ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MICHÈLE MASTRANGELO
VICTOR MASTRANGELO

Ordre et informations sur les expériences non disjointes

Annales de l'I. H. P., section A, tome 32, nº 3 (1980), p. 257-275
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1980__32_3_257_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXXII, n° 3, 1980, p. 257-275.

Section A :
Physique théorique.

Ordre et informations sur les expériences non disjointes

par

Michèle MASTRANGELO
Université Pierre-et-Marie Curie, Paris

et

Victor MASTRANGELO
Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris

RÉSUMÉ. — Dans ce travail nous définissons la notion d'expérience non disjointe sur un ensemble Ω. Une telle expérience est une famille $\alpha = \{ x_i \}_{i \in I}$ contenue dans l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω. Sur l'ensemble Θ de toutes les expériences, nous étudions l'ordre de finesse et des informations croissantes pour cet ordre.

Nous établissons une généralisation de l'information de Shannon classique qui, elle, n'est définie que sur les expériences disjointes.

ABSTRACT. — In this paper, we define the notion of undisjointed experiment on a set Ω. Such an experiment is a family $\alpha = \{ x_i \}_{i \in I}$ contained in $\mathscr{P}(\Omega)$. On the set Θ of all the experiments, we study order and informations.

We define a generalisation of the classical Shannon information on finite disjointed experiments.

I. HEURISTIQUE

Nous considérons un ensemble Ω, appelé événement certain. Nous appelons expérience (sur Ω), toute famille $\alpha = \{ x_i \}_{i \in I}$ contenue dans $\mathscr{P}(\Omega)$.

Nous notons Θ l'ensemble de toutes les expériences. Pour toute expérience $\alpha = \{ x_i \}_{i \in I}$, nous notons $U(\alpha)$ la réunion de α :

$$U(\alpha) = \bigcup_{i \in I} x_i .$$

Nous disons que α est une expérience complète si $U(\alpha) = \Omega$, et que α est une expérience disjointe si, pour tout couple $(i, j) \in I \times I$, tel que $i \neq j$, nous avons $x_i \cap x_j = \phi$.

Nous disons qu'une expérience $\alpha = \{ x_i \}_{i \in I}$ est plus fine qu'une expérience $\beta = \{ y_j \}_{j \in J}$ si l'apport de connaissance dû à l'expérience α est plus grand que celui dû à β.

L'expérience α permet de savoir si un élément $a \in \Omega$ appartient à l'un des x_i et auquel. Elle permet aussi de savoir si a n'appartient à aucun des x_i, c'est-à-dire si a appartient à $\Omega \setminus U(\alpha)$. Nous sommes donc conduits à associer à α l'expérience complète :

$$\tilde{\alpha} = \{ (x_i)_{i \in I} , \ \Omega \setminus U(\alpha) \} = \{ x_i \}_{i \in \tilde{I}} .$$

Nous disons que $\tilde{\alpha}$ est l'*expérience complétée* de α.

Il serait satisfaisant que α et $\tilde{\alpha}$ soient aussi fines l'une que l'autre, donc que l'on puisse identifier α et $\tilde{\alpha}$.

Dire que $\beta = \{ y_j \}_{j \in J}$ est moins fine que $\alpha = \{ x_i \}_{i \in I}$ signifie que chaque y_j $(j \in \tilde{J})$ est une réunion de x_i $(i \in K \subset \tilde{I})$, car, alors, la connaissance de l'appartenance à l'un des x_i $(i \in K)$ est plus précise que celle de l'appartenance à y_j.

Considérons à nouveau l'expérience non disjointe $\alpha = \{ x_i \}_{i \in I}$. Si $a \in \Omega$, l'expérience α permet de savoir si, pour tout $i \in I$, a appartient à x_i ou à $\Omega \setminus x_i$.

Notons Ψ l'ensemble de toutes les familles de fonctions $(\varphi_i)_{i \in I}$ où $\varphi_i : \mathscr{P}(\Omega) \to \mathscr{P}(\Omega)$ est de la forme $\varphi_i(z) = z$ ou $\Omega \setminus z$. A l'expérience α, nous pouvons associer l'expérience disjointe et complète

$$\alpha' = \left\{ \bigcap_{i \in I} \varphi_i(x_i) : (\varphi_i)_{i \in I} \in \Psi \right\} = \{ x_i \}_{i \in I'} \subset \mathscr{P}(\Omega) .$$

Nous disons que α' est l'*expérience intersectée* de α ; elle est toujours complète.

Il serait assez satisfaisant d'établir une théorie de la finesse où α et α' soient équivalentes car, *a priori*, α' apparaît comme plus fine que α mais, ayant fait l'expérience α, une simple déduction logique permet d'obtenir les mêmes résultats qu'avec l'expérience α'.

Néanmoins, dans la pratique, le fait d'associer α' à α conduit à traiter un nombre d'événements prohibitif. Dans tout système physique quelque peu complexe — physique nucléaire des basses et hautes énergies, physique spatiale, biologie moléculaire, etc. — le nombre d'événements à examiner est de l'ordre de plusieurs centaines voire plusieurs milliers.

Or il apparaît que le cardinal de α' est, *a priori*, égal au cardinal de Ψ :

$$\text{card } \Psi = 2^{\text{card I}}$$

Nous considérons quelques exemples : si $\mathrm{I} = 100$, card $\mathrm{I}' \simeq 1{,}268 \times 10^{30}$ et, si $\mathrm{I} = 300$, card $\mathrm{I}' \simeq 2{,}037 \times 10^{90}$. Nous voyons donc que la complexité apportée par l'introduction de l'expérience intersectée α' ne permet souvent pas l'étude de l'expérience α au moyen de α'. C'est pourquoi, dans le paragraphe II, nous étudions les notions d'ordre et d'information sur les expériences sans identifier celles-ci et leurs intersectées.

II. ORDRE ET INFORMATION SUR LES EXPÉRIENCES NON DISJOINTES

Soient $\alpha = \{ x_i \}_{i \in \mathrm{I}}$ et $\beta = \{ y_j \}_{j \in \mathrm{J}}$, nous avons vu que l'expérience α est plus fine que β si tout $y_j \, (j \in \tilde{\mathrm{J}})$ peut s'écrire comme réunion de $x_i \, (i \in \mathrm{K} \subset \tilde{\mathrm{I}})$.

Nous pouvons donc écrire :

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha \geqslant \beta \Leftrightarrow \forall y_j \in \tilde{\beta} = \beta \cup \{ \Omega \setminus \mathrm{U}(\beta) \} \subset \mathscr{P}(\Omega), \qquad \exists \mathrm{K} \subset \tilde{\mathrm{I}} \text{ tel que} \\ \qquad y_j = \bigcup\limits_{i \in \mathrm{K} \subset \tilde{\mathrm{I}}} x_i . \end{cases}$$

Nous obtenons en fait un préordre partiel. Il devient un ordre partiel si nous identifions les expériences et leurs complétées.

Nous allons montrer que, dans Θ, toute famille $(\alpha_k = \{ x_i^k \}_{i \in \mathrm{I}_k})_{k \in \mathrm{K}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Comme précédemment, nous notons :

$$\tilde{\alpha}_k = \{ (x_i^k)_{i \in \mathrm{I}_k} , \quad \Omega \setminus \mathrm{U}(\alpha_k) \} = \{ x_i^k \}_{i \in \tilde{\mathrm{I}}_k} .$$

La borne supérieure se définit par :

$$\bigvee_{k \in \mathrm{K}} \alpha_k = \{ x_{i_k}^k : i_k \in \tilde{\mathrm{I}}_k , \ k \in \mathrm{K} \} = \bigcup_{k \in \mathrm{K}} \tilde{\alpha}_k .$$

En effet, cette expérience est manifestement plus fine que chaque α_k. Par ailleurs si β est une expérience plus fine que chaque α_k et si $\tilde{\beta} = \{ y_j \}_{j \in \tilde{\mathrm{J}}}$, alors, pour tout $j \in \tilde{\mathrm{J}}$ et tout $k \in \mathrm{K}$, il existe une famille $\{ x_i^k \}_{i \in \mathrm{H} \subset \tilde{\mathrm{I}}_k}$ telle que $y_j = \bigcup\limits_{i \in \mathrm{H} \subset \tilde{\mathrm{I}}_k} x_i^k$; par conséquent β est plus fine que $\bigvee\limits_{k \in \mathrm{K}} \alpha_k$, qui est bien la borne supérieure.

La borne inférieure se définit par :

$$\bigwedge_{k \in \mathrm{K}} \alpha_k = \left\{ x \in \mathscr{P}(\Omega) : \forall k \in \mathrm{K} , \ \exists (x_i^k)_{i \in \mathrm{H} \subset \tilde{\mathrm{I}}_k} \subset \tilde{\alpha}_k , \text{ tel que } x = \bigcup_{i \in \mathrm{H}} x_i^k \right\}.$$

Il est évident que $\bigwedge_{k\in K} \alpha_k$ est moins fine que chaque α_k. De plus, si $\beta = \{ y_j \}_{j\in J}$ est une expérience moins fine que chaque α_k, alors, pour tout $j \in \tilde{J}$, il existe une famille $(x_i^k)_{i\in H\subset \tilde{I}_k} \subset \tilde{\alpha}_k$ telle que $y_j = \bigcup_{i\in H} x_i^k$.

Nous voyons donc que $\beta \subset \bigwedge_{k\in K} \alpha_k$ et, par suite $\beta \leqslant \bigwedge_{k\in K} \alpha_k$, qui est bien la borne inférieure.

REMARQUE 1. — 1.*a*. L'expérience intersectée associée à $\bigvee_{k\in K} \alpha_k$ s'écrit :

$$\left(\bigvee_{k\in K} \alpha_k\right)' = \left\{ \bigcap_{\substack{i\in \tilde{I}_k \\ k\in K}} \varphi_i^k(x_i^k) \right\} = \left\{ \bigcap_{k\in K} \left(\bigcap_{i\in \tilde{I}_k} \varphi_i^k(x_i^k) \right) \right\}$$

elle vérifie donc :

$$\left(\bigvee_{k\in K} \alpha_k\right)' = \left(\bigvee_{k\in K} \alpha'_k\right)'$$

Nous verrons plus tard que $\left(\bigvee_{k\in K} \alpha_k\right)'$ est la borne supérieure, dans l'ensemble des expériences disjointes, de l'ensemble des expériences disjointes $\{ \alpha'_k \}_{k\in K}$.

1.*b*. L'expérience disjointe associée à $\bigwedge_{k\in K} \alpha_k$ n'est pas, en général, égale à la borne inférieure des expériences disjointes $\{ \alpha'_k \}_{k\in K}$, ni dans l'ensemble Θ, ni dans l'ensemble Θ' des expériences disjointes. Nous citons un contre-exemple :

$$\Omega = [0, 4], \quad A_1 = \left[1, \frac{5}{2}\right], \quad A_2 = \left[\frac{3}{2}, 3\right],$$
$$\alpha = \{ A_1, A_2 \}, \quad \beta = \{ B = (A_1 \cup A_2) \setminus (A_1 \cap A_2) \}.$$

Nous voyons que $\alpha \wedge \beta = \{ \phi, \Omega \} \Rightarrow (\alpha \wedge \beta)' = \{ \phi, \Omega \}$.
Or $\alpha' = \{ A_1 \setminus A_2, A_1 \cap A_2, A_2 \setminus A_1, \complement A_1 \cap \complement A_2 \}$ et $\beta' = \{ B, \complement B \}$.
Donc $\alpha' \wedge \beta' = \{ \phi, \Omega, B \}$ et $(\alpha' \wedge \beta')' = \{ \phi, B, \complement B \} \neq (\alpha \wedge \beta)'$.

Nous nous proposons maintenant de définir, sur l'ensemble Θ des expériences disjointes ou non, une information croissante avec l'ordre de finesse.

Dans le but d'étudier un cas concret nous supposons, jusqu'à la fin de ce paragraphe, que l'ensemble Ω est muni d'une probabilité p.

L'idée la plus naturelle est d'associer, à toute expérience $\alpha = \{ x_i \}_{i\in I}$, finie et dont les événements sont p-mesurables, une expression qui généralise celle de Shannon :

$$h(\alpha) = - \sum_{i \in I} p(x_i) \operatorname{Log} p(x_i) .$$

Cependant, si $x_i \cap x_j \neq \emptyset$, nous voyons que la somme :

$$- p(x_i) \operatorname{Log} p(x_i) - p(x_j) \operatorname{Log} p(x_j)$$

fait intervenir l'intersection à deux niveaux. On peut donc être tenté de retrancher

$$- p(x_i \cap x_j) \operatorname{Log} p(x_i \cap x_j) .$$

Ces considérations nous conduisent à la proposition 2.

PROPOSITION 2. — *Soit Γ la classe des expériences finies dont les événements sont p-mesurables.*

A toute expérience $\alpha = \{ x_i \}_{i \in I} \in \Gamma \subset \mathscr{P}[\mathscr{P}(\Omega)]$, nous associons, notant $\tilde{\alpha} = \{ x_i \}_{i \in \tilde{I}} \subset \mathscr{P}(\Omega)$, la complétée de α :

$$h_1(\alpha) = - \sum_{i \in \tilde{I}} p(x_i) \operatorname{Log} p(x_i)$$

et, munissant $\tilde{I}$ d'un ordre total quelconque

$$h_2(\alpha) = \sum_{\substack{i,j \in \tilde{I} \\ i<j}} [- p(x_i) \operatorname{Log} p(x_i) - p(x_j) \operatorname{Log} p(x_j) + p(x_i \cap x_j) \operatorname{Log} p(x_i \cap x_j)]$$

$$= 2^{-1} \sum_{\substack{i,j \in \tilde{I} \\ i \neq j}} [- p(x_i) \operatorname{Log} p(x_i) - p(x_j) \operatorname{Log} p(x_j) + p(x_i \cap x_j) \operatorname{Log} p(x_i \cap x_j)].$$

Alors h_1 et h_2 sont des applications croissantes pour l'ordre ci-dessous : $\alpha = \{ x_i \}_{i \in I} \succ \beta = \{ y_j \}_{j \in J}$ (α est fortement plus fine que β) si et seulement s'il existe une partition de $\tilde{I}$: $\tilde{I} = \bigcup_{j \in \tilde{J}} K_j$, $K_j \cap K_h = \phi$ si $j \neq h$, telle que, pour tout $j \in \tilde{J}$, nous ayons $y_j = \bigcup_{k \in K_j} x_k$.

Démonstration. — Pour tout $z \in \mathscr{P}(\Omega)$, nous notons $\theta(z) = - p(z) \operatorname{Log} p(z)$. Nous avons :

$$\theta(y_1) + \theta(y_2) - \theta(y_1 \cap y_2) - \theta(y_1 \cup y_2) \geqslant 0 .$$

Le fait que h_1 soit croissante pour la finesse forte est dû à la relation :

$$y = \bigcup_{i \in K} x_i \Rightarrow \theta(y) \leqslant \sum_{i \in K} \theta(x_i) .$$

Pour montrer que h_2 est croissante pour la finesse forte, il suffit d'établir que, si :

$$y_1 = \bigcup_{i \in L} x_i \quad \text{et} \quad y_2 = \bigcup_{i \in K} x_i,$$

alors

$$\theta(y_1) + \theta(y_2) - \theta(y_1 \cap y_2) \leqslant \sum_{\substack{i,j \in L \cup K \\ i<j}} [\theta(x_i) + \theta(x_j) - \theta(x_i \cap x_j)]$$

Nous pouvons supposer que $L \cup K$ est ordonné de manière que $L < K$, et :

$$\sum_{\substack{i,j \in L \cup K \\ i<j}} [\theta(x_i) + \theta(x_j) - \theta(x_i \cap x_j)] = \sum_{\substack{i,j \in L \\ i<j}} [\ldots] + \sum_{\substack{i,j \in K \\ i<j}} [\ldots] + \sum_{\substack{i \in L \\ j \in K}} [\ldots],$$

$$\geqslant \sum_{\substack{i,j \in L \\ i<j}} [\ldots] + \sum_{\substack{i,j \in K \\ i<j}} [\ldots].$$

Or :

$$+ \theta(x_i \cup x_j) \leqslant \theta(x_i) + \theta(x_j) - \theta(x_i \cap x_j) \leqslant \theta(x_i) + \theta(x_j).$$

En sommant sur les $(i, j) \in L^2$, nous pouvons voir que

$$\theta(y_1) = \theta\Big(\bigcup_{i \in L} x_i\Big) \leqslant \sum_{\substack{i,j \in L \\ i<j}} \theta(x_i \cup x_j) \leqslant \sum_{\substack{i,j \in L \\ i<j}} [\theta(x_i) + \theta(x_j) - \theta(x_i \cap x_j)]$$

De même :

$$\theta(y_2) \leqslant \sum_{\substack{i,j \in K \\ i<j}} [\theta(x_i) + \theta(x_j) - \theta(x_i \cap x_j)]$$

et h_2 est bien croissante pour la finesse forte.

REMARQUE 3. — *Sur la classe Γ définie à la proposition 2, les applications h_1 et h_2 ne sont pas croissantes pour la finesse.*

Contre-exemple. — Soit $\Omega = [0, 1]$, muni de la mesure de Lebesgue.
Nous notons :

$$\alpha = \{ [0, e^{-1}],\ [e^{-100}, e^{-1}],\ [e^{-1}, 1] \} = \tilde{\alpha}$$

et

$$\beta = \{ [e^{-100}, e^{-1}],\ [0, e^{-100}],\ [e^{-1}, 1] \} = \tilde{\beta}.$$

Alors

$$h_1(\alpha) = e^{-1} \operatorname{Log} e - (e^{-1} - e^{-100}) \operatorname{Log} (e^{-1} - e^{-100}) - (1 - e^{-1}) \operatorname{Log} (1 - e^{-1})$$

et

$$h_1(\beta) = -(e^{-1} - e^{-100}) \operatorname{Log}(e^{-1} - e^{-100}) + e^{-100} \operatorname{Log} e^{100} - (1 - e^{-1}) \operatorname{Log}(1 - e^{-1})$$

Nous voyons que $\qquad h_1(\alpha) > h_1(\beta)$

alors que l'expérience β est plus fine que α.

De même, nous pouvons voir que h_2 n'est pas croissante pour la finesse.

III. DÉFINITION DE L'INFORMATION SUR DES EXPÉRIENCES NON DISJOINTES

Nous avons vu, au paragraphe II, l'impossibilité de définir, sur une classe d'expériences non disjointes, l'information par une formule généralisant raisonnablement celle de Shannon-Wiener.

Nous allons, alors, utiliser la démarche la plus naturelle qui consiste à définir cette information par bornes supérieures ou inférieures. Étudions de nouveau l'heuristique du problème. Supposons une situation très simple,

$$\alpha = \{ x_1, x_2 \}, \ x_1 \cup x_2 = \Omega, \ x_1 \cap x_2 \neq \phi, \ x_1 \neq \Omega .$$

Il est assez souhaitable que l'information de α soit égale à l'information de son intersectée :

$$\mathrm{H}(\alpha) = \mathrm{H}(\{ x_1 \setminus x_2, \ x_1 \cap x_2, \ x_2 \setminus x_1 \})$$

Par contre, toute expérience disjointe et moins fine que α s'écrit nécessairement

$$\gamma = \{ \Omega, \phi \} .$$

Nous ne pouvons, donc, écrire l'information de α sous la forme :

$$\mathrm{H}(\alpha) = \sup \{ \mathrm{H}(\gamma), \ \gamma \text{ disjointe}, \ \gamma \leqslant \alpha \} .$$

Dans toute la suite, nous notons Δ une classe d'expériences disjointes munie d'une information H, et nous nous proposons de définir l'information d'expériences α par la relation

$$\mathrm{H}(\alpha) = \inf \{ \mathrm{H}(\delta) : \delta \in \Delta, \ \delta \geqslant \alpha \} .$$

Nous sommes donc conduits à étudier les notions d'ordre, de bornes inférieures et supérieures, pour la finesse, dans l'ensemble Θ' des expériences disjointes.

IV. ORDRE ET INFORMATION SUR LES EXPÉRIENCES DISJOINTES

Nous rappelons qu'une expérience $\alpha = \{ x_i \}_{i \in \mathrm{I}}$ est dite disjointe si :

$$i \neq j \ \Rightarrow \ x_i \cap x_j = \phi .$$

Si α et β sont deux expériences, nous disons que $\alpha = \{ x_i \}_{i \in \mathrm{I}}$ est plus fine que $\beta = \{ y_j \}_{j \in \mathrm{J}}$ si et seulement si :

$$\alpha \geqslant \beta \Leftrightarrow \forall y_j \in \tilde{\beta} = \beta \cup \{ \Omega \setminus \mathrm{U}(\beta) \}, \quad \exists \mathrm{K} \subset \tilde{\mathrm{I}} : y_j = \bigcup_{i \in \mathrm{K}} x_i .$$

Nous notons Θ' l'ensemble de toutes les expériences disjointes et nous allons montrer que, dans Θ', toute famille $(\alpha_k = \{ x_i^k \}_{i \in \mathrm{I}_k})_{k \in \mathrm{K}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Nous identifions, pour tout $k \in \mathrm{K}$, l'expérience α_k et sa complétée :

$$\tilde{\alpha}_k = \{ (x_i^k)_{i \in \mathrm{I}_k}, \ \Omega \setminus \mathrm{U}(\alpha_k) \} = \{ x_i^k \}_{i \in \tilde{\mathrm{I}}_k} .$$

La borne supérieure se définit par :

$$\bigvee_{k \in \mathrm{K}} \alpha_k = \left\{ \bigcap_{k \in \mathrm{K}} x_{i_k}^k : x_{i_k}^k \in \tilde{\alpha}_k , \ (i_k)_{k \in \mathrm{K}} \in \prod_{k \in \mathrm{K}} \tilde{\mathrm{I}}_k \right\} .$$

Nous voyons que, pour tout $k \in \mathrm{K}$, si $x_i^k \in \tilde{\alpha}_k$ alors :

$$x_i^k = \bigcup_{(i_h) \in \prod_{h \in \mathrm{K} \setminus \{k\}} \tilde{\mathrm{I}}_h} \left(x_i^k \bigcap_{h \in \mathrm{K} \setminus \{k\}} x_{i_h}^h \right)$$

Par suite $\bigvee_{k \in \mathrm{K}} \alpha_k$ est bien plus fine que chaque α_k.

Si β est une expérience disjointe plus fine que chaque α_k :

$$\forall x_i^k \in \tilde{\alpha}_k , \quad \exists (y_h)_{h \in \mathrm{L}} \subset \tilde{\beta} : x_i^k = \bigcup_{h \in \mathrm{L}} y_h .$$

Pour toute famille $x_{i_k}^k$, $(i_k) \in \prod_{k \in \mathrm{K}} \tilde{\mathrm{I}}_k$, nous pouvons déterminer une famille

$$y_{h_k}^k, \ (h_k) \in \prod_{k \in \mathrm{K}} \mathrm{L}_k \ \text{telle que} \ \forall k, \ x_{i_k}^k = \bigcup_{h_k \in \mathrm{L}_k} y_{h_k}^k .$$

Alors :

$$\bigcap_{k \in \mathrm{K}} x_{i_k}^k = \bigcup_{\substack{k \in \mathrm{K} \\ h_k \in \mathrm{L}_k}} \left\{ y_{h_k}^k : y_{h_k}^k \subset \bigcap_{k \in \mathrm{K}} x_{i_k}^k \right\} .$$

Par conséquent β est plus fine que $\bigvee_{k \in \mathrm{K}} \alpha_k$. Nous pouvons conclure que $\bigvee_{k \in \mathrm{K}} \alpha_k$ est bien la borne supérieure de la famille $(\alpha_k)_{k \in \mathrm{K}}$.

Dans le but de définir la borne inférieure, nous introduisons l'ensemble

$$Z = \{ x_i^k : x_i^k \in \tilde{\alpha}_k , \ k \in K \} .$$

Pour obtenir une borne inférieure disjointe, nous devons réunir obligatoirement deux x_i^k et x_j^h dont l'intersection est non vide. Nous munissons Z de la relation d'équivalence :

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \} \subset Z : x \cap x_1 \neq \phi \\ \ldots x_p \cap x_{p+1} \neq \phi \ldots x_n \cap y \neq \phi$$

Nous notons $\bar{Z}$ l'ensemble quotient et, pour tout $\bar{x} \in \bar{Z}$ nous posons :

$$\dot{x} = \mathrm{U} \{ x : x \in \bar{x} \} .$$

Nous voyons que $\{ \dot{x} : \bar{x} \in \bar{Z} \}$ forme une partition de Ω. La borne inférieure de la famille $(\alpha_k)_{k \in K}$ se définit alors par :

$$\bigwedge_{k \in K} \alpha_k = \{ \dot{x} : \bar{x} \in \bar{Z} \} .$$

En effet, pour tout $k \in K$ et tout $y \in \bigwedge_{k \in K} \alpha_k$ nous avons :

$$y = \mathrm{U} \{ x_i^k : x_i^k \subset y , \ i \in \tilde{I}_k \} .$$

Par ailleurs, si β est une expérience moins fine que chaque α_k, pour tout $y \in \beta$ nous pouvons trouver un sous-ensemble $L_k \subset \tilde{I}_k$ tel que

$$y = \bigcup_{i \in L_k} x_i^k$$

Si $h \neq k$ et si $x_i^k \cap x_j^h \neq \phi$, alors $y \cap x_j^h \neq \phi$; comme β est une expérience disjointe moins fine que α_h ceci implique que $x_j^h \subset y$. Il en résulte que

$$y = \bigcup_{i \in L_k} \dot{x}_i^k$$

et β est moins fine que $\bigwedge_{k \in K} \alpha_k$. Nous pouvons de nouveau conclure que $\bigwedge_{k \in K} \alpha_k$ est bien la borne inférieure de la famille $(\alpha_k)_{k \in K}$.

DÉFINITION DE L'INFORMATION. — Soit Δ une sous-classe de Θ'. Nous appelons information sur Δ toute application H vérifiant :

① $$H : \Delta \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$$

② H est croissante pour la finesse :

$$\alpha \leqslant \beta \Rightarrow H(\alpha) \leqslant H(\beta) .$$

EXEMPLE CONCRET DE RÉFÉRENCE. — Soit Ω un espace tributé muni d'une probabilité p [resp. soit Ω un espace topologique muni d'une probabilité p]. La classe Δ est l'ensemble des expériences *disjointes* dénombrables dont les événements sont p-mesurables [resp. Δ est l'ensemble des expériences disjointes dénombrables dont les événements sont compacts].

Nous pouvons munir Δ de l'information de Shannon-Wiener

$$\tilde{\alpha} = \{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \mathrm{H}(\tilde{\alpha}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} - p(x_n) \operatorname{Log} p(x_n) = \mathrm{H}(\alpha) .$$

Cette somme est évidemment convergente dans $\bar{\mathbb{R}}_+$. Nous voyons que H est croissante pour la finesse sur Δ.

V. DÉFINITION DE L'INFORMATION SUR DES EXPÉRIENCES NON DISJOINTES

Soient Δ une classe d'expériences *disjointes*, et H une information sur Δ. A tout expérience $\alpha \in \Theta$ (α disjointe ou non), nous associons son information supérieure :

$$\mathrm{H}^*(\alpha) = \inf \{ \mathrm{H}(\delta) : \alpha \leqslant \delta \in \Delta \}$$

avec la convention :

$$\inf \phi = + \infty .$$

PROPOSITION 4. — *L'information supérieure* H* *est croissante pour la finesse.*

Démonstration. — Nous pouvons tout d'abord remarquer que $\mathrm{H}^*(\alpha')$ est égale à $\mathrm{H}^*(\alpha)$. L'expérience α' est plus fine que α ; mais elle est aussi moins fine que toute expérience $\beta \geqslant \alpha$, β disjointe.

Par suite :

$$\mathrm{H}^*(\alpha) = \mathrm{H}^*(\alpha')$$

Si α et β sont deux expériences disjointes ou non, vérifiant $\alpha \leqslant \beta$, alors :

$$\{ \delta : \alpha \leqslant \delta \in \Delta \} \supset \{ \delta : \beta \leqslant \delta \in \Delta \}$$

et

$$\mathrm{H}^*(\alpha) \leqslant \mathrm{H}^*(\beta) .$$

REMARQUE 5. — *Si* $\delta \in \Delta$, *alors* $\mathrm{H}(\delta) = \mathrm{H}^*(\delta)$.

Cette assertion est évidente et sera souvent utilisée dans la suite.

Le calcul de $\mathrm{H}^*(\alpha)$ est souvent assez difficile car il fait intervenir des expériences $\delta \geqslant \alpha$, dont le cardinal est d'une grandeur prohibitive comme cela a été vu au paragraphe I.

Nous avons vu, au paragraphe III, qu'il est, en général, impossible de donner une définition de l'information d'une expérience α par la borne supérieure des informations des expériences disjointes, appartenant à Δ, et moins fines que α. Par contre, nous pourrions définir l'information de α comme borne supérieure des informations d'expériences γ, non nécessairement disjointes, mais *finies*, appartenant à une classe Γ. Cette définition serait assez intéressante car elle ne ferait intervenir que des expériences finies et le calcul de $H(\gamma)$ est d'autant plus facile que card γ est plus petit.

Nous notons Γ une classe d'expériences γ non nécessairement disjointes mais finies sur laquelle nous sachions calculer $H(\gamma) = H^*(\gamma)$.

Dans l'exemple concret donné à la fin du paragraphe IV, Δ est l'ensemble des expériences disjointes, dénombrables, dont les événements sont p-mesurables ou compacts. La classe Γ est alors la classe des expériences finies dont les événements sont p-mesurables. Il en résulte que :

$$\forall \delta \in \Delta : H(\delta) = \sup\{ H^*(\gamma) : \delta \geqslant \gamma \in \Gamma \} .$$

Dans toute la suite, nous supposons que, dans le cadre abstrait :

③ $$\forall \delta \in \Delta : H(\delta) = \sup \{ H^*(\gamma) : \delta \geqslant \gamma \in \Gamma \} .$$

Pour toute expérience $\alpha \in \Theta$, nous définissons l'information inférieure de α :

$$H_*(\alpha) = \sup \{ H^*(\gamma) : \alpha \geqslant \gamma \in \Gamma \} .$$

avec la convention $\sup \phi = 0$.

REMARQUE 6. — a) *Pour toute* $\alpha \in \Theta$, *nous avons* $H_*(\alpha) \leqslant H^*(\alpha)$.

b) *Pour toute* $\alpha \in \Delta \cup \Gamma$, *nous avons* $H_*(\alpha) = H^*(\alpha)$.

c) *Pour toute expérience* $\alpha \in \Gamma$, *pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe une expérience* $\delta \in \Delta$ *telle que* $\alpha \leqslant \delta$ *et telle que, pour toute expérience* $\gamma \in \Gamma$ *et vérifiant* $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \delta$, *nous ayons* $H^*(\gamma) - H^*(\alpha) < \varepsilon$.

La démonstration des différentes assertions de cette remarque est immédiate. La propriété c) de la remarque 6 est appelée la continuité à droite de H sur Γ.

DÉFINITION DE L'INFORMATIVITÉ. — Nous disons qu'une expérience $\alpha \in \Theta$ est informative si son information supérieure est égale à son information inférieure. Nous appelons information de α la valeur commune et nous la notons $H(\alpha)$:

$$H(\alpha) = \inf \{ H(\delta) : \alpha \leqslant \delta \in \Delta \} = \sup \{ H^*(\gamma) : \alpha \geqslant \gamma \in \Gamma \} .$$

Nous avons vu, à la remarque 6 b) que toute expérience α appartenant à $\Gamma \cup \Delta$ est informative.

Nous nous proposons maintenant d'étudier une classe aussi large que possible d'expériences informatives en nous appuyant sur nos travaux antérieurs [*5*], [*6*] et [*7*].

VI. ÉTUDE D'UNE CLASSE AUSSI LARGE QUE POSSIBLE D'EXPÉRIENCES INFORMATIVES

Nous conservons les définitions et notations des paragraphes IV et V. Nous supposons données deux classes d'expériences $\Delta \subset \Theta'$ et $\Gamma \subset \Theta$ ainsi qu'une application H vérifiant les hypothèses ①, ② et ③.

Nous nous plaçons dans le cadre — cf. exemple concret des paragraphes IV et V — où Γ est stable par bornes supérieures et inférieures finies. Cependant il ne peut en être de même pour Δ puisque la borne supérieure de deux expériences disjointes n'est généralement pas disjointe.

Nous nous proposons tout d'abord d'étudier $H^*(\delta_1 \vee \delta_2)$ lorsque δ_1 et δ_2 appartiennent à Δ :

$$H^*(\delta_1 \vee \delta_2) = \inf\{ H(\delta) : \delta_1 \vee \delta_2 \leqslant \delta \in \Delta \}.$$

Si $\delta \in \Delta$ est plus fine que $\delta_1 \vee \delta_2$, pour tout $i \in \{1, 2\}$, et pour tout $z \in \tilde{\delta}_i$, il existe une famille $(y_j)_{j\in J} \subset \tilde{\delta}$ telle que $z = \bigcup_{j\in J} y_j$.

La famille $\tilde{\delta}$ forme donc une partition de Ω plus fine que $\tilde{\delta}_i$, donc plus fine que $(\delta_1 \vee \delta_2)'$. Nous pouvons conclure que :

$$H^*(\delta_1 \vee \delta_2) = H^*[(\delta_1 \vee \delta_2)'].$$

Nous sommes amenés à imposer l'hypothèse suivante :

④ Δ est stable par bornes supérieures finies dans l'ensemble Θ' des expériences disjointes.

Nous pouvons, alors, énoncer le lemme ci-après :

LEMME 7. — *Si δ_1 et δ_2 sont deux expériences de Δ, alors :*

$$H^*(\delta_1 \vee \delta_2) = H[(\delta_1 \vee \delta_2)'].$$

Nous établissons maintenant le résultat suivant, dans le cadre de l'exemple concret exposé à la fin du paragraphe IV.

LEMME 8. — *Soient δ_1, δ_2 et α trois expériences appartenant à Δ telles que $\delta_1 \leqslant \delta_2$, alors*

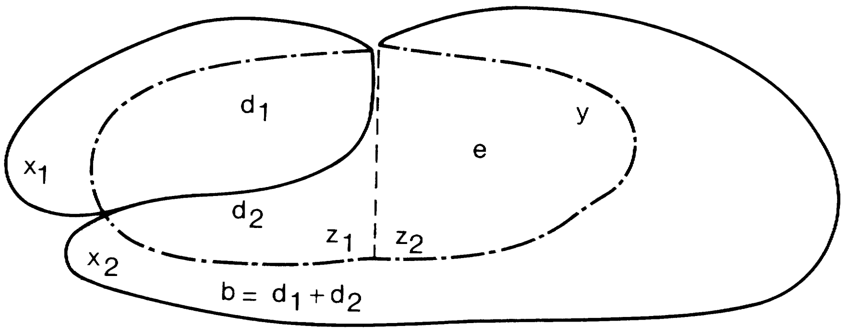
$$H^*(\delta_2 \vee \alpha) - H^*(\delta_1 \vee \alpha) \leqslant H(\delta_2) - H(\delta_1).$$

Démonstration. — Il suffit de prouver que, si $y \in \tilde{\delta}_1$, si $(z_k)_{k\in K} \subset \tilde{\delta}_2$ et vérifie $y = \bigcup_{k\in K} z_k$ et si $(x_i)_{i\in I} = \tilde{\alpha}$ alors :

$$\sum_{i\in I}\left[\sum_{k\in K} - p(x_i \cap z_k) \operatorname{Log} p(x_i \cap z_k) + p(x_i \cap y) \operatorname{Log} p(x_i \cap y)\right]$$
$$\leqslant \sum_{k\in K} - p(z_k) \operatorname{Log} p(z_k) + p(y) \operatorname{Log} p(y).$$

Or ceci est vérifié car la dérivée de $-x \operatorname{Log} x$ est décroissante sur $[0, 1]$.

Il suffit d'effectuer la démonstration en considérant un $y \in \tilde{\delta}_1$ fixé en supposant que $y = z_1 \cup z_2$ où les z_i appartiennent à $\tilde{\delta}_2$ et en supposant que $\tilde{\alpha}$ conserve z_2 et fournit une partition plus fine de z_1. Nous pouvons supposer que $I = \{1, 2\}$ et que $z_2 \subset x_2$.



Nous posons :

$$p(y) = a\,,\ p(z_1) = b\,,\ p(z_2) = e = p(x_2 \cap z_2)$$
$$p(y \cap x_1) = p(z_1 \cap x_1) = d_1\,,\ p(z_1 \cap x_2) = d_2$$

Nous voyons que

$$a = b + e\,,\ b = d_1 + d_2\,.$$

Nous notons $\rho(x) = -x \operatorname{Log} x$.

Il nous faut montrer que :

$$R = \rho(d_1) + \rho(d_2) + \rho(e) - \rho(d_1) - \rho(d_2 + e) - \rho(d_1 + d_2) - \rho(e) + \rho(a)$$

est négatif ou nul.

Ce qui s'écrit encore :

$$R = -d_2 \operatorname{Log} d_2 + (d_2 + e) \operatorname{Log}(d_2 + e) + (d_1 + d_2) \operatorname{Log}(d_1 + d_2) - a \operatorname{Log} a$$
$$R = -(b - d_1) \operatorname{Log}(b - d_1) + (a - d_1) \operatorname{Log}(a - d_1) + b \operatorname{Log} b - a \operatorname{Log} a$$

Nous fixons z_1 et z_2 ; nous supposons x_1 variable, $x_1 \cap z_2 = \phi$.

Nous évaluons la dérivée de R par rapport à d_1 :

$$R' = +\operatorname{Log}(b - d_1) + 1 - \operatorname{Log}(a - d_1) - 1$$
$$= \operatorname{Log}(b - d_1) - \operatorname{Log}(a - d_1)$$

Comme $a \geqslant b$, cette dérivée est négative ou nulle ; donc R est une fonction décroissante de d_1.

La valeur maximale de R est alors obtenue pour $d_1 = 0$.

Or, si $d_1 = 0$:

$$R_0 = -b \operatorname{Log} b + a \operatorname{Log} a + b \operatorname{Log} b - a \operatorname{Log} a = 0$$

Nous pouvons donc conclure que $R \leqslant R_0 = 0$; et le lemme est démontré.

Dans la suite, nous nous plaçons dans le cadre où le lemme 8 est vérifié et nous supposons :

⑤ Si δ_1, δ_2 et α sont trois expériences appartenant à Δ et telles que $\delta_1 \leqslant \delta_2$, alors :

$$H^*(\delta_2 \vee \alpha) - H^*(\delta_1 \vee \alpha) \leqslant H(\delta_2) - H(\delta_1).$$

Nous pouvons alors montrer l'assertion ci-dessous :

LEMME 9. — *Soient α_1, α_2, δ_1, δ_2 des expériences appartenant à Δ et vérifiant $\alpha_i \leqslant \delta_i$ pour $i = 1, 2$.*

Nous avons :

$$H^*(\delta_1 \vee \delta_2) - H^*(\alpha_1 \vee \alpha_2) \leqslant [H(\delta_1) - H(\alpha_1)] + [H(\delta_2) - H(\alpha_2)].$$

Démonstration. — Elle se fait en utilisant le lemme 8 :

$$\begin{aligned} H^*(\delta_1 \vee \delta_2) &- H^*(\alpha_1 \vee \alpha_2) \\ &= [H^*(\delta_1 \vee \delta_2) - H^*(\alpha_1 \vee \delta_2)] + [H^*(\alpha_1 \vee \delta_2) - H^*(\alpha_1 \vee \alpha_2)] \\ &\leqslant [H(\delta_1) - H(\alpha_1)] + [H(\delta_2) - H(\alpha_2)]. \end{aligned}$$

LEMME 10. — *Soient δ_1 et δ_2 deux expériences de Δ, γ_1 et γ_2 deux expériences de Γ telles que $\delta_i \geqslant \gamma_i$ pour $i = 1$ et 2. Alors :*

$$H^*(\delta_1 \vee \delta_2) - H(\gamma_1 \vee \gamma_2) \leqslant [H(\delta_1) - H(\gamma_1)] + [H(\delta_2) - H(\gamma_2)].$$

Démonstration. — Considérons $H(\gamma_1 \vee \gamma_2)$.

$$H(\gamma_1 \vee \gamma_2) = \inf\{ H(\delta) : \gamma_1 \vee \gamma_2 \leqslant \delta \in \Delta \}$$

Si $\delta \in \Delta$ est plus fine que $\gamma_1 \vee \gamma_2$, alors pour $i \in \{1, 2\}$ et pour tout $y \in \widetilde{\gamma}_i$, il existe une famille $(z_k)_{k\in K} \subset \widetilde{\delta}$ telle que $y = \bigcup_{k\in K} z_k$.

Il en résulte que $\widetilde{\delta}$ est une partition de Ω, plus fine que $(\gamma_1 \vee \gamma_2)' = (\gamma_1' \vee \gamma_2')'$ donc plus fine que $\gamma_1' \vee \gamma_2'$

$$H(\gamma_1 \vee \gamma_2) = H(\gamma_1' \vee \gamma_2') = \inf\{ H(\alpha_1 \vee \alpha_2),\ \gamma_i \leqslant \alpha_i \in \Delta \}$$

Par passage à la limite, le lemme 9 permet alors de prouver le lemme 10.

Nous pouvons maintenant établir l'informativité des bornes supérieures finies d'expériences informatives.

PROPOSITION 11. — *Toute borne supérieure d'une famille finie d'expériences informatives est, elle-même, informative.*

La démonstration de cette proposition se fait comme celle de la proposition 2 paragraphe 4 de [*6*].

Nous nous proposons maintenant d'étudier, comme en [*6*], la stabilité des expériences informatives par bornes supérieures dénombrables.

Dans l'article cité précédemment, la propriété de stabilité est obtenue lorsque Δ est stable par borne supérieure dénombrable de suites croissantes et lorsque, pour toute suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, croissante dans Δ, nous avons :

$$H\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \delta_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \nearrow H(\delta_n).$$

Dans le cas des exemples cités à la fin du paragraphe IV, Δ n'est pas stable par borne supérieure dénombrable de suites croissantes. Nous considérons la sur-classe Δ_0 formée des expériences δ, disjointes, non nécessairement dénombrables et dont les événements sont p-mesurables [resp. compacts]. Nous munissons Δ_0 de l'information :

$$\forall \delta \in \Delta_0, \qquad H(\delta) = \sup\{ H(\delta'),\ \delta \geqslant \delta' \in \Delta \}.$$

Nous voyons alors que Δ_0 est stable par bornes supérieures dénombrables.

LEMME 12. — *Si Ω est un espace tributé, muni d'une probabilité p et si Δ est l'ensemble des expériences disjointes dénombrables dont les événements sont p-mesurables, pour toute suite croissante $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Delta_0$, nous avons :*

$$H\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \delta_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \nearrow H(\delta_n).$$

Démonstration. — Il est évident que

$$H\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \delta_n\Big) \geqslant \lim_{n\to\infty} \nearrow H(\delta_n).$$

Pour démontrer le lemme 12, il suffit de l'établir lorsque $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \delta_n \in \Delta$.

Nous posons $\tilde{\delta}_n = \{ x_n^p \}_{p\in\mathbb{N}}$. Comme la suite $(\tilde{\delta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, pour tout $p \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$x_p^n = \bigcup_{k\in K_p} x_k^{n+1} \quad \text{où} \quad K_p \subset \mathbb{N}.$$

Et

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \delta_n = \{ y_{(p_n)_{n\in\mathbb{N}}} = x_p^0 \cap x_{p_1}^1 \cap \ldots \cap x_{p_n}^n \cap x_{p_{n+1}}^{n+1} \cap \ldots \}$$

où

$$p_{n+1} \subset K_{p_n}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad x_{p_{n+1}}^{n+1} \subset x_{p_n}^n.$$

Par continuité, nous voyons que :

$$\theta[y_{(p_n)_{n\in\mathbb{N}}}] = \lim_{n\to\infty} \searrow \theta(x_{p_n}^n).$$

Nous avons supposé que $\{ p_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ est dénombrable.
Nous pouvons écrire $\{ y_{(p_n)_{n\in\mathbb{N}}} \} = \{ y_k \}_{k\in\mathbb{N}}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un entier n_k tel que

$$| \theta(y_h) - \theta(x^{n_k}_{p_{n_k}}) | < \varepsilon \cdot 2^{-k-1}$$

Donc

$$\sum_{k \leqslant K} \theta(y_k) \leqslant \theta(\delta_{\sup_{k \leqslant K} \{n_k\}}) + \varepsilon$$

Et, par passage à la limite, lorsque K tend vers l'infini :

$$H\left(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \delta_n\right) \leqslant \sup_{n \in \mathbb{N}} \theta(\delta_n) + \varepsilon .$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons :

$$H\left(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \delta_n\right) = \lim_{n \to \infty} \nearrow H(\delta_n) .$$

Nous continuons notre étude sous l'hypothèse suivante :

⑥ Pour toute suite croissante $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, contenue dans Δ, la borne supérieure $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$ est informative et

$$H\left(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \delta_n\right) = \lim H(\delta_n) .$$

PROPOSITION 13. — a) *Pour toute suite croissante* $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Theta$ *:*

$$H^*\left(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \beta_n\right) = \sup_{n \in \mathbb{N}} H^*(\beta_n)$$

b) *La borne supérieure d'une suite d'expériences informatives est, elle-même, informative.*

La démonstration de cette proposition utilise le lemme 9 et l'hypothèse 6 ; elle est celle de la proposition 3 de [*6*].

VII. ÉTUDE DES INFORMATIONS H_* ET H^*

Il existe une vaste classe d'expériences α pour lesquelles l'information supérieure $H^*(\alpha)$ est strictement plus grande que l'information inférieure $H_*(\alpha)$. Par exemple, pour toute expérience α, non majorée par une expérience de Δ, nous avons $H^*(\alpha) = +\infty$. C'est alors l'information inférieure $H_*(\alpha)$ qui permet le mieux de juger la finesse de α.

Revenons au cas concret de référence dans cet article (fin du paragraphe IV). Les expériences non dénombrables ne sont pas majorées par Δ et leur expérience supérieure est infinie.

Considérons les deux expériences suivantes sur l'ensemble $\Omega = [0, 1]^2$, muni de la mesure de Lebesgue superficielle :

$\alpha = \{ \{ x \} : x \in \Omega \}$ est l'expérience constituée de tous les points de Ω.

$\beta = \{ \Omega_1, \{ x \} : x \in \Omega \setminus \Omega_1 \}$ est l'expérience constituée d'un sous-ensemble $\Omega_1 \subset \Omega$, pour lequel $\Omega \setminus \Omega_1$ est p-négligeable, ainsi que des points de $\Omega \setminus \Omega_1$.

Nous voyons que α est plus fine que β.

Or :

$$H^*(\alpha) = H^*(\beta) = +\infty$$

et

$$H_*(\alpha) = \sup \{ H(\gamma) : \alpha \geqslant \gamma \in \Gamma \} = \sup \{ H(\gamma) : \gamma \in \Gamma \} = +\infty$$
$$H_*(\beta) = \sup \{ H(\gamma) : \beta \geqslant \gamma \in \Gamma \}.$$

Si γ est une expérience finie, à événements p-mesurables, majorée par β, son intersectée γ' est encore majorée par β et appartient à Γ ; elle s'écrit :

$$\gamma' \leqslant \{ \Omega_1, x_1, x_2, \ldots, x_n \}$$

où les x_i sont contenus dans $\Omega \setminus \Omega_1$.

L'information de γ' vérifie :

$$H(\gamma') \leqslant -p(\Omega_1) \operatorname{Log} p(\Omega_1) + \sum_{i=1}^{n} - p(x_i) \operatorname{Log} p(x_i) = 0.$$

Nous voyons donc que :

$$H_*(\beta) = 0.$$

Dans ce cas, l'information inférieure H_* permet de mieux mesurer la finesse de l'expérience que l'information supérieure H^*.

Cependant, ceci n'est pas une règle générale et nous pouvons aussi, trouver des exemples de couples d'expériences (α, β) tels que $\alpha \leqslant \beta$, $H_*(\alpha) = H_*(\beta)$ et pour lesquelles $H^*(\alpha) \leqq H^*(\beta)$. Nous citons un exemple.

Soit $\Omega = [0, 1]^2$ muni de la mesure de Lebesgue sur le carré. Nous notons x_n le sous-ensemble de Ω défini, pour $n \geqslant 1$, par :

$$x_n = [1 - n^{-2},\ 1 - (n+1)^{-2}[\times [0, 1].$$

Nous notons α l'expérience

$$\alpha = \{ x_n (n \geqslant 1),\ \{ 1 \} \times [0, 1] \} \qquad \text{(dénombrable)}$$

et nous désignons par β l'expérience :

$$\beta = \{ x_n (n \geqslant 1),\ \{ x \} (x \in \{ 1 \} \times [0, 1]) \} \qquad \text{(non dénombrable)}$$

Nous voyons que $\alpha \leqslant \beta$. De plus :

$$H_*(\alpha) = H_*(\beta) = - \sum_{n \geqslant 1} p(x_n) \operatorname{Log} p(x_n) < \infty .$$

$$H^*(\alpha) = H_*(\alpha) < \infty$$

mais

$$H^*(\beta) = + \infty \text{ car } \beta \text{ est non dénombrable}.$$

Nous pouvons résumer ce qui vient d'être dit.

THÉORÈME 14. — *Les informations inférieures et supérieures sont deux informations différentes sur* Θ *qui coïncident toutes deux avec* H *sur l'ensemble des expériences informatives, ensemble qui contient* $\Gamma \cup \Delta$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. AVAN, *Entropie et information en physique et en biologie de Boltzmann à Von Neumann.* Note interne L. P. E., C. N. A. M., Paris, 1976.
[2] V. I. ARNOLD, A. AVEZ, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique.* Gauthier-Villars, Paris, 1967.
[3] L. DE BROGLIE, *Sens philosophique et portée pratique de la cybernétique.* Conférence donnée le 5 octobre 1951 au Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris.
[4] G. CHOQUET, Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, t. **5**, 1953-1954, p. 131-295.
[5] M. DEHEN-MASTRANGELO, Y. DERMENJIAN, S. SAINT-RAYMOND, Rabotages sur un treillis. *Sém. Choquet (Initiation à l'Analyse)*, 9e année, n° 22, 1969-1970.
[6] M. MASTRANGELO, V. MASTRANGELO, Entropie, paramètres thermodynamiques, information associée aux événements et aux expériences. *Ann. Inst. H. Poincaré*, Section A, Vol. **XXX**, n° 4, 1979, p. 295-314.
[7] M. MASTRANGELO, V. MASTRANGELO, Information associée à une expérience. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. A, t. **288** (7 mai 1979), p. 855-858.
[8] M. MASTRANGELO, V. MASTRANGELO, Expériences informatives et expériences nodales. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. A, t. **288** (14 mai 1979), p. 883-884.
[9] C. DELLACHERIE, *Ensembles aléatoires II. Séminaire de Probabilités*, 1967-1968. Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg.
[10] B. FORTE, N. PINTACUDA, Information fournie par une expérience, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **266**, 1968, Série A, p. 242-245.
[11] B. FORTE, N. PINTACUDA, Sull' Informazione associata alle esperienze incomplete. *Annali di Mat. pura ed appl.*, 4e série, t. **80**, 1968, p. 215-234.
[12] R. S. INGARDEN, K. URBANIK, Information without probability. *Coll. Math. Warzawa.*, t. **9**, 1962, p. 131-150.
[13] J. KAMPE DE FERIET, *La théorie généralisée de l'information et la mesure subjective de l'information. Théories de l'Information.* Actes des Rencontres de Marseille, Luminy, 5 au 7 juin 1973, Springer-Verlag, Berlin, 1974.
[14] J. KAMPE DE FERIET, B. FORTE, Information et probabilités. *C. R. Acad. Sci., Paris*, t. **265**, 1967, Série A, p. 110-114, 142-146 ; 350-353.
[15] D. A. KAPOS, *Strukturtheorie der Wahrscheinlichkeisfelder und-raume.* Berlin. Springer-Verlag, 1960 (Ergebnisse der mathematik, Neue Falge, 24).

[*16*] N. PINTACUDA, *Quelques développements récents à la théorie de l'Information.* Conférence faite à Paris le 22 janvier 1969.

[*17*] N. PINTACUDA, Prolongement des mesures d'information. *C. R. Acad. Sci., Paris,* t. **269**, 3 novembre 1969, Série A, p. 861-864.

[*18*] A. RENYI, *On measures of entropy and information.* Proceedings of the 4th. Berkeley symposium on mathematical statistics and probability. Berkeley. Vol. **I**, 1960, p. 547-561 ; Berkeley. University of California Press. 1961.

[*19*] W. SIERPINSKI, Sur la puissance des ensembles mesurables (B). *Fund. Math. Warszewa,* t. **5**, p. 166-171.

[*20*] A. WEHRL, General properties of entropy. *Reviews of Modern Physics,* vol. **30**, n° 2, avril 1978.

(Manuscrit reçu le 3 décembre 1979)