=1}^{r}\Lambda^{i_pl_2}a^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_rl_1,j_1\dots j_s,k_1k_2k_3}\\+\sum_{p=1}^{s}\Lambda^{j_pl_1}a^{i_1\dots i_r,j_1\dots\hat{j}_p\dots j_sl_2,k_1k_2k_3}+\sum_{p=1}^{s}\Lambda^{j_pl_2}a^{i_1\dots i_r,j_1\dots\hat{j}_p\dots j_sl_1,k_1k_2k_3}\\+\sum_{p=1}^{3}\Lambda^{k_pl_1}a^{i_1\dots i_r,j_1\dots j_s,k_1\dots\hat{k}_p\dots k_3l_2}+\sum_{p=1}^{3}\Lambda^{k_pl_2}a^{i_1\dots i_r,j_1\dots j_s,k_1\dots\hat{k}_p\dots k_3l_1}=0\end{aligned}$$

Nous allons montrer que pour que ce symbole soit non nul, il faut que $s = 2k$ et $r = 2k + 1$; de plus, dans ce cas, il coïncide avec le symbole principal d'un cobord.

LEMME 2. — *Supposons avoir les relations :*

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{r}\Lambda^{i_pl_1}a^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_rl_2,j_1\dots j_s,k_1\dots k_t}+\sum_{p=1}^{r}\Lambda^{i_pl_2}a^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_rl_1,j_1\dots j_s,k_1\dots k_t}\\+\sum_{p=1}^{s}\Lambda^{j_pl_1}a^{i_1\dots i_r,j_1\dots\hat{j}_p\dots j_sl_2,k_1\dots k_t}+\sum_{p=1}^{s}\Lambda^{j_pl_2}a^{i_1\dots i_r,j_1\dots\hat{j}_p\dots j_sl_1,k_1\dots k_t}\\+\sum_{p=1}^{t}\Lambda^{k_pl_1}a^{i_1\dots i_r,j_1\dots j_s,k_1\dots\hat{k}_p\dots k_tl_2}+\sum_{p=1}^{t}\Lambda^{k_pl_2}a^{i_1\dots i_r,j_1\dots j_s,k_1\dots\hat{k}_p\dots k_tl_1}=0\quad(1)\end{aligned}$$

où r, s et t désignent des entiers quelconques $\geqslant 1$.

Introduisons les tenseurs a_{B}, a_{C} et a_{D} donnés par la contraction par F *du tenseur a respectivement sur les deux premiers groupes d'indices, sur les deux derniers et sur le premier et le dernier.*

Explicitement . $a_{\mathrm{B}}^{i_2\dots i_r,j_2\dots j_s,k_1\dots k_t}=\mathrm{F}_{i_1j_1}a^{i_1\dots i_r,j_1\dots j_s,k_1\dots k_t}$

. $a_{\mathrm{C}}^{i_1\dots i_r,j_2\dots j_s,k_2\dots k_t}=\mathrm{F}_{j_1k_1}a^{i_1\dots i_r,j_1\dots j_s,k_1\dots k_t}$

. $a_{\mathrm{D}}^{i_2\dots i_r,j_1\dots j_s,k_2\dots k_t}=\mathrm{F}_{i_1k_1}a^{i_1\dots i_r,j_1\dots j_s,k_1\dots k_t}$

Alors a s'exprime en fonction de a_{C} et a_{D} (ou, par symétrie, de a_{C} et a_{B} ou de a_{B} et a_{D}).

De plus a_{B}, a_{C} *et* a_{D} *vérifient les mêmes relations* (1) *que* a *pour* (r', s', t') *respectivement égaux à* $(r-1, s-1, t)$, $(r, s-1, t-1)$ *et* $(r-1, s, t-1)$.

Démonstration. — Effectuons le produit des relations (1) par $F_{i_1 k_1}$. On a :

$$\sum_{p=2}^{r} \Lambda^{i_p l_1} a_{\mathrm{D}}^{i_2\dots\hat{i}_p\dots i_r l_2, j_1\dots j_s, k_2\dots k_t} + \sum_{p=2}^{r} \Lambda^{i_p l_2} a_{\mathrm{D}}^{i_2\dots\hat{i}_p\dots i_r l_1, j_1\dots j_s, k_2\dots k_t}$$
$$+ \sum_{p=1}^{s} \Lambda^{j_p l_1} a_{\mathrm{D}}^{i_2\dots i_r, j_1\dots\hat{j}_p\dots j_s l_2, k_2\dots k_t} + \sum_{p=1}^{s} \Lambda^{j_p l_2} a_{\mathrm{D}}^{i_2\dots i_r, j_1\dots\hat{j}_p\dots j_s l_1, k_2\dots k_t}$$
$$+ \sum_{p=2}^{t} \Lambda^{k_p l_1} a_{\mathrm{D}}^{i_2\dots i_r, j_1\dots j_s, k_2\dots\hat{k}_p\dots k_t l_2} + \sum_{p=2}^{t} \Lambda^{k_p l_2} a_{\mathrm{D}}^{i_2\dots i_r, j_1\dots j_s, k_2\dots\hat{k}_p\dots k_t l_1} = 0$$

Ceci montre que a_{D} vérifie les relations (1) pour (r', s', t') égaux à $(r-1, s, t-1)$. Par symétrie, en effectuant le produit des relations de départ par $F_{i_1 j_1}$ et $F_{j_1 k_1}$, on a la même propriété pour a_{B} et a_{C}.

Des relations (1) on tire :

après multiplication par $F_{i_1 l_1}$:

$$(a)\quad (2n+r)a^{i_1\dots i_r, j_1\dots j_s, k_1\dots k_t} + \sum_{p=1}^{s} a^{j_p i_2\dots i_r, j_1\dots\hat{j}_p\dots j_s i_1, k_1\dots k_t}$$
$$+ \sum_{p=1}^{t} a^{k_p i_2\dots i_r, j_1\dots j_s, k_1\dots\hat{k}_p\dots k_t i_1} + \sum_{p=1}^{s} \Lambda^{j_p i_1} a_{\mathrm{B}}^{i_2\dots i_r, j_1\dots\hat{j}_p\dots j_s, k_1\dots k_t}$$
$$+ \sum_{p=1}^{t} \Lambda^{k_p i_1} a_{\mathrm{D}}^{i_2\dots i_r, j_1\dots j_s, k_1\dots\hat{k}_p\dots k_t} = 0$$

après multiplication par $F_{j_1 l_1}$:

$$(b)\quad (2n+s)a^{i_1\dots i_r, j_1\dots j_s, k_1\dots kt} + \sum_{p=1}^{r} a^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_r j_1, j_2\dots j_s i_p, k_1\dots k_t}$$
$$+ \sum_{p=1}^{t} a^{i_1\dots i_r, k_p j_2\dots j_s, k_1\dots\hat{k}_p\dots k_t j_1} - \sum_{p=1}^{r} \Lambda^{i_p j_1} a_{\mathrm{B}}^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_r, j_2\dots j_s, k_1\dots k_t}$$
$$+ \sum_{p=1}^{t} \Lambda^{k_p j_1} a_{\mathrm{C}}^{i_1\dots i_r, j_2\dots j_s, k_1\dots\hat{k}_p\dots k_t} = 0$$

après multiplication par $F_{k_1 l_1}$:

$$(c) \quad (2n+t)a^{i_1\dots i_r, j_1\dots j_s, k_1\dots k_t} + \sum_{p=1}^{r} a^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_r k_1, j_1\dots j_s, i_p k_2\dots k_t}$$
$$+ \sum_{p=1}^{s} a^{i_1\dots i_r, j_1\dots\hat{j}_p\dots j_s k_1, j_p k_2\dots k_t} - \sum_{p=1}^{r} \Lambda^{i_p k_1} a_{\mathrm{D}}^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_r, j_1\dots j_s, k_2\dots k_t}$$
$$- \sum_{p=1}^{s} \Lambda^{j_p k_1} a_{\mathrm{C}}^{i_1\dots i_r, j_1\dots\hat{j}_p\dots j_s, k_2\dots k_t} = 0$$

Pour des raisons de symétrie en les indices i, j et k, on tire de ces trois relations :

$$(d) \quad (r(2n+r) - s(2n+s) + t(2n+t))a^{i_1\dots i_r, j_1\dots j_s, k_1\dots k_t}$$
$$+ 2\sum_{p=1}^{r}\sum_{q=1}^{t} a^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_r k_q, j_1\dots j_s, i_p k_1\dots\hat{k}_q\dots k_t}$$
$$+ 2\sum_{p=1}^{r}\sum_{q=1}^{t} \Lambda^{k_q i_p} a_{\mathrm{D}}^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_r, j_1\dots j_s, k_1\dots\hat{k}_q\dots k_t} = 0$$

En faisant le produit de (b) par $F_{j_1 k_1}$ il vient :

$$(e) \quad (s-t)a_{\mathrm{C}}^{i_1\dots i_r, j_2\dots j_s, k_2\dots k_t} + \sum_{p=1}^{r} a_{\mathrm{D}}^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_r, i_p j_2\dots j_s, k_2\dots k_t}$$
$$+ \sum_{p=1}^{r} a_{\mathrm{B}}^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_r, j_2\dots j_s, i_p k_2\dots k_t} = 0$$

(a) peut également s'écrire :

$$(f) \quad (2n+r)a^{k_1 i_2\dots i_r, j_1\dots j_s, i_1 k_2\dots k_t} + \sum_{p=1}^{s} a^{j_p i_2\dots i_r, k_1 j_1\dots\hat{j}_p\dots j_s, k_2\dots k_t i_1}$$
$$+ a^{i_1\dots i_r, j_1\dots j_s, k_1\dots k_t} + \sum_{p=2}^{t} a^{k_p i_2\dots i_r, j_1\dots j_s, i_1 k_1\dots\hat{k}_p\dots k_t}$$
$$+ \sum_{p=1}^{s} \Lambda^{j_p k_1} a_{\mathrm{B}}^{i_2\dots i_r, j_1\dots\hat{j}_p\dots j_s, i_1 k_2\dots k_t} + \Lambda^{i_1 k_1} a_{\mathrm{D}}^{i_2\dots i_r, j_1\dots j_s, k_2\dots k_t}$$
$$+ \sum_{p=2}^{t} \Lambda^{k_p k_1} a_{\mathrm{D}}^{i_2\dots i_r, j_1\dots j_s, i_1 k_2\dots\hat{k}_p\dots k_t} = 0$$

Pareillement (c) peut s'écrire :

$$
\begin{aligned}
(g)\quad (2n + t)a^{i_1\dots i_r,k_1 j_2\dots j_s,j_1 k_2\dots k_t} &+ \sum_{p=1}^{r} a^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_r j_1,k_1 j_2\dots j_s,i_p k_2\dots k_t} \\
&+ a^{i_1\dots i_r,j_1\dots j_s,k_1\dots k_t} + \sum_{p=2}^{s} a^{i_1\dots i_r,j_1\dots\hat{j}_p\dots j_s k_1,j_p k_2\dots k_t} \\
&- \sum_{p=1}^{r} \Lambda^{i_p j_1} a_{\mathrm{D}}^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_r,k_1 j_2\dots j_s,k_2\dots k_t} - \Lambda^{k_1 j_1} a_{\mathrm{C}}^{i_1\dots i_r,j_2\dots j_s,k_2\dots k_t} \\
&- \sum_{p=2}^{s} \Lambda^{j_p j_1} a_{\mathrm{C}}^{i_1\dots i_r,k_1 j_2\dots\hat{j}_p\dots j_s,k_2\dots k_t} = 0
\end{aligned}
$$

De (g) on tire une expression de $\sum_{p=1}^{s} a^{i_1\dots i_r,j_1\dots\hat{j}_p\dots j_s k_1,j_p k_2\dots k_t}$ faisant intervenir un terme en $\sum_{p=1}^{r}\sum_{q=1}^{s} a^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_r j_q,k_1 j_1\dots\hat{j}_q\dots j_s,i_p k_2\dots k_t}$ dont on tire une expression à partir de (f). En introduisant ces résultats dans (c) il vient :

$$
\begin{aligned}
&\left(2n + t - \frac{s}{2n+t+s-1} + \frac{r}{2n+t+s-1}\right) a^{i_1\dots i_r,j_1\dots j_s,k_1\dots k_t} \\
&\quad + \left(1 + \frac{2n+r}{2n+t+s-1}\right) \sum_{p=1}^{r} a^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_r k_1,j_1\dots j_s,i_p k_2\dots k_t} \\
&\quad + \frac{1}{2n+t+s-1} \sum_{q=1}^{r}\sum_{p=2}^{t} a^{k_p i_1\dots\hat{i}_q\dots i_r,j_1\dots j_s,i_q k_1\dots\hat{k}_p\dots k_t} \\
&\quad - \left(1 - \frac{1}{2n+t+s-1}\right) \sum_{p=1}^{r} \Lambda^{i_p k_1} a_{\mathrm{D}}^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_r,j_1\dots j_s,k_2\dots k_t} \\
&\quad - \left(1 + \frac{1}{2n+t+s-1}\right) \sum_{p=1}^{s} \Lambda^{j_p k_1} a_{\mathrm{C}}^{i_1\dots i_r,j_1\dots\hat{j}_p\dots j_s,k_2\dots k_t} \\
&\quad + \frac{1}{2n+t+s-1} \sum_{p=1}^{r}\sum_{q=1}^{s} \Lambda^{i_p j_q} a_{\mathrm{D}}^{i_1\dots\hat{i}_p\dots ir,k_1 j_1\dots\hat{j}_q\dots j_s,k_2\dots k_t} \\
&\quad + \frac{1}{2n+t+s-1} \sum_{q=1}^{s}\sum_{p=1}^{r} \Lambda^{j_q k_1} a_{\mathrm{B}}^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_r,j_1\dots\hat{j}_q\dots j_s,i_p k_2\dots k_t} \\
&\quad + \frac{1}{2n+t+s-1} \sum_{q=2}^{t}\sum_{p=1}^{r} \Lambda^{k_q k_1} a_{\mathrm{D}}^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_r,j_1\dots j_s,i_p k_2\dots\hat{k}_q\dots k_t} = 0
\end{aligned}
$$

Grâce à la relation (e) on remplace a_{B} en fonction de a_{C} et a_{D}. Il vient :

$$
\begin{aligned}
(h)\quad & \left(2n+t+\frac{r-s}{2n+t+s-1}\right)a^{i_1\ldots i_r,j_1\ldots j_s,k_1\ldots k_t} \\
& + \left(1+\frac{2n+r}{2n+t+s-1}\right)\sum_{p=1}^{r} a^{i_1\ldots\hat{i}_p\ldots i_r k_1,j_1\ldots j_s,i_p k_2\ldots k_t} \\
& + \frac{1}{2n+t+s-1}\sum_{q=1}^{r}\sum_{p=2}^{t} a^{k_p i_1\ldots\hat{i}_q\ldots i_r,j_1\ldots j_s,i_q k_1\ldots\hat{k}_p\ldots k_t} \\
& - \left(1-\frac{1}{2n+t+s-1}\right)\sum_{p=1}^{r} \Lambda^{i_p k_1} a_{\mathrm{D}}^{i_1\ldots\hat{i}_p\ldots i_r,j_1\ldots j_s,k_2\ldots k_t} \\
& - \left(1+\frac{1+s-t}{2n+t+s-1}\right)\sum_{p=1}^{s} \Lambda^{j_p k_1} a_{\mathrm{C}}^{i_1\ldots i_r,j_1\ldots\hat{j}_p\ldots j_s,k_2\ldots k_t} \\
& - \frac{1}{2n+t+s-1}\sum_{q=1}^{s}\sum_{p=1}^{r} \Lambda^{j_q k_1} a_{\mathrm{D}}^{i_1\ldots\hat{i}_p\ldots i_r,i_p j_1\ldots\hat{j}_q\ldots j_s,k_2\ldots k_t} \\
& + \frac{1}{2n+s+t-1}\sum_{p=1}^{r}\sum_{q=1}^{s} \Lambda^{i_p j_q} a_{\mathrm{D}}^{i_1\ldots\hat{i}_p\ldots i_r,k_1 j_1\ldots\hat{j}_q\ldots j_s,k_2\ldots k_t} \\
& + \frac{1}{2n+t+s-1}\sum_{q=2}^{t}\sum_{p=1}^{r} \Lambda^{k_q k_1} a_{\mathrm{D}}^{i_1\ldots\hat{i}_p\ldots i_r,j_1\ldots j_s,i_p k_2\ldots\hat{k}_q\ldots k_t} = 0
\end{aligned}
$$

De la relation (1) sur les a_{D} on tire :

$$
\begin{aligned}
& \sum_{q=1}^{t}\sum_{m=1}^{s}\sum_{p=1}^{r} \Lambda^{j_m i_p} a_{\mathrm{D}}^{i_1\ldots\hat{i}_p\ldots i_r,j_1\ldots\hat{j}_m\ldots j_s k_q,k_1\ldots\hat{k}_q\ldots k_t} \\
& \qquad + \sum_{q=1}^{t}\sum_{p=1}^{r} \Lambda^{k_q i_p} a_{\mathrm{D}}^{i_1\ldots\hat{i}_p\ldots i_r,j_1\ldots j_s,k_1\ldots\hat{k}_q\ldots k_t}(t-r) \\
& \qquad + \sum_{q=1}^{t}\sum_{m=1}^{s}\sum_{p=1}^{r} \Lambda^{j_m k_q} a_{\mathrm{D}}^{i_1\ldots\hat{i}_p\ldots i_r,j_1\ldots\hat{j}_m\ldots j_s i_p,k_1\ldots\hat{k}_q\ldots k_t} = 0
\end{aligned}
$$

Grâce à cette dernière relation et à la relation (d), vu la symétrie en les indices k, (h) devient :

$$\Bigg[t\left(2n+t+\frac{r-s}{2n+t+s-1}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{2n+r+t-1}{2n+s+t-1}\right)(r(2n+r)-s(2n+s)+t(2n+t))\Bigg]a^{i_1\ldots i_r,j_1\ldots j_s,k_1\ldots k_t}$$
$$-\left(\frac{2n+2s}{2n+s+t-1}\right)\sum_{q=1}^{t}\sum_{p=1}^{s}\Lambda^{j_pk_q}a_{\mathrm{C}}^{i_1\ldots i_r,j_1\ldots\hat{j}_p\ldots j_s,k_1\ldots\hat{k}_q\ldots k_t}$$
$$-\left(1-\frac{1}{2n+t+s-1}-\frac{2n+r+t-1}{2n+s+t-1}-1+\frac{t-r}{2n+t+s-1}\right)$$
$$\sum_{q=1}^{t}\sum_{p=1}^{r}\Lambda^{i_pk_q}a_{\mathrm{D}}^{i_1\ldots\hat{i}_p\ldots i_r,j_1\ldots j_s,k_1\ldots\hat{k}_q\ldots k_t}=0$$

Si $r \neq s$, le coefficient de a est non nul et la proposition est démontrée. En effet

$$t\left(2n+t+\frac{r-s}{2n+t+s-1}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(2+\frac{r-s}{2n+t+s-1}\right)((r-s)2n+(r-s)(r+s)+t(2n+t))$$
$$=\frac{r-s}{2n+t+s-1}$$
$$\left(t-\frac{1}{2}(r(2n+r)-s(2n+s)+t(2n+t))-(2n+r+s)(2n+t+s-1)\right)$$
$$=\frac{-(r-s)}{2(2n+t+s-1)}((r+s+t)^2+6n(r+s+t)+8n^2-2(r+s+t)-4n)\neq 0$$

Si $r = s$, on reprend l'expression donnée en (h). Vu la symétrie en les indices k on a aussi :

$$(2n+t)a^{i_1\ldots i_r,j_1\ldots j_r,k_1\ldots k_t}+\left(1+\frac{2n+r}{2n+r+t-1}\right)\sum_{p=1}^{r}a^{i_1\ldots\hat{i}_p\ldots i_rk_2,j_1\ldots j_r,k_1k_3\ldots k_ti_p}$$
$$+\frac{1}{2n+r+t-1}\sum_{p=1}^{r}a^{i_1\ldots\hat{i}_p\ldots i_rk_1,j_1\ldots j_r,k_2\ldots k_ti_p}$$
$$+\frac{1}{2n+r+t-1}\sum_{p=1}^{r}\sum_{m=3}^{t}a^{i_1\ldots\hat{i}_p\ldots i_rk_m,j_1\ldots j_r,k_1\ldots\hat{k}_m\ldots k_ti_p}$$
$$=\text{fonction des } a_{\mathrm{C}} \text{ et des } a_{\mathrm{D}}$$

Donc

$$\sum_{p=1}^{r} a^{i_1\dots\hat{\imath}_p\dots i_r k_2, j_1\dots j_r, k_1 k_3\dots k_t i_p} = \sum_{p=1}^{r} a^{i_1\dots\hat{\imath}_p\dots i_r k_1, j_1\dots j_r, k_2\dots k_t i_p} + fct(a_C, a_D)$$

Dès lors (h) s'écrit :

$$(2n+t)a^{i_1\dots i_r, j_1\dots j_r, k_1\dots k_t} + 2\sum_{p=1}^{r} a^{i_1\dots\hat{\imath}_p\dots i_r k_1, j_1\dots j_r, k_2\dots k_t i_p} = fct(a_C, a_D)$$

De même

$$(2n+t)a^{k_1 i_2\dots i_r, j_1\dots j_r, i_1 k_2\dots k_t} + 2a^{i_1\dots i_r, j_1\dots j_r, k_1\dots k_t} + 2\sum_{p=2}^{r} a^{i_1\dots\hat{\imath}_p\dots i_r k_1, j_1\dots j_r, i_p k_2\dots k_t} = fct(a_C, a_D)$$

On en tire :

$$\left(2n+t-\frac{4r}{2n+t+r-1}\right)a^{i_1\dots i_r, j_1\dots j_r, k_1\dots k_t} = fct(a_C, a_D) \qquad \text{q. e. d.}$$

LEMME 3. — *Supposons avoir les relations :*

$$\sum_{p=1}^{r} \Lambda^{i_p l_2} a^{i_1\dots\hat{\imath}_p\dots i_r l_1, j_1\dots j_s} + \sum_{p=1}^{r} \Lambda^{i_p l_1} a^{i_1\dots\hat{\imath}_p\dots i_r l_2, j_1\dots j_s} + \sum_{p=1}^{s} \Lambda^{j_p l_2} a^{i_1\dots i_r, j_1\dots\hat{\jmath}_p\dots j_s l_1} + \sum_{p=1}^{s} \Lambda^{j_p l_1} a^{i_1\dots i_r, j_1\dots\hat{\jmath}_p\dots j_s l_2} = 0$$

Alors a est nul sauf si $r = s$. De plus, si $r = s$, on a

$$a^{i_1\dots i_r, j_1\dots j_r} = f\sigma_{1\dots r}^{\lambda_1\dots\lambda_r}\Lambda^{i_1 j_{\lambda_1}} \dots \Lambda^{i_r j_{\lambda_r}}$$

où f est une fonction sur W *et où* $\sigma_{1\dots r}^{\lambda_1\dots\lambda_r} = \left|\varepsilon_{1\dots r}^{\lambda_1\dots\lambda_r}\right|$.

Démonstration. — Multiplions les relations données par $F_{i_1 l_2}$. On a :

$$(2n+r)a^{i_1\dots i_r, j_1\dots j_s} + \sum_{p=1}^{s} a^{j_p i_2\dots i_r, j_1\dots\hat{\jmath}_p\dots j_s i_1} + \sum_{p=1}^{s} \Lambda^{j_p i_1} a_B^{i_2\dots i_r, j_1\dots\hat{\jmath}_p\dots j_s} = 0\,.$$

En multipliant encore par $F_{i_1 j_1}$, il vient $(2n+r-1-2n-s+1)a_B^{i_2\dots i_r, j_2\dots j_s} = 0$.

Ainsi, si $r \neq s$, $a_B = 0$ et $\left(2n+r-\frac{s}{2n+r+s-1}\right)a^{i_1\dots i_r, j_1\dots j_s} = 0$ donc $a = 0$.

Si $r = s$,

$$\left(2n + r - \frac{r}{2n + 2r - 1}\right) a^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_r} = \left(1 + \frac{1}{2n + 2r - 1}\right) \sum_{p=1}^{r} \Lambda^{i_1 j_p} a_{\mathrm{B}}^{i_2 \dots i_r, j_1 \dots \hat{j}_p \dots j_r}$$

En outre a_{B} vérifie des relations analogues à celle de a pour (r', s') égaux à $(r - 1, r - 1)$. Une récurrence s'amorce et on a la proposition du lemme 3.

q. e. d.

LEMME 4. — *Si on a les relations*

$$\sum_{p=1}^{s} \Lambda^{j_p l_2} a^{j_1 \dots \hat{j}_p \dots j_s l_1} + \sum_{p=1}^{s} \Lambda^{j_p l_1} a^{j_1 \dots \hat{j}_p \dots j_s l_2} = 0$$

Alors $a = 0$.

Démonstration. — On multiplie la relation par $\mathrm{F}_{j_1 l_1}$. Il vient $(2n + s) a^{j_2 \dots j_s l_2} = 0$, donc $a = 0$. q. e. d.

LEMME 5. — *Le symbole principal de* C *ne peut être d'ordre* $(r, s, 3)$ *avec* $r \geqslant s \geqslant 3$, $r \neq s + 1$ *et* $r \neq s + 3$.

Démonstration. — En appliquant le lemme 2 on exprime a d'ordre $(r, s, 3)$ en fonction de a_{D} d'ordre $(r - 1, s, 2)$ et de a_{C} d'ordre $(r, s - 1, 2)$.

Par récurrence on a :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & & \begin{matrix} a_{\mathrm{DDD}} \\ (r-3, s, 0) \end{matrix} \\
 & & \begin{matrix} a_{\mathrm{DD}} \\ (r-2, s, 1) \end{matrix} \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & \begin{matrix} a_{\mathrm{D}} \\ (r-1, s, 2) \end{matrix} \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \begin{matrix} a_{\mathrm{DDC}} \\ (r-2, s-1, 0) \end{matrix} \\
\begin{matrix} a \text{ d'ordre} \\ (r, s, 3) \end{matrix} \ \textit{en fonction de} \left\{ \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right. & & \begin{matrix} a_{\mathrm{DC}} \\ (r-1, s-1, 1) \end{matrix} \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & \begin{matrix} a_{\mathrm{C}} \\ (r, s-1, 2) \end{matrix} \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \begin{matrix} a_{\mathrm{DCC}} \\ (r-1, s-2, 0) \end{matrix} \\
 & & \begin{matrix} a_{\mathrm{CC}} \\ (r, s-2, 1) \end{matrix} \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & & \begin{matrix} a_{\mathrm{CCC}} \\ (r, s-3, 0) \end{matrix}
\end{tikzcd}$$

Dès lors pour que a soit non nul, il faut, en vertu du lemme 3, que soit

$$\begin{array}{lll} . \ r-3=s & \text{donc} & r=s+3 \\ . \ r-2=s-1 & \text{donc} & r=s+1 \\ \left.\begin{array}{l} . \ r-1=s-2 \\ . \ r=s-3 \end{array}\right\} & \multicolumn{2}{l}{\text{cas exclus puisqu'on suppose } r \geqslant s} \end{array}$$

q. e. d.

LEMME 6. — *On ne peut avoir un symbole principal d'ordre* $(s+3, s, 3)$ *avec* $s \geqslant 3$.

Démonstration. — En vertu des lemmes 2 et 3 et en procédant comme au lemme 5, on a :

$$a^{i_1 \dots i_{r+3}, j_1 \dots j_r, k_1 k_2 k_3} = f \Lambda^{\lambda_1 j_1} \dots \Lambda^{\lambda_r j_r} \Lambda^{\lambda_{r+1} k_1} \Lambda^{\lambda_{r+2} k_2} \Lambda^{\lambda_{r+3} k_3} \sigma^{i_1 \dots i_{r+3}}_{\lambda_1 \dots \lambda_{r+3}}$$

Pour des raisons d'antisymétrie, il faut que $s > 3$.

Étudions dans la relation de cocycle le terme d'ordre $(s+3, s-1, 3, 3)$.

Si $s > 4$, il vient des termes d'ordre $(s+3, s, 3)$ et $(s+3, s-1, 4)$ du cocycle C.

Explicitement on a :

$$\sum_{q=1}^{3} \sum_{p=1}^{s-1} \Big(\Lambda^{j_p l_q} a^{i_1 \dots i_{s+3}, j_1 \dots \hat{j}_p \dots j_{s-1} l_1 \dots \hat{l}_q \dots l_3, k_1 k_2 k_3} + \Lambda^{k_q j_p} a^{i_1 \dots i_{s+3}, j_1 \dots \hat{j}_p \dots j_{s-1} k_1 \dots \hat{k}_q \dots k_3, l_1 l_2 l_3} \Big) + \sum_{q=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \mathrm{C}^{\text{ste}} \Lambda^{k_p l_m} \tilde{a}^{\, i_1 \dots i_{s+3}, j_1 \dots j_{s-1}, k_1 \dots \hat{k}_p \dots k_3 l_1 \dots \hat{l}_m \dots l_3} = 0$$

Si $s = 4$, le 3[e] terme de cette relation est remplacé par

$$\Lambda^{l_p k_m} a^{i_1 \dots i_{s+3}, l_1 \dots \hat{l}_p \dots l_3 k_1 \dots \hat{k}_m \dots k_3, j_1 j_2 j_3} .$$

Dans tous les cas, considérons sur le domaine 0 d'une carte canonique

$$l_1 = l_2 = l_3 = p_1 , \quad k_1 = k_2 = k_3 = p_2 , \quad i_1 = i_2 = i_3 = q_2 ,$$
$$j_1 = q_1 , \quad i_4 = i_5 = q_1 , \quad i_r = p_1 \quad (r \geqslant 6), \quad j_s = q_1 \quad (s \geqslant 2)$$

(On utilise ici le fait que dim W > 2).

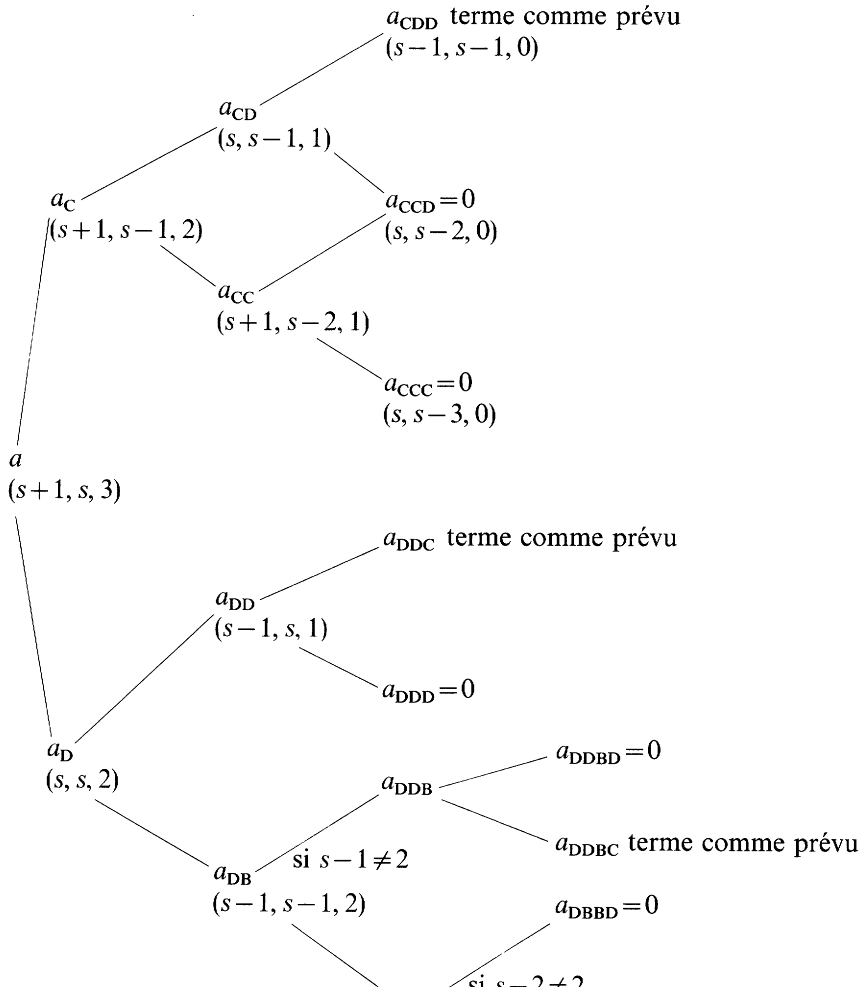
La relation écrite plus haut donne $f(x)|_0 = 0$ donc $a = 0$. q. e. d.

LEMME 7. — *Si* $r = s + 1$, *le symbole principal est donné par :*

$$a^{i_1 \dots i_{s+1}, j_1 \dots j_s, k_1 k_2 k_3} = f \sigma^{k_1 k_2 k_3}_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \sigma^{j_1 \dots j_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} \sigma^{i_1 \dots i_{s+1}}_{\lambda_1 \dots \lambda_{s+1}} \Lambda^{\lambda_1 \nu_1} \dots \Lambda^{\lambda_{s-1} \nu_{s-1}} \Lambda^{\lambda_s \mu_1} \Lambda^{\lambda_{s+1} \mu_2} \Lambda^{\nu_s \mu_3}$$

où f *est une fonction sur* W.

Démonstration. — Grâce aux lemmes précédents, le tenseur a d'ordre $(s + 1, s, 3)$ s'écrit en fonction de a_C et a_D. On a la construction suivante :



On est ainsi ramené à

$$a^{i_1\dots i_{s+1},j_1\dots j_s,k_1k_2k_3} = f\sigma^{k_1k_2k_3}_{\mu_1\mu_2\mu_3}\sigma^{j_1\dots j_s}_{\nu_1\dots\nu_s}\sigma^{i_1\dots i_{s+1}}_{\lambda_1\dots\lambda_{s+1}} [\Lambda^{\lambda_1\nu_1}\dots\Lambda^{\lambda_{s-1}\nu_{s-1}}\Lambda^{\lambda_s\mu_1}\Lambda^{\lambda_{s+1}\mu_2}\Lambda^{\nu_s\mu_3} + g\Lambda^{\lambda_1\nu_1}\dots\Lambda^{\lambda_{s-2}\nu_{s-2}}\Lambda^{\lambda_s\mu_1}a^{\lambda_s\lambda_{s+1},\nu_{s-1}\nu_s,\mu_2\mu_3}_{D\underbrace{BB\dots B}_{(s-2)\text{ fois}}}]$$

Sur $a_{DBB\dots B}$ qu'on notera ici pour simplifier B, on a toujours les relations du lemme 2.

En reprenant les relations sur les B_{D} on voit que :

$$\sum_{p=1}^{2} \Lambda^{k_2 k_1} \mathrm{B}_{\mathrm{D}}^{i_1 \hat{i}_p i_2, j_1 j_2, i_p} + \sum_{p=1}^{2} \Lambda^{k_2 i_p} \mathrm{B}_{\mathrm{D}}^{i_1 \hat{i}_p i_2, j_1 j_2, k_1}$$
$$+ \sum_{p=1}^{2} \sum_{q=1}^{2} \left(\Lambda^{j_p k_1} \mathrm{B}_{\mathrm{D}}^{i_1 \hat{i}_q i_2, j_1 \hat{j}_p j_2 i_q, k_2} + \Lambda^{j_p i_q} \mathrm{B}_{\mathrm{D}}^{i_1 \hat{i}_q i_2, j_1 \hat{j}_p j_2 k_1, k_2} \right)$$
$$+ \sum_{p=1}^{2} \Lambda^{i_p k_1} \mathrm{B}_{\mathrm{D}}^{i_1 \hat{i}_p i_2, j_1 j_2, k_2} = 0$$

En reprenant la relation (h) du lemme 2 et en utilisant cette relation sur les B_{D} on a :

$$(2n+2)\mathrm{B}^{i_1 i_2, j_1 j_2, k_1 k_2} + \left(2 - \frac{1}{2n+3}\right) [\mathrm{B}^{i_1 k_1, j_1 j_2, i_2 k_2} + \mathrm{B}^{i_2 k_1, j_1 j_2, i_1 k_2}]$$
$$+ \frac{1}{2n+3} (\mathrm{B}^{k_2 i_1, j_1 j_2, k_1 i_2} + \mathrm{B}^{k_2 i_2, j_1 j_2, k_1 i_1}) - \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right) \sum_{p=1}^{2} \Lambda^{j_p k_1} \mathrm{B}_{\mathrm{C}}^{i_1 i_2, j_1 \hat{j}_p j_2, k_2}$$
$$+ \frac{2}{2n+3} \sum_{p=1}^{2} \Lambda^{k_2 k_1} \mathrm{B}_{\mathrm{D}}^{i_1 \hat{i}_p i_2, j_1 j_2, i_p} + \frac{1}{2n+3} \sum_{p=1}^{2} \Lambda^{k_2 i_p} \mathrm{B}_{\mathrm{D}}^{i_1 \hat{i}_p i_2, j_1 j_2, k_1}$$
$$- \left(1 - \frac{2}{2n+3}\right) \sum_{p=1}^{2} \Lambda^{i_p k_1} \mathrm{B}_{\mathrm{D}}^{i_1 \hat{i}_p i_2, j_1 j_2, k_2} = 0$$

Dès lors :

$$(2n+2)\mathrm{B}^{i_1 i_2, j_1 j_2, k_1 k_2} + 2\mathrm{B}^{i_1 k_1, j_1 j_2, i_2 k_2} + 2\mathrm{B}^{i_2 k_1, j_1 j_2, i_1 k_2}$$
$$+ \left(1 + \frac{\frac{1}{2n+3}}{2 - \frac{2}{2n+3}}\right) \left(\frac{2}{2n+3} \sum_{p=1}^{2} \Lambda^{k_2 k_1} \mathrm{B}_{\mathrm{D}}^{i_1 \hat{i}_p i_2, j_1 j_2, i_p} + \frac{1}{2n+3} \sum_{p=1}^{2} \Lambda^{k_2 i_p} \mathrm{B}_{\mathrm{D}}^{i_1 \hat{i}_p i_2, j_1 j_2, k_1} \right.$$
$$\left. - \left(1 - \frac{2}{2n+3}\right) \sum_{p=1}^{2} \Lambda^{i_p k_1} \mathrm{B}_{\mathrm{D}}^{i_1 \hat{i}_p i_2, j_1 j_2, k_2} - \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right) \sum_{p=1}^{2} \Lambda^{j_p k_1} \mathrm{B}_{\mathrm{C}}^{i_1 i_2, j_1 \hat{j}_p j_2, k_2} \right)$$
$$- \frac{\frac{1}{2n+3}}{2 - \frac{2}{2n+3}} \left(\frac{2}{2n+3} \sum_{p=1}^{2} \Lambda^{k_1 k_2} \mathrm{B}_{\mathrm{D}}^{i_1 \hat{i}_p i_2, j_1 j_2, i_p} + \frac{1}{2n+3} \sum_{p=1}^{2} \Lambda^{k_1 i_p} \mathrm{B}_{\mathrm{D}}^{i_1 \hat{i}_p i_2, j_1 j_2, k_2} \right.$$
$$\left. - \left(1 - \frac{2}{2n+3}\right) \sum_{p=1}^{2} \Lambda^{i_p k_2} \mathrm{B}_{\mathrm{D}}^{i_1 \hat{i}_p i_2, j_1 j_2, k_1} - \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right) \sum_{p=1}^{2} \Lambda^{j_p k_2} \mathrm{B}_{\mathrm{C}}^{i_1 i_2, j_1 j_p j_2, k_1} \right) = 0$$

Ainsi on a B en fonction de

. $\Lambda^{k_m i_p} \mathrm{B}_{\mathrm{D}}^{i_1 \hat{i}_p i_2, j_1 j_2, k_1 \hat{k}_m k_2}$ qui donne un terme comme annoncé
. $\Lambda^{j_p k_m} \mathrm{B}_{\mathrm{C}}^{i_1 i_2, j_1 \hat{j}_p j_2, k_1 \hat{k}_m k_2}$ qui donne un terme comme annoncé
. $\Lambda^{k_m i_p} \mathrm{B}_{\mathrm{D}}^{k_1 \hat{k}_m k_2, j_1 j_2, i_1 \hat{i}_p i_2}$ qui donne un terme comme annoncé
. $\Lambda^{j_p i_1} \mathrm{B}_{\mathrm{C}}^{k_1 i_2, j_1 \hat{j}_p j_2, k_2}$ qui donne un terme comme annoncé

car les termes contenant $\Lambda^{k_1 k_2}$ disparaissent par symétrie en les indices k.
q. e. d.

LEMME 8. — *On ne peut avoir un symbole principal d'ordre* $(s + 1, s, 3)$ *avec* s *impair.*

Démonstration. — Considérons dans la relation de cocycle les termes d'ordre $(s, s, 3, 3)$ coefficients de $\partial_{i_1 \dots i_s} u_0 \partial_{j_1 j_2 j_3} u_1 \partial_{k_1 \dots k_s} u_2 \partial_{l_1 l_2 l_3} u_3$.

On a, pour $s > 3$:

$$\sum_{p=1}^{s} \sum_{m=1}^{3} (\Lambda^{i_p j_m} a^{i_1 \dots \hat{i}_p \dots i_s j_1 \hat{j}_m j_3, k_1 \dots k_s, l_1 l_2 l_3} + \Lambda^{k_p l_m} a^{k_1 \dots \hat{k}_p \dots k_s l_1 \hat{l}_m l_3, i_1 \dots i_s, j_1 j_2 j_3}$$
$$+ \Lambda^{l_m i_p} a^{i_1 \dots \hat{i}_p \dots i_s l_1 \hat{l}_m l_3; k_1 \dots k_s, j_1 j_2 j_3} + \Lambda^{j_m k_p} a^{j_1 \hat{j}_m j_3 k_1 \dots \hat{k}_p \dots k_s, i_1 \dots i_s, l_1 l_2 l_3})$$
$$+ \sum_{m=1}^{3} \sum_{q=1}^{3} \mathrm{C} \Lambda^{j_m l_q} \tilde{a}^{k_1 \dots k_s, i_1 \dots i_s, j_1 \hat{j}_m j_3 l_1 \hat{l}_q l_3} = 0$$

si $s = 3$, le dernier terme est remplacé par

$$\sum_{p=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} (\Lambda^{k_p i_m} a^{i_1 \hat{i}_m i_3 k_1 \hat{k}_p k_3, j_1 j_2 j_3, l_1 l_2 l_3} - \Lambda^{j_m l_p} a^{j_1 \hat{j}_m j_3 l_1 \hat{l}_p l_3, i_1 i_2 i_3, k_1 k_2 k_3})$$

Grâce au lemme 7, on a une expression de a.
Supposons, dans une carte canonique, que

$$j_1 = j_2 = j_3 = p_1 , \quad l_1 = l_2 = l_3 = p_2 , \quad i_1 = q_1 , \quad k_1 = q_2 ,$$
$$k_2 = k_3 = q_1 , \quad i_r = q_2 \quad (r \geqslant 2) , \quad k_r = p_2 \quad (r > 3)$$

Alors $\Lambda^{j_m l_q} = 0$. On en déduit que $f = 0$ donc $a = 0$. q. e. d.

LEMME 9. — *Si le symbole principal est d'ordre* $(2k + 1, 2k, 3)$ *avec* $k \geqslant 2$, *il coïncide avec le symbole principal d'un cobord.*

Démonstration. — Considérons la 2-cochaîne

$$\mathrm{B}(u, v) = b^{i_1 \dots i_{s+1}, j_1 \dots j_{s+1}} \nabla_{i_1 \dots i_{s+1}} u \nabla_{j_1 \dots j_{s+1}} v$$

où $b^{i_1 \dots i_{s+1}, j_1 \dots j_{s+1}} = f \sigma^{j_1 \dots j_{s+1}}_{\lambda_1 \dots \lambda_{s+1}} \Lambda^{i_1 \lambda_1} \dots \Lambda^{i_{s+1} \lambda_{s+1}}$.
Les termes d'ordre $(s + 1, s + 1, 2)$ du cobord de B sont nuls.

En effet on a :

$$\sum_{p=1}^{s+1}\sum_{n=1}^{2}(\Lambda^{k_n i_p} b^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_{s+1}k_1\hat{k}_n k_2, j_1\dots j_{s+1}} + \Lambda^{j_p k_n} b^{j_1\dots\hat{j}_p\dots j_{s+1}k_1\hat{k}_n k_2, i_1\dots i_{s+1}})$$

$$\cong \sigma^{i_1\dots i_{s+1}}_{\lambda_1\dots\lambda_{s+1}}\sigma^{k_1k_2}_{\mu_1\mu_2}\sigma^{j_1\dots j_{s+1}}_{\nu_1\dots\nu_{s+1}}\Lambda^{\lambda_1\nu_1}\dots\Lambda^{\lambda_s\nu_s}\Lambda^{\mu_2\nu_{s+1}}\Lambda^{\mu_1\lambda_{s+1}}(f-f)=0\,.$$

Le symbole principal de δB est donc d'ordre $(s+1, s, 3)$.

Il est égal, à un facteur constant multiplicatif près, à :

$$\sum_{n=1}^{3}\sum_{p=1}^{s}\Lambda^{j_p k_n} b^{k_1\hat{k}_n k_3 j_1\dots\hat{j}_p\dots j_s, i_1\dots i_{s+1}}$$

Ainsi $\alpha\delta$B, où $\alpha\in\mathbb{R}$, a un symbole principal qui coïncide avec celui de C.

q. e. d.

En reprenant les lemmes 2 à 9, on a la proposition suivante :

Si le symbole principal d'un 3-cocycle C *est d'ordre* $(r, s, 3)$ *avec* $r \geqslant s \geqslant 3$, *alors nécessairement* $r = 2k+1$, $s = 2k$ *et ce symbole coïncide avec celui d'un cobord.*

. Cas $3 - t = 2$.

Lemme 10. — *Si le symbole principal de* C *est d'ordre* $(r, 2, 2)$ *avec* $r \geqslant 2$, *alors il coïncide avec celui d'un cobord.*

Démonstration. — Considérons dans la relation de cocycle les termes d'ordre $(r, 2, 2, 2)$ coefficients de $\partial_{i_1\dots i_r}u_0\partial_{j_1j_2}u_1\partial_{k_1k_2}u_2\partial_{l_1l_2}u_3$. On a

$$\sum_{n=1}^{2}\sum_{p=1}^{r}(\Lambda^{i_p j_n}a^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_r j_1\hat{j}_n j_2, k_1k_2, l_1l_2}$$

$$+\Lambda^{i_p k_n}a^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_r k_1\hat{k}_n k_2, l_1l_2, j_1j_2} + \Lambda^{i_p l_n}a^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_r l_1\hat{l}_n l_2, j_1j_2, k_1k_2})$$

$$+\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}(\Lambda^{j_n l_m}a^{i_1\dots i_r, \hat{j}_n\hat{l}_m, k_1k_2} + \Lambda^{l_m k_n}a^{i_1\dots i_r, \hat{l}_m\hat{k}_n, j_1j_2} + \Lambda^{k_n j_m}a^{i_1\dots i_r, \hat{j}_m\hat{k}_n, l_1l_2}) = 0$$

En multipliant par $F_{i_1l_1}$ il vient :

$$(2n+r)a^{i_2\dots i_r l_2, j_1j_2, k_1k_2}$$

$$+\sum_{p=1}^{2}\Big(\sum_{q=2}^{r}(\Lambda^{i_q j_p}a_D^{i_2\dots\hat{i}_q\dots i_r j_1\hat{j}_p j_2, k_1k_2, l_2} - \Lambda^{i_q k_p}a_D^{i_2\dots\hat{i}_q\dots i_r k_1\hat{k}_p k_2, j_1j_2, l_2})$$

$$-\Lambda^{j_p l_2}a_D^{i_2\dots i_r, k_1k_2, j_1\hat{j}_p j_2} - \Lambda^{l_2 k_p}a_D^{i_2\dots i_r, j_1j_2, k_1\hat{k}_p k_2}\Big)$$

$$+\sum_{p=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}\Lambda^{k_p j_m}a_D^{i_2\dots i_r, j_1\hat{j}_m j_2 k_1\hat{k}_p k_2, l_2} = 0$$

Introduisons le tenseur

$$b^{i_1\dots i_r, j_1j_2} = \frac{-1}{2n+r}\sum_{p=1}^{r}a_D^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_r, j_1j_2, i_p}$$

Alors a s'écrit :

$$r.a^{i_1\dots i_r,j_1j_2,k_1k_2} = \sum_{p=1}^{r}\sum_{n=1}^{2}(\Lambda^{i_pj_n}b^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_rj_1\hat{j}_nj_2,k_1k_2} + \Lambda^{k_ni_p}b^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_rk_1\hat{k}_nk_2,j_1j_2})$$
$$+ \sum_{p=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}\Lambda^{k_pj_m}b^{i_1\dots i_r,j_1\hat{j}_mj_2k_1\hat{k}_pk_2}$$

Si l'on considère la 2-cochaîne :

$$B(u, v) = b^{i_1\dots i_r,j_1j_2}(\nabla_{i_1\dots i_r}u\nabla_{j_1j_2}v - \nabla_{j_1j_2}u\nabla_{i_1\dots i_r}v)$$

le symbole principal de son cobord est donné par :

$$\underset{uvw}{\mathfrak{S}}\Lambda^{kl}b^{i_1\dots i_r,j_1j_2}(r\partial_{ki_1\dots i_{r-1}}u\partial_{li_r}v\partial_{j_1j_2}w + r\partial_{ki_1}u\partial_{li_2\dots i_r}v\partial_{j_1j_2}w$$
$$- 2\partial_{i_1\dots i_r}u\partial_{j_1k}v\partial_{j_2l}w)$$

Ce symbole principal coïncide, à un facteur multiplicatif constant près, avec celui de C. q. e. d.

LEMME 11. — *Si le symbole principal de* C *est d'ordre* $(r, s, 2)$ *avec* $r \geqslant s > 2$ *alors il coïncide avec celui d'un cobord.*

Démonstration. — Considérons dans la relation de cocycle les termes d'ordre $(r, s, 2, 2)$ coefficients de $\partial_{i_1\dots i_r}u_0\partial_{j_1\dots j_s}u_1\partial_{k_1k_2}u_2\partial_{l_1l_2}u_3$.

On a :

$$\sum_{n=1}^{2}\sum_{p=1}^{r}(\Lambda^{k_ni_p}a^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_rk_1\hat{k}_nk_2,j_1\dots j_s,l_1l_2} + \Lambda^{i_pl_n}a^{i_1\dots\hat{i}_p\dots i_rl_1\hat{l}_nl_2,j_1\dots j_s,k_1k_2})$$
$$+ \sum_{n=1}^{2}\sum_{p=1}^{s}(\Lambda^{k_nj_p}a^{i_1\dots i_r,j_1\dots\hat{j}_p\dots j_sk_1\hat{k}_nk_2,l_1l_2} + \Lambda^{j_pl_n}a^{i_1\dots i_r,j_1\dots\hat{j}_p\dots j_sl_1\hat{l}_nl_2,k_1k_2})$$
$$+ \sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}\Lambda^{k_nl_m}a^{i_1\dots i_r,j_1\dots j_s,k_1\hat{k}_nk_2l_1\hat{l}_ml_2} = 0$$

En multipliant par $F_{i_1l_1}$ il vient

$$(2n + r)a^{i_2\dots i_rl_2,j_1\dots j_s,k_1k_2} + \sum_{p=1}^{s}a^{j_pi_2\dots i_r,l_2j_1\dots\hat{j}_p\dots j_s,k_1k_2}$$
$$+ \sum_{p=2}^{r}\Lambda^{k_1i_p}a_{\mathrm{D}}^{i_2\dots\hat{i}_p\dots i_rk_2,j_1\dots j_s,l_2} + \sum_{p=2}^{r}\Lambda^{k_2i_p}a_{\mathrm{D}}^{i_2\dots\hat{i}_p\dots i_rk_1,j_1\dots j_s,l_2}$$
$$+ \sum_{p=1}^{s}\Lambda^{k_1j_p}a_{\mathrm{D}}^{i_2\dots i_r,j_1\dots\hat{j}_p\dots j_sk_2,l_2} + \sum_{p=1}^{s}\Lambda^{k_2j_p}a_{\mathrm{D}}^{i_2\dots i_r,j_1\dots\hat{j}_p\dots j_sk_1,l_2}$$
$$+ \sum_{p=1}^{s}\Lambda^{j_pl_2}a_{\mathrm{B}}^{i_2\dots i_r,j_1\dots\hat{j}_p\dots j_s,k_1k_2} + \Lambda^{k_1l_2}a_{\mathrm{D}}^{i_2\dots i_r,j_1\dots j_s,k_2} + \Lambda^{k_2l_2}a_{\mathrm{D}}^{i_2\dots i_r,j_1\dots j_s,k_1} = 0$$

On en déduit :

$$\left(2n + r - \frac{s}{2n+r+s-1}\right) a^{i_1 \ldots i_r, j_1 \ldots j_s, k_1 k_2}$$
$$+ \left(1 + \frac{1}{2n+r+s-1}\right) \sum_{p=1}^{s} \Lambda^{j_p i_1} a_{\mathrm{B}}^{i_2 \ldots i_r, j_1 \ldots \hat{j}_p \ldots j_s, k_1 k_2}$$
$$+ \sum_{n=1}^{2} \sum_{p=2}^{r} \Lambda^{k_n i_p} a_{\mathrm{D}}^{i_2 \ldots \hat{i}_p \ldots i_r k_1 \hat{k}_n k_2, j_1 \ldots j_s, i_1}$$
$$+ \sum_{n=1}^{2} \sum_{p=1}^{s} \Lambda^{k_n j_p} a_{\mathrm{D}}^{i_2 \ldots i_r, j_1 \ldots \hat{j}_p \ldots j_s k_1 \hat{k}_n k_2, i_1}$$
$$+ \sum_{n=1}^{2} \Lambda^{k_n i_1} a_{\mathrm{D}}^{i_2 \ldots i_r, j_1 \ldots j_s, k_1 \hat{k}_n k_2}$$
$$- \frac{1}{2n+r+s-1} \left(\sum_{n=1}^{2} \sum_{p=2}^{r} \sum_{q=1}^{s} \Lambda^{k_n i_p} a_{\mathrm{D}}^{i_2 \ldots \hat{i}_p \ldots i_r k_1 \hat{k}_n k_2, j_1 \ldots \hat{j}_q \ldots j_s i_1, j_q} \right.$$
$$+ \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{s} \sum_{p=1}^{s} \sum_{n=1}^{2} \Lambda^{k_n j_p} a_{\mathrm{D}}^{i_2 \ldots i_r, i_1 j_1 \ldots \hat{j}_p \ldots \hat{j}_q \ldots j_s k_1 \hat{k}_n k_2, j_q}$$
$$+ \sum_{p=1}^{s} \sum_{n=1}^{2} \Lambda^{k_n i_1} a_{\mathrm{D}}^{i_2 \ldots i_r, j_1 \ldots \hat{j}_p \ldots j_s k_1 \hat{k}_n k_2, j_p}$$
$$\left. + \sum_{p=1}^{s} \sum_{n=1}^{2} \Lambda^{k_n j_p} a_{\mathrm{D}}^{i_2 \ldots i_r, i_1 j_1 \ldots \hat{j}_p \ldots j_s, k_1 \hat{k}_n k_2} \right) = 0$$

Considérons la 2-cochaîne $\mathrm{K} = b^{i_1 \ldots i_r, j_1 \ldots j_s}(\nabla_{i_1 \ldots i_r} u \nabla_{j_1 \ldots j_s} v - \nabla_{i_1 \ldots i_r} v \nabla_{j_1 \ldots j_s} u)$ avec

$$b^{i_1 \ldots i_r, j_1 \ldots j_s} = \sum_{p=1}^{r} a_{\mathrm{D}}^{i_1 \ldots \hat{i}_p \ldots i_r, j_1 \ldots j_s, i_p} - \frac{1}{2n+r+s-1} \sum_{p=1}^{r} \sum_{q=1}^{s} a_{\mathrm{D}}^{i_1 \ldots \hat{i}_p \ldots i_r, i_p j_1 \ldots \hat{j}_q \ldots j_s, j_q}$$

Le symbole principal du cobord $\delta\mathrm{K}$ est d'ordre $(r, s, 2)$ et l'on a

$$a^{i_1 \ldots i_r, j_1 \ldots j_s, k_1 k_2} = (\alpha \delta \mathrm{K})^{i_1 \ldots i_r, j_1 \ldots j_s, k_1 k_2} + \beta \sum_{p=1}^{r} \sum_{q=1}^{s} \Lambda^{i_p j_q} a_{\mathrm{B}}^{i_1 \ldots \hat{i}_p \ldots i_r, j_1 \ldots \hat{j}_q \ldots j_s, k_1 k_2}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si $r \neq s$, multiplions la relation de départ par $F_{i_1 l_1}$ puis par $F_{j_1 l_2}$; on a :

$$(r - s)a_{\mathrm{B}}^{i_2\ldots i_r,j_2\ldots j_s,k_1k_2} = \sum_{n=1}^{2}\sum_{p=2}^{r}\Lambda^{k_n i_p}a_{\mathrm{DC}}^{i_2\ldots\hat{\imath}_p\ldots i_r k_1\hat{k}_n k_2,j_2\ldots j_s} + \sum_{n=1}^{2}\sum_{p=2}^{s}\Lambda^{k_n j_p}a_{\mathrm{DC}}^{i_2\ldots i_r,j_2\ldots\hat{\jmath}_p\ldots j_s k_1\hat{k}_n k_2}$$

De manière générale considérons la 2-cochaîne

$$\tilde{\mathrm{K}}(u, v) = \sum_{p=1}^{r}\sum_{q=1}^{s}\Lambda^{i_p j_q}\mathrm{K}'^{i_1\ldots\hat{\imath}_p\ldots i_r,j_1\ldots\hat{\jmath}_q\ldots j_s}(\nabla_{i_1\ldots i_r}u\nabla_{j_1\ldots j_s}v - \nabla_{j_1\ldots j_s}u\nabla_{i_1\ldots i_r}v)$$

Le symbole principal de son cobord est donné par :

$$[\delta\tilde{\mathrm{K}}]^{i_1\ldots i_r,j_1\ldots j_s k_1k_2} = \alpha'\sum_{p=1}^{r}\sum_{q=1}^{s}\Lambda^{i_p j_q}(\tilde{\delta}\mathrm{K}')^{i_1\ldots\hat{\imath}_p\ldots i_r,j_1\ldots\hat{\jmath}_q\ldots j_s,k_1k_2}$$

où

$$\tilde{\delta}\mathrm{K}'^{i_2\ldots i_r,j_2\ldots j_s,k_1k_2} = \sum_{n=1}^{2}\sum_{p=2}^{r}\Lambda^{k_n i_p}\mathrm{K}'^{i_2\ldots\hat{\imath}_p\ldots i_r k_1\hat{k}_n k_2,j_2\ldots j_s} + \sum_{n=1}^{2}\sum_{p=2}^{s}\Lambda^{k_n j_p}\mathrm{K}'^{i_2\ldots i_r,j_2\ldots\hat{\jmath}_p\ldots j_s k_1\hat{k}_n k_2}$$

et où $\alpha' \in \mathbb{R}$.

En particulier si $\mathrm{K}'^{i_2\ldots i_r,j_2\ldots j_s} = a_{\mathrm{DC}}^{i_2\ldots i_r,j_2\ldots j_s}$ on a :

$$a^{i_1\ldots i_r,j_1\ldots j_s,k_1k_2} = (\alpha\delta\mathrm{K})^{i_1\ldots i_r,j_1\ldots j_s,k_1k_2} + (\tilde{\alpha}\delta\tilde{\mathrm{K}})^{i_1\ldots i_r,j_1\ldots j_s,k_1k_2}$$

où α et $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$.

Donc si $r \neq s$, le symbole principal de C coïncide avec celui d'un cobord. Si $r = s$, on vérifie que le tenseur a_{B} vérifie les mêmes relations que le tenseur a pour $(r', s', 2) = (r - 1, s - 1, 2)$. Il suffit en effet de faire le produit des relations de départ par $F_{i_1 j_1}$.

Ainsi

$$a_{\mathrm{B}}^{i_2\ldots i_r,j_2\ldots j_s,k_1k_2} = \tilde{\delta}\mathrm{A}'^{i_2\ldots i_r,j_2\ldots j_s,k_1k_2} + \sum_{p=2}^{r}\sum_{q=2}^{s}\Lambda^{i_p j_q}a_{\mathrm{BB}}^{i_2\ldots\hat{\imath}_p\ldots i_r,j_2\ldots\hat{\jmath}_q\ldots j_s,k_1k_2}$$

où

$$\mathrm{A}'^{i_2\ldots i_r,j_2\ldots j_s,k_1k_2} = \sum_{p=2}^{r}a_{\mathrm{BD}}^{i_2\ldots\hat{\imath}_p\ldots i_r,j_2\ldots j_s,i_p} - \frac{1}{2n + r + s - 3}\sum_{p=2}^{r}\sum_{q=2}^{s}a_{\mathrm{BD}}^{i_2\ldots\hat{\imath}_p\ldots i_r,i_p j_2\ldots\hat{\jmath}_q\ldots j_s,j_q}$$

En vertu du calcul fait pour le cas $r \neq s$, ceci montre que

$$a^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s, k_1 k_2} = (\alpha \delta \mathrm{K})^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s, k_1 k_2} + (\beta \delta \tilde{\mathrm{A}})^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s, k_1 k_2}$$
$$+ \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq m}}^{r} \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq n}}^{s} \sum_{m=1}^{r} \sum_{n=1}^{s} \Lambda^{i_m j_n} \Lambda^{i_p j_q} a_{\mathrm{BB}}^{i_1 \dots \hat{i}_p \dots \hat{i}_m \dots i_r, j_1 \dots \hat{j}_n \dots \hat{j}_q \dots j_s, k_1 k_2}$$

où α et $\beta \in \mathbb{R}$.

Par récurrence on arrive à

$$a^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s, k_1 k_2} = (\delta \mathrm{E})^{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s, k_1 k_2} + \gamma \sigma^{j_1 \dots j_r}_{\lambda_1 \dots \lambda_r} \Lambda^{i_1 \lambda_1} \dots \Lambda^{i_r \lambda_r} a^{k_1 k_2}_{\underbrace{\mathrm{BB} \dots \mathrm{B}}_{r\ \mathrm{fois}}}$$

D'autre part on a

$$\sum_{n=1}^{2} \sum_{m=1}^{2} \Lambda^{k_n l_m} a^{k_1 \hat{k}_m k_2 l_1 \hat{l}_m l_2}_{\underbrace{\mathrm{BB} \dots \mathrm{B}}_{r\ \mathrm{fois}}} = 0 \quad \text{donc} \quad a_{\underbrace{\mathrm{BB} \dots \mathrm{B}}_{r\ \mathrm{fois}}} = 0 .$$

Dès lors, le symbole principal de C coïncide avec celui d'un cobord.

q. e. d.

En reprenant les lemmes 10 et 11, on a la proposition suivante :

Si le symbole principal d'un 3-cocycle C *est d'ordre* $(r, s, 2)$ *avec* $r \geqslant s \geqslant 2$, *alors il coïncide avec le symbole principal d'un cobord.*

. Cas 4 — $t = 1$ et $t = 0$.

Supposons que le symbole principal soit d'ordre (r, s, t) avec $r \geqslant s \geqslant t$, et $t = 1$ (ou 0).

Par des raisonnements identiques à ceux effectués pour le calcul de $\mathrm{H}^2_{\mathrm{diff}}(\mathrm{N})$ on montre qu'un tel symbole ne peut être que d'ordre

- $(r, 2, 1(0))$ et dans ce cas il coïncide avec le symbole principal d'un cobord.
- (r, s, t) avec r, s et t tous $\leqslant 1$. Dans ce cas, on a affaire à un 3-cocycle 1-différentiable.
- $(3, 3, 1(0))$.

De plus, si le symbole principal est d'ordre (3, 3, 1 (resp. 0)) on a nécessairement :

$$a^{i_1 i_2 i_3, j_1 j_2 j_3, (l)} = \alpha \sigma^{j_1 j_2 j_3}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \Lambda^{i_1 \lambda_1} \Lambda^{i_2 \lambda_2} \Lambda^{i_3 \lambda_3} a^{(l)}_{\mathrm{BBB}} \tag{1}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ ne dépend que de dim W.

Étudions, dans la relation de cocycle, les termes d'ordre (3, 3, 1, 1) ; ils proviennent à la fois des termes d'ordre (3, 3, 1) et (3, 3, 0) de C. Remarquons que tous ces termes de C sont de nature tensorielle. On a :

$$\Lambda^{kr} \partial_r a^{i_1 i_2 i_3, j_1 j_2 j_3, l} - \Lambda^{lr} \partial_r a^{i_1 i_2 i_3, j_1 j_2 j_3, k} + \Lambda^{kl} \bar{a}^{i_1 i_2 i_3, j_1 j_2 j_3} = 0$$

Pour que les termes d'ordre (3, 3, 2, 1) et (3, 3, 2, 0), qui sont de nature tensorielle, soient nuls, a et $\bar{a}$ sont donnés par la formule (1). Dès lors, l'expression ci-dessus devient dans une carte naturelle :

$$\Lambda^{kr} \partial_r a^l_{\mathrm{BBB}} - \Lambda^{lr} \partial_r a^k_{\mathrm{BBB}} + \Lambda^{kl} \bar{a}_{\mathrm{BBB}} = 0$$

ou encore

$$\partial_s(F_{lt}a^l_{BBB}) - \partial_t(F_{ls}a^l_{BBB}) + F_{st}\bar{a}_{BBB} = 0$$

Considérons la fonction $f = \bar{a}_{BBB}$ et le champ de vecteurs X de composantes $X^l = a^l_{BBB}$.

L'identité ci-dessus s'écrit :

$$di(X)F = \mathscr{L}(X)F = -fF.$$

En vertu des propriétés sur les algèbres de Lie attachées à une variété symplectique (§ 1.*a*)), ceci implique, comme dim W $\geqslant 4$, que $f = C^{ste}$ et dès lors que $X \in L^c$. Ainsi le symbole principal de C coïncide avec celui de la 3-cochaîne

$$C'(u, v, w) = \underset{uvw}{\mathfrak{S}} S^3_\Gamma(u, v)(\mathscr{L}_X + k_X I)w$$

où $X \in L^c$.

LEMME 12. — *La* 3-*cochaîne* C′ *est un cocycle. Il est exact ssi* $X \in L^*$.

Démonstration. — Montrons que C′ est un 3-cocycle. Notons $D = \mathscr{L}_X + k_X I$. On a :

$$\delta C'(u_0, u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{3!}\varepsilon^{\lambda_0\ldots\lambda_3}_{0\ldots3}\{u_{\lambda_0}, C'(u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}, u_{\lambda_3})\}$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon^{\lambda_0\ldots\lambda_3}_{0\ldots3}C'(\{u_{\lambda_0}, u_{\lambda_1}\}, u_{\lambda_2}, u_{\lambda_3})$$

$$= \varepsilon^{\lambda_0\ldots\lambda_3}_{0\ldots3}\left[\frac{1}{2}\{u_{\lambda_0}, S^3_\Gamma(u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2})Du_{\lambda_3}\} - \frac{1}{4}S^3_\Gamma(\{u_{\lambda_0}, u_{\lambda_1}\}, u_{\lambda_2})Du_{\lambda_3}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}S^3_\Gamma(u_{\lambda_3}, \{u_{\lambda_0}, u_{\lambda_1}\})Du_{\lambda_2} - \frac{1}{4}S^3_\Gamma(u_{\lambda_2}, u_{\lambda_3})D\{u_{\lambda_0}, u_{\lambda_1}\}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\varepsilon^{\lambda_0\ldots\lambda_3}_{0\ldots3}\underset{u_{\lambda_0}u_{\lambda_1}u_{\lambda_2}}{\mathfrak{S}} Du_{\lambda_3}[\{u_{\lambda_0}, S^3_\Gamma(u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2})\} - S^3_\Gamma(\{u_{\lambda_0}, u_{\lambda_1}\}, u_{\lambda_2})]$$

$$+\frac{1}{4}\varepsilon^{\lambda_0\ldots\lambda_3}_{0\ldots3}S^3_\Gamma(u_{\lambda_2}, u_{\lambda_3})[\{u_{\lambda_0}, Du_{\lambda_1}\} + \{Du_{\lambda_0}, u_{\lambda_1}\} - D\{u_{\lambda_0}, u_{\lambda_1}\}] = 0$$

car S^3_Γ est un 2-cocycle et D une dérivation.

Supposons C′ exact ; son symbole principal est d'ordre (3, 3, 1) ; il peut être le symbole du cobord d'un 2-cocycle dont le symbole est d'ordre (3, 3) ou (4, 1). Cette deuxième hypothèse est impossible ; en effet la nullité du terme d'ordre (4, 2, 1) dans le cobord d'une 2-cochaîne implique la nullité du terme d'ordre (4, 1) de cette cochaîne (voir calculs de $H^2_{diff}(N)$).

Supposons donc $C' = \delta B$ où B a un symbole principal d'ordre (3, 3).

Les termes d'ordre (3, 3, 2) de δB étant nuls, le symbole de B est de la forme (voir calculs de $H^2_{diff}(N)$) :

$$f\sigma^{j_1j_2j_3}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\Lambda^{i_1\lambda_1}\Lambda^{i_2\lambda_2}\Lambda^{i_3\lambda_3}\partial_{i_1i_2i_3}u\partial_{j_1j_2j_3}v$$

où f est une fonction sur W.

Dès lors le terme d'ordre (3, 3, 1) de δB est donné par

$$\Lambda^{kl}\partial_l f \sigma^{j_1 j_2 j_3}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \Lambda^{i_1 \lambda_1} \Lambda^{i_2 \lambda_2} \Lambda^{i_3 \lambda_3} \partial_k w \partial_{i_1 i_2 i_3} u \partial_{j_1 j_2 j_3} v$$

Ceci montre que, pour que C′ soit exact, il faut que $\Lambda^{kl}\partial_l f = X^k$ ce qui revient à dire que $X \in L^*$.

Dans ce cas $C'(u, v, w) = \underset{uvw}{\mathfrak{S}} S^3_\Gamma(u, v)\mathscr{L}_X w$ avec $\mu(X) = df$ et si l'on considère la 2-cochaîne $B(u, v) = -fS^3_\Gamma(u, v)$, on a :

$$\delta B(u, v, w) = \underset{uvw}{\mathfrak{S}} - \{ u, f \} S^3_\Gamma(v, w) = \underset{uvw}{\mathfrak{S}} S^3_\Gamma(u, v) i(X) dw = C'(u, v, w)$$

q. e. d.

LEMME 13. — *Si un 3-cocycle 1-différentiable est exact dans la cohomologie différentiable, il est exact dans la cohomologie 1-différentiable.*

Démonstration. — Supposons que C soit 1-différentiable et que $C = \delta B$. En se reportant aux calculs de $H^2_{\text{diff}}(N)$ on voit que B s'écrit :

$$B = \alpha S^3_\Gamma + \delta E + B'$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et B′ est une 2-cochaîne 1-différentiable. On en déduit que $C = \delta B'$.

q. e. d.

CALCUL DE H^3 (N).

Des lemmes 1 à 13 on déduit que :

Tout 3-cocycle C s'écrit :

$$C(u, v, w) = \underset{uvw}{\mathfrak{S}} S^3_\Gamma(u, v) D w + \delta E(u, v, w) + C_1(u, v, w)$$

où

. D *est une dérivation locale de* N, *c'est-à-dire* $D = \mathscr{L}_X + k_X I$ où $X \in L^c$,
. E *est une 2-cochaîne différentiable,*
. C_1 *est un 3-cocycle 1-différentiable.*

LEMME 14. — *La classe de* X *dans* L^c/L^* *et la classe* $[C_1]_1$ *du* 3-*cocycle* C_1 *dans* $H^3_{1\text{-diff}}(N)$ *sont univoquement déterminés par* C.

Démonstration. — Supposons qu'on ait

$$\begin{aligned} C &= \underset{uvw}{\mathfrak{S}} S^3_\Gamma(u, v) D w + \delta E(u, v, w) + C_1(u, v, w) \\ &= \underset{uvw}{\mathfrak{S}} S^3_\Gamma(u, v) D' w + \delta E'(u, v, w) + C'_1(u, v, w) \end{aligned}$$

où $D = \mathscr{L}_X + k_X I$, $D' = \mathscr{L}_{X'} + k_{X'} I$, X et $X' \in L^c$.

Considérons le 3-cocycle $\underset{uvw}{\mathfrak{S}} S^3_\Gamma(u, v)(D - D')w$. Il doit être exact à un cocycle 1-différentiable près.

Son symbole principal étant d'ordre (3, 3, 1) ceci implique, en vertu du lemme 12 que $D - D' = \mathscr{L}_Y$ où $Y \in L^*$.

Dès lors la classe de X dans L^c/L^* coïncide avec celle de X'.

Mais alors $C_1 - C'_1$ est un 3-cocycle 1-différentiable exact. Grâce au lemme 13, ceci implique $[C_1]_1 = [C'_1]_1$. q. e. d.

Si le 3-cocycle C est exact, il lui correspond l'élément 0 de L^c/L^* et l'élément 0 de $H^3_{1\text{-diff}}(N)$.

Ainsi à la classe [C] du 3-cocycle C dans $H^3_{\text{diff}}(N)$ on fait correspondre la classe de X dans L^c/L^* et la classe $[C_1]_1$.

On a donc une application linéaire $H^3_{\text{diff}}(N) \to L^c/L^* \oplus H^3_{1\text{-diff}}(N)$.

Cette application est clairement injective et surjective.

On en déduit la

PROPOSITION 2. — $H^3_{\text{diff}}(N) \cong L^c/L^* \oplus H^3_{1\text{-diff}}(N)$.

REMERCIEMENTS

Je remercie vivement les Professeurs M. Cahen et M. Flato pour leurs encouragements et leurs nombreux conseils.

RÉFÉRENCES

[1] A. AVEZ, A. LICHNEROWICZ et DIAZ-MIRANDA, *J. of Diff. Geom.*, t. **9**, 1974, p. 1-40.

[2] F. BAYEN, M. FLATO, C. FRONSDAL, A. LICHNEROWICZ et D. STERNHEIMER, *Ann. Phys.*, t. **111**, 1978, p. 61.

[3] C. CHEVALLEY et S. EILENBERG, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **63**, 1948, p. 85-124.

[4] A. LICHNEROWICZ, *J. Math. pures et appl.*, t. **53**, 1974, p. 459-484.

[5] J. VEY, *Comment. Math. Helvet.*, t. **50**, 1975, p. 421.

(Manuscrit reçu le 17 mars 1980)