ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ABDELWAHEB CHARFI

Sur les extensions et la cohomologie des représentations des groupes $H_n \wedge SO(n)$

Annales de l'I. H. P., section A, tome 32, nº 1 (1980), p. 73-90

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1980__32_1_73_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXXII, n° 1, 1980, p. 73-90.

Section A :
Physique théorique.

Sur les extensions et la cohomologie des représentations des groupes $H_n \wedge SO(n)$

par

Abdelwaheb CHARFI
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Tunis,
Campus Belvédère, Tunis (Tunisie)

RÉSUMÉ. — On détermine toutes les représentations unitaires irréductibles fortement continues, ainsi que leurs extensions et leur 1-cohomologie, des groupes produits semi-directs $G_n = H_n \wedge SO(n)$, où H_n est le groupe de Heisenberg à $2n + 1$ paramètres et la représentation de $SO(n)$, définissant le produit semi-direct, est $\Delta \oplus \Delta \oplus \varepsilon$, Δ étant la représentation fondamentale et ε la triviale.

1. INTRODUCTION

La connaissance de la cohomologie et des extensions des représentations des groupes localement compacts se pose, de façon essentielle, dans diverses circonstances, aussi bien mathématiques que physiques, comme le montre le répertoire (restreint) suivant de situations particulières où les méthodes cohomologiques trouvent leurs applications :

1° La description de la topologie du dual des groupes localement compacts à base dénombrable d'ouverts (cf., par exemple, [*1*] et les références qui y sont citées).

2° Les déformations [*2*] (et les prolongements analytiques [*3*]) des représentations (de dimension finie ou infinie) des groupes (ou algèbres) de Lie.

3° Les liens (éventuels) qui existent entre, d'une part, les solutions d'une équation de champs non linéaire, covariante sous l'action d'un groupe, et d'autre part, les solutions d'une équation linéaire covariante associée [*4*], ainsi que les représentations non linéaires [*5*] du groupe de covariance.

4° Le problème de jauge et les symétries physiques (cf., par exemple, [*6*]).

Les groupes de Lie qui interviennent, habituellement, dans les symétries physiques sont des groupes à radical abélien; plus précisément des produits semi-directs d'un groupe de symétrie semi-simple par un groupe de « translations » qui est le radical. Récemment, il a été introduit, dans divers problèmes « d'invariance », des produits semi-directs à radical nilpotent qui est, soit le groupe de Heisenberg [*7*]-[*8*] soit (plus généralement) des produits directs de groupes abéliens par des extensions centrales (à centre pluri-dimensionnel) de groupes abéliens [*9*]. A notre connaissance, excepté l'article [*10*] où les représentations unitaires irréductibles fortement continues (r. u. i.) de groupes de ce type sont étudiées (par une méthode combinant les résultats de Diximier-Kirillov [*11*] sur les représentations des groupes nilpotents d'une part, et ceux de Mackey [*12*]-[*13*] sur les représentations projectives des extensions de groupes d'autre part), ce type de groupe ne semble pas avoir reçu, jusqu'à présent, une étude systématique dans la littérature, et beaucoup de questions le concernant restent encore posées (automorphismes, déformations, cohomologie...).

Telles furent les motivations qui nous ont conduit à étudier les groupes $G_n = H_n \wedge SO(n)$, où : H_n est le groupe de Heisenberg, à $2n + 1$ paramètres, engendré par $(P^1, \ldots, P^n; Q^1, \ldots, Q^n; C)$; $\wedge$ désigne le produit semi-direct défini par la représentation $\Delta \oplus \Delta \oplus \varepsilon$ (Δ est la représentation fondamentale de $SO(n)$ et ε sa représentation triviale) opérant dans l'espace somme directe des espaces engendrés respectivement par $(P^1, \ldots, P^n)$, $(Q^1, \ldots, Q^n)$, (C). Le choix des groupes G_n est dû, en outre et entre autres, aux deux faits fondamentaux suivants :

1° G_n peut être interprété comme étant le groupe de symétrie quantique cinématique (dans le sens de [*14*]) ou passif (dans le sens de [*8*]) de l'espace-temps non relativiste à $(n + 1)$-dimensions; plus précisément, le groupe de symétrie de l'appareillage macroscopique de mesures. Ce point de vue conduit à caractériser, mathématiquement, une observable d'une particule par un système d'imprimitivité [*13*] généralisé [*8*] relativement à G_n, et ce sans faire appel à la dynamique. Dans cette interprétation, le groupe dynamique (actif) (i. e. le groupe de symétrie de l'espace-temps qui laisse les trajectoires de la particule invariantes) est le groupe de Galilée généralisé. Il convient de souligner que ces deux groupes ne sont pas isomorphes.

2° A l'instar de [*15*], où le groupe $H_4 \wedge SO(3, 1)$ (qui fut adopté [*16*] comme étant le groupe passif quantique de l'espace-temps relativiste habituel) est déformé en l'un des deux groupes inhomogènes de de Sitter, G_n se déforme en le groupe de Poincaré (actif) de l'espace-temps à $(n + 1)$-dimensions.

Cet article est organisé comme suit : dans le paragraphe 2, nous introduisons les groupes G_n. Une décomposition de G_n, faisant apparaître un sous-groupe normal abélien fermé (remarque 2.1), nous permet, au paragraphe 3, de déterminer, par la méthode des représentations induites de Wigner-Mackey [*13*] (par étages), toutes les r. u. i. des groupes G_n. S'appuyant sur les travaux de Pinczon-Simon [*17*]-[*18*] et Guichardet [*19*]-[*20*], le paragraphe 4 est consacré à l'étude des extensions des représentations classifiées dans le paragraphe 3. Le premier résultat, qui généralise celui de Guichardet, est que toute extension de deux r. u. i. de G_n provenant de deux orbites distinctes est triviale (théorème 4.1). Par ailleurs, l'utilisation de la suite exacte de Hochild-Serre montre que toute extension de deux r. u. i. de G_n provenant de deux familles différentes (au sens du théorème 3.1) est triviale, et ce dans le cas où ces r. u. i. sont non triviales sur la partie abélienne (proposition 4.5 et corollaire 4.1). Les propositions 4.2, 4.3 et 4.4 traitent les extensions de deux r. u. i. triviales sur la partie abélienne. Dans le cas particulier de deux r. u. i. triviales sur H_n, le problème se ramène à la réduction du produit tensoriel de deux r. u. i. de $SO(n)$. On montre (remarque 4.2) que, sous certaines conditions et pour $n = 3$, le groupe des extensions est de dimension infinie. Les propositions 4.8, 4.9 et 4.10 traitent les cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$. Dans le paragraphe 5, on étudie la cohomologie des r. u. i. des groupes G_n : tous les groupes de cohomologie des r. u. i. de G_n sont nuls sauf (proposition 5.3) celui de la représentation triviale sur H_n et dont la restriction à $SO(n)$ est la fondamentale; pour cette représentation, le groupe de cohomologie est bidimensionnel. Les résultats sont différents dans les cas $n = 1$ et $n = 2$ qui sont étudiés à part (proposition 5.4, 5.5). Enfin, en utilisant un résultat de Pinczon-Simon, on montre (remarque 5.2) que la cohomologie locale (des groupes G_n) est la même que la cohomologie globale.

2. STRUCTURE DES GROUPES $H_n \wedge SO(n)$

Soient les groupes de Lie R^n, $SO(n)$ et soit P_n l'espace produit $R^n \times R^n \times SO(n)$. Si l'on pose, pour tout couple (a, b, A), (a', b', A') de P_n :

$$(a, b, A)(a', b', A') = (a + A(a'), b + A(b'), AA');$$

alors : on munit P_n d'une structure de groupe de Lie connexe à $[(n + 1)(n + 2) - 2]/2$ paramètres. En outre, le groupe P_n ainsi défini, est produit semi-direct topologique de $SO(n)$ par le groupe produit $R^n \times R^n$ relativement à la représentation $\Delta \oplus \Delta$ de $SO(n)$.

PROPOSITION 2.1. — Soient les groupes de Lie R et P_n, G_n l'espace produit $R \times P_n$ et, pour tout couple $h = (a, b, A)$, $h' = (a', b', A')$ de P_n, $\beta(h, h') = a.A(b')$, où $x.y$ désigne le produit scalaire habituel de R^n. Si l'on pose, pour tout couple (θ, h), (θ', h') de G_n :

$$(\theta, h)(\theta', h') = (\theta + \theta' + \beta(h, h'), hh').$$

1° On munit G_n d'une structure de groupe de Lie connexe à $(n+1)(n+2)/2$ paramètres.

2° Le groupe G_n ainsi défini est une extension centrale de P_n par R.

Remarque 2.1. — Soient H et K les sous-ensembles de G_n définis par : $H = \{(\theta, a, 0, 1) ; \theta \in R, a \in R^n\}$, $K = \{(0, 0, b, A) ; b \in R^n, A \in SO(n)\}$. Alors H (resp. K) est un sous-groupe normal (resp. un sous-groupe) de G_n isomorphe à R^{n+1} (resp. $R^n \wedge SO(n)$) et $G_n = H \wedge K$.

PROPOSITION 2.2. — Soient $\{C, (P^\alpha)\}$ (resp. $\{(Q^\beta), (I^{\alpha\beta})\}$) les générateurs infinitésimaux canoniques du sous-groupe H (resp. K). Alors

$$\{C, (P^\alpha), (Q^\beta), (I^{\alpha\beta})\}$$

est une base de l'algèbre de Lie $\underline{G}_n$ du groupe de Lie G_n. Les relations de structure (non nulles) de $\underline{G}_n$ dans cette base sont données par :

$$\begin{aligned}
[I^{\alpha\beta}, I^{\gamma\varepsilon}] &= -\delta^{\alpha\gamma}I^{\beta\varepsilon} - \delta^{\beta\varepsilon}I^{\alpha\gamma} + \delta^{\alpha\varepsilon}I^{\beta\gamma} + \delta^{\beta\gamma}I^{\alpha\varepsilon}\\
[I^{\alpha\beta}, P^\gamma] &= -\delta^{\alpha\gamma}P^\beta + \delta^{\beta\gamma}P^\alpha\\
[I^{\alpha\beta}, Q^\gamma] &= -\delta^{\alpha\gamma}Q^\beta + \delta^{\beta\gamma}Q^\alpha\\
[P^\alpha, Q^\beta] &= \delta^{\alpha\beta}C, \text{ où } \delta^{\alpha\beta} \text{ est le symbole de Kronecker.}
\end{aligned}$$

Remarque 2.2. — Si $\underline{G}$ est une algèbre de Lie somme directe (resp. semi-directe) de deux algèbres de Lie $\underline{H}$ et $\underline{K}$, on notera, quand il n'y a aucune confusion à craindre, $\underline{G} = \underline{H} \oplus \underline{K}$ (resp. $\underline{H} \oplus\!\!\!\!\in \underline{K}$ si $\underline{H}$ est l'idéal). Nous avons $\underline{G}_n = \underline{H}_n \oplus\!\!\!\!\in \underline{SO(n)}$ relativement à la représentation $\Delta \oplus \Delta \oplus \varepsilon$ de $\underline{SO(n)}$; en outre, cette décomposition est une décomposition de Levi de $\underline{G}_n (n \geq 3)$.

3. REPRÉSENTATIONS UNITAIRES DES GROUPES $H_n \wedge SO(n)$

Reprenons la décomposition $G_n = H \wedge K$. Il suit de ce qui précède que G_n est un groupe localement compact séparable et que H, K en sont des sous-groupes fermés; aussi la méthode la plus naturelle pour déterminer ses r. u. i. est celle des représentations induites [*13*] (par étages), pourvu qu'il vérifie les propriétés requises.

NOTATION 3.1. — Dans ce qui suit, on notera $\widehat{G}$ le dual de G et $({}^{(n)}D^m, {}^{(n)}\mathscr{H}^m)$ la r. u. i. de $SO(n) (n \geq 3)$ de poids principal m.

PROPOSITION 3.1. — Soient $G_n = H \wedge K$ et $\widehat{h} = (\omega, p)$ l'élément générique de $\widehat{H}$. Alors, les orbites de $\widehat{H}$ relativement à l'action de K sont :

(0, 0), $\{0\} \times S_r^{n-1}$, $\{\omega\} \times R^n$ (ω est un réel non nul et S_r^{n-1} la sphère de R^n centrée à l'origine, de rayon $r > 0$) de stabilisateur respectif $R^n \wedge SO(n)$, $R \times (R^{n-1} \wedge SO(n-1))$, $SO(n)$.

Démonstration. — Un élément $k = (b, A)$ de K agit sur un élément $\widehat{h} = (\omega, p)$ de $\widehat{H}$ comme suit : $\langle k(\widehat{h}), h \rangle = \langle \widehat{h}, k^{-1}hk \rangle$, $\forall h \in H$; l'action de $\widehat{H}$ sur H étant définie par : $\langle \widehat{h}, h \rangle = e^{i(\omega + p.a)}$, où $h = (\theta, a)$. Dans ces conditions

$$k(\widehat{h}) = (\omega, \omega b + A(p))$$

COROLLAIRE 3.1. — Le produit semi-direct $G_n = H \wedge K$ est régulier.

Démonstration. — Il suffit de montrer que $\widehat{H}$ contient une famille dénombrable de sous-ensembles mesurables (z_i), chacun étant une union d'orbites, telle que chaque orbite est l'intersection des z_i qui la contiennent [*21*]. Or la famille :

$$z_{0,0} = \{(0, (0))\},$$
$$z_{r_1,r_2} = \{0\} \times \bigcup_{r_1<r<r_2} S_r^{n-1}, \quad \text{avec} \quad r_1, r_2 \quad \text{dans Q} \quad \text{et} \quad 0 < r_1 < r_2,$$
$$z_{r'_1,r'_2} = \bigcup_{r'_1<r<r'_2} (\{r\} \times R^n) \quad \text{avec} \quad r'_1, r'_2 \quad \text{dans Q} \quad \text{et} \quad r'_1, r'_2 > 0,$$

vérifie cette propriété.

PROPOSITION 3.2. — Soit G l'un des produits semi-directs rencontrés dans ce procédé d'induction par étages. Alors :

1° G est unimodulaire.

2° G est de type I.

3° Toute représentation unitaire de G se décompose, de façon unique, en une intégrale directe (éventuellement discrète) de représentations unitaires irréductibles.

4° Toutes les r. u. i. de G sont induites par les r. u. i. de ses stabilisateurs.

Démonstration. — En effet, si G est un groupe qui est produit semi-direct de deux sous-groupes unimodulaires fermés H et K, H étant normal dans G, il suit, de [*22*] ch. II, § 7, que G est unimodulaire si l'on a, pour toute fonction $f \in L_\mu^1(H)$:

$$\int_H f(khk^{-1}) d_\mu(h) = \int_H f(h) d_\mu(h),$$

où d_μ est une mesure de Haar invariante sur H ; il s'ensuit, en appliquant cette propriété par étapes, que tous les produits semi-directs rencontrés sont unimodulaires, et que leurs mesures invariantes sont obtenues en considérant le produit des mesures de leurs facteurs, d'où le 1°. Le 2° est une conséquence du fait que G est un produit semi-direct régulier tel que le stabilisateur de tout point du dual (du facteur inhomogène) est lui-même de type I. Le 3° résulte du 2°. Le 4° est une conséquence du fait que G est un groupe localement compact séparable qui est un produit semi-direct régulier de deux de ses sous-groupes fermés, le sous-groupe normal étant abélien. C. Q. F. D.

Soient $G = H \wedge K$ un de ces produits semi-directs, $\widehat{h}_0$ un élément d'une orbite Ω, Λ une section (arbitraire) de Ω dans K vérifiant $\Lambda_{\widehat{h}}(\widehat{h}_0) = \widehat{h}$, et $(L, \mathscr{H}_L)$ une r. u. i. du stabilisateur de $\widehat{h}_0$. Alors, la représentation U^L de G, induite par L, opère dans l'espace de Hilbert $L^2_\mu(\Omega, \mathscr{H}_L)$, où μ est une mesure invariante par K concentrée sur Ω (unique à un facteur constant près), suivant :

$$\{ U^L_{(h,k)} F \} (\widehat{h}) = \langle \widehat{h}, h \rangle L(\Lambda^{-1}_{\widehat{h}} k \Lambda_{k^{-1}(\widehat{h})}) F(k^{-1}(\widehat{h})), \tag{1}$$

où

$$(h, k) \in G, \ \widehat{h} \in \widehat{H} \qquad \text{et} \qquad F \in L^2_\mu(\Omega, \mathscr{H}_L).$$

LEMME 3.1. — Les r. u. i. du groupe $R^n \wedge SO(n) (n \geq 3)$ sont classifiées en deux familles :

1° $L^{m,r'}$, où m est un poids principal d'une r. u. i. de $SO(n-1)$ et $r' > 0$, définie sur l'espace $L^2(S^{n-1}_{r'}, {}^{(n-1)}\mathscr{H}^m)$ par :

$$\{ L^{m,r'}(b, A) F \} (p) = e^{ip.b(n-1)} D^m(A') F(A^{-1}(p)),$$

où

$$A' = \Lambda^{-1}_p A \Lambda_{A^{-1}(p)} \qquad \text{et} \qquad p \in S^{n-1}_r.$$

2° L^m, où m est un poids principal d'une r. u. i. de $SO(n)$, définie sur l'espace ${}^{(n)}\mathscr{H}^m$ par :

$$L^m(b, A)(h) = {}^{(n)}D^m(A)(h), \ \forall h \in {}^{(n)}\mathscr{H}^m.$$

LEMME 3.2. — Les r. u. i. de G_n provenant de l'orbite triviale sont de la forme :

1° $U^{m,r'}$, où m est un poids principal d'une r. u. i. de $SO(n-1)$ et $r' > 0$, définie sur l'espace $L^2(S^{n-1}_{r'}, {}^{(n-1)}\mathscr{H}^m)$ par :

$$\{ U^{mr'}_{(\theta,a,b,A)} F \} (p) = e^{ip.b(n-1)} D^m(A') F(A^{-1}(p)),$$

où

$$A' = \Lambda^{-1}_p A \Lambda_{A^{-1}(p)} \qquad \text{et} \qquad p \in S^{n-1}_{r'}.$$

2° U^m où m est un poids principal d'une r. u. i. de $SO(n)$, définie sur l'espace ${}^{(n)}\mathscr{H}^m$ par :

$$U^m_{(\theta,a,b,A)}(h) = {}^{(n)}D^m(A)(h), \ \forall h \in {}^{(n)}\mathscr{H}^m.$$

LEMME 3.3. — Les r. u. i. de G_n provenant d'une orbite de la forme $\{\omega\} \times R^n(\omega \neq 0)$ sont définies sur les espaces $L^2(\{\omega\} \times R^n, {}^{(n)}\mathcal{H}^m)$ par :

$$\{U^{m,\omega}_{(\theta,a,b,A)}F\}(\omega, p) = e^{i[\omega(\theta - a.b) + a.p]}\,{}^{(n)}D^m(A)[F(\omega, A)^{-1}(p - \omega b)],$$

où m est un poids principal d'une r. u. i. de SO(n) et $p \in R^n$.

Démonstration. — Le lemme 3.3. résulte de la relation (1) et du choix suivant de la section :

$$\Lambda(\omega, p) = (p/\omega, 1).$$

LEMME 3.4. — Les r. u. i. de G_n, provenant d'une orbite de la forme $\{0\} \times S^{n-1}_{r'}(r' > 0)$, sont classifiées en deux familles :

1° $U^{m,\omega',r'}$ où m est un poids principal d'une r. u. i. de SO(n − 1) et $\omega' \in R$, définie sur $L^2(S^{n-1}_{r'}, {}^{(n-1)}\mathcal{H}^m)$ par :

$$\left\{U^{m,\omega',r'}_{(\theta,a,b,A)}F\right\}(p) = e^{i(a.p + b''_n\omega')}\,{}^{(n-1)}D^m(A')F(A'^{-1}(p)),$$

où

$$p \in S^{n-1}_{r'} \qquad \text{et} \qquad (b'', A') = \Lambda'^{-1}_{(0,p)}(b, A)\Lambda'_{(0,A^{-1}(p))}\,;$$

Λ' étant une section de l'orbite dans K.

2° $U^{m,\omega',r'',r'}$, où m est un poids principal d'une r. u. i. de SO(n − 2), $\omega' \in R$, $r' > 0$ et $r'' > 0$; définie sur

$$L^2(S^{n-1}_{r'}L^2(\{\omega'\} \times S^{n-2}_{r''}, {}^{(n-2)}\mathcal{H}^m))$$

par :

$$\left\{U^{m,\omega',r'',r'}_{(\theta,a,b,A)}F\right\}(p, \omega', p') = e^{i(a.p + b''_n\omega' + b'''p')}\,{}^{(n-2)}D^m(A'')F(A^{-1}(p), \omega', A'^{-1}(p')),$$

où

$$A'' = \Lambda^{-1}_{p'}, A'\Lambda_{A'^{-1}(p')}, (p, p') \in S^{n-1}_{r'} \times S^{n-2}_{r''} \qquad \text{et} \qquad b''' = (b''_1, \ldots, b''_{n-1}).$$

Démonstration. — Le stabilisateur étant $R^n \wedge SO(n-1)$ et SO(n − 1) n'agissant que sur les (n − 1) premières composantes de R^n, les r. u. i. de $R^n \wedge SO(n-1)$ sont simplement les produits d'un caractère de R par une r. u. i. de $R^{n-1} \wedge SO(n-1)$.

THÉORÈME 3.1. — Les r. u. i. de G_n sont classifiées en 5 familles :

I) U^m, avec m un poids principal d'une r. u. i. de SO(n).

II) $U^{m,r'}$, avec m un poids principal d'une r. u. i. de SO(n − 1) et $r' > 0$.

III) $U^{m,\omega}$, avec m un poids principal d'une r. u. i. de SO(n) et $\omega \neq 0$.

IV) $U^{m,\omega',r'}$, avec m un poids principal d'une r. u. i. de SO(n − 1), $\omega' \in R$ et $r' > 0$.

V) $U^{m,\omega',r'',r'}$, avec m un poids principal d'une r. u. i. de $SO(n-2)$, $\omega' \in R$, $r' > 0$ et $r'' > 0$.

Démonstration. — Le théorème découle des lemmes 3.2, 3.3 et 3.4.

PROPOSITION 3.3. — Dans le cas $n = 1$, les r. u. i. de G_n sont classifiées en deux familles :

I) $U^{p,\lambda}$, où $p \in R$ et $\lambda \in R$, définie sur C par : $U^{p,\lambda}_{(\theta,a,b)}z = e^{i(ap+\lambda b)}z$.

II) U^{ω}, où $\omega \in R^*$ définie sur $L^2(R, C)$ par

$$\{ U^{\omega}_{(\theta,a,b)}F \}(p) = e^{i[\omega(\theta-ab)+pa]}F(p-\omega b).$$

Démonstration. — Il y a deux types d'orbites : $\Omega(0,p) = \{(0,p)\}$ et $\Omega(\omega, 0) = \{\omega\} \times R$, de stabilisateur respectif R, $\{0\}$; la proposition découle de la relation (1).

PROPOSITION 3.4. — Dans le cas $n = 2$, les r. u. i. de G_n sont classifiées en 4 familles :

I) $U^{r''}$ où $r'' > 0$, définie sur $L^2(S^1_{r''}, C)$ par $\{ U^{r''}_{(\theta,a,b,A)}F \}(p) = e^{ip.b}F(A^{-1}(p))$.

II) U^m où $m \in \mathbb{Z}$, définie sur C par : $U^m_{(\theta,a,b,A)}z = e^{im\theta'}z$, θ' étant l'angle de A.

III) $U^{\omega,m}$ où $\omega \in R^*$ et $m \in \mathbb{Z}$, définie sur $L^2(R^2, C)$ par :

$$\{ U^{\omega,m}_{(\theta,a,b,A)}F \}(p) = e^{i[\omega(\theta-a.b)+a.p+m\theta']}F(A^{-1}(p-\omega b)),$$

θ' étant l'angle de A.

IV) $U^{r',\alpha,\beta}$ où $r' > 0$ et $(\alpha, \beta) \in R^2$, définie sur $L^2(S^1_{r'}, C)$ par :

$$\left\{ U^{r'\alpha,\beta}_{(\theta,a,b,A)}F \right\}(p) = e^{i(a.p+\alpha b'_1+\beta b'_2)}F(A^{-1}(p)), \qquad \text{où} \qquad (b'_1, b'_2) = \Lambda_p^{-1}(b)$$

4. EXTENSIONS DES R. U. I. DES GROUPES $H_n \wedge SO(n)$

Dans le cas des orbites compactes, l'espace des vecteurs différentiables d'une r. u. i. de G_n coïncide avec l'ensemble des fonctions différentiables sur l'orbite, à valeurs dans l'espace des vecteurs différentiables de la représentation induisante [*23*]. D'autre part, la connaissance de la cohomologie différentiable détermine la cohomologie continue [*18*]. Certaines représentations induisantes des r. u. i. de G_n étant de dimension infinie, on est conduit, afin de pouvoir adapter les résultats de Guichardet [*20*] à ce cas, à écrire le théorème des noyaux de Shwartz comme suit :

LEMME 4.1. — Soient X, Y deux variétés compactes et E_1, E_2 deux espaces de Fréchet nucléaires. Alors

$$\mathscr{L}(C^\infty(X, E_1), C^\infty(Y, E_2)) \simeq C^\infty(Y, \mathscr{L}(C^\infty(X, E_1), E_2))$$

NOTATION 4.1. — Pour deux r. u. i. $(U^1, \mathscr{H}^1)$, $(U^2, \mathscr{H}^2)$ de G_n, on note : $\mathscr{H} = \mathscr{L}(\mathscr{H}^2, \mathscr{H}^1)$, (σ_i, E^i) la représentation induisante de $(U^i, \mathscr{H}^i)$, $E = \mathscr{L}(E^2, E^1)$, Π la représentation de G_n dans $\mathscr{H}$ définie par :

$$\Pi(g)h = U^1(g)hU^2(g^{-1}) ;$$

pour une r. u. i. $(U, \mathscr{H})$ de G_n, on convient de noter : S le stabilisateur d'un point $\widehat{h}_0$ de l'orbite, et T_0 l'espace tangent à l'orbite en $\widehat{h}_0$. G désignera dans la suite le groupe $G_n (n \geq 3)$, sauf mention explicite du contraire.

THÉORÈME 4.1. — Si $(U^1, \mathscr{H}^1)$ et $(U^2, \mathscr{H}^2)$ proviennent de deux orbites distinctes, alors $H^1(G, \mathscr{H}) = \{0\}$.

Démonstration. — C'est le théorème 11.1 de [*20*], généralisé par le lemme 4.1.

COROLLAIRE 4.1. — Soit $(U^1, \mathscr{H}^1)$ (resp. $(U^2, \mathscr{H}^2)$) une r. u. i. de G appartenant à la famille I) ou II) (resp. III) IV), ou V)), alors $H^1(G, \mathscr{H}) = \{0\}$. Soit $(U^1, \mathscr{H}^1)$ (resp. $(U^2, \mathscr{H}^2)$) une r. u. i. de G appartenant à la famille III) (resp. IV) ou V)) alors $H^1(G, \mathscr{H}) = \{0\}$.

Remarque 4.1. — Le caractère infinitésimal d'une r. u. i. de G appartenant à la famille III) est non nul ($C = i\omega \neq 0$), alors que celui de toute r. u. i. de G appartenant à l'une des familles I), II), IV), V) est nul. Aussi d'après [*18*] proposition 6.4 $H^1(G, \mathscr{H}) = \{0\}$.

PROPOSITION 4.1. — Soient $(U^1, \mathscr{H}^1)$ et $(U^2, \mathscr{H}^2)$ deux r. u. i. de G appartenant à la famille III) et provenant de la même orbite. Alors :

1° Si $U^1 \simeq U^2$ (U^1 équivalente à U^2), $H^1(G, \mathscr{H})$ est de dimension 1; un cocycle non trivial est donné par :

$$a(h, k) = \langle\ .\,, h\ \rangle\ id, \forall (h, k) \in G.$$

2° Si $U^1 \not\simeq U^2$ (U^1 non équivalente à U^2), $H^1(G, \mathscr{H}) = \{0\}$.

Démonstration. — La suite exacte de Hochild-Serre s'écrit, d'après [*20*] 6.1,

$$0 \to H^1(S, E) \to H^1(G, \mathscr{H}) \to ((R^{n+1})^\wedge/T_0 \otimes E)^S \to H^2(S, E).$$

S étant compact, $H^1(G, \mathscr{H}) \simeq ((R^{n+1})^\wedge/T_0 \otimes E)^S$. L'espace T_0 étant isomorphe à $\{0\} \times R^n$, $(R^{n+1})^\wedge/T_0$ peut être défini comme étant l'ensemble des éléments de R^{n+1} de la forme $(\omega, 0) (\omega \in R)$; c'est donc un S-module trivial de dimension 1; ainsi, la proposition 4.1 est une conséquence du corollaire 7.4 de [*20*].

LEMME 4.2. — Soit $(U^1, \mathscr{H}^1)$ (resp. $(U^2, \mathscr{H}^2)$) une r. u. i. de G appartenant à la famille I) (resp. II)). Alors $H^1(S, E) = \{0\}$.

Démonstration. — Les représentations σ_1 et σ_2 sont elles-mêmes induites et proviennent de deux orbites distinctes, d'après le théorème 4.1, $H^1(S, E) = \{0\}$.

PROPOSITION 4.2. — Soient $(U^1, \mathscr{H}^1)$ et $(U^2, \mathscr{H}^2)$ comme dans le lemme 4.2. Alors, tout cocycle a de G dans $\mathscr{H}$ est défini par ses restrictions : $a|_H$ est un K-morphisme de H dans $\mathscr{H}$, $a|_K$ est nul modulo un cobord.

Démonstration. — Soient $a \in Z^1(G, \mathscr{H})$ (a un cocycle de G dans $\mathscr{H}$), $h \in H$ et $k \in K$. La représentation Π étant triviale sur H, $a(hk) = a(h) + a(k)$. De même, si $h' \in H$, $a(hh') = a(h) + a(h')$. Comme a est continu, $a|_H$ est linéaire. D'autre part, $a[(0, k)(h, 1)] = a(khk^{-1}, k) = a(k) + \Pi(k)a(h)$. Donc $\Pi(k)a(h) = a(khk^{-1})$. Ainsi, $a|_H$ est un K-morphisme de H dans $\mathscr{H}$. Quant à la restriction de a à K, cela définit un élément de $Z^1(K, E)$ qui, d'après le lemme 4.2, est nul, modulo un cobord.

Réciproquement, si a est une application continue de G dans $\mathscr{H}$ vérifiant :

$a(hk) = a(h) + a(k)$, pour $(h, k) \in G$,

$a|_H$ est un K-morphisme de H dans $\mathscr{H}$,

$a|_K$ est un cobord de K dans $\mathscr{H}$;

alors, a est un cocycle. En effet :

$$\begin{aligned} a[(h, k)(h', k')] &= a(h + kh'k^{-1}, kk') \\ &= a(h) + \Pi(k)a(h') + a(k) + \Pi(k)a(k') \\ &= a(h, k) + \Pi(h, k)a(h', k'). \end{aligned}$$

PROPOSITION 4.3. — Soient $(U^1, \mathscr{H}^1)(U^2, \mathscr{H}^2)$ deux r. u. i. de G appartenant à la famille II) et provenant d'une même orbite. Alors :

1° Si $U^1 \simeq U^2$, tout cocycle a de G dans $\mathscr{H}$ est défini par ses restrictions:

$a|_H$ est un K-morphisme de H dans $\mathscr{H}$,

$a|_K$ est un multiple du cocycle a_0 (à un cobord près) de $Z^1(K, \mathscr{H})$ défini par $a_0(b, A) = \langle .b \rangle\, id$, avec $(b, A) \in K$.

2° Si $U^1 \not\simeq U^2$, tout cocycle a de G dans $\mathscr{H}$ est trivial sur K, et est un K-morphisme de H dans $\mathscr{H}$.

Démonstration. — On démontre comme dans la proposition 4.2 que $a|_H$ est un K-morphisme de H dans $\mathscr{H}$. D'autre part, $a|_K$ définit un élément de $Z^1(K, \mathscr{H})$. D'après [*20*] § 8, $a|_K$ est trivial si $U^1 \simeq U^2$ (donc $\sigma_1 \simeq \sigma_2$), et est un multiple de a_0, sinon on montre, comme dans la proposition 4.2, qu'une telle application a, définit un cocycle de G dans $\mathscr{H}$.

Remarque 4.2. — Dans les conditions de la proposition 4.3 et pour $n = 3$, dim $H^1(G, \mathscr{H}) = \infty$. En effet, si $a \in Z^1(G, \mathscr{H})$, $a|_H$ entrelace la représentation qu'on note V, de K dans H, et la restriction de Π à K. Comme K agit trivialement sur le centre de G, il en résulte que $(a\,|_H)\,|_{R^3}$ entrelace $V\,|_{SO(3)}$ et $\Pi\,|_{SO(3)}$. Par ailleurs, il existe des représentations de K, dont la restriction à SO(3) se décompose en $\bigoplus_{l\in L} D^l$, où $L = \{ l = q + n$ avec $n \in N \}$ [24]. Si $(U^i, \mathcal{H}^i) i \in \{1, 2\}$ sont des représentations de ce type,

$$\Pi\,|_{SO(3)} \simeq (\bigoplus_{l\in L} D^l) \otimes (\bigoplus_{l'\in L} D^{l'})$$

et par suite,

$$\Pi\,|_{SO(3)} \simeq \bigoplus_{l,l'\in L} (D^l \otimes D^{l'}) \simeq \bigoplus_{\substack{|l-l'|\leq m \leq l+l' \\ l,l'\in L}} D^m \ .$$

On voit que, dans cette décomposition, la représentation $V\,|_{SO(3)}$ (qui est D^1) apparaît une infinité de fois; les entrelacements C', correspondant à $V\,|_{SO(3)}$ et $\Pi\,|_{SO(3)}$, définissent des cocycles C de H dans $\mathcal{H}$ en posant : $C(\theta, 0) = 0$, $C(0, a) = C'(a)$; ces cocycles sont indépendants.

PROPOSITION 4.4. — Soient $(U^1, \mathcal{H}^1)$, $(U^2, \mathcal{H}^2)$ deux r. u. i. de G appartenant à la famille I). Alors, tout cocycle a de G dans $\mathcal{H}$ est défini par ses restrictions :

$a\,|_H$ est un K-morphisme de H dans $\mathcal{H}$, $(a\,|_K)\,|_{R^n}$ est un SO(n)-morphisme de R^n dans $\mathcal{H}$, et $a\,|_{SO(n)}$ est nul modulo un cobord.

Démonstration. — On démontre comme dans la proposition 4.2, que $a\,|_H$ est un K-morphisme de H dans $\mathcal{H}$ et que $(a\,|_H)\,|_{R^n}$ est un SO(n)-morphisme de R^n dans $\mathcal{H}$.

SO(n) étant compact, $a\,|_{SO(n)}$ peut être prise nulle modulo un cobord.

Remarque 4.3. — Dans les conditions de la proposition 4.4 et pour $n = 3$, un SO(3)-morphisme de R^3 dans $\mathcal{H}$ entrelace D^1 et $\Pi\,|_{SO(3)}$. Si l'on pose $U^1\,|_{SO(3)} \simeq D^l$ et $U^2\,|_{SO(3)} \simeq D^{l'}$, alors $\Pi\,|_{SO(3)} \simeq D^l \otimes D^{l'}$ et D^1 n'apparaît dans la décomposition de $\Pi\,|_{SO(3)}$ que si $|\,l - l'\,| = 0$ ou 1. Dans ces cas, D^1 n'apparaît qu'une seule fois; aussi $\dim H^1(K, \mathcal{H}) = 1$, si $|\,l - l'\,| \in \{0, 1\}$, et $\dim H^1(K, \mathcal{H}) = 0$, sinon.

LEMME 4.3. — Soient $(U^1, \mathcal{H}^1)$ et $(U^2, \mathcal{H}^2)$ deux r. u. i. de G provenant d'une même orbite $\{0\} \times S_{r'}^{n-1} (r' > 0)$. Alors :

1° Si $\sigma_1 \simeq \sigma_2$, $\dim ((R^{n+1})^\wedge / T_0 \otimes E)^S = 1$.

2° Si $\sigma_1 \not\simeq \sigma_2$, $((R^{n+1})^\wedge / T_0 \otimes E)^S = \{0\}$.

Démonstration. — Soit $x \in ((R^{n+1})^\wedge / T_0 \otimes E)^S$. $(R^{n+1})^\wedge / T_0$ est engendré par les classes des éléments de (R^{n+1}) de la forme $(1, 0, \ldots, 0)$ et $(0, \ldots, 0, 1)$, qu'on note respectivement $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Un élément (b, A) de S agit linéairement sur $(R^{n+1})^\wedge / T_0$ et l'on a :

$(b, A)(0, 1) = (0, 1)$ et $(b, A)(1, 0) = (1, b_n)$ avec $b = (b_1, \ldots, b_n)$.

x s'écrit :

$$x = (1, 0) \otimes e + (0, 1) \otimes e', \quad \text{avec} \quad e \text{ et } e' \text{ dans E.}$$

En posant $s = (b, A)$, on a :

$$sx = (1, 0) \otimes (se) + (0, 1) \otimes ((se') + b_n(se)),$$

donc $se = e$ et $se' + b_n(se) = e'$ pour tout s dans S. Comme σ_1 et σ_2 sont irréductibles, il en résulte :

1° Si $\sigma_1 \not\simeq \sigma_2$, $e = 0$, et par suite $se' = e' \forall s \in S$, et de même $e' = 0$, donc $x = 0$.

2° Si $\sigma_1 \simeq \sigma_2$, e est un scalaire λ, par suite $se' + b_n\lambda = e' \forall s \in S$. En prenant $s_n = ((0, \ldots, 0, b_n), 1)$, on vérifie que $s_n e' = e'$, et alors $\lambda = 0$. Enfin, on a $se' = e' \forall s \in S$, donc e' est un scalaire, et x s'écrit :

$$x = (0, 1) \otimes e'.$$

Proposition 4.5. — Soient $(U^1, \mathscr{H}^1)$ et $(U^2, \mathscr{H}^2)$ deux r. u. i. de G provenant d'une même orbite et appartenant respectivement aux familles IV) et V). Alors :

$$H^1(G, \mathscr{H}) = \{ 0 \}.$$

Démonstration. — D'après la suite exacte de Hochild-Serre (écrite comme dans la proposition 4.1) et le lemme 4.3, on a $H^1(G, \mathscr{H}) \simeq H^1(S, E)$. D'autre part σ_1 et σ_2 provenant de deux orbites distinctes, $H^1(S, E) = \{ 0 \}$.

Lemme 4.4. — Soient $(U^1, \mathscr{H}^1)$ et $(U^2, \mathscr{H}^2)$ deux r. u. i. de G provenant d'une même orbite et appartenant à la famille IV). Alors :

1° Si $U^1 \simeq U^2$, tout cocycle a de S dans E est défini par ses restrictions :
$(a\,|_R)(b_n) = \lambda b_n id$ pour $b_n \in R (\lambda \in R)$,
$a\,|_{R^{n-1}}$ est un $SO(n-1)$-morphisme de R^{n-1} dans E,
$a\,|_{SO(n-1)}$ est nulle modulo un cobord de S dans E.

2° Si $U^1 \not\simeq U^2$, $H^1(S, E) = \{ 0 \}$ si σ_1 et σ_2 n'ont pas le même caractère. Sinon, tout cocycle a de S dans E est trivial sur R et sur $SO(n-1)$ modulo un cobord, et est un $SO(n-1)$-morphisme de R^{n-1} dans E.

Démonstration. — Dans les conditions du lemme,

$$S = R \times (R^{n-1} \wedge SO(n-1)).$$

Soient (s_1, s_2), (s_1', s_2') deux éléments de $S (s_1$ et $s_1' \in R)$. Si $U^1 \simeq U^2$, alors $\sigma_1 \simeq \sigma_2$; en notant Π' la représentation de S dans E, $\Pi'\,|_R$ est triviale, donc, pour tout cocycle a de S dans E, on a : $a(s_1 s_2) = a(s_1) + a(s_2) = a(s_2) + \Pi'(s_2)a(s_1)$, en outre $a(s_1 s_1') = a(s_1) + a(s_1')$, donc $a\,|_R$ est linéaire et $a(s_1)$ est un scalaire. La restriction de a à $R^{n-1} \wedge SO(n-1)$ définit un cocycle de $R^{n-1} \wedge SO(n-1)$, d'où le 1°. Si $U^1 \not\simeq U^2$ et σ_1 et σ_2 ont le même caractère, alors $\sigma_1 |_{R^{n-1}\wedge SO(n-1)}$ et $\sigma_2 |_{R^{n-1}\wedge SO(n-1)}$ ne sont pas équivalentes, ainsi $a(s_1)$ est nul, d'où le 2°.

PROPOSITION 4.6. — Soient $(U^1, \mathscr{H}^1)$, $(U^2, \mathscr{H}^2)$ deux r. u. i. de G, provenant d'une même orbite et appartenant à la famille IV). Alors :

1° Si $U^1 \not\simeq U^2$, $H^1(G, \mathscr{H}) \simeq H^1(S, E)$.

2° Si $U^1 \simeq U^2$, $H^1(G, \mathscr{H}) \simeq H^1(S, E) \oplus \langle \bar{a}_0 \rangle$, où $\langle \bar{a}_0 \rangle$ est le sous-groupe engendré par la classe du cocycle a_0 défini par

$$\{ a_0(\theta, a, b, A)F \} (p) = \langle a, p \rangle F(p) \qquad \text{avec} \qquad p \in S_{r''}^{n-2}.$$

Démonstration. — Le 1° découle du lemme 4.3 et de la suite exacte écrite dans la proposition 4.1. D'après le lemme 4.3 et le corollaire 4.1 de [*20*], § 4, dim $H^1(H, \mathscr{H})^K = 1$. Il suffit de montrer que a_0 est un cocycle non trivial, de G dans $\mathscr{H}$, dont la restriction à H est invariante par K. Un élément $k \in K$ agit sur $a_0 |_H$ comme suit : $(k.a_0 |_H)(h) = \Pi(k^{-1})a_0(khk^{-1})$, avec $h \in H$. Si l'on pose $h = (\theta, a)$, $k = (b, A)$, et $F \in \mathscr{H}^2$ alors :

$$\{ (k.a_0 |_H)(h)F \} (p) = e^{-ib''_n\omega'(n-1)} D^m(A'^{-1}) \langle A(a), p \rangle \{ U^2_{(b,A)}F \} (p)$$

(voir lemme 3.4). Par suite :

$$\{ (k.a_0)(h)F \} (p) = \langle a, p \rangle \{ U^1_{(-A^{-1}(b),A^{-1})} \circ U^2_{(b,A)} F \} (p).$$

U^1 étant équivalente à U^2, $a_0 |_H$ est invariant par K. a_0 vérifie

$$a_0(h) = \Pi(k^{-1})a_0(khk^{-1}), \forall h \in H \qquad \text{et} \qquad k \in K.$$

Montrons que a_0 est un cocycle :

$$a_0(hk)(h'k') = a_0(h + kh'k^{-1}, kk') = a_0(h, k) + \Pi(k)a_0(h').$$

On vérifie simplement que $\Pi(h)a_0(h') = a_0(h')$ pour h et h' dans H, donc a_0 est un cocycle.

PROPOSITION 4.7. — Soient $(U^1, \mathscr{H}^1)$, $(U^2, \mathscr{H}^2)$ deux r. u. i. de G provenant d'une même orbite et appartenant à la famille V). Si $U^1 \not\simeq U^2$, $H^1(G, \mathscr{H}) = \{ 0 \}$.

Démonstration. — D'après le lemme 4.3, $H^1(G, \mathscr{H}) \simeq H^1(S, E)$; or $U^1 \not\simeq U^2$ donc $\sigma_1 \not\simeq \sigma_2$ et on a :

Si σ_1 et σ_2 n'ont pas le même caractère, $H^1(S, E) = \{ 0 \}$.

Si σ_1 et σ_2 ont le même caractère, $\sigma_1 |_{R^{n-1}\wedge SO(n-1)}$ et $\sigma_2 |_{R^{n-1}\wedge SO(n-1)}$ sont inéquivalentes, donc tout cocycle de S dans E est un cobord, sur $R^{n-1} \wedge SO(n-1)$, qui s'étend à S, puisque Π' est triviale sur R.

PROPOSITION 4.8. — Soient $(U^1, \mathscr{H}^1)$ et $(U^2, \mathscr{H}^2)$ deux r. u. i. de G dans le cas $n = 1$, provenant de la même orbite et appartenant à la famille I). Alors :

1° Si $U^1 \simeq U^2$, $H^1(G, \mathscr{H}) \simeq \mathrm{Hom}\,(G, C)$.
2° Si $U^1 \not\simeq U^2$, $H^1(G, \mathscr{H}) \simeq \{0\}$.

Démonstration. — Si l'on pose $U^1 = U^{p,\lambda_1}$ et $U^2 = U^{p,\lambda_2}$, $\mathscr{H}$ se réduit à C et Π est définie comme suit : $\Pi(\theta, a, b)z = e^{i(\lambda_1 - \lambda_2)b}z$, $\forall z \in C$. Si $\lambda_1 = \lambda_2$, Π est triviale et $H^1(G, \mathscr{H}) \simeq \mathrm{Hom}\,(G, C)$. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, d'après [*19*], et sachant que Π est triviale sur H, $H^1(G, \mathscr{H}) \simeq \mathrm{Hom}_G(R^2, \mathscr{H})$. Un calcul simple montre que $\mathrm{Hom}_G(R^2, \mathscr{H}) = \{0\}$.

PROPOSITION 4.9. — Soient $(U^1, \mathscr{H}^1)$ et $(U^2, \mathscr{H}^2)$ deux r. u. i. de G, dans le cas $n = 1$, équivalentes et appartenant à la famille II). Alors :

$$\dim H^1(G, \mathscr{H}) = 1.$$

Démonstration. — S étant trivial, $H^1(G, \mathscr{H}) \simeq (R^2)^\wedge/_{\{0\}\times R} \otimes E$; par suite,

$$\dim H^1(G, \mathscr{H}) = 1.$$

Un cocycle non trivial est donné par

$$\{ C(\theta, a, b)F \}(p) = \langle (\theta - ab, a), (p) \rangle F(p).$$

PROPOSITION 4.10. — Soient $(U^1, \mathscr{H}^1), (U^2, \mathscr{H}^2)$ deux r. u. i. de G, dans le cas $n = 2$, provenant de la même orbite et appartenant à la familleI $V_)$. Alors :

1° Si $U^1 \not\simeq U^2$, $H^1(G, \mathscr{H}) = \{0\}$.
2° Si $U^1 \simeq U^2$, $\dim H^1(G, \mathscr{H}) = 3$.

Démonstration. — S étant R^2; si $U^1 \not\simeq U^2$ alors $\sigma_1 \not\simeq \sigma_2$ et $H^1(S, E) = \{0\}$. On montre, comme dans le lemme 4.3, que $H^1(H, \mathscr{H})^K = \{0\}$ d'où le 1°. Si $U^1 \simeq U^2$, Π' est triviale et $H^1(S, E) \simeq \mathrm{Hom}\,(R^2, C)$. On montre comme dans la proposition 4.6, que $\dim H^1(H, \mathscr{H})^K = 1$.

REMARQUE 4.4. — Dans le cas $n = 2$, le calcul de $H^1(G, \mathscr{H})$ se fait de la même manière que dans le cas général, sauf si $(U^1, \mathscr{H}^1)$ et $(U^2, \mathscr{H}^2)$ sont comme dans la proposition 4.10.

5. COHOMOLOGIE DES R. U. I. DES GROUPES $H_n \wedge SO(n)$

PROPOSITION 5.1. — Soit $(U, \mathscr{H})$ une r. u. i. de G appartenant à l'une des familles III), IV), V). Alors $H^1(G, \mathscr{H}) = \{0\}$.

Démonstration. — Reprenons la décomposition $G = H \wedge K$. H étant un sous-groupe de G, abélien, localement compact; d'après le théorème de Snag (Stone-Godement-Naimark-Ambrose, cf., par exemple, [*21*]) $U|_H$ définit une mesure spectrale sur $\widehat{H}$. Comme U est induite, cette mesure est concentrée sur l'orbite Ω qui définit U [*21*]. Dans le cas où U appartient à l'une des familles III), IV), V), la représentation triviale de H, identifiée à (0, 0) dans $\widehat{H}$, n'appartient pas à l'adhérence de Ω; donc $U|_H$ ne contient pas faiblement la représentation triviale de H. D'après le corollaire 3, § 6 de [*19*], et sachant que H est un sous-groupe fermé normal dans G, $H^1(G, \mathscr{H}) = \{0\}$.

REMARQUE 5.1. — Si U appartient à la famille III), le caractère infinitésimal de U est non trivial ($C = i\omega \neq 0$); d'après la proposition 8, § 2 de [7], $H^1(\underline{G}, \mathscr{H}_\omega) = \{0\}$. ($\mathscr{H}_\omega$ est l'ensemble des vecteurs analytiques de U). De la proposition 7, § 2 [*17*] on déduit que $H^1(G, \mathscr{H}_\omega) = \{0\}$. Enfin, d'après la proposition 1, de [*17*], on a $H^1(G, \mathscr{H}) = \{0\}$. Ainsi on démontre autrement la proposition 5.1, mais uniquement dans le cas où U appartient à la famille III).

PROPOSITION 5.2. — Soit $(U, \mathscr{H})$ une r. u. i. de G appartenant à la famille II). Alors $H^1(G, \mathscr{H}) = \{0\}$.

Démonstration. — H étant un sous-groupe de Lie réel connexe fermé et distingué dans G, $U|_H$ étant triviale, U ne contenant aucune sous-représentation de dimension finie, d'après le théorème 5 de la proposition 7, § 7 de [*19*], on a $H^1(G, \mathscr{H}) \simeq H^1(K, \mathscr{H})$. Il suit de l'exemple 2, § 9 de [*19*] :

$$H^1(K, \mathscr{H}) = \{0\}.$$

PROPOSITION 5.3. — Soit $(U^m, \mathscr{H})$ une r. u. i. de G appartenant à la famille I).

1° Si ${}^{(n)}D^m \not\simeq \Delta$, $H^1(G, \mathscr{H}) = \{0\}$.

2° Si ${}^{(n)}D^m \simeq \Delta$, $H^1(G, \mathscr{H})$ est bidimensionnel, dont deux générateurs sont donnés par les classes des cocycles a^1, a^2 définis par :

$$a^1(\theta, a, b, A) = a \quad ; \quad a^2(\theta, a, b, A) = b \qquad \text{où} \qquad (\theta, a, b, A) \in G.$$

Démonstration. — On notera U au lieu de U^m. $U|_H$ étant triviale, on a d'après le théorème 5, § 7 de [*19*] : $H^1(G, \mathscr{H}) \simeq H^1(K, \mathscr{H}) \oplus \mathrm{Hom}_G(H, \mathscr{H})$, où $\mathrm{Hom}_G(H, \mathscr{H})$ est l'ensemble des morphismes f de H dans $\mathscr{H}$ vérifiant : $f(ghg^{-1}) = U(g)f(h)$, pour $h \in H$ et $g \in G$. D'autre part $(U|_K)|_{R^n}$ est triviale. On en déduit, pour la même raison, que

$$H^1(K, \mathscr{H}) \simeq H^1(SO(n), \mathscr{H}) \oplus \mathrm{Hom}_K(R^n, \mathscr{H}).$$

Or SO(n) est compact, donc $H^1(G, \mathscr{H}) \simeq \mathrm{Hom}_K(R^n, \mathscr{H}) \oplus \mathrm{Hom}_G(H, \mathscr{H})^K$. Soit $f \in \mathrm{Hom}_K(R^n, \mathscr{H})$, alors f entrelace les représentations Δ et ${}^{(n)}D^m$; aussi $f = 0$ si ${}^{(n)}D^m \not\simeq \Delta$, et f est une homothétie si ${}^{(n)}D^m \simeq \Delta$. Soient $g \in \mathrm{Hom}_G(H, \mathscr{H})$, $(\theta_0, a_0) \in H$ et $(\theta, a, b, A) \in G$. Alors :

$$g(\theta_0 - A(a_0)b, A(a_0)) = {}^{(n)}D^m g(\theta_0, a_0), \forall (b, A) \in K.$$

En prenant $A = 1$, $b \neq 0$ et $a_0 \neq 0$, on déduit simplement, d'après la linéarité de g, que $g(\theta_0, 0) = 0$; donc $g|_{R^n}$ entrelace Δ et ${}^{(n)}D^m$. Par suite $g = 0$ si ${}^{(n)}D^m \not\simeq \Delta$, et $g|_{R^n}$ est une homothétie si ${}^{(n)}D^m \simeq \Delta$.

Proposition 5.4. — Dans le cas $n = 1$, et si $U^{p,\lambda}$ désigne une r. u. i. de G appartenant à la famille I), alors :

1° $H^1(G, C) = \{0\}$, si p ou λ est non nul,
2° $H^1(G, C) \simeq \mathrm{Hom}\,(G, C)$ si $p = \lambda = 0$.

Si $(U^\omega, \mathscr{H})$ désigne une r. u. i. de G appartenant à la famille II)

$$H^1(G, \mathscr{H}) = \{0\}.$$

Démonstration. — Si $p \neq 0$, on applique le corollaire 3, § 6 de [*19*].
Si $p = 0$, d'après le théorème 5, § 7 de [*19*], on a :

$$H^1(G, C) \simeq H^1(R, C) \oplus \mathrm{Hom}_G(R^2, C)$$

dans le cas où $\lambda \neq 0$, $H^1(R, C) = \{0\}$; on montre, comme dans la proposition 4.8, que $H^1(G, C) = \{0\}$; d'où le 2°.
Si $(U^\omega, \mathscr{H})$ appartient à la famille II), alors le caractère infinitésimal est non trivial, donc $H^1(G, \mathscr{H}) = \{0\}$.

Proposition 5.5. — Soit $(U, \mathscr{H})$ une r. u. i. de G dans le cas $n = 2$.
1° Si $(U, \mathscr{H})$ appartient à la famille I), III) ou IV),

$$H^1(G, \mathscr{H}) = \{0\}.$$

2° Si $(U, \mathscr{H})$ appartient à la famille II),

$$\dim H^1(G, \mathscr{H}) = 2, \qquad \text{si} \qquad m = \mp 1 \quad ; \quad \text{et 0 sinon}.$$

Démonstration. — Le 1° se démontre comme dans le cas général. Pour le 2° on démontre, comme dans le cas général, que

$$H^1(G, \mathscr{H}) \simeq \mathrm{Hom}_K(R^2, \mathscr{H}) \oplus \mathrm{Hom}_G(H, \mathscr{H}).$$

Or, dans ce cas la représentation de SO(2) dans C^2 se décompose en deux représentations irréductibles, d'où le 2°.

Remarque 5.2. — 1° Dans le recouvrement universel $\overline{G}$ de G($n > 2$), le sous-groupe Spin(n) agit sur H_n de la même manière que SO(n). Aussi les orbites de $\widehat{H}$, relativement à l'action de $\overline{K}$, sont les mêmes que celles relatives à l'action de K. Il en résulte que la classification des r. u. i. de G se fait de la même façon que dans le cas de G. La seule différence est que le poids m d'une r. u. i. de Spin(n) est formé d'une suite d'entiers ou demi-entiers.

2° Les propositions énoncées dans ce paragraphe (ainsi que leur démonstration) restent valables si l'on remplace G par $\bar{G}$. Aussi, d'après la proposition 5, § 2 de [17], $H^1(G, \mathscr{H}_\omega) \simeq H^1(G, \mathscr{H})$ pour toutes les r. u. i. $(U, \mathscr{H})$ de $\underline{G}$.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude au Professeur Salah Horchani qui a dirigé mes recherches en me prodiguant suggestions et encouragements.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance au Professeur Jacques Simon pour l'aide qu'il m'a apportée et les précieux conseils qu'il m'a donnés.

RÉFÉRENCES

[1] A. Guichardet, *Math. Ann.*, t. **228**, 1977, p. 215.
[2] G. Pinczon, *Deformations of Representations* (à paraître).
[3] E. M. Stein, *Adv. in Math.*, t. **4**, 1970, p. 172; R. A. Kunze and E. M. Stein, *Ibid.* t. **11**, 1973, p. 1.
[4] M. Flato, J. Simon, *Letters in Math. phys.*, t. **2**, 1977, p. 155; *Ibid.*, Linearization of Relativistic Non-linear wave Equations (à paraître).
[5] M. Flato, G. Pinczon, J. Simon, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, (**4**) **10**, 1977, p. 405.
[6] G. Rideau, Gauges of first and second kind and Poincaré invariance in *Proceedings of the 2nd International Colloquium on group Theoretical Methods in physics*, Nijmegen, June 25-29, 1973 (University of Nijmegen, the Netherlands); *Ibid.*, On the two-points Function in Landau Gauge, preprint Université Paris VII, juillet 1975.
[7] S. Horchani, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **15**, 1971, p. 321.
[8] C. Piron, *Foundations of Quantum Physics*. W. A. Benjamin, Inc. Reading, Massachusetts, 1976.
[9] D. Beau, S. Horchani, *J. Math. phys.*. t. **20**, 1979, p. 1700.
[10] E. Angelopoulos, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **18**, 1973, p. 39.
[11] J. Dixmier, *Bull. Soc. Math. France*, t. **85**, 1957, p. 325; *Ibid.*, t. **87**, 1959, p. 65. A. A. Kirillov. *Russ. Math. Surv.*, t. **17**, 1962, p. 53.
[12] G. Mackey, *Acta Math.*, t. **99**, 1968, p. 265.
[13] G. Mackey, *The Theory of Unitary Group Representations* (University of Chicago Press, Chicago and London), 1976.
[14] J. M. Jauch, *Helv. Phys. Acta*, t. **37**, 1964, p. 284.
[15] S. Horchani, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **277 A**, 1973, p. 201.
[16] L. P. Horwitz, C. Piron, F. Reuse, *Helv. Phys. Acta*, t. **48**, 1975, p. 546; C. Piron, F. Reuse, *Ibid.*, t. **51**, 1978, p. 146.
[17] G. Pinczon, J. Simon, *Letters in Math. phys.*, t. **1**, 1975, p. 83.
[18] G. Pinczon, J. Simon, Extensions of representations and Cohomology (à paraître dans *Reports on Math. phys.*).
[19] A. Guichardet, *Bull. Sc. Math.*, (2), t. **95**, 1971, p. 161 et t. **96**, 1972, p. 305.

[20] A. Guichardet, *Extensions des représentations induites des produits semi-directs*, preprint M. 357-06-78, centre Mathématique, École Polytechnique, Palaiseau (France).
[21] A. O. Barut, R. Raczka, *Theory of group representations and Applications* (PWN, polish Scientific publishers, Warzawa, 1977).
[22] L. Nachbin, *The Haar Integral* (van Nostrand Co., New York, 1965).
[23] N. Poulsen J., *Funct. Anal.*, t. **9**, 1972, p. 87.
[24] W. Miller, *On Lie Algebras and some Special Functions of mathematical Physics* (*Amer. Math. Soc. Memoirs*, n° 50, 1964) et *Lie Theory and special Functions* (Academic Press, New York, 1968).

(Manuscrit reçu le 25 octobre 1979)