ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

BERNARD LÉAUTÉ
GILBERT MARCILHACY

Sur certaines solutions particulières transcendantes des équations d'Einstein

Annales de l'I. H. P., section A, tome 31, nº 4 (1979), p. 363-375
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1979__31_4_363_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré
Vol. XXXI, n° 4, 1979, p. 363-375.

Section A :
Physique théorique.

Sur certaines solutions particulières transcendantes des équations d'Einstein

par

Bernard LÉAUTÉ et **Gilbert MARCILHACY**
Équipe de Recherche Associée au C. N. R. S. n° 533,
Laboratoire de Physique Théorique de l'Université Paris VI,
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre-et-Marie-Curie,
75231 Paris Cedex 05.

RESUME. — On résout, dans le cas stationnaire à symétrie axiale, les équations d'Einstein du vide en utilisant, sous une forme adaptée, la méthode de séparation des variables. Les solutions particulières ainsi obtenues s'expriment à l'aide de formes particulières de la troisième et de la cinquième transcendante de Painlevé. En vertu de correspondances discrètes bien connues, nous avons déduit de ce résultat des solutions valables dans le cas statique à symétrie axiale d'Einstein-Maxwell; ce type de procédure vaudrait aussi pour engendrer certaines formes d'ondes gravitationnelles à symétrie cylindrique. Nous avons, par ailleurs, mis en évidence certaines analogies structurelles entre la présente approche du phénomène gravitationnel et certains aspects de la théorie classique non linéaire du champ fondée sur l'équation de « Sinus-Gordon ».

ABSTRACT. — Einstein's equations are solved in the stationary axially symmetric case using, in an adapted form, the method of separation of variables. In these solutions appear Painlevé's transcendental functions of type III and V. From these solutions we deduce static axially-symmetric solutions to the Einstein-Maxwell equations. Certain structural analogies are pointed out between the present method of solving the Einstein's equations and classical method used to solve the Sine-Gordon equation.

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Section A - Vol. XXXI, 0020 - 2339/1979/363/$ 5.00/

INTRODUCTION

Dans cette étude, on envisage la classe des métriques stationnaires à symétrie axiale, solutions des équations d'Einstein du vide. Un nombre important de solutions particulières appartenant à cette classe a été obtenu. Citons, par exemple : les métriques de Lewis [*1*], de Papapetrou [*2*] qui dépendent d'une fonction harmonique arbitraire de deux variables, la métrique de Kerr [*3*] dont on sait tout l'intérêt des développements auxquels elle a donné lieu [*4*]. Notons encore la famille dépendant de trois paramètres m, a et δ — δ entier — dont Tomimatsu et Sato [*5*] ont donné les premiers termes $\delta = 1$ (Kerr), 2, 3, Yamazuki et Hori [*6*] l'algorithme pour obtenir les suivants et enfin Cosgrove [*7*] l'extension à des valeurs de δ quelconques.

Les diverses métriques précitées, ainsi que d'autres omises, s'expriment à partir de fonctions élémentaires ou de transcendantes élémentaires classiques. L'objet de cette publication est de faire apparaître que, outre ces solutions, les équations d'Einstein en admettent d'autres réductibles à ces transcendantes non explicites que sont les transcendantes de Painlevé [*8*] [*9*]. Pour parvenir à ce résultat, nous partirons de la formulation d'Ernst [*11*], des équations d'Einstein afférentes au cas considéré, dont nous rappellerons l'élaboration suivant Kinnersley [*12*]. A celles-ci, nous appliquerons, de façon « adaptée », la procédure de résolution dite de séparation des variables aboutissant après quelques manipulations aux équations différentielles caractéristiques de certaines des transcendantes susmentionnées. Nous expliciterons diverses autres formulations propres à faire ressortir, du moins dans certaines circonstances particulières, quelques aspects communs à la présente situation et à la théorie classique du champ basée sur une équation, connue en géométrie différentielle des surfaces comme caractéristique des surfaces à courbure constante négative (Darboux [*24*]), que les physiciens contemporains ont introduite, dans leur propre domaine, en tant que généralisation non linéaire possible de l'équation de Klein-Gordon, la nommant « équation de Sinus-Gordon ». Cette terminologie est maintenant consacrée par l'usage, nous l'utiliserons donc dans notre texte.

Quelques indications seront enfin données relativement à certains prolongements possibles de nos résultats, dans le cas d'Einstein-Maxwell, par exemple.

I. RAPPEL DE LA FORMULATION DES ÉQUATIONS DU CHAMP [*12*]

Toute métrique stationnaire à symétrie axiale peut être écrite sous la forme canonique suivante, initialement introduite par Lewis [*1*]

$$(1.1) \qquad ds^2 = f(dt + \omega d\varphi)^2 - f^{-1}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2],$$

f, ω, γ étant des fonctions seulement de ρ et z.

Les équations d'Einstein, formulées à l'aide de l'opérateur euclidien gradient (∇), se réduisent à :

$$\nabla.(f^{-1}\nabla f + \rho^{-2} f^2 \omega \nabla \omega) = 0, \tag{1.2}$$

$$\nabla.(\rho^{-2} f^2 \nabla \omega) = 0; \tag{1.3}$$

et

$$\gamma_{,\rho} = \frac{1}{4}[\rho f^{-2}(f_{,\rho}^2 - f_{,z}^2) - f^2(\omega_{,\rho}^2 - \omega_{,z}^2)],$$

$$\gamma_{,z} = \frac{1}{2}(\rho f^{-2} f_{,\rho} f_{,z} - \rho^{-1} f^2 \omega_{,\rho}\omega_{,z}); \tag{1.4}$$

avec la notation

$$,\rho \equiv \frac{\partial}{\partial\rho} \qquad ,z \equiv \frac{\partial}{\partial z}.$$

Ces dernières équations permettent, lorsque f et ω sont connues, de déterminer, par quadrature, la fonction γ.

Observant, à la suite d'Ernst [*11*], que l'équation (1.3) atteste l'existence d'un « potentiel de rotation » Ω défini par

$$\nabla\Omega = \rho^{-1} f e_\varphi \wedge \nabla\omega$$

e_φ étant un vecteur unitaire dans la direction φ; on peut éliminer ω au profit de Ω dans le système (1.2) (1.3) (1.4) obtenant, ce faisant, la nouvelle formulation :

$$\nabla.[f^{-2}(f\nabla f + \Omega\nabla\Omega)] = 0, \tag{1.5}$$

$$\nabla.(f^{-2}\nabla\Omega) = 0; \tag{1.6}$$

et

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{,\rho} &= \frac{1}{4}\rho f^{-2}[(f_{,\rho}^2 - f_{,z}^2) + (\Omega_{,\rho}^2 - \Omega_{,z}^2)],\\ \gamma_{,z} &= \frac{1}{2}\rho f^{-1}(f_{,\rho} f_{,z} + \Omega_{,\rho}\Omega_{,z}).\end{aligned}\right. \tag{1.7}$$

C'est ce dernier système que nous allons exploiter dans la suite.

II. CARACTÉRISATION DES SOLUTIONS TRANSCENDANTES. PROPRIÉTÉS

2.1 Détermination des solutions.

Sous une forme plus développée le système (1.5) (1.6) s'écrit :

$$f\triangle f = (\nabla f)^2 - (\nabla\Omega)^2 \tag{2.1}$$

$$f\triangle\Omega = 2\nabla f.\nabla\Omega \tag{2.2}$$

où $\triangle$ désigne l'opérateur : $\dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Ainsi que nous l'avons indiqué en introduction, nous nous proposons de rechercher une solution particulière du système (2.1) (2.2) en lui appliquant la procédure dite de séparation des variables. Pour ce faire, il y a lieu de poser

$$f(\rho, z) = \mathrm{F}(\rho)\mathrm{H}(z) \quad \text{et} \quad \Omega(\rho, z) = \mathrm{G}(\rho)\mathrm{J}(z). \tag{2.3}$$

L'introduction de ces expressions en (2.1) (2.2) mène à :

$$\frac{1}{\mathrm{F}}\left(\mathrm{F}'' + \frac{1}{\rho}\mathrm{F}'\right) + \frac{\mathrm{H}^{\cdot\cdot}}{\mathrm{H}} = \left(\frac{\mathrm{F}'}{\mathrm{F}}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{H}^{\cdot}}{\mathrm{H}}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{GJ}}{\mathrm{FH}}\right)^2\left[\left(\frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{G}}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{J}^{\cdot}}{\mathrm{J}}\right)^2\right] \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{\mathrm{G}}\left(\mathrm{G}'' + \frac{1}{\rho}\mathrm{G}'\right) + \frac{\mathrm{J}^{\cdot\cdot}}{\mathrm{J}} = 2\left(\frac{\mathrm{F}'}{\mathrm{F}}\frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{G}} + \frac{\mathrm{H}^{\cdot}}{\mathrm{H}}\frac{\mathrm{J}^{\cdot}}{\mathrm{J}}\right); \tag{2.5}$$

avec les notations $\mathrm{F}' \equiv \dfrac{d\mathrm{F}}{d\rho}$, $\mathrm{H}^{\cdot} \equiv \dfrac{d\mathrm{H}}{dz}$, etc.

En inspectant ces équations, on constate que, pour poursuivre le processus engagé, il est nécessaire de requérir

a) $$\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{J}} = \mathrm{Cte},$$

(cette constante peut être prise sans inconvénient égale à l'unité),

b) $$\frac{\mathrm{H}^{\cdot}}{\mathrm{H}} = \mathrm{Cte},$$

d'où il suit

$$\mathrm{J}(z) = \mathrm{H}(z) = \exp.(az + b), \tag{2.6}$$

a et b étant des constantes.

Tenant compte de ce résultat dans (2.4) (2.5), nous obtenons le système de deux équations différentielles non linéaires du second ordre suivant :

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{F}\left(\mathrm{F}'' + \frac{1}{\rho}\mathrm{F}'\right) - \mathrm{F}'^2 + \mathrm{G}'^2 + a^2\mathrm{G}^2 = 0,\\ &\mathrm{F}\left(\mathrm{G}'' + \frac{1}{\rho}\mathrm{G}'\right) - 2\mathrm{F}'\mathrm{G}' - a^2\mathrm{FG} = 0. \end{aligned}\right. \tag{2.7}$$

Aux fonctions F et G, employées jusqu'ici, nous substituons U et V définies par

$$\mathrm{U} = \mathrm{F}^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{V} = \mathrm{G}^2 \tag{2.8}$$

remplaçant ainsi le système (2.7) par

$$\mathrm{U}'' + \frac{1}{\rho}\mathrm{U}' - \frac{\mathrm{U}'^2}{\mathrm{U}} + \frac{\mathrm{V}'^2}{2\mathrm{V}} + 2a^2\mathrm{V} = 0, \tag{2.9}$$

$$\mathrm{V}'' + \frac{1}{\rho}\mathrm{V}' - \frac{\mathrm{U}'\mathrm{V}'}{\mathrm{U}} - \frac{\mathrm{V}'^2}{2\mathrm{V}} - 2a^2\mathrm{V} = 0, \tag{2.10}$$

duquel on déduit, après avoir posé [1]

$$W \equiv U + V, \tag{2.11}$$

l'équation

$$W'' + \frac{1}{\rho} W' - \frac{U'}{U} W' = 0$$

qui, à l'évidence, peut être intégrée sous la forme

$$W' = \frac{C}{\rho} U, \tag{2.12}$$

C étant une constante non nulle.

L'insertion de ce résultat dans (2.9), compte tenu de la définition (2.11), mène à une équation différentielle non linéaire du troisième ordre portant exclusivement sur W. Au moyen de la transformation

$$w = \text{Log } W \tag{2.13}$$

celle-ci est réductible à une équation du second ordre, portant sur $X \equiv w'$, qui s'écrit comme suit

$$X'' + \frac{1}{\rho} X' - \left[\frac{1}{2(X-1)} + \frac{1}{X}\right] X'^2 - 2(X-1)\left(\frac{C^2}{4\rho^2} X^2 + a^2\right) = 0. \tag{2.14}$$

En effectuant les changements de fonction et de variable :

$$Y = 1 - X \quad \text{et} \quad x = \rho^2 \tag{2.15}$$

on obtient l'équation

$$\left| \frac{d^2Y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dY}{dx} - \left(\frac{1}{2Y} + \frac{1}{Y-1}\right)\left(\frac{dY}{dx}\right)^2 - \frac{C^2}{8x^2} Y(Y-1)^2 - \frac{a^2}{2x} Y = 0 \right. \tag{2.17}$$

dans laquelle on reconnaît une forme particulière de l'équation différentielle définissant la *cinquième transcendante de Painlevé*.

Il convient de rappeler que Painlevé et Gambier, dans des mémoires fondamentaux [*8*], publiés au début du siècle, ont caractérisé *toutes* les équations différentielles du second ordre, dans le domaine complexe, de la forme

$$\frac{d^2w}{dz^2} = F\left(z, w, \frac{dw}{dz}\right),$$

F étant rationnelle en $\frac{dw}{dz}$ et en w, analytique en z, dont les solutions ont toutes leurs points critiques fixes (c'est-à-dire indépendants des constantes d'intégration). Les cinquante équations canoniques qu'ils mirent en évidence sont, à l'exception de six, intégrables en termes de fonctions élémentaires,

---

(1) U, V, W sont donc des quantités essentiellement positives.

de transcendantes élémentaires classiques, ou de fonctions elliptiques. Celles-ci — les six exceptionnelles — définissent de nouvelles fonctions transcendantes : « les transcendantes de Painlevé ». La cinquième, dans sa forme générale, répond à l'équation :

$$(2.17)\quad \frac{d^2w}{dz^2} = \left(\frac{1}{w-1} + \frac{1}{2w}\right)\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 - \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{(w-1)^2}{z^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \frac{\gamma}{z}w + \delta w\frac{w+1}{w-1}\,;$$

α, β, γ, δ étant des constantes complexes ([2]).

Revenant à la fonction $Y(x)$, définie donc comme solution transcendante de (2.16), nous avons les fonctions $U(\rho)$ et $V(\rho)$ données par les expressions suivantes

$$(2.18)\qquad U = \frac{\rho}{C}(1 - Y)\exp.\left[\int_{\rho_0}^{\rho}(1 - Y)d\rho\right],$$

$$(2.19)\qquad V = \left[1 - \frac{\rho}{C}(1 - Y)\right]\exp.\left[\int_{\rho_0}^{\rho}(1 - Y)d\rho\right].$$

Tenant compte de (2.3) (2.6), $f(\rho, z)$ et $\Omega(\rho, z)$ sont, par suite, déterminés. Ajoutons que $\gamma(\rho, z)$ résulte immédiatement de

$$(2.20)\qquad \left\{\begin{aligned} \gamma_{,\rho} &= \frac{1}{4U}\left[\frac{\rho}{4}\left(\frac{U'^2}{U} + \frac{V'^2}{V}\right) - a^2C(U + V)\right], \\ \gamma_{,z} &= \frac{aC}{4}. \end{aligned}\right.$$

Le caractère essentiellement positif des quantités U et V, introduites en (2.8), restreint les variations possibles de $Y(x)$ dans les limites suivantes :

$$(2.21)\qquad \begin{aligned} &C > 0 \qquad 1 - \frac{C}{\rho} < Y < 1, \\ &C > 0 \qquad 1 < Y < 1 - \frac{C}{\rho}. \end{aligned}$$

Toujours pour cette même raison, il résulte de (2.12) que la fonction $W \equiv U + V$ est ou monotone croissante, lorsque $C > 0$, ou monotone décroissante, lorsque $C < 0$.

2.2. **Autres formulations. Propriétés.**

Il est possible d'ajouter à (2.16) certaines autres caractérisations de la solution transcendante mise en évidence.

([2]) Pour certaines valeurs particulières de ces constantes, l'équation (2.17) peut se ramener à l'une des formes canoniques précitées.

Ainsi par le changement

$$(2.22)\qquad Y = \frac{(Z+1)^2}{4Z}$$

on passe de (2.16) à

(2.23)

$$Z'' + \frac{1}{\rho}Z' - \left(\frac{1}{2Z} + \frac{1}{Z-1}\right)(Z')^2 - \frac{C^2}{32\rho^2}(Z-1)^2\left(Z - \frac{1}{Z}\right) - 2a^2 Z\frac{Z+1}{Z-1} = 0$$

qui est une forme particulière autre de l'équation définissant la cinquième transcendante de Painlevé. Relativement à l'expression complète (2.17), on voit que les formulations (2.16) et (2.23) ont des aspects complémentaires.

On peut encore, grâce aux changements

$$(2.24)\quad (a)\quad Y = \mathrm{th}^2\frac{H}{2}\quad,\quad (b)\quad Y = -\,\mathrm{tg}^2\frac{H}{2}\quad,\quad (c)\quad Y = \coth^2\frac{H}{2}$$

valables pour les divers domaines mentionnés en (2.21), soit

$$C > 0 \qquad (a) \qquad 0 < Y < 1 \qquad\qquad (b) \qquad 1 - \frac{C}{\rho} < Y < 0$$

$$C < 0 \qquad (c) \qquad 1 < Y < 1 - \frac{C}{\rho}$$

déduire de (2.14), les équations correspondantes (*a*), (*b*) (*c*) suivantes :

$$(2.25)\quad \begin{aligned} &(a)\quad H'' + \frac{1}{\rho}H' - \left[\frac{C^2}{\rho^2(1+\mathrm{ch}\,H)^2} + a^2\right]\mathrm{sh}\,H = 0,\\ &(b)\quad H'' + \frac{1}{\rho}H' - \left[\frac{C^2}{\rho^2(1+\cos H)^2} + a^2\right]\sin H = 0,\\ &(c)\quad H'' + \frac{1}{\rho}H' + \left[\frac{C^2}{\rho^2(1-\mathrm{ch}\,H)^2} + a^2\right]\mathrm{sh}\,H = 0.\end{aligned}$$

L'aspect formel de ces équations conduit à certains « rapprochements » théoriques. En théorie non linéaire des champs, on sait tout l'intérêt porté à l'équation de « Sinus-Gordon », on connaît les travaux qui s'y rattachent [*14*] [*15*]. Dans le cas à 2 + 1 dimensions, cette équation s'écrit [*16*]

$$(2.26)\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \sin\Phi = 0 \qquad \text{avec} \qquad \Phi = \Phi(x, y, t)\ ;$$

sa restriction statique à symétrie axiale est

$$(2.27)\quad \frac{d^2\Phi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\Phi}{d\rho} - \sin\Phi = 0 \quad \text{avec} \quad \rho^2 \equiv x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad \Phi = \Phi(\rho).$$

On observe que (2.25 *b*) ne diffère de cette dernière équation que par la présence d'un terme impliquant C; dans le cas particulier, envisagé ci-après, où cette constante est prise nulle, les deux équations comparées sont de formes identiques.

On pourrait reprendre les considérations précédentes sur la base de l'équation de « Sinh-Gordon » [*15*].

Le rapprochement ci-dessus ébauché justifie, pensons-nous, les deux remarques suivantes :

— au plan des principes, dans le cas particulier de la présente approche du phénomène gravitationnel, une certaine analogie structurelle entre celui-ci et ceux régis par l'équation de « Sinus-Gordon » (ou « Sinh-Gordon »);

— au plan de la technique de la résolution des équations d'Ernst [*11*], le recours à des procédures employées dans le cas de « Sinus-Gordon » se trouve encouragé (« Inverse Scattering Method », par exemple [*15*] [*17*]).

2.3. **Indications relatives à deux cas particuliers.**

Les constantes a et C, précédemment introduites, ont été, jusqu'ici, supposées essentiellement non nulles; il reste ainsi à envisager les deux cas particuliers correspondant à leur nullité.

2.31. Lorsque $C = 0$, il est clair alors que (2.12) donne

$$W = K, \tag{2.28}$$

avec K constante positive et que, par suite, U, par exemple, peut être éliminé au profit de V dans (2.10). Et, ce faisant, l'équation (2.16) — avec $C = 0$ — sera obtenue si l'on remplace la formule (2.15) par

$$\frac{V}{K} = Y \qquad \left(\Rightarrow \frac{U}{K} = 1 - Y\right) \qquad \text{et} \qquad x = \rho^2. \tag{2.29}$$

Comme en tout point $0 < U < K$ et $0 < V < K$, les variations « possibles » de Y s'inscrivent dans l'intervalle $0 < Y < 1$. Celles de U et V ont lieu constamment en sens inverse, puisque, en raison de (2.28), $V' = -U'$.

Le présent cas particulier peut encore être caractérisé d'autres façons. Posant

$$Y = \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2 \qquad \text{et} \qquad \rho = 2\sqrt{u} \tag{2.30}$$

on déduit de (2.16) — avec $C = 0$ — l'équation suivante

$$\frac{d^2y}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{dy}{du} - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{du}\right)^2 - \frac{a^2}{2u}(y^2 - 1) = 0 \tag{2.31}$$

caractéristique d'une forme particulière de la troisième transcendante de Painlevé, dont la forme générale est :

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{w}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 - \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{1}{z}(\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^2 + \frac{\delta}{w}.$$

On peut encore écrire

$$Y = \mathrm{th}^2 \frac{H}{2}$$

— c'est la seule possibilité ici — et obtenir (2.25 *a*) — avec $C = 0$ — soit

$$H'' + \frac{1}{\rho} H' - a^2 \,\mathrm{sh}\, H = 0.$$

La fonction $\gamma(\rho, z)$ résulterait des formules (2.20) — avec $C = 0$.

2.32. Lorsque $a = 0$, les fonctions f, Ω, γ ne dépendent — si elles existent — que de la coordonnée ρ. Un calcul élémentaire, effectué à partir des équations (2.7), mène aux relations

$$\frac{d^2(F^2)}{dG^2} = -2$$

et

$$\rho G' = CF^2,$$

avec C constante arbitraire, desquelles résultent

$$F^2 = -G^2 + 2AG + B, \tag{2.32}$$

A et B étant des constantes telles que

$$A^2 > -B,$$

et

$$G = A + \sqrt{A^2 + B}\, \frac{1 + \left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^{-2C\sqrt{A^2+B}}}{1 - \left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^{-2C\sqrt{A^2+B}}}. \tag{2.33}$$

Substituant à G son expression (2.33) dans celle de F^2 (2.32), on constate que pour aucune valeur de ρ le caractère positif de F^2 n'est assuré, si bien que, dans le cas particulier $a = 0$, aucune solution admissible des équations (2.7) n'existe.

III. SOLUTIONS STATIQUES A SYMÉTRIE AXIALE D'EINSTEIN-MAXWELL. AUTRES SOLUTIONS

3.1. Solutions statiques à symétrie axiale d'Einstein-Maxwell

Au cours du développement précédent, nous avons caractérisé une solution particulière stationnaire à symétrie axiale des équations d'Einstein du vide. Grâce à la transformation discrète de Bonnor [*18*], il est possible de lui faire correspondre une solution statique à symétrie axiale des équations d'Einstein-Maxwell. Nous allons indiquer les termes de cette correspondance et étudier la solution ainsi obtenue.

La métrique considérée présentement est du type suivant

$$ds^2 = \tilde{f}^2 dt^2 - \tilde{f}^{-2}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2] \tag{3.1}$$

et les équations d'Einstein-Maxwell régissant $\tilde{f}$, γ et Φ — le potentiel électrostatique — s'écrivent

$$\tilde{f}\Delta\tilde{f} = (\nabla\tilde{f})^2 + (\nabla\Phi)^2, \tag{3.2}$$

$$\tilde{f}\Delta\Phi = 2\nabla\tilde{f}.\nabla\Phi\ ; \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{,\rho} &= \frac{1}{4}\rho\tilde{f}^{-2}[(\tilde{f}^2_{,\rho} - \tilde{f}^2_{,z}) - (\Phi^2_{,\rho} - \Phi^2_{,z})], \\ \gamma_{,z} &= \frac{1}{2}\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}_{,\rho}\tilde{f}_{,z} - \Phi_{,\rho}\Phi_{,z}). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Comparant ces équations à (2.1) (2.2) (1.7), valables dans la situation précédente, on observe avec Bonnor la correspondance suivante

$$f \leftrightarrow \tilde{f} \qquad \text{et} \qquad \Omega \leftrightarrow i\Phi. \tag{3.5}$$

Nous pourrions nous arrêter à cette considération; cependant, nous préférons être plus explicites et caractériser précisément la solution concernée. Pour ce faire, nous posons

$$\tilde{f} = \mathrm{F}(\rho)\mathrm{H}(z) \qquad \text{et} \qquad \Phi = \mathrm{G}(\rho)\mathrm{H}(z) \tag{3.6}$$

puis

$$\mathrm{F}^2 = \mathrm{U} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G}^2 = \mathrm{V}. \tag{3.7}$$

Bien entendu, on a encore

$$\mathrm{H}(z) = \exp.\,(az + b) \tag{3.8}$$

tandis que U et V sont régis par le système

$$\begin{cases} \mathrm{U}'' + \dfrac{1}{\rho}\mathrm{U}' - \dfrac{\mathrm{U}'^2}{\mathrm{U}} - \dfrac{\mathrm{V}'^2}{2\mathrm{V}} - 2a^2\mathrm{V} = 0, & (3.9) \\ \mathrm{V}' + \dfrac{1}{\rho}\mathrm{V}' - \dfrac{\mathrm{U}'\mathrm{V}'}{\mathrm{U}} - \dfrac{\mathrm{V}'^2}{2\mathrm{V}} - 2a^2\mathrm{V} = 0 & (3.10) \end{cases}$$

dont on observe qu'il a en commun la seconde équation avec (2.9) (2.10).

Pour progresser, au lieu de (2.11), on est conduit à poser :

$$\mathrm{W} \equiv \mathrm{U} - \mathrm{V}. \tag{3.11}$$

La suite du calcul, les notations sont les mêmes que précédemment si bien que le résultat auquel on arrive finalement s'écrit comme suit

$$\mathrm{U} = \frac{\rho}{\mathrm{C}}(1 - \mathrm{Y})\exp.\left[\int_{\rho_0}^{\rho}(1 - \mathrm{Y})d\rho\right] \tag{3.12}$$

$$V = \left[-1 + \frac{\rho}{C}(1 - Y) \right] \exp . \left[\int_{\rho_0}^{\rho} (1 - Y) d\rho \right] \tag{3.13}$$

(Y étant défini comme solution transcendante de (2.16)).

Le caractère essentiellement positif des quantités précédentes (U et V) restreint les variations possibles de Y aux domaines suivants

$$\begin{aligned} C > 0 \qquad Y < 1 - \frac{C}{\rho}, \\ C < 0 \qquad Y > 1 - \frac{C}{\rho}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

La comparaison de ces inégalités avec celles valables précédemment (2.21) fait apparaître leur caractère complémentaire. Aussi bien, les solutions, afférentes à l'un et l'autre cas envisagés, ne peuvent exister simultanément, mais seulement l'une ou l'autre dans chacun des domaines notés en (2.21) et (3.14).

Dans une publication séparée [*19*], nous avons traité en détail le cas particulier $C = 0$. Nous indiquerons seulement, pour mémoire, que l'on a, au lieu de (3.11)

$$V - U = K,$$

K constante positive, négative ou nulle et que $\frac{V}{K} = Y$ est régi, de même qu'en 2.3, par l'équation (2.16) — avec $C = 0$. Le domaine des variations « possibles » est $Y > 1$, $Y < 0$, soit le complémentaire de celui noté en 2.3. La considération précédente, sur l'existence des solutions, pourrait être reprise ici.

La présente solution peut encore être caractérisée par (2.33) avec $C = 0$; cette forme particulière de cinquième transcendante a été précisément étudiée par Garnier [*10*].

Dans la publication [*19*] figure aussi le cas particulier $a = 0$.

A la différence de la situation précédente (2.32), la valeur $a = 0$ conduit ici à une solution admissible qui s'écrit :

$$F^2 = G^2 + 2AG + B, \qquad H = \text{cte}$$

G ayant l'une ou l'autre des expressions suivantes, selon les valeurs relatives des constantes A et B :

$$A^2 > B \qquad G = -A + \sqrt{A^2 - B}\, \frac{1 + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2C\sqrt{A^2-B}}}{1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2C\sqrt{A^2-B}}},$$

$$A^2 = B \qquad G = -A + \left[\mathrm{Log} \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{C} \right]^{-1},$$

$$A^2 < B \qquad G = A + \sqrt{B - A^2}\, \mathrm{tg} \left[\mathrm{Log} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{C\sqrt{B-A^2}} \right]$$

3.2. **Autres solutions.**

— A partir des solutions transcendantes caractérisées au cours des développements précédents, on peut former, à l'aide des transformations laissant invariantes les équations d'Ernst [*13*] [*18*], des familles à sept paramètres de solutions stationnaires à symétrie axiale des équations d'Einstein-Maxwell, impliquant les transcendantes trois ou cinq de Painlevé.

— Entre la classe des métriques stationnaires à symétrie axiale, caractérisée par la présence de deux vecteurs de Killing, l'un orienté dans le temps et l'autre dans l'espace, et certaines autres classes également caractérisés par deux vecteurs de Killing, tous deux orientés dans l'espace cette fois, existent des « correspondances ». Ainsi de la forme de métrique (1.1) passe-t-on à

$$ds^2 = f^{-1}e^{2\gamma}(d\tilde{t}^2 - d\rho^2) - f^2(d\tilde{z}^2 + \tilde{\omega}d\varphi)^2 - f^{-1}\rho^2 d\varphi^2,$$

susceptible de décrire un certain type d'ondes gravitationnelles cylindriques, en vertu de la « correspondance » suivante [*12*] :

$$t \leftrightarrow i\tilde{z} \quad , \quad z \leftrightarrow i\tilde{t} \quad , \quad \omega \leftrightarrow i\tilde{\omega}.$$

De ce fait, il résulte que l'on peut déduire de toute solution valable dans un contexte, une solution valable dans l'autre; il convient cependant de s'assurer de la réalité des résultats. Cette procédure vaut encore dans le cas d'Einstein-Maxwell [*20*].

— Pour terminer, indiquons que des solutions des équations d'Einstein impliquant certaines transcendantes de Painlevé ont déjà été obtenues par Marek [*22*] et Chitre [*23*] dans d'autres contextes.

[L'un de nous, G. Marcilhacy, a bénéficié de l'aide de la DRET-CETAEDEC].

RÉFÉRENCES

[*1*] T. LEWIS, *Proc. Roy. Soc.* (London) A **136**, 1932, p. 176.
[*2*] A. PAPAPETROU, *Ann. Phys.*, t. **12** (6), 1953, p. 309; *C. R. Acad. Sc.*, t. **258**, 1964, p. 90.
[*3*] R. P. KERR, *Phys. Rev. Lett.*, t. **11**, 1963, p. 237.
[*4*] Voir, par exemple, *Les Astres Occlus. Black holes*, Les Houches, 1972, edited by C. de Witt et B. de Witt, Gordon & Breach, 1973.
[*5*] A. TOMIMATSU and H. SATO, *Phys. Rev. Lett.*, t. **29**, 1972, p. 1344; *Prog. Theor. Phys.* (Kyoto), t. **50**, 1973, p. 95.
[*6*] M. YAMAZUKI, *The Sc. Rep. Kanazawa Univ.*, t. **21**, 1976, p. 131 ; M. YAMAZUKI and S. HORI, *Prog. Theor. Phys.*, t. **57**, 1977, p. 696.
[*7*] C. M. COSGROVE, *J. Phys. A : Math. Gen.*, t. **10**, 1977, p. 1481, 2093.
[*8*] P. PAINLEVÉ, *Acta Math.*, t. **25**, 1902, p. 1 ; B. GAMBIER, *Acta Math.*, t. **33**, 1909, p. 1.
[*9*] B. E. INCE, *Ordinary Differential Equations*, p. 317, Dover publication (N.Y., 1956).

[*10*] R. GARNIER, *J. de Math. Pures et Appl.*, t. **46**, 1967, p. 353.
[*11*] F. J. ERNST, *Phys. Rev.*, t. **167**, 1968, p. 1175.
[*12*] W. KINNERSLEY, Recent Progress in Exact Solutions dans *Proc. of the Seventh International Conference on General Relativity and Gravitation*, ed. by G. Shaviv avd J. Rosen (Wiley, N. Y., 1975).
[*13*] W. KINNERSLEY, *J. Math Phys.*, t. **14**, 1973, p. 651; t. **18**, 1977, p. 1529, 1538.
[*14*] A. BARONE, F. EXPOSITO, C. J. MAGIE and A. C. SCOTT, *Riv. Nuo. Cim.*, t. **1**, 1971 p. 227.
[*15*] A. C. SCOTT, F. Y. CHU, D. W. MCLAUGHLIN, *Proc. I. E. E. E.*, t. **61**, 1973, p. 1443.
[*16*] G. GRELLA, M. MARINARO, *Lett. al Nuov. Cim.*, t. **23**, (12), 1978, p. 459.
[*17*] D. MAISON, *Phys. Rev. Lett.*, **41** (8), 1978, p. 521 ; *J. Math. Phys.*, t. **20** (5), 1979, p. 871.
[*18*] W. BONNOR, *Z. Phys.*, t. **190**, 1966, p. 444.
[*19*] B. LÉAUTÉ, G. MARCILHACY, *Lett. al Nuov. Cim.*, t. **26** (6), 1979, p. 185.
[*20*] G. MARCILHACY, *Phys. Letters*, **73A** (3), 1979, p. 157.
[*21*] J. MEINARDT, E. LEIBOWITZ, *J. Phys. A : Math. Gen.*, t. **11** (8), 1978, p. 1579 ; *Nuov. Cim.*, **48B** (1), 1978, p. 74.
[*22*] J. J. MAREK, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. **64**, 1968, p. 167.
[*23*] D. M. CHITRE, R. GUVEN and Y. NUKTU, *J. Math. Phys.*, t. **16** (3), 1975, p. 475.
[*24*] G. DARBOUX, *Lecons sur la théorie générale des surfaces*, ed. Gauthier-Villars, Paris, 1894. Nouvelle édition par Chelsea Publishing Company, New York, 1972.

(Manuscrit reçu le 26 juillet 1979)